

## WYKORZYSTANIE ANALIZY FALKOWEJ DO ODSZUMIANIA ORAZ KOMPRESJI SYGNAŁÓW

Piotr SZWANGRUBER<sup>1</sup>

1. Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Katedra Metrologii i Systemów Informacyjnych  
tel: (058) 347 17 78 fax: (058) 347 18 02 e-mail: p.szwangruber@ely.pg.gda.pl

**Streszczenie:** W pierwszej części referatu przedstawiono informacje teoretyczne dotyczące analizy falkowej. Szczegółowo omówione zostały CWT, DWT oraz pakiety falkowe. Druga część referatu do zastosowanie praktyczne falek do poprawy jakości oraz kompresji sygnałów 1D oraz 2D.

**Słowa kluczowe:** analiza falkowa, kompresja falkowa.

### 1. WSTĘP

Falka jest funkcją matematyczną, która charakteryzuje się następującymi cechami [1]:

- zerowa wartość średnia;
- przyjmowanie wartości zerowych poza pewnym skończonym przedziałem;
- posiada skończoną moc sygnału.

Cechy te powodują, że funkcja falkowa jest dobrze zlokalizowana w dziedzinie czasu jak i częstotliwości.

Od roku 1988 (powstanie algorytmu Mallata) badania nad analizą falkową przyjęły charakter międzynarodowy, a falki znajdują coraz to szersze zastosowanie, czego przykładem może być standard kompresji obrazu JPEG2000.

### 2. ANALIZA FALKOWA (WA)

Istnieją dwie wersje analizy falkowej: ciągła i dyskretna. Pierwsza z nich wykazuje duże podobieństwo do krótko-czasowej transformaty Fouriera, w której to sygnał dzielony jest na segmenty przy pomocy przesuwalnego okna czasowego (skanowanie). Każdy segment poddawany jest analizie FFT. W przypadku ciągłej transformaty falkowej (CWT) oknem skanującym jest funkcja falkowa.

Dyskretna transformata falkowa (DWT) nie jest jedynie cyfrową wersją CWT. Tu analiza polega na dekompozycji sygnału na aproksymacje (część zgrubna) oraz detale (część dokładna).

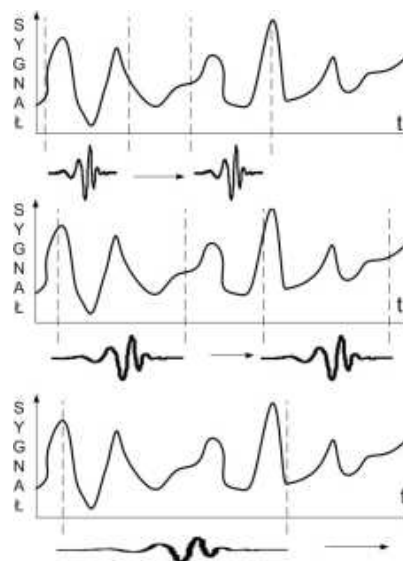
#### 2.1. Ciągła transformata falkowa (CWT)

Wynikiem ciągłej transformaty falkowej są współczynniki określające podobieństwo pomiędzy daną falką a sygnałem. Współczynniki transformaty określone są wzorem:

$$F_{CWT}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

gdzie:  $a$  – parametr skali,  $b$  – przesunięcie,  $t$  – czas,  $f(t)$  – analizowany sygnał.

Skala ma wymiar odwrotny do częstotliwości. Rysunek 1 przedstawia analizę sygnału przy użyciu CWT [1].



Rys. 1. Analiza sygnału przy użyciu CWT

#### 2.2. Dyskretna transformata falkowa (DWT)

Zapisując parametry skali i translacji w systemie dwójkowym otrzymujemy:  $a = 2^{-m}$ ,  $b = 2^{-m} \cdot n$ , gdzie  $m$  – rozdzielczość,  $n$  – dyskretne przesunięcie. Wtedy dyskretna jądrowa falkowa (dyskretna falka-matka) jest równa:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \quad (2)$$

Wprowadźmy pojęcie funkcji skalującej  $\Phi(t)$ . Funkcja skalująca jest podobnie jak falka specyficzną funkcją matematyczną. Każda falka posiada swoją unikalną funkcję

skalującą. Najważniejszą cechą, która odróżnia funkcję skalującą od falki jest niezerowa wartość średnia.

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n) \quad (3)$$

By pokazać algorytm działania DWT należy wprowadzić elementy analizy wielorozdzielczej<sup>1)</sup>. MRA jest ściśle związana z falkami. Mowa tutaj o ciągach przestrzeni funkcyjnych, w których dane sygnały cyfrowe wyrażone są za pomocą różnej liczby funkcji bazowych oraz aproksymowane z różną dokładnością. Przestrzenie takie oznaczają się symbolem  $V_m$ , gdzie  $m \in Z$  (zbiór liczb całkowitych).

Przestrzenie  $V_m$  spełniają założenia sformułowane przez Mallat'a i Mayer'a:

- ... $V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$  - kolejne przestrzenie zawierają się w sobie;
- $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$  - przestrzeń na  $(m+1)$ -szym poziomie rozdzielczości składa się z przestrzeni o poziomie rozdzielczości  $m$  oraz dopełnienia  $W_m$ ;
- nie istnieje funkcja, która należy do wszystkich przestrzeni, oraz że domknięcie wszystkich przestrzeni daje przestrzeń funkcji o „ograniczonej” energii;
- wszystkie przestrzenie są skalowaną wersją jednej przestrzeni a pomnożenie argumentu funkcji reprezentującej sygnał przez 2 powoduje przemieszczenie go do kolejnej przestrzeni - do następnego poziomu rozdzielczości;
- operacja translacji nie powoduje przeniesienia funkcji reprezentującej sygnał do innej przestrzeni, jeżeli  $f(x) \in V_0$  to  $f(x-u) \in V_0$  dla wszystkich  $u \in Z$ .

Dowolny sygnał czasowy  $x(t)$  można wyrazić jako sumę przesuwalnych funkcji bazowych  $\Phi_{m,n}(t)$ , należących do przestrzeni  $V_m$  -  $m$ -ty poziom aproksymacji (przybliżenia):

$$x(t) \approx c_{m,n} \phi(2^m t - n) \quad (4)$$

Dzięki zastosowaniu teorii MRA można ten sam sygnał przedstawić w przestrzeni  $V_{m-1}$ , oznacza to dwukrotnie mniejszą rozdzielczość niż w przestrzeni  $V_m$ :

$$x(t) \approx \sum_n c_{m-1,n} \phi(2^{m-1} t - n),$$

$$x(t) \approx \sum_n c_{m-1,n} \phi\left(\frac{2^m}{2} t - n\right) \quad (5)$$

Przy zmianie rozdzielczości aproksymacji sygnału z większej na mniejszą tracona jest część informacji. Utracone szczegóły można umownie zebrać w przestrzeni  $W_{m-1}$ , bo zgodnie z warunkami Mallat'a i Mayer'a  $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$ . Sygnał aproksymowany z rozdzielczością  $m$  można przedstawić równoważnie w rozdzielczości  $m-1$ :

$$x(t) \approx \sum_n c_{m,n} \phi(2^m t - n) = \quad (6)$$

$$\sum_n c_{m-1,n} \phi(2^{m-1} t - n) + \sum_n d_{m-1,n} \psi(2^{m-1} t - n)$$

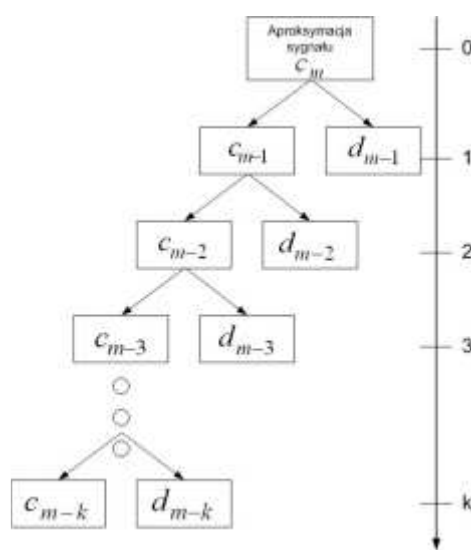
Warto podkreślić, że przestrzeń  $W_m$  zawiera funkcje bazowe którymi są falki ( $\psi_{m,n}$ ). Współczynniki  $c_{m,n}$  oraz  $d_{m,n}$  są odpowiednio równe:

$$c_{m,n} = \int x(t) \phi^*(2^m t - n) dt, \quad (7)$$

$$d_{m,n} = \int x(t) \psi^*(2^m t - n) dt. \quad (8)$$

Zgodnie z równaniem (6) sygnał  $x(t)$  można przedstawić, jako sumę aproksymacji (wyrażenia ze współczynnikami  $c$ ) oraz detali (wyrażenia ze współczynnikami  $d$ ). Przejście z rozdzielczości  $m$  do  $m-1$  nazywa się dekompozycją 1-poziomu. Idąc dalej, aproksymacje na poziomie dekompozycji 1 (rozdzielczość  $m-1$ ) można rozbić na kolejne aproksymacje i detale na poziomie dekompozycji 2 (rozdzielczość  $m-2$ ). Czynność tę można powtarzać aż do osiągnięcia  $k$ -tego poziomu dekompozycji. Wtedy sygnał  $x(t)$  można przedstawić wyrażeniem (rys. 2):

$$x(t) = \sum_n c_{m-k,n} \phi(2^{m-k} t - n) + \sum_{i=0}^k \sum_n d_{m-i,n} \psi(2^{m-i} t - n) \quad (9)$$

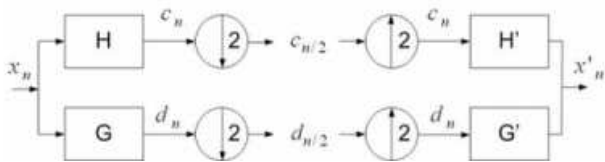


Rys. 2. Drzewo dekompozycji sygnału – algorytm Mallata

Technika obliczania współczynników  $c$  i  $d$  w maszynie cyfrowej (komputer, procesor sygnałowy, itp.) realizowana jest przy pomocy specjalnie zaprojektowanych filtrów cyfrowych. Filtry te wprowadzono, gdyż korzystanie z równań (7,8) będących definicją współczynników  $c$  i  $d$  okazuje się być nadzwyczaj uciążliwe [1]. Można zauważyć, że wartość średnia falek jest równa 0, natomiast funkcji skalujących jest równa 1 (wartość po zastosowaniu normalizacji). Funkcje skalujące przypominają filtry dolnoprzepustowe (przenoszenie składowej stałej), natomiast falki przypominają filtry górnoprzepustowe.

Niech  $H$  oznacza filtr dolnoprzepustowy, natomiast  $G$  filtr górnoprzepustowy. Rysunek 3 przedstawia ideę takiej filtracji przy użyciu filtrów cyfrowych. Analizowany sygnał  $x_n$  reprezentowany jest przez współczynniki  $c_n$  oraz  $d_n$ . Po dekompozycji ilość próbek reprezentujących sygnał podwoiła się (jest  $n$  próbek reprezentujących część szybkozmienną i drugie tyle reprezentujących część wolnozmienną). By tego uniknąć, a przecież zwiększanie ilości próbek reprezentujących sygnał nie jest

<sup>1)</sup> ang. MRA – Multiresolution Analysis



Rys. 3. Pojedynczy etap dekompozycji i rekonstrukcji

wskazane, stosuje się decymację (downsampling), czyli usunięcie co drugiej próbki bezpośrednio za filtrem. Użyte filtry zwane lustrzanymi muszą charakteryzować się pewnymi właściwościami:

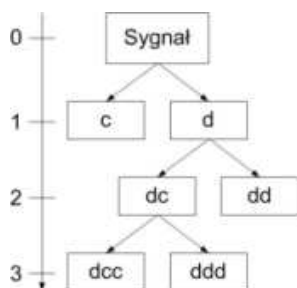
- skończona odpowiedź impulsowa – filtry typu FIR (zapewniona stabilność);
- powinny umożliwić rekonstrukcję sygnału w sposób bezstratny;
- powinny mieć liniową charakterystykę fazową.

W praktyce stosuje się zespół czterech filtrów kwadraturowych: dwóch do analizy i dwóch do syntezy, powiązanych między sobą i odpowiadających jednej falce. Algorytm projektowania takich filtrów częściowo przedstawiono w [1].

Rekonstrukcja sygnału (odwrotna transformata falkowa) polega na dodawaniu detali i aproksymacji poddanych wcześniej procesowi upsamplingu (dodawanie zerowej próbki co drugą próbkę sygnału), a następnie przepuszczonych przez filtry odwrotne do H i G [2,3].

### 2.3. Pakiety falkowe (WP)

Pakiety falkowe są przykładem analizy wielorozdzielczej wykorzystującej DWT. W tradycyjnym DWT, drzewo dekompozycji wygląda jak na rysunku 2. Okazuje się, że w kolejnych etapach dekompozycji rozbijać można nie tylko aproksymację sygnału (wyrażenia ze współczynnikami  $c$ ) ale również detale (wyrażenia ze współczynnikami  $d$ ). Tak właśnie działa analiza w oparciu o pakiety falkowe. W praktyce dąży się do otrzymania najbardziej optymalnego drzewa dekompozycji, eliminując wiele współczynników<sup>2)</sup>, co pozwala na dużo większą kompresję sygnału – mniej współczynników oznacza mniej wymaganej pamięci do przechowania danych. Rysunek 4 przedstawia wybór jednej z wielu dróg dekompozycji sygnału [3].

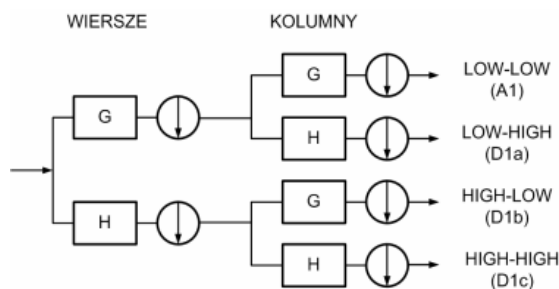


Rys. 4. Przykładowa dekompozycja przy użyciu pakietów falkowych

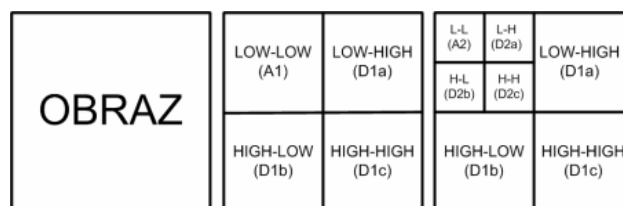
### 2.4. Dwuwymiarowa dyskretna transformata falkowa (DWT 2D)

DWT może być również zastosowane do analizy sygnałów dwuwymiarowych (obrazów). Rysunek 5 przedstawia pojedynczy etap dekompozycji macierzy dwu-wymiarowej. Macierz taka może reprezentować np. monochromatyczny obraz. Analiza najpierw dokonywana jest na wierszach a następnie na kolumnach. W efekcie

pojedynczy etap dekompozycji daje cztery składniki: jedną aproksymację oraz trzy detale. Na rysunku 6 przedstawiono schematycznie pierwszy i drugi etap dekompozycji sygnału 2D [3].



Rys. 5. Analiza DWT dla sygnału 2D

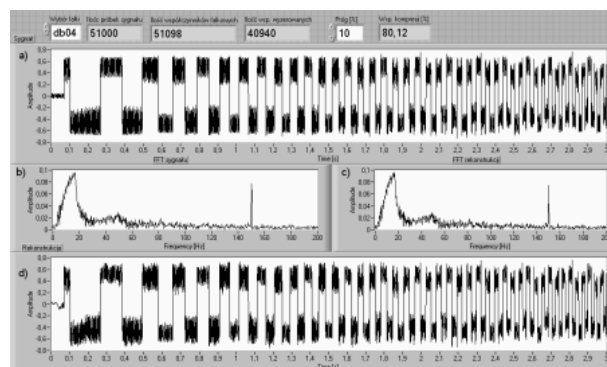


Rys. 6. Pierwszy i drugi poziom dekompozycji dla sygnału 2D

## 3. PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIA

### 3.1. Kompresja oraz odszumianie sygnałów jednowymiarowych

Rysunek 7d przedstawia kompresję przy użyciu DWT dla sygnału przebiegu prądu stojana podczas powolnego rozruchu. Rysunki 7 b i c przedstawiają widmo częstotliwościowe prądu przed i po dokonaniu kompresji. Do kompresji zastosowano analizę DWT z eliminacją progową twardą. Próg nastawiono na 10% wartości największego współczynnika, w efekcie pozwoliło to na wyzerowanie ~80% współczynników falkowych reprezentujących sygnał.

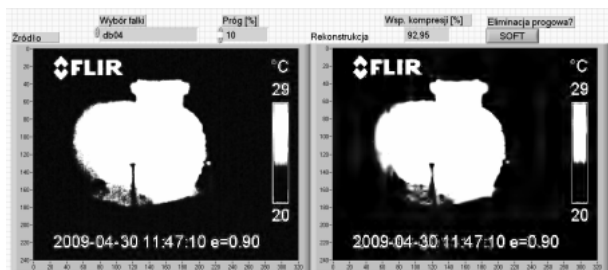


Rys. 7. Kompresja przy użyciu DWT sygnału niestacjonarnego; próg 10%, eliminacja progowa twarda: a) – przebieg napięcia zasilającego silnik indukcyjny podczas powolnego rozruchu (zasilanie z falownika przy sterowaniu U/f), b) – analiza FFT napięcia, c) – analiza FFT napięcia zrekonstruowanego (po kompresji), d) – przebieg napięcia po kompresji

### 3.2. Kompresja obrazów

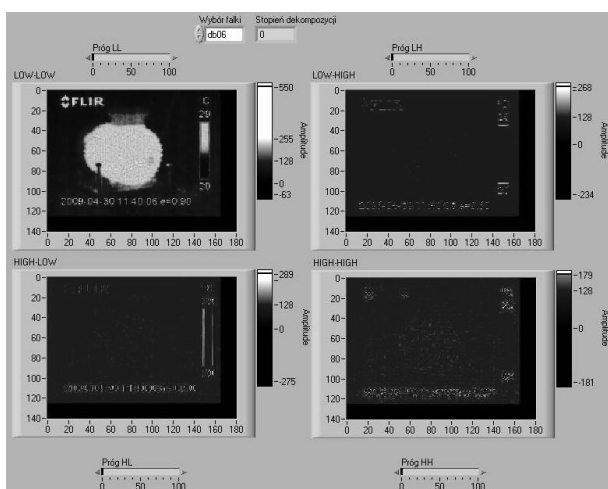
Rysunek 8 przedstawia monochromatyczny obraz uzyskany z kamery termowizyjnej oraz jego kompresję z użyciem DWT. Zastosowano eliminację progową miękką oraz próg o wartości 10% największego współczynnika falkowego reprezentującego sygnał. Na skutek działania eliminacji

progowej aż ~90% współczynników falkowych reprezentujących sygnał zastąpiono zerami.



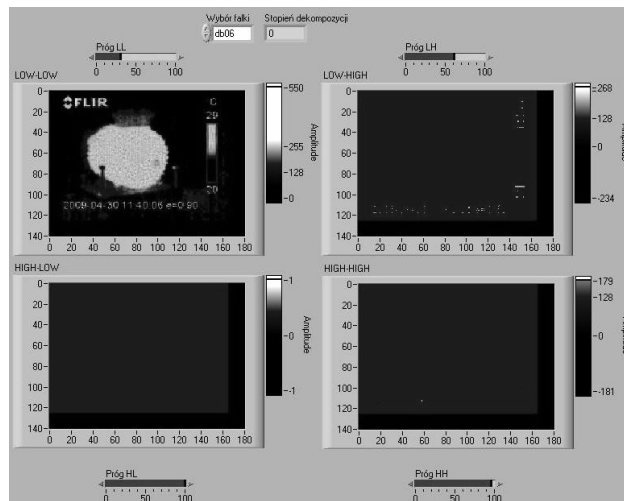
Rys. 8. Obraz monochromatyczny z kamery termowizyjnej (po lewej) i jego kompresja przy użyciu DWT (po prawej); próg 10%; eliminacja progowa miękka

### 3.3. Selektywne odszumianie obrazów



Rys. 9. Rozbijanie obrazu na detale

Rysunki 9 i 10 przedstawiają selektywne odszumianie obrazu metodą eliminacji progowej twardej przy użyciu DWT. Próg dostrajany jest ręcznie przez operatora na wszystkich stopniach dekompozycji sygnału. Zastosowanie tej metody pozwala oddzielić interesujące użytkownika fragmenty obrazu od tła. Wstępne badania wykazały, że metoda ta nadaje się do kondycjonowania obrazów o wysokiej zawartości szumu tła.



Rys. 10. Eliminacja progowa współczynników falkowych, niezależna na każdym stopniu dekompozycji

### 4. WNIOSKI KOŃCOWE

Analiza falkowa, szczególnie DWT znajduje zastosowanie w analizie czasowo-częstotliwościowej sygnałów, w oddzieleniu sygnału od szumu oraz kompresji. Przedstawiony algorytm kompresji z użyciem DWT pokazuje jak wiele spośród współczynników falkowych reprezentujących sygnał można wyzerować nie powodując znaczącego ubytku informacji. Wadą jest wymóg przechowywania wraz ze skompresowanym sygnałem ścieżki dekompozycji oraz informacji o zastosowanej falce.

Jeżeli chodzi o oczyszczanie sygnału z szumu to poprzez umiejętną regulację progu można uzyskać znaczącą poprawę jakości sygnału nawet wtedy, gdy szum tła przerasta wartość sygnału.

### 5. BIBLIOGRAFIA

1. Kosicka M.: Transformata falkowa a przekształcenie Fouriera, Przegląd Elektrotechniczny R. LXXIV 7/1998, ISSN 0033-2097.
2. Augustyniak P.: Transformacje falkowe w zastosowaniach elektrodiagnostycznych, Kraków Wydawnictwo AGH 2003, ISBN 83-89388-10-3.
3. Białasewicz J.: Falki i aproksymacje, Warszawa WNT 2000, ISBN 83-204-2971-4.

## WAVELET ANALYSIS IN SIGNAL COMPRESSION AND DENOISE

**Key-words:** wavelet analysis, wavelet compression

The first part of the paper contains theoretical informations about wavelet analysis. CWT, DWT and Wavelet Packets (WP) were described. The second part of the paper contains practical applications of wavelet transform. There were presented examples of 1D and 2D signal denoising and compression.