

**Krystyna RUDZIŃSKA, Henryk KORMAŃSKI**POLITECHNIKA GDAŃSKA, WYDZIAŁ ELEKTRONIKI, TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI,  
KATEDRA SYSTEMÓW DECYZYJNYCH**Iteracyjny algorytm wyznaczania sterowania optymalnego dla systemów dynamicznych**

Dr inż. Krystyna RUDZIŃSKA

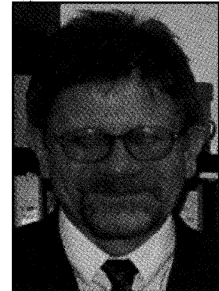
Ukończyła studia na Wydziale Elektroniki Politechniki Gdańskiej w 1977 r. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskała na Wydziale Budowy Maszyn tej samej uczelni w roku 1989. Od roku 1977 pracuje na Politechnice Gdańskiej, obecnie w Katedrze Systemów Decyzyjnych. Zajmuje się problemami programowania matematycznego, optymalizacji i sterowania procesami, w szczególności w dziedzinie pojazdów i robotów mobilnych. W tym zakresie od 20 lat współpracuje z uniwersytetami włoskimi.



e-mail: korman@eti.pg.gda.pl

Dr inż. Henryk KORMAŃSKI

Ukończył studia na Wydziale Elektroniki Politechniki Gdańskiej w 1977 r. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał na Wydziale Budowy Maszyn tej samej uczelni w roku 1984. Od roku 1977 pracuje na Politechnice Gdańskiej, obecnie w Katedrze Systemów Decyzyjnych. Zajmuje się metodami optymalizacji w projektowaniu systemów i automatyzacją procesów technologicznych. W dziedzinie optymalnego projektowania silników cieplnych współpracuje z uniwersytetami włoskimi.



e-mail: korman@eti.pg.gda.pl

**Streszczenie**

Artykuł prezentuje iteracyjną metodę wyznaczania sterowania optymalnego dla systemów dynamicznych ciągłych i dyskretnych w czasie. Celem sterowania jest minimalizacja funkcjonału kosztu (wskaźnika jakości) przy narzuconych ograniczeniach w postaci równań różniczkowych lub różnicowych, warunków brzegowych oraz algebraicznych zależności w postaci równań lub nierówności wiążących ze sobą optymalne funkcje sterujące  $u(t)$  i funkcje wektora stanu  $x(t)$ . W pracy zaproponowano iteracyjną metodę obliczeniową opartą na parametryzacji funkcji sterujących na bazie funkcji sklepanych, wprowadzeniu przesuwanego funkcjonału kary do wskaźnika jakości oraz wyznaczaniu kolejnego przybliżenia funkcji sterujących w oparciu o gradientowe algorytmy kierunków sprzężonych. Metodę zilustrowano dwoma przykładami z dziedziny transportu dotyczącymi sterowania autobusem miejskim między przystankami i stawiających za cel poprawienie płynności jazdy (komfortu pasażera) lub minimalizację zużycia paliwa.

**Słowa kluczowe:** sterowanie optymalne, systemy dynamiczne.**Numerical calculation of optimal control for dynamic systems****Abstract**

The paper presents a sequential method of optimal control calculation for continuous and discrete time dynamic systems. The aim of the procedure is minimization of a cost functional (performance index). Control functions are subject to constraints defined by set of differential (or difference) equations, initial conditions and set of algebraic equalities and/or inequalities describing relationships among control and state variables. The method described is based on control parameterization by spline function approximation, consideration algebraic constraints by addition the shifted penalty functional to the performance index as well as application of nonlinear programming algorithms to the process of solution improving. The gradient procedures based on conjugate directions turned out especially effective. The method was illustrated by two practical problems from urban transport domain. The purpose of the optimization was to improve passenger comfort and to minimize bus fuel consumption.

**Keywords:** optimal control, dynamic systems.**1. Wprowadzenie**

Projektowanie inżynierskie polega na doborze najlepszych, wg wybranych kryteriów, parametrów konstrukcyjnych i funkcji sterujących, wpływających na ekonomiczno-fizyczne charakterystyki systemu. Teoria sterowania optymalnego (TSO) jest jednym z istotnych narzędzi w tym procesie i znajduje szerokie zastosowanie w wielu dyscyplinach. Analityczne metody TSO i numeryczne algorytmy rozwijane są zarówno dla systemów dynamicznych ciągłych (opisanych równaniami różniczkowymi) jak i dyskretnych (opisanych równaniami różnicowymi). Celem procedur obliczeniowych jest wyznaczenie wektora sterowań  $u^*(\cdot)$  takiego,

by ekstremalizował wybrany wskaźnik jakości  $J(u^*(\cdot))$ , przy uwzględnieniu ograniczeń nałożonych na optymalizowany obiekt. W systemach dynamicznych zmienne  $u$  są funkcjami czasu, wymiarów przestrzennych lub zmiennych stanu  $x$  badanego układu. Ograniczenia są formułowane w postaci równań lub nierówności uwzględniających zależności algebraiczne i całkowite między wektorem sterowania  $u$  a wektorem stanu  $x$ .

W przypadku gdy struktura sterowania jest ustalona, lub system znajduje się w stanie ustalonym ( $u = \text{const}$ ,  $x = \text{const}$ ), problem sterowania optymalnego upraszcza się do poszukiwania wektora parametrów  $z$ , czyli do problemu optymalizacji statycznej (OS) definiowanego następująco:

$$\min_{z \in R^n} s_0(z), \quad (1)$$

przy

$$s_i(z) \leq 0, \quad (2)$$

gdzie

$$s_i: R^n \rightarrow R \text{ dla } i=0,1,\dots,I,$$

Proste problemy OS mogą być rozwiązane metodami analitycznymi wykorzystującymi twierdzenie Kuhna-Tuckera i mnożniki Lagrange'a. Jednak większość praktycznych zagadnień wymaga użycia iteracyjnych procedur prowadzących od arbitralnie wybranego rozwiązania początkowego  $z^0$  do rozwiązań  $z^{(i)}$  coraz bliższych rozwiązaniu optymalnemu  $z^*$ . Algorytmy numeryczne OS są udoskonalane od lat, zwłaszcza odkad projektowanie wspomaganie komputerowo stało się powszechną praktyką. Obejmują one metody programowania liniowego (LP), kwadratowego (QP) czy nieliniowego (NLP). Spośród tych ostatnich wyróżniamy metody bezgradientowe proste (np. Hooka-Jeevesa, Rosenbrocka, Nelder-Meada), bezgradientowe z minimalizacją kierunkową (np. Gaussa-Seidela, Powella) oraz dużą grupę algorytmów gradientowych (w szczególności opartych na kierunkach sprzężonych lub aproksymacji hesjanu funkcji celu  $s_0(z)$  w tzw. metodach zmiennej metryki lub quasi-newtonowskich). Rozwinięto też szereg technik dla uwzględnienia ograniczeń (2) takich jak rzutowanie wektora poprawy, transformacja zmiennych czy wprowadzanie funkcji kary dla obszarów zabronionych ( $s_i(z) > 0$ ). Osobną grupę metod stanowią algorytmy genetyczne i ewolucyjne rozwijane w ramach dyscypliny „sztuczna inteligencja”. Szeroki przegląd metod OS możemy znaleźć w literaturze [1].

Zagadnienia optymalizacji dynamicznej (OD), polegające na wyznaczeniu optymalnego sterowania, są bez porównania bardziej złożone od problemów (1)-(2), a algorytmy OS mogą być wykorzystane do rozwiązania jedynie cząstkowych podproblemów OD. Większość opublikowanych metod wyznaczania sterowania optymalnego odnosi się do specyficznych zagadnień, nie

uwzględniających wielu kategorii ograniczeń występujących w praktyce inżynierskiej. Prezentowana w niniejszej pracy metoda obliczeniowa proponuje jednolite podejście dla szerokiej klasy problemów OD, uwzględniających zależności między wektorem  $\mathbf{u}(t)$  jak i  $\mathbf{x}(t)$  zarówno w postaci równań różniczkowych jak i nierówności algebraicznych.

## 2. Matematyczne sformułowanie problemu OD

Opracowana metoda OD umożliwia rozwiązanie następujących problemów optymalizacji dynamicznej ciągłej i dyskretniej:

A) Problem optymalnego sterowania dla ciągłych systemów dynamicznych:

Znaleźć wektor funkcji sterujących, przedziałami ciągłych,  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_M(t)]^T$  dla ustalonego przedziału czasowego  $\mathfrak{T} = [0; t_K]$ , a także odpowiadający mu wektor różniczkowalnych funkcji stanu  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$ , które minimalizują funkcjonal kosztu J:

$$J = h(\mathbf{x}(t_K)) + \int_0^{t_K} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (3)$$

i uwzględniają ograniczenia:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (4)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}^0, \quad (5)$$

$$r_p(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq R_p, \quad p = 1, \dots, P, \quad (6)$$

gdzie  $\dot{\mathbf{x}}_i(t)$  - oznacza pochodną funkcji  $x_i(t)$  względem czasu;

B) Problem optymalnego sterowania dla dyskretnych systemów dynamicznych:

Znaleźć wektor funkcji sterujących  $\mathbf{u}(k) = [u_1(k), \dots, u_M(k)]^T$  oraz odpowiadający mu wektor funkcji stanu  $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), \dots, x_N(k)]^T$  dla  $k \in \mathfrak{T} = \{0, \dots, K\}$ , które minimalizują funkcjonal kosztu J:

$$J = h(\mathbf{x}(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} f_0(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k), \quad (7)$$

i uwzględniają ograniczenia:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k), \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}^0, \quad (9)$$

$$r_p(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \leq R_p, \quad p = 1, \dots, P. \quad (10)$$

W obu typach zadań (3)-(6) i (7)-(10) przyjmujemy, że funkcje  $f_0: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{r}: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}^P$ ,  $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , są różniczkowalne względem swoich argumentów.

Klasyczne metody wyznaczania sterowania optymalnego wywodzą się z rachunku wariacyjnego i opierają się na sformułowaniu warunków koniecznych istnienia rozwiązania optymalnego [2]. Jednakże równania Eulera-Lagrange'a nie obejmują zagadnień z dodatkowymi ograniczeniami nierównościowymi (6) a twierdzenie Pontryagina uwzględnia ograniczenia nałożone na funkcje

sterujące  $\mathbf{u}(t)$ . Złożoność warunków koniecznych, a także istnienie zagadnienia dwugranicznego dla równań różniczkowych, przy uwzględnieniu warunków transwersalności dla trajektorii sprzężonej do  $\mathbf{x}(t)$ , powoduje że metody analityczne znalazły zastosowanie jedynie przy rozwiązywaniu stosunkowo prostych zadań, w szczególności do konstrukcji regulatorów dla liniowych układów dynamicznych i kwadratowych wskaźników jakości. Te same trudności napotykamy gdy podstawą obliczeń analitycznych jest równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana wywodzące się z koncepcji programowania dynamicznego (PD) [3]. Metoda ma praktyczne zastosowanie głównie przy dyskretyzacji wprowadzonej zarówno w dziedzinie czasu jak i przestrzeniach funkcyjnych  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{u}$ , o ile uzyskany w ten sposób stopień wielowymiarowości nie jest duży.

W następnym paragrafie przedstawiono algorytm iteracyjny, który umożliwia rozwiązanie problemów (3)-(6) i (7)-(10) w oparciu o następujące założenia:

a) Ograniczenia (6) lub (10) zostają uwzględnione poprzez włączenie funkcjonału kary do wskaźników jakości (3) lub (7) i minimalizację rozszerzonego funkcjonału  $\Psi$ ;

b) Funkcje sterujące w zadaniu (3)-(6) są reprezentowane przez kombinację liniową funkcji bazowych  $\varphi(t)$ :

$$u_m(t) = \sum_{l=1}^{L_\varphi} a_{ml} \varphi_l(t), \quad m = 1, \dots, M, \quad (11)$$

Jako funkcje bazowe wybrano funkcje sklejane 0-go, 1-go i 2-go rzędu [4], tzn. funkcje przedziałami wielomianowe.

## 3. Opis algorytmu OD

Koncepcja minimalizacji wskaźników jakości (3) lub (7) wywodzi się z metod bezpośrednich. W pętli zewnętrznej następuje sprawdzenie czy osiągnięto żądaną dokładność ograniczeń (7) lub (10) i modyfikacja funkcjonału kary. W pętli wewnętrznej rozwiązywane są zadania (3)-(5) lub (7)-(9), lecz pierwotne wskaźniki jakości (3) lub (7) są w niej zastąpione przez funkcjonały rozszerzone  $\Psi$ , zdefiniowane odpowiednio przez formuły (12) i (13). Do minimalizacji funkcjonałów  $\Psi$  wykorzystano zasadę minimum funkcji Hamiltona  $H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}, \bullet)$ , gdzie wektor funkcji  $\lambda(\bullet)$  jest sprzężony do  $\mathbf{x}$ . Równania różniczkowe sprzężone są rozwiązywane przy odwrotnym biegu czasu, gdyż z warunku transwersalności znana jest wartość  $\lambda(t_K)$  (lub  $\lambda(K)$ ) [2].

### 3.1. Pętla zewnętrzna

W pętli zewnętrznej funkcjonal kosztu jest modyfikowany do następującej postaci

– dla systemów ciągłych:

$$\Psi = \int_0^{t_K} \left\{ f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{p=1}^P \eta_p * [\max(0; r_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - w_p(t))]^2 \right\} dt + h(\mathbf{x}(t_K)) = h(\mathbf{x}(t_K)) + \int_0^{t_K} g_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (12)$$

– dla systemów dyskretnych:

$$\Psi = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k) + \sum_{p=1}^P \eta_p * [\max(0; r_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k) - w_p(k))]^2 \right\} + h(\mathbf{x}(K)) = h(\mathbf{x}(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} g_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k), \quad (13)$$

Warunki (4), (5) lub (8), (9) pozostają niezmiennione.

Funkcjonał kary dodany do pierwotnych wskaźników jakości charakteryzuje się dwiema zmiennymi, a mianowicie przesuwym wektorem funkcji progowej  $\mathbf{w}(\bullet)$  oraz wektorem współczynników kary  $\eta$ . Poczynając od pierwszego przybliżenia ( $w_p^0(t) = R_p = \text{const}$ ,  $\eta_p^0 > 1$ ,  $p = 1, \dots, P$ ) oba elementy są zmieniane aż wartość funkcjonalu kary jest mniejsza od dokładności  $\varepsilon_p$ , wartości wprowadzanej przez użytkownika. Zmiany wektorów  $\mathbf{w}(\bullet)$  oraz  $\eta$  zależą w poszczególnych iteracjach od stopnia przekroczenia zadanej dokładności  $\varepsilon_r$ . Jeżeli ograniczenia (6) lub (10) są nieznacznie przekroczone następuje modyfikacja jedynie funkcji progowej wg formuły:

$$w_p^{\text{new}}(\bullet) \leftarrow R_p - \max(0; r_p(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), \bullet) - w_p^{\text{old}}(\bullet)), \quad p = 1, \dots, P. \quad (14)$$

Jeżeli ograniczenia (6) lub (10) są silnie naruszone następuje modyfikacja obu wektorów:

$$\eta_p^{\text{new}} \leftarrow \alpha * \eta_p^{\text{old}}, \quad \alpha = 2 \div 10,$$

$$w_p^{\text{new}}(\bullet) \leftarrow R_p - \frac{1}{\alpha} \left\{ \max(0; r_p(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), \bullet) - w_p^{\text{old}}(\bullet)) \right\}, \quad p = 1, \dots, P. \quad (15)$$

### 3.2. Pętla wewnętrzna

Minimalizacja funkcjonalu rozszerzonego (12) lub (13) przeprowadzana jest dla ustalonych wektorów  $\mathbf{w}(\bullet)$  i  $\eta$ . Sterowanie (11) dla systemów ciągłych lub macierz  $[\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(K-1)]$  dla systemów dyskretnych jest najlepszym rozwiązaniem uzyskanym w poprzednich iteracjach pętli wewnętrznej. Obliczenia w pętli wewnętrznej wykonywane są w kolejnych krokach:

#### Krok 1

Rozwiązywane są równania stanu (4) lub (8) z uwzględnieniem warunków brzegowych (5) lub (9) i obliczany rozszerzony funkcjonal kosztu (12) lub (13). Do całkowania równań różniczkowych stosowana jest numeryczna metoda 4-tego rzędu Runge-Kutty-Gill'a [5].

#### Krok 2

Obliczane są funkcje wektora sprzężonego do  $\mathbf{x}$ :  $\lambda(\bullet) = [\lambda_1(\bullet), \dots, \lambda_N(\bullet)]^T$ , licząc wstecz zmiennej  $t$  lub  $k$  oraz rozpoczynając od wartości  $\lambda(t_K)$  lub  $\lambda(K)$  określonych przez warunki transwersalności. Przyjmując pomocniczą zmienną  $\tau = t_K - t$  rozwiążemy równania różniczkowe podobnie jak w Kroku 1:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_K - \tau), \mathbf{u}(t_K - \tau), t_K - \tau)}{\partial \mathbf{x}(t_K - \tau)} \right]^T \lambda(\tau) + \frac{\partial g_0(\mathbf{x}(t_K - \tau), \mathbf{u}(t_K - \tau), t_K - \tau)}{\partial \mathbf{x}(t_K - \tau)}, \quad (16)$$

gdzie

$$\tau \in [0; t_K], \quad \lambda|_{\tau=0} = \lambda(t_K) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(t_K))}{\partial \mathbf{x}},$$

lub dla systemów dyskretnych

$$\lambda(k-1) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)}{\partial \mathbf{x}(k)} \right]^T \lambda(k) - \frac{\partial g_0(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)}{\partial \mathbf{x}(k)}, \quad k = K, \dots, 1 \quad (17)$$

z warunkiem początkowym  $\lambda(K) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(K))}{\partial \mathbf{x}(K)}$

#### Krok 3

Wyznaczany jest gradient  $\nabla \Psi$  funkcjonalu rozszerzonego (12) lub (13) korzystając z funkcji Hamiltona:

$$H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}, \bullet) = g_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bullet) + \lambda^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bullet) * \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bullet), \quad (18)$$

– dla systemów ciągłych:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}_i} = \int_0^{t_k} \frac{\partial H(\mathbf{x}(t), \lambda(t), \mathbf{u}(\mathbf{a}, t), t)}{\partial \mathbf{u}(t)} \varphi_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, L, \quad (19)$$

$$\mathbf{a}_i = [a_{i1}, \dots, a_{Mi}]^T, \quad \nabla \Psi = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}_L} \right], \quad (20)$$

– dla systemów dyskretnych:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}(k)} = \frac{\partial H(\mathbf{x}(k), \lambda(k), \mathbf{u}(k), k)}{\partial \mathbf{u}(k)}, \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (21)$$

#### Krok 4

Obliczenia w pętli wewnętrznej są zakończone, jeżeli norma gradientu  $\|\nabla \Psi\| < \varepsilon_\Psi$ , gdzie  $\varepsilon_\Psi$  jest żądaną dokładnością minimalizacji.

#### Krok 5

Na podstawie bieżącego wektora gradientu (z Kroku 3) oraz wektora gradientu i kierunku poprawy obliczonych w poprzedniej iteracji wyznaczany jest bieżący kierunek poprawy  $\mathbf{d}$  macierzy współczynników  $\mathbf{a}_{M \times L}$  dla systemów ciągłych lub wektora  $\mathbf{u}_{M \times N}$  dla systemów dyskretnych. Mogą tu być użyte formuły Polaka-Ribierego lub Fletchera-Reevsa algorytmu gradientu sprzężonego OS [1] lub jedna z metod zmiennej metryki.

#### Krok 6

Stosując jedną z metod minimalizacji kierunkowej wyznaczamy długość kroku  $\gamma^*$  w kierunku  $\mathbf{d}$ :

$$\Psi(\mathbf{y} + \gamma^* \mathbf{d}) = \min_{\gamma > 0} (\Psi(\mathbf{y} + \gamma \mathbf{d})) \quad (22)$$

gdzie  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$  dla systemów ciągłych lub  $\mathbf{y} = \mathbf{u}$  dla systemów dyskretnych. Wartość  $\Psi$  obliczamy tak jak w Kroku 1.

#### Krok 7

Wyznaczamy nowe wartości sterowania:

$$\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{a} + \gamma^* \mathbf{d} \quad \text{dla systemów ciągłych}, \quad (23)$$

$$\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \gamma^* \mathbf{d} \quad \text{dla systemów dyskretnych}, \quad (24)$$

i wracamy do Kroku 1.

## 4. Zastosowanie algorytmu OD do sterowania autobusem

Iteracyjną metodę OD, przedstawioną w paragrafie trzecim, zastosowano do wyznaczenia sterowania optymalnego autobusu miejskiego, poruszającego się między przystankami na odcinku drogi  $[0; L]$ . Sformułowano dwa problemy OD w oparciu o uproszczony model dynamiki wzdłużnej pojazdu. W pierwszym

problemie celem sterowania jest podniesienie komfortu jazdy dla pasażerów (unikanie gwałtownych zmian prędkości), w drugim problemie – minimalizacja zużycia paliwa. W obu problemach przyjęto położenie i prędkość pojazdu jako zmienne stanu  $x$  oraz te same warunki brzegowe:

$$x_1 = V \text{ (prędkość)}, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(t_k) = 0;$$

$$x_2 = S \text{ (położenie)}, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(t_k) = L.$$

Założono również, że powyższe warunki końcowe  $x(t_k) = X_K$  zostaną uwzględnione poprzez dodanie funkcji  $h(x(t_k)) = C_L[x_1^2(t_k) + (x_2(t_k) - L)^2]$  do wskaźników  $J$  zdefiniowanych poniżej.

### Problem 1

Znajdź sterowanie  $u(t)$  minimalizujące funkcjonal  $J$ :

$$J = \int_0^{t_k} [\text{przyspieszenie}]^2(t) dt = \int_0^{t_k} u^2(t) dt,$$

obiekt:

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1;$$

sterowanie:

$$u(t) = a(t) \text{ (przyspieszenie);}$$

ograniczenia:

$$0 \leq x_1(t) \leq V_{\max}, \quad -U_{\min} \leq u(t) \leq U_{\max}.$$

### Problem 2

Znajdź wektor sterowań  $u(t)$  minimalizujący funkcjonal  $J$ :

$$J = \int_0^{t_k} \{\text{natezenie zuzycia paliwa}\} dt,$$

$$J = \int_0^{t_k} \left\{ \left[ A_2 u_1^2(t) + A_1 u_1(t) + A_0 \right] \left[ B_2 x_1^2(t) u_2^2 + B_1 x_1(t) u_2(t) + B_0 \right] \right\} dt,$$

obiekt:

$$\dot{x}_1 = \left[ K_3 u_1 u_2 (K_2 x_1^2 u_2^2 + K_1 x_1 u_2 + K_0) - (C_2 x_1^2 + C_0) - u_3 \right] / (D_2 u_2^2 + D_0)$$

siła:

$$\text{napędowa oporów ruchu hamulca inercja } \dot{x}_2 = x_1$$

sterowanie:

$u_1$  – stopień wykorzystania momentu obrotowego silnika,  
 $u_1 = M_s / M_{s\max}(n)$ , gdzie  $n = C_1 x_1 u_2$  jest prędkością obrotową silnika,

$u_2$  – przełożenie układu przeniesienia napędu (UPN) z bezstopniową skrzynią biegów,

$u_3$  – siła hamująca przyłożona do kół jezdnych;

ograniczenia:

$$0 \leq u_1 \leq 1, \quad U_{2\min} \leq u_2 \leq U_{2\max},$$

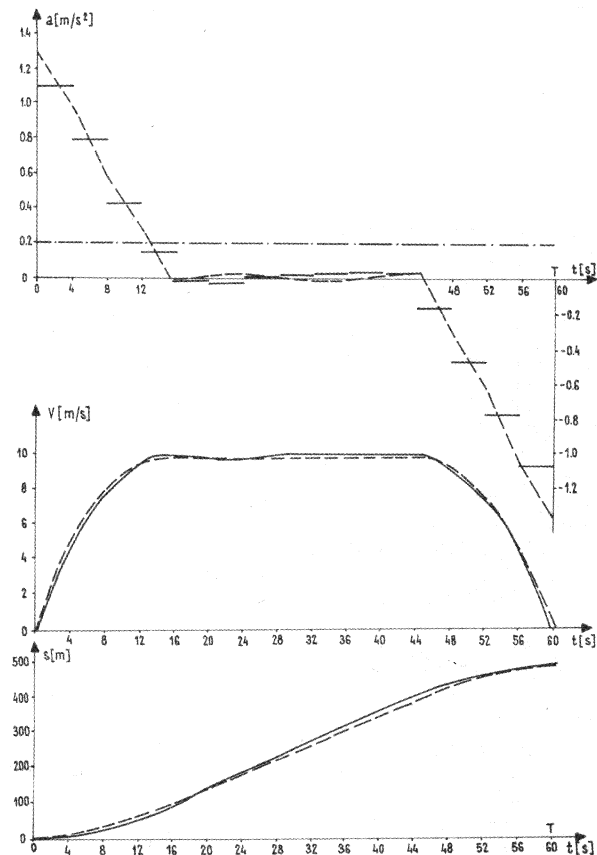
$$n_{\min} \leq C_1 x_1 u_2 \leq n_{\max}, \quad 0 \leq u_3 \leq U_{3\max}.$$

Wielkości występujące w opisach obu przykładów obliczeniowych, poza wektorami  $u(t)$ ,  $x(t)$  oraz funkcjami od nich zależnymi, są parametrami stałymi wyznaczonymi dla rzeczywistego obiektu.

## 5. Wyniki i wnioski

Opisaną w paragrafie 3 procedurę iteracyjnego obliczania sterowania optymalnego zastosowano do 2 problemów zdefiniowanych wyżej.

Dwa rozwiązania optymalne Problemu 1 przedstawiono na rys. 1 (uzyskane przy aproksymacji sterowania funkcjami sklejanymi 0-go i 1-go rzędu). W obu przypadkach przyjęto jako sterowanie początkowe  $u^0(t) = 0.2$  i  $L_{\varphi} = 16$  węzłów dla funkcji sklepanych.



Rys. 1. Sterowanie początkowe (---) i rozwiązanie Problemu 1 wyznaczone przy aproksymacji  $u(t)$  przez funkcje sklepane: a) (—) 0-go rzędu; b) (- - -) 1-go rzędu.

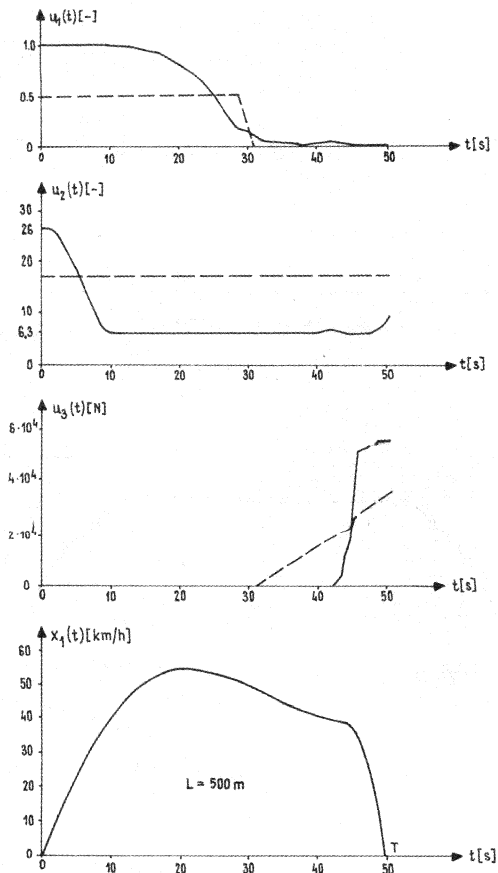
Fig. 1. Initial control (---) and Problem 1 solution determined with  $u(t)$  approximation by B-splines: a) (—) 0-th order; b) (- - -) 1-st order

Sterowanie początkowe oraz optymalne (aproksymowane funkcjami sklejanymi 1-go rzędu) uzyskane dla Problemu 2, przedstawiono na rys. 2. Ze względu na większą złożoność Problemu 2 w porównaniu z Problemem 1 ilość iteracji pętli zewnętrznej i wewnętrznej była około 10 razy większa. Dla obu problemów najefektywniejszą okazała się metoda Fletchera-Reevesa gradientu sprzężonego zastosowana w Kroku 5. Uzyskane sterowania optymalne pokazują sposoby przejazdu odcinka  $[0; L]$  przez autobus miejski:

a) Gdy zależy nam na podniesieniu komfortu jazdy (Problem 1), przyspieszenie i opóźnienie pojazdu osiągają największe wartości na początku oraz końcu odcinka trasy i przechodzą liniowo do wartości zerowej gdy  $v = V_{\max}$ ;

b) Gdy zależy nam na oszczędności paliwa (Problem 2) należy:

- rozpędzać pojazd wykorzystując charakterystykę momentu obrotowego silnika  $M_{s\max}(n)$  przy przełożeniu UPN utrzymując prędkość obrotową silnika  $n$  bliską  $n_{\min}$ ;
- następnie wykorzystać energię kinetyczną do przejazdu z wyłączonym silnikiem;
- hamować z maksymalną dopuszczalną siłą.



Rys. 2. Sterowanie początkowe (---) i rozwiązanie Problemu 2 (—) uzyskane przy aproksymacji funkcji  $u(t)$  funkcjami sklejanymi 1-go rzędu

Fig. 2. Initial control (---) and Problem 2 solution (—) determined with  $u(t)$  approximation by B-splines of 1-st order

Zaprezentowana metoda obliczeniowa okazała się efektywnym narzędziem dla rozwiązywania problemów sterowania optymalnego spotykanych w praktyce inżynierskiej. Umożliwia łatwą modyfikację algorytmu dla szerszej klasy problemów zdefiniowanych przez inne typy ograniczeń takich jak:

$$\int_0^{t_k} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \leq G_j, \quad j = 1, \dots, S \quad (25)$$

czy

$$\mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{x}(t_k) \leq \mathbf{X}_{\max}, \quad (26)$$

Dodatkową zaletą prezentowanej metody jest jej modułowość pozwalająca na opcjonalny wybór procedur na różnych jej etapach.

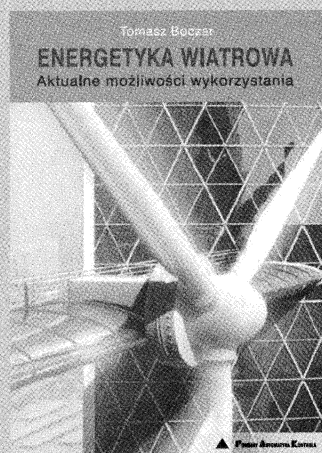
## 6. Literatura

- [1] E. Spedicato: Algorithms for Continuous Optimization, ed. by. Kluwer Academic Publ., London, 1993.
- [2] K. Teo, C. Goh, K. Wong: A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems. John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [3] D. P. Bertsekas: Dynamic Programming and Optimal Control. Athena Scientific, Nashua NH, USA, 2005.
- [4] Carl de Boor: A Practical Guide to Splines. Springer Verlag, Berlin, 1978.
- [5] F. Cellier, E. Kofman: Continuous System Simulation. Springer Verlag, Berlin, 2006.

Artykuł recenzowany

## INFORMACJE

### Najnowsza książka Wydawnictwa PAK



Na przełomie sierpnia i września ukazała się kolejna książka Wydawnictwa PAK autorstwa Tomasza Boczara pt.: Energia wiatrowa. Aktualne możliwości wykorzystania.

W niniejszej książce przedstawiono aktualne możliwości wykorzystania energii wiatru do produkcji energii elektrycznej na obszarze Europy, ze szczególnym uwzględnieniem potencjalnych zasobów i stopnia ich wykorzystania na terenie Polski, a także województwa opolskiego. Ponadto scharakteryzowano podstawowe założenia polityki krajów UE oraz strategii energetycznej Polski wobec OZE.

Książka skierowana jest przede wszystkim do studentów oraz wykładowców prowadzących zajęcia dydaktyczne na kierunkach elektrycznych, jak również związanych z inżynierią i ochroną środowiska. Opisane zagadnienia mogą stanowić materiał dydaktyczny związany z aktualnymi możliwościami oraz przyszłymi kierunkami w pozyskiwaniu energii wiatru do produkcji energii elektrycznej.

Zamówienia prosimy składać na adresy PAK:

Wydawnictwo PAK  
00-050 Warszawa, ul. Świętokrzyska 14A,  
tel./fax: 022 827 25 40

Redakcja PAK  
44-100 Gliwice, ul. Akademicka 10, p. 30b,  
tel./fax: 032 237 19 45, e-mail: wydawnictwo@pak.info.pl