

Dariusz TRAWICKI, Wioletta URBOWSKA
POLITECHNIKA GDAŃSKA, WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I AUTOMATYKI

Algorytmy hybrydowe optymalizacji w zastosowaniu do problemu sterowania systemami dystrybucji wody

Dr inż. Dariusz TRAWICKI

Urodził się w 1973r. w Gdańsku. W 1998r. ukończył studia na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej (kierunek: Automatyka i robotyka). W 2004 roku uzyskał stopień doktora nauk technicznych z dyscypliny Automatyka i Robotyka, temat pracy: „Struktury i algorytmy wspomaganie decyzji i sterowania w systemach produkcji dystrybucji wody SpiDWO”. Zainteresowania badawcze: optymalizacja w złożonych systemach dynamicznych, sztuczna inteligencja, modelowanie matematyczne.

e-mail: d.trawicki@ely.pg.gda.pl



Mgr inż. Wioletta URBOWSKA

Studentka I roku Studium Doktoranckiego na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, katedra Automatyki. Zdobyte tytuły naukowe: mgr inż. po kierunku Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej oraz mgr psychologii po kierunku Psychologia na Wydziale Nauk Społecznych Uniwersytetu Gdańskiego.

e-mail: wurbowska@tlen.pl



Streszczenie

W pracy analizowany jest problem optymalizującego zintegrowanego sterowania ilością i jakością w systemach dystrybucji wody. Proponowane decyzje i sterowania powinny zapewniać optymalizację przyjętego wskaźnika jakości, przy spełnieniu ograniczeń właściwych tej klasie systemów. Ostatecznie do rozwiązania złożonych zadań optymalizacji dynamicznej zaproponowane zostało podejście hybrydowe, wspomagające predyktoryjne algorytmy sterowania i wykorzystujące zalety analizowanych w pracy algorytmów: algorytmu bazującego na metodzie podziałów i ograniczeń oraz algorytmów genetycznych.

Słowa kluczowe: systemy dystrybucji wody, zintegrowane sterowanie ilością i jakością, sterowanie optymalne, hierarchiczna struktura sterowania, sterowanie predyktoryjne, algorytmy genetyczne, programowanie całkowitoliczbowe.

Hybrid optimization algorithm for control of water distribution systems

Abstract

In this paper an approach to optimizing integrated control of quantity and quality in water distribution systems is presented. The optimizing integrated control meets consumer demand for drinking-quality water and maintains constraints while minimizing the operating costs. In predictive control 24 hours demand prediction and mathematical model of the water distribution system is used. The structure of basic control consists of two layers. To optimizing control at the upper layer hybrid algorithm is used. This algorithm is a combination of branch and bound algorithm and genetic algorithm, presented as well in this paper.

Keywords: water distribution systems, integrated water quantity and quality, optimal control, hierarchical control structure, predictive control, genetic algorithms, mixed-integer programming.

1. Wprowadzenie

W sterowaniu systemami dystrybucji wody (SDW) wyróżnić można dwa aspekty: sterowanie ilością (procesami hydrauliki) i jakością wody. Sterowanie ilością polega na wyznaczeniu odpowiednich trajektorii pracy pomp i ustawień zaworów, tak, aby zapewnić spełnienie wymagań nałożonych na procesy hydrauliki (odpowiednie ciśnienia w węzłach, przepływy w rurociągach, pokrycie zapotrzebowania odbiorców na wodę). Sterowanie jakością polega natomiast na utrzymywaniu w wodzie odpowiedniego stężenia parametrów odpowiedzialnych za jej jakość. W niniejszej pracy sterowanie jakością sprowadza się do wyznaczenia trajektorii dozowania środka dezynfekującego (chlору) w taki sposób, aby jego stężenie w punktach monitorowania utrzymywane było w zadanych granicach.

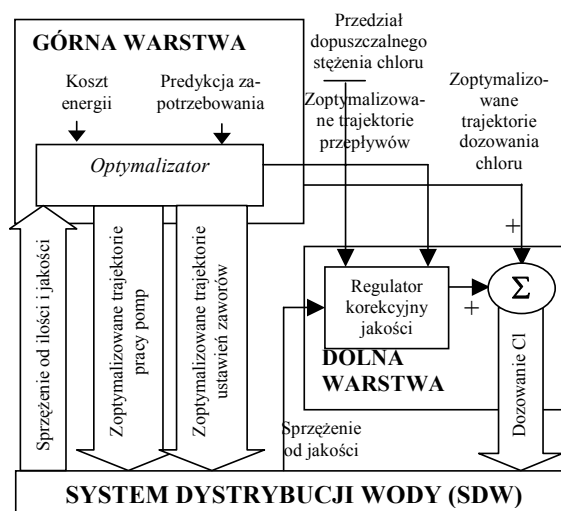
Optymalizujące sterowanie SDW napotyka na wiele trudności, wynikających głównie ze złożoności analizowanych systemów.

Część z nich pojawia się przy próbie stworzenia modelu systemu wykorzystywanego do celów sterowania - oprócz problemów związanych z jego kalibracją należy również zdecydować się na pewien kompromis między jego dokładnością a funkcjonalnością. Inne trudności związane są np. z interakcją, jaka zachodzi pomiędzy procesami hydrauliki i jakości, z różnicą w dynamice tych procesów, nieliniowością pojawiającą się w zależnościach je opisujących, itd.

Część z tych problemów można rozwiązać, stosując podejście zintegrowanego sterowania ilością i jakością wody [1, 2] z wykorzystaniem hierarchicznej struktury sterowania [3]. Jednym z najbardziej efektywnych podejść do konstrukcji algorytmów sterowania wydaje się podejście hybrydowe [4].

2. Hierarchiczna struktura sterowania

Zastosowana w pracy hierarchiczna struktura sterowania, przedstawiona na rys. 1, składa się z dwóch warstw [3]. Wykorzystanie dwuwarstwowej struktury sterowania umożliwia rozwiązanie problemu związanego z doбором kroku dyskretyzacji, który dla procesów jakościowych powinien być mniejszy niż dla procesów ilościowych. W górnej warstwie rozwiązywane są zadania optymalizacji dynamicznej, uwzględniające zintegrowane sterowanie ilością i jakością wody, z częstością wynikającą z kroku dyskretyzacji odpowiedniego dla procesów ilościowych.



Rys. 1. Hierarchiczna dwuwarstwowa struktura optymalizującego zintegrowanego sterowania ilością i jakością w SDW

Fig. 1. Hierarchical two-layer structure for optimizing integrated control of quantity and quality in WDS

Umożliwia to zmniejszenie wymiaru problemu optymalizacji rozwiązywanego w tej warstwie, jednak prowadzić może również do naruszenia ograniczeń nałożonych na jakość wody w systemie. Konieczna jest więc korekta uzyskanego w ten sposób sterowania jakością wody, która dokonywana jest w dolnej warstwie struktury.

Górna warstwa realizuje sterowanie w oparciu o ideę sterowania predykcyjnego. Do regulatora w tej warstwie przesyłana jest taryfa opłat za energię elektryczną, predykcja zapotrzebowania na wodę oraz informacja na temat stanu ilości i jakości w systemie, uzyskana w wyniku pomiarów i/lub wyestymowana na początku przyjętego 24-godzinnego horyzontu sterowania. Korzystając z powyższych informacji, optymalizator w górnej warstwie rozwiązuje problem optymalizacji ilości i jakości, generując w efekcie zoptymalizowane trajektorie pracy pomp i ustawień zaworów oraz trajektorie dozowania chloru na najbliższe 24 godziny. Uzyskane w ten sposób trajektorie wykorzystywane są do sterowania systemem przez okres czasu równy długości jednego kroku sterowania, np. przez 2 h, tak więc tylko 2 h z wygenerowanych 24-godzinnych trajektorii zostaną wykorzystane. Dodatkowo, do regulatora w dolnej warstwie przesyłana jest informacja dotycząca stanu jakości, mierzonego w systemie z częstotliwością wynikającą z przyjętego kroku jakości. Na podstawie tej informacji dokonywana jest korekta zoptymalizowanej trajektorii dozowania chloru uzyskanej w warstwie górnej. Opisany cykl powtarzany jest wielokrotnie aż do końca przyjętego horyzontu sterowania.

Uzyskane w ten sposób sterowanie hydraulicznie zapewniają spełnienie ograniczeń nałożonych na procesy ilościowe, zachodzące w SDW. Natomiast w przypadku procesy jakościowych, uzyskane sterowanie spełniają ograniczenia narzucone dla modelu jakości wykorzystywanego w górnej warstwie sterowania. Jednak ze względu na znaczne uproszczenia przyjętego w tej warstwie modelu, ograniczenia nałożone na jakość wody w rzeczywistym SDW mogą zostać naruszone. W związku z tym konieczna jest korekta sterowania jakością, która przeprowadzana jest w dolnej warstwie sterowania w oparciu o pomiary jakości wody w rzeczywistym systemie dokonywane z częstotliwością wynikającą z przyjętego kroku dyskretyzacji jakości.

3. Sformułowanie problemu optymalizacji

3.1. Funkcja celu

Problem optymalizującego zintegrowanego sterowania (POZS), rozwiązywany w górnej warstwie struktury sterowania, polega na minimalizacji przyjętej funkcji jakości J , która dla zintegrowanego sterowania ilością i jakością wody składać się będzie z dwóch składników: kosztów operacyjnych J_O oraz wskaźnika jakości wody w systemie J_Q :

$$J = J_O + J_Q. \quad (1)$$

Koszty operacyjne J_O wyrazić można jako sumę czterech podstawowych składników: kosztów wydobywania wody surowej J_W , kosztów pompowania wody (sprowadzających się do kosztów energii elektrycznej) J_P , kosztów uzdatniania (oczyszczania) wody J_U oraz kosztu dozowanego w sieci dezynfekanta (w tym wypadku chloru) J_C :

$$J_O = J_W + J_P + J_U + J_C. \quad (2)$$

W SDW koszty operacyjne redukują się do dwóch składników: kosztów pompowania J_P i kosztu chloru J_C , przy czym koszt chloru, w porównaniu do kosztów pompowania, jest pomijalny. Całkowite koszty operacyjne można więc rozpatrywać jako J_P i wyrazić zależnością:

$$J_O = J_P = \sum_{k=1}^{T/\Delta t_h} \gamma(k) \Delta t_h \sum_{i=1}^{n_p} p(i), \quad (3)$$

gdzie T jest przyjętym horyzontem sterowania, Δt_h to krok dyskretyzacji dla procesów ilościowych, $\gamma(k)$ jest jednostkową ceną

energii elektrycznej w kroku k , n_p to ilość stacji pomp zaś $p(i)$ oznacza zużycie energii elektrycznej przez wybraną stację.

Wskaźnik jakości J_Q można przedstawić jako:

$$J_Q = \sum_{i=1}^{N_{mon}} \sum_{m=1}^{T/\Delta t_c} |c_{ref} - c_i(m)|, \quad (4)$$

gdzie c_{ref} jest przyjętą wartością pożądanego, zaś c_i - rzeczywistego stężenia chloru w węzle monitorowanym ($1, \dots, N_{mon}$), a Δt_c to krok dyskretyzacji jakości.

3.2. Ograniczenia

Całkowite koszty operacyjne zapisać można jako: $\mathbf{h}(k) \in \mathbf{H}_k$, $\mathbf{q}(k) \in \mathbf{Q}_k$, $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{Y}_k$, $\mathbf{c}(m) \in \mathbf{C}_m$, gdzie: $k = 1, \dots, T/\Delta t_h$; $m = 1, \dots, T/\Delta t_c$; \mathbf{H} , \mathbf{Q} , \mathbf{Y} i \mathbf{C} są ograniczeniami nałożonymi odpowiednio na wartości ciśnień w węzłach \mathbf{h} , przepływów w rurociągach \mathbf{q} , poziomów w zbiornikach \mathbf{y} oraz stężeń chloru \mathbf{c} w węzłach monitorowanych.

W związku z dynamiką pojawiającą się zarówno w części dotyczącej ilości, jak i jakości wody w SDW, sformułowany POZS jest problemem optymalizacji dynamicznej. W jego matematycznym sformułowaniu zapis pojawiają się zależności nieliniowe, będące zapisem przyjętej funkcji celu oraz ograniczeń operacyjnych. Oprócz zmiennych przyjmujących wartości rzeczywiste, w zależnościach tych pojawiać się również mogą zmienne całkowitoliczbowe. Rozwiązanie tak sformułowanego problemu optymalizacji wymaga zastosowania złożonych algorytmów. Do rozwiązania POZS w tej pracy zaproponowane zostały następujące algorytmy: algorytm bazujący na metodzie podziałów i ograniczeń (ang. *branch and bound method*) [5], określany dalej w skrócie jako POA, algorytmy genetyczne (AG) oraz algorytm hybrydowy, będący połączeniem obu wspomnianych metod.

4. Propozycja algorytmów optymalizacji

4.1. Algorytm bazujący na metodzie podziałów i ograniczeń (POA)

W tym podejściu wykorzystana została zdyskretyzowana forma POZS [2]. Sformułowany problem optymalizacji jest problemem nieliniowym o zmiennych mieszanych (ciągłych i całkowitoliczbowych). Aproksymacja pojawiających się w nim zależności nieliniowych została dokonana przy użyciu metody linearyzacji wieloodcinkowej (ang. *piecewise linearization*) z wykorzystaniem zmiennych typu SOS2. W ten sposób oryginalny problem POZS został aproksymowany przez problem MIL (ang. *mixed-integer linear*). Rozwiązanie tego typu problemów napotyka na trudności, wynikające z dużego wymiaru problemu nawet dla systemów średniej wielkości. W związku z tym poszukiwanie optymalizujących sterowań przez POA w tej pracy ograniczone zostało jedynie do części hydraulicznej POZS (funkcja celu uległa zatem redukcji do postaci (3)). Uzyskane rozwiązanie wykorzystane zostało do wzbogacenia populacji początkowej AG, gdzie rozwiązywany był już problem zintegrowanego optymalizującego sterowania ilością i jakością wody. Do rozwiązania problemu MIL wykorzystano dostępny w środowisku GAMS optymalizator Cplex, bazujący na metodzie podziałów i ograniczeń w wersji dyskretnej [5].

4.2. Algorytmy genetyczne (AG)

W tym podejściu rozwiązywany jest problem zintegrowanego optymalizującego sterowania ilością i jakością. Optymalizowana funkcja celu ma postać (1). Stopień spełnienia ograniczeń sprawdzano przy użyciu symulatora i na tej podstawie dokonywana była ewaluacja funkcji celu. Pozwoliło to na eliminację zmiennych niedecyzyjnych w sformułowaniu problemu.

Selekcję osobników do kolejnej generacji dokonywano na pod-

stawie wartości ich funkcji przystosowania. W przypadku osobników niedopuszczalnych wartość ta ustalana była w zależności od stopnia naruszenia ograniczeń. W tej pracy wykorzystywano dwie metody selekcji: *stochastic universal sampling* oraz *constraint handling method* [6]. Algorytmy genetyczne, w których zaimplementowano te metody, są dalej oznaczane odpowiednio jako *standardowy AG* oraz *zmodyfikowany AG*. Do implementacji AG wykorzystano środowisko MATLAB, zaś jako symulatora użyto pakietu EPANET.

4.3. Algorytm hybrydowy

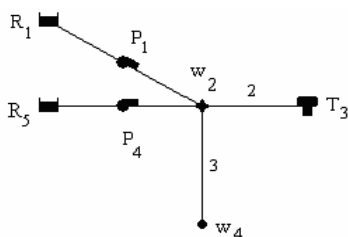
Oba przedstawione wyżej podejścia mają swoje wady i zalety. Główną zaletą, jaką oferuje POA, jest możliwość uzyskania globalnego optimum. Wadą natomiast jest to, że MIL jest jedynie aproksymacją oryginalnego problemu optymalizacji. Jego sformułowanie wymaga użycia zarówno zmiennych decyzyjnych, jak i niedecyzyjnych, przez co wymiar problemu jest bardzo duży nawet dla niewielkich systemów. AG pozbawione są tej wady, z powodu wyeliminowania zmiennych niedecyzyjnych oraz możliwości wykorzystania symulatora. W ich przypadku trudność natomiast sprawia ocena stopnia zbliżenia uzyskanego rozwiązania do globalnego optimum oraz określenie kryteriów zatrzymania działania algorytmu.

Podejście hybrydowe jest próbą połączenia zalet obu wymienionych metod. Cały cykl obliczeniowy rozpoczyna się od dokonania zgrubej linearyzacji hydraulicznej części problemu i wykorzystania POA do jego rozwiązania. Uzyskany wynik przekazywany jest do AG w celu wzbogacenia jego populacji początkowej. AG poszukuje rozwiązania zarówno dla hydrauliki, jak i jakości. Początkowo rozwiązanie uzyskane przy pomocy AG miało być przekazywane z powrotem do POA i opisany cykl miał być powtarzany wielokrotnie, aż do uzyskania zadowolających wyników. Jednak ulepszenie rozwiązania uzyskanego przy pomocy POA byłoby możliwe jedynie po przeprowadzeniu za każdym razem dokładniejszej linearyzacji. Wiązałoby się to z dodaniem nowych zmiennych, co w efekcie powodowałoby wzrost wymiaru problemu MIL. W trakcie badań okazało się, że dokonanie dokładniejszej linearyzacji nie przynosiło znaczącej poprawy rozwiązania uzyskanego przy pomocy POA, natomiast czas wykonywania obliczeń przez POA wzrastał dwukrotnie. W związku z tym zrezygnowano z idei cyklicznego przełączania algorytmów, porzeczając na jednokrotnym przekazywaniu wyników z POA do AG.

5. Zastosowanie przedstawionych algorytmów do wybranego SDW

5.1. Analizowany SDW

Analizowany SDW (rys. 2) składa się z 1 zbiornika, 2 rurociągów i 2 węzłów połączeniowych. Woda z każdego z 2 rezerwaruarów pompowana jest przez stację pomp wyposażoną w 1 pompę. P_1 to pompa stałoprędkościowa, sterowana jedynie przez włączenie lub wyłączenie, zaś prędkość względna pompy zmiennoprędkościowej P_4 może się zmieniać w zakresie od 0.75 do 1.



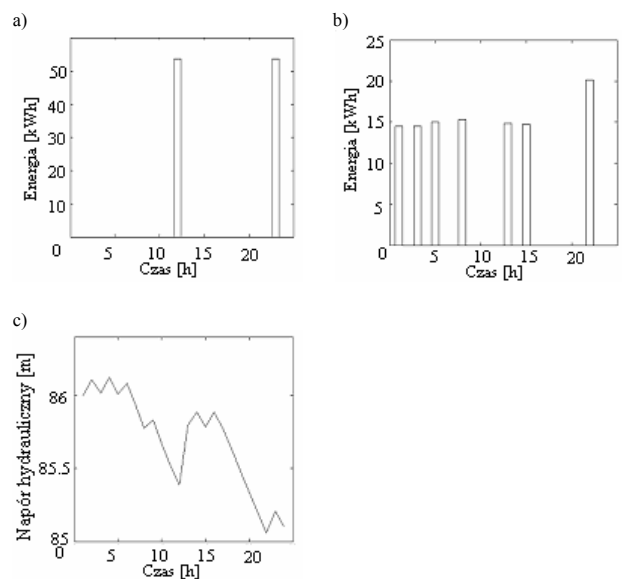
Rys. 2. Struktura sieci
Fig. 2. The network structure

Przyjęto, że pobór wody skupiony jest w węźle w_4 , który jednocześnie jest węzłem monitorowanym. Dopuszczalne stężenie chloru w tym węźle wynosi 0.1 - 0.3 mg/l. Przyjęto, że predykcja zapotrzebowania na wodę na przyjętym horyzoncie sterowania jest znana.

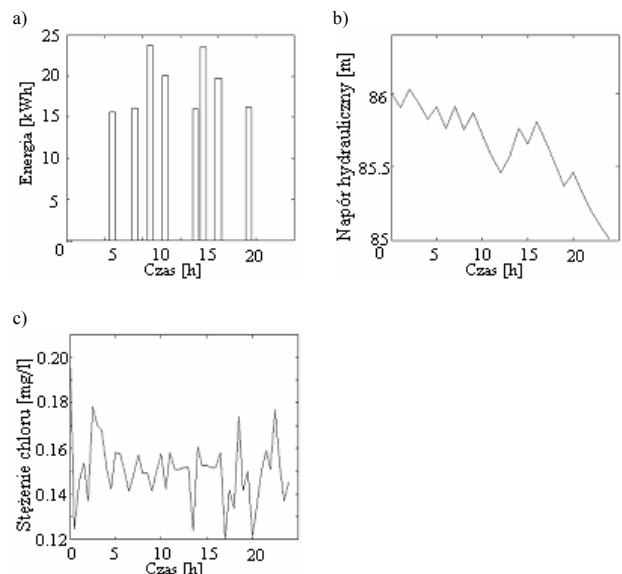
5.2. Uzyskane wyniki

Obliczenia wykonane zostały na PC wyposażonym w procesor 1.46 GHz i 512 MB pamięci RAM, przy wykorzystaniu następujących wersji programów: GAMS IDE 2.0.10.0, MATLAB 6.5 oraz EPANET 2.0.

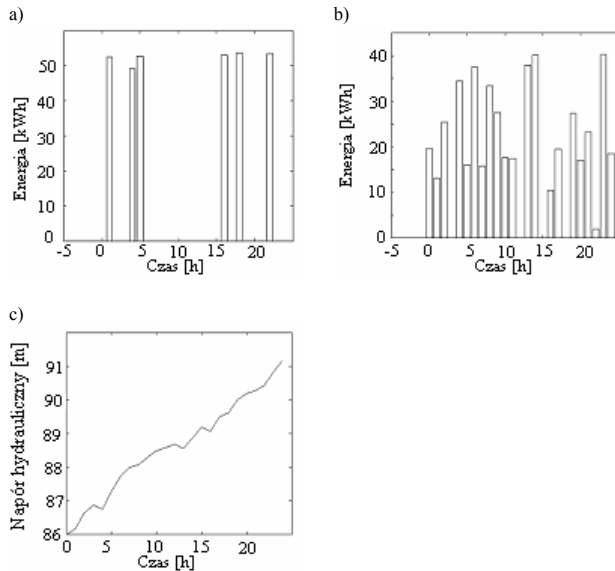
Wyniki uzyskane przy pomocy każdego z wymienionych algorytmów prezentowane są oddzielnie - dla POA przedstawione są na rys. 3, dla standardowego AG na rys. 4, dla zmodyfikowanego AG na rys. 5 oraz dla algorytmu hybrydowego na rys. 6.



Rys. 3. Wyniki uzyskane przy użyciu POA: a) zużycie energii przez pompę 4, b) zużycie energii przez pompę 1, c) poziom w zbiorniku 3
Fig. 3. The results obtained by using BBA: a) electricity power consumption for pump 4, b) electricity power consumption for pump 1, c) level in tank 3

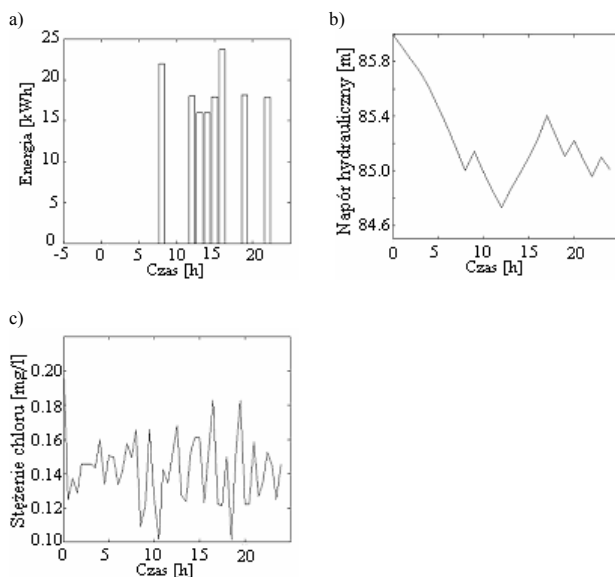


Rys. 4. Wyniki uzyskane przy użyciu standardowego AG: a) zużycie energii przez pompę 1, b) poziom w zbiorniku 3, c) stężenie chloru w węźle monitorowanym
Fig. 4. The results obtained by using standard GA: a) electricity power consumption for pump 1, b) level in tank 3, c) chlorine concentration in monitored node



Rys. 5. Wyniki uzyskane przy użyciu zmodyfikowanego AG: a) zużycie energii przez pompę 4, b) zużycie energii przez pompę 1, c) poziom w zbiorniku 3

Fig. 5. The results obtained by using modified GA: a) electricity power consumption for pump 4, b) electricity power consumption for pump 1, c) level in tank 3



Rys. 6. Wyniki uzyskane przy użyciu algorytmu hybrydowego: a) zużycie energii przez pompę 1, b) poziom w zbiorniku 3, c) stężenie chloru w węźle monitorowanym

Fig. 6. The results obtained by using hybrid algorithm: a) electricity power consumption for pump 1, b) level in tank 3, c) chlorine concentration in monitored node

Pompy załączane były głównie w tych okresach, w których ceny energii były niskie (czyli w godzinach 11:00 - 16:00 oraz 21:00 - 8:00) (por. rys. 3a), b), 4a), 5a), b), oraz 6a)). W pozostałych okresach pompy były wyłączone, a zapotrzebowanie odbiorców na wodę pokrywane było z zapasów zgromadzonych w zbiorniku, co zaobserwować można na rys. 3c), 4b), 5c) oraz 6b)). We wszystkich prezentowanych przypadkach różnica między poziomem wody w zbiorniku na koniec przyjętego horyzontu sterowania a poziomem początkowym nie przekraczała założonej maksymalnej wartości. Stężenie chloru w węźle monitorowanym mieściło się w zadanych granicach i oscylowało wokół przyjętej wartości odniesienia, co widać na rys. 4c) oraz 6c)).

Wszystkie wersje AG oraz algorytmu hybrydowego testowane były dla liczby generacji równej 500, liczby osobników równej 40, kroku dyskretyzacji równego 3600 s dla procesów ilościowych oraz 1800 s dla jakości oraz wartości odniesienia dla stężenia

chloru w węźle monitorowanym równej 0.15 mg/l. Aby zmniejszyć element niepewności związany z tym, że AG startują z losowych warunków początkowych, każda z testowanych wersji AG oraz algorytmu hybrydowego uruchamiana była dziesięciokrotnie. Algorytmy genetyczne testowane były dla różnych wartości wag hydrauliki i jakości w funkcji celu. Okazało się, że zwiększanie wagi hydrauliki kosztem wagi jakości skutkowało znalezieniem rozwiązań lepszych pod względem wartości funkcji celu, ale większa liczba przeprowadzonych uruchomień algorytmu zakończyła się bez znalezienia rozwiązań dopuszczalnych. Kompromis pomiędzy wartością funkcji celu oraz liczbą uruchomień zakończonych znalezieniem rozwiązań dopuszczalnych udało się osiągnąć dla wartości wagi równej 0.8 dla hydrauliki i 0.2 dla jakości.

W zmodyfikowanym AG testowany był również wpływ różnych wartości parametru mutacji p_m . Przy stosowaniu *constraint handling method* jako metody selekcji zalecane jest przyjmowanie stosunkowo dużych wartości p_m [6]. W obecnej pracy zastosowano dynamiczną zmianę p_m w zależności od stopnia przystosowania danego osobnika. Najlepsze wyniki udało się osiągnąć, gdy osobnikom o przystosowaniu mniejszym od średniego przystosowania w populacji przypisano wartość p_m równą 0.5, zaś pozostałym - wartość 0.002. Ciekawym pomysłem, który można przetestować w dalszych badaniach, wydaje się nadawanie wartości p_m proporcjonalnie do różnicy przystosowania danego osobnika i średniego przystosowania w populacji. Przy rozwiązaniu zastosowanym w tej pracy, zmodyfikowany AG okazał się mniej efektywny od standardowego AG, dlatego do budowy algorytmu hybrydowego wykorzystano standardowy AG.

6. Wnioski końcowe

W pracy zaproponowane zostało podejście do optymalizującego zintegrowanego sterowania ilością i jakością wody w rozpatrywanym przykładowym SDW z wykorzystaniem skonstruowanego w tym celu algorytmu hybrydowego, będącego próbą połączenia zalet algorytmów wchodzących w jego skład: POA oraz AG. Uzyskane wyniki porównane zostały z wynikami uzyskanymi przy pomocy samych AG. Przeprowadzone badania wskazują na to, że algorytm hybrydowy zgodnie z przewidywaniami zdołał poprawić wynik uzyskany przy pomocy samego AG dzięki wykorzystaniu informacji uzyskanych w wyniku działania POA. W pracy zaprezentowane zostały wyniki uzyskane przy zastosowaniu tu podejścia do dynamicznej zmiany wartości p_m oraz zaproponowano podejście alternatywne. Testowanie efektywności proponowanych algorytmów odbywało się przy założeniu znanej predykcji zapotrzebowania na wodę. W dalszych badaniach interesujące byłoby przetestowanie ich efektywności w przypadku zmian zapotrzebowania, przy wykorzystaniu predykcyjnego sterowania repetycyjnego.

7. Literatura

- [1] M.A. Brdys, B. Ulanicki: Operational Control of Water Systems: Structures, Algorithms and Applications. Prentice Hall, 1994.
- [2] M.A. Brdys, H. Puta, E. Arnold, K. Chen, S. Hopfgarten: Operational control of integrated quality and quantity in water systems. In: Proc. of the IFAC/IFORMS/IMACS Symposium on Large Scale Systems. Vol. 2, pp. 715-719, London 1995.
- [3] M.A. Brdys, T. Chang, K. Duzinkiewicz W. Chotkowski: Hierarchical control of integrated quality and quantity in water distribution systems. Proc. of the A.S.C.E., 2000.
- [4] D. Trawicki, K. Duzinkiewicz M.A. Brdys: Hybrid GA-MIL algorithm for optimisation of integrated quality and quantity in water distribution systems. Proc. of the A.S.C.E., 2003.
- [5] J. Seidler, A. Badach, W. Molisz: Metody rozwiązywania zadań optymalizacji. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
- [6] K. Deb: An efficient constraint handling method for genetic algorithms. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 186, pp. 311-338, 2000.