

RÓWNANIA WIĘZÓW POMIĘDZY UKŁADEM WIELOCZŁONOWYM I MODELEM ZŁOŻONYM Z ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

KRZYSZTOF LIPÍŃSKI

*Katedra Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów, Politechnika Gdańska
e-mail: klipinsk@pg.gda.pl*

Streszczenie. W pracy zaprezentowano równania punktowego kontaktu pomiędzy układem wieloczłonowym i strukturą odkształcalną. Układ wieloczłonowy zbudowano z nieodkształcalnych członów połączonych parami kinematycznymi. Część odkształcalną zbudowano z elementów skończonych. Zarysowano sposób wyznaczania równań modelu wieloczłonowego i modelu odkształcalnego. Wyznaczono równania więzów. Układ algebraiczno-różniczkowy przekształcono do postaci różniczkowej. Wykorzystano do tego dedykowaną wersję metody podziału zmiennych. Wyeliminowano współrzędne zależne i mnożniki Lagrange'a. Zagadnienie zilustrowano przykładem numerycznym.

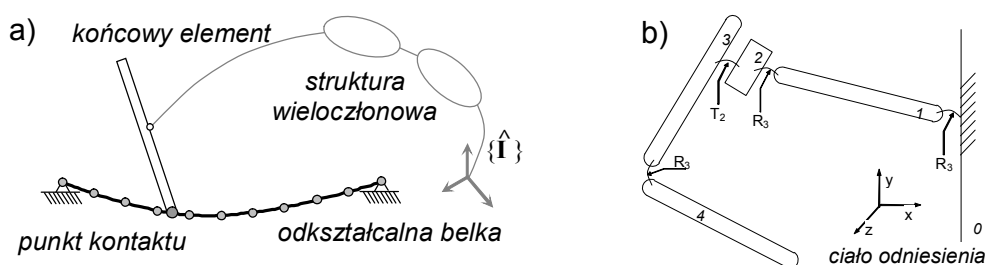
1. WSTĘP

W pracy zaprezentowano równania wynikające z punktowego kontaktu pomiędzy układem wieloczłonowym i strukturą odkształcalną (rys. 1a). Rozważania dotyczące mechanizmu (układu wieloczłonowego) ograniczono do układów zbudowanych z członów nieodkształcalnych. Strukturę odkształcalną zamodelowano za pomocą elementów skończonych, mimo że spotykany w wielu praktycznych zastosowaniach punktowy kontakt mechanizmu i struktury odkształcalnej rzadko prezentowany jest w publikacjach naukowych. Wyjątkiem jest kontakt koło/szyna zaprezentowany w pracy [4]. Koło to element struktury wieloczłonowej. Szyna to element odkształcalny. Proponowane rozwiązanie to elastyczny kontakt koła i szyny. Pomiedzy koło i szynę wprowadzono sprężynę i tłumik o wysokich współczynnikach sztywności i tłumienia. Innym wyjątkiem jest kontakt pomiędzy pantografem i kablem elektrycznym dostarczającym prąd. Opisano go w pracach [5, 6]

Zaletą elastycznego kontaktu jest prostota modelu. Wady to niedokładności wyznaczenia pozycji kontaktu, drgania układu na fikcyjnej elastyczności, problemy numeryczne wynikające z wprowadzenia dużych sztywności (małe kroki całkowania). Alternatywą zaproponowaną w obecnej pracy jest kontakt opisany równaniami więzów. Brak jest obszernej literatury tego zagadnienia. Formułowanie równań więzów wymaga połączenia elementów pochodzących z dwóch strukturalnie różnych modeli. Łączona jest kinematyka układu wieloczłonowego z kinematyką elementu skończonego. Budując układ wieloczłonowy, nieodkształcalne człony połączono parami kinematycznymi o jednym stopniu swobody (węzłami). Współrzędnymi układu są współrzędne złączowe (przemieszczenia

w węzłach). Ich zmienności są znaczne. Równania dynamiki uzyskano, korzystając z klasycznej metody opisanej w pracach [7, 8]. Relacje opisujące dynamikę zapisano jako liniowe równania przyspieszeń oraz nieliniowe równania prędkości i przemieszczeń. Model części elastycznej zbudowano z elementów skończonych. Jej ruchem są odkształcenia (brak ruchu unoszenia). Korzystano z klasycznej metody opisanej w pracach [1-3]. Współzrędnymi modelu są przemieszczenia wybranych punktów (węzłów). Zmienność ich wartości jest mała. Przemieszczenia pozostałych punktów opisano przy pomocy przyjętej a priori funkcji kształtu. Wyznaczono równania opisujące dynamikę układu. Uzyskane relacje zapisano jako liniowe równania przyspieszeń, prędkości oraz przemieszczeń węzłów.

Rozważania skoncentrowano na poszukiwaniu analitycznej postaci równań więzów. Opisano nimi kontakt (dopuszczalny poślizg), jaki występuje pomiędzy układem wieloczłonowym i elementem odkształcalnym. Do opisu kontaktu wykorzystano więzy skleronomiczno-holonomiczne. Po wyznaczeniu równań więzów współrzędne układu dzielone są na zależne i niezależne. Ideę podziału zaczerpnięto z pracy [9]. Opisana tam klasyczna metoda podziału zmiennych jest modyfikowana, to znaczy dopasowywana jest do specyfiki prezentowanych rozważań.



Rys. 1. Analizowany układ: kontakt belki i manipulatora (a); układ wieloczłonowy (b)

W pracy wydzielono pięć rozdziałów. W pierwszym, po wstępie, zaprezentowano podstawowe zależności opisujące układy wieloczłonowe. W części następnej przedstawiono zarys metody elementów skończonych. Zaprezentowano równania wybranego typu elementu (element belkowy). Rozdział trzeci poświęcono prezentacji równań więzów. Kolejny rozdział przedstawia przykład numeryczny. Płaski manipulator oparto na płaskiej belce odkształcalnej. Punkt kontaktu ma stałe położenie na manipulatorze, może ślizgać się (bez tarcia) po powierzchni belki. Równania dynamiki scałkowano numerycznie. Przedstawiono wybrane wyniki. Ostatni rozdział przeznaczono na prezentację wniosków i podsumowanie.

2. DYNAMIKA UKŁADU WIELOCZŁONOWEGO

Analizę ograniczono do układów zbudowanych z nieodkształcalnych członów. Połączono je węzłami (parami kinematycznymi o jednym stopniu swobody). Ograniczono się do układu posiadającego formę otwartego łańcucha kinematycznego. Rozpoczyna się on od nieruchomego członu odniesienia. Człony numerowano w kolejności występowania w łańcuchu (rys. 1b). Człon odniesienia otrzymuje numer zero.

Dla wszystkich członów wyprowadzono prędkości i przyspieszenia środków mas oraz prędkości i przyspieszenia kątowe. Wyznaczając je w układzie związanym z członem odniesienia, przedstawiono je jako kombinacje liniowe wektorów cząstkowych. Mnożnikami są prędkości (przyspieszenia) współrzędnych złączowych. Zapisano je w postaci zwartej, korzystając z zasad rachunku macierzowego. Otrzymano:

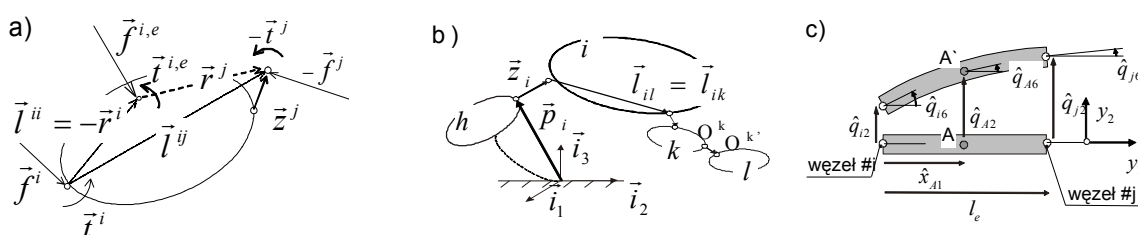
$$\vec{\omega}^i = \vec{A}^{2,i} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad ; \quad \vec{\dot{x}}^i = \vec{A}^{1,i} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad ; \quad \vec{\omega}^i = \vec{A}^{2,i} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \vec{\omega}^{i,R} \quad ; \quad \vec{\ddot{x}}^i = \vec{A}^{1,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{\ddot{x}}^{i,R} \quad , \quad (1)$$

gdzie: $\vec{\omega}^i$ - prędkość kątowna członu i ; \vec{x}^i - położenie środka masy członu i ; $\vec{A}^{1,i}$; $\vec{A}^{2,i}$ - macierze których elementami są wektory cząstkowe; $\vec{\omega}^{i,R}$; $\vec{x}^{i,R}$ - wektory sumujące wyrażenia niezależne od przyspieszeń współrzędnych złączowych.

Człony układu oswobodzono od węzłów. W miejscach oswobodzenia wprowadzono reakcje (siły i pary sił). Dynamikę oswobodzonego członu opisują: II zasada dynamiki Newtona (ruch postępowy) oraz równania Eulera (ruch obrotowy) [2]:

$$m \cdot \ddot{\vec{x}}_C = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \vec{f}_{\alpha} \quad ; \quad \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) + \vec{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \sum_{\delta=1}^e \vec{t}_{\delta C} + \sum_{\alpha=1}^{\beta} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha} \quad (2)$$

gdzie: $\ddot{\vec{x}}_C$ - przyspieszenie środka masy; \vec{f}_{α} - siła zewnętrzna; $\vec{t}_{\delta C}$ - zewnętrzny moment sił, (liczony względem środka masy); \vec{r}_{α} - wektor określający położenie punktu przyłożenia siły (mierzone względem środka masy).



Rys. 2. Elementy analizowanych układów: układ wieloczłonowy obciążenia członu (a); układ wieloczłonowy wektory geometrii układu (b); element skończony (c)

W układzie wieloczłonowym równania (2) połączone z równaniami (1). Grupując wyrażenia poprzedzające przyspieszenia współrzędnych złączowych, otrzymano [2]:

$$\begin{aligned} \vec{B}^{1,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + m^i \cdot \ddot{\vec{x}}^{i,R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \vec{f}^{z,i} + \sum_{j \in \{i, i^+\}} \vec{f}^j \quad ; \\ \vec{B}^{2,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{\omega}^i \times (\vec{I}^i \cdot \vec{\omega}^i) + \vec{I}^i \cdot \dot{\vec{\omega}}^{i,R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \vec{t}^{z,i} + \sum_{j \in \{i, i^+\}} \vec{t}^j + \sum_{j \in \{i, i^+\}} \vec{r}^{ij} \times \vec{f}^j \quad , \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $\vec{B}^{1,i}$, $\vec{B}^{2,i}$ - macierze których elementami są wektory cząstkowe.

Z równań wyeliminowano symbole oddziaływań następców. W tym celu wyznaczanie rozpoczęto od końcowego członu łańcucha. Następnie korzystano z iteracji zstępującej. Wyznaczano oddziaływania w węzle poprzedzającym. Symbole oddziaływań bezpośrednich następców zastępowano wzorami wyznaczonymi w poprzednim kroku. Otrzymano:

$$\vec{f}^i = \vec{C}^{1,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{D}^{1,i} + \vec{E}^{1,i} \quad ; \quad \vec{t}^i = \vec{C}^{2,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{D}^{2,i} + \vec{E}^{2,i} \quad , \quad (4a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \vec{C}^{1,i} &= \sum_{l:i \leq l} \vec{B}^{2,l} \quad ; \quad \vec{D}^{1,i} = \sum_{l:i \leq l} m^l \cdot \ddot{\vec{x}}^{l,R} \quad ; \quad \vec{E}^{1,i} = -\sum_{l:i \leq l} \vec{f}^{z,l} \quad ; \quad \vec{C}^{2,i} = \sum_{l:i \leq l} [\vec{B}^{1,l} + (\sum_{k:i \leq k \leq l} \vec{l}^{kl}) \times \vec{B}^{2,l}] \quad ; \\ \vec{D}^{2,i} &= \sum_{l:i \leq l} [\vec{\omega}^l \times (\vec{I}^l \cdot \vec{\omega}^l) + \vec{I}^l \cdot \dot{\vec{\omega}}^{l,R} + m^l \cdot (\sum_{k:i \leq k \leq l} \vec{l}^{kl}) \times \ddot{\vec{x}}^{l,R}] \quad ; \quad \vec{E}^{2,i} = -\sum_{l:i \leq l} [\vec{t}^{z,l} - (\sum_{k:i \leq k \leq l} \vec{l}^{kl}) \times \vec{f}^{z,l}] \quad . \end{aligned} \quad (4b)$$

Dla każdego węzła wyznaczano składową aktywną. Tylko jedna składowa równań (4a) (siły lub pary sił) jest aktywna. Odnajdowano ją, rzutując odpowiednie oddziaływanie na kierunek przemieszczenia. Elementy otrzymanych równań grupowano w macierzach. Uzyskano [2]

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{f}_e, \mathbf{t}_e, t) = 0 \quad , \quad (5)$$

gdzie: \mathbf{M} - macierz mas, \mathbf{F} – wektor zawierający efekty bezwładnościowe niezależne od przyspieszeń współrzędnych złączowych; \mathbf{Q} – wektor zawierający efekty oddziaływań zewnętrznych.

3. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Współzrędnymi struktury elastycznej są przemieszczenia wybranych punktów (węzłów). Założono, że dowolna wielkość ciągła (funkcja rzeczywista Φ) przybliżana jest za pomocą iloczynu. Mnożono wartości funkcji Φ określone w węzłach i wartości wybranych funkcji (np. wielomianów) zwanych funkcjami kształtu. Opisuje to relacja [1-3]:

$$\Phi = \mathbf{N}_e^l \cdot \Phi_e \quad ; \quad \mathbf{N}_e^l = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_w] \quad ; \quad \Phi_e = \text{col}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_w), \quad (6)$$

gdzie: Φ_e - wektor wartości w punktach węzłowych elementu; \mathbf{N}_e^l - macierz funkcji kształtu.

Z uwagi na różnice pomiędzy funkcją rzeczywistą i przybliżającą ją funkcją kształtu rozmiary elementu zminimalizowano (minimalizacja błędu). Równanie (6) wykorzystano do opisu przemieszczeń punktu wewnątrz elementu. Wektor przemieszczeń \mathbf{q} zapisano [1-3]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}_e^d \cdot \mathbf{q}_e \quad ; \quad \mathbf{q}_e = \text{col}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_w), \quad (7)$$

gdzie: \mathbf{q}_e - wektor przemieszczeń węzłów elementu

Przykładowo dla elementu belkowego funkcją kształtu jest wielomianu 3. stopnia [1, 2]:

$$\hat{\mathbf{N}}_{be}(\zeta) = \begin{bmatrix} 2\zeta^3 - 3\zeta^2 + 1 & l_e(\zeta^3 - 2\zeta^2 + \zeta) & -2\zeta^3 + 3\zeta^2 & l_e(\zeta^3 - \zeta^2) \\ \frac{6(\zeta^2 - \zeta)}{l_e} & 3\zeta^2 - 4\zeta + 1 & \frac{6(-\zeta^2 + \zeta)}{l_e} & 3\zeta^2 - 2\zeta \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie: $\zeta = \hat{x}_1/l_e$ - względne położenie analizowanego punktu (rys. 1c).

Znając stan przemieszczeń, stan odkształceń względnych $\boldsymbol{\varepsilon}$ uzyskano z relacji [1, 2]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_l \cdot \mathbf{q}_e \quad ; \quad \mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{N}_e^d, \quad (9)$$

gdzie: \mathbf{B}_l - macierz zależności odkształceń i przemieszczeń,

a zależność pomiędzy stanem naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ i stanem odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ to [1-3]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad ; \quad \mathbf{D}_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

gdzie: E - moduł sprężystości; ν - liczba Poissona.



Postać macierzy \mathbf{D}_e zależy od typu stanu obciążeń. Zapisana równaniem (10), odpowiada płaskiemu stanowi obciążeń. Następnie energię kinetyczną oraz energię potencjalną elementu wyznaczono z zależności [1, 2]:

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \int_{m_e} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \dot{\mathbf{q}} \cdot dm \quad ; \quad V_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV \quad (11)$$

Uwzględniając zależność (2), (3) oraz (4), równania (11) przepisano w postaci [1-3]:

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \cdot \mathbf{A}_e \cdot \dot{\mathbf{q}}_e \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A}_e = \frac{1}{2} \rho \cdot \int \int \int_{x_e y_e z_e} \mathbf{N}_e^{d^T} \cdot \mathbf{N}_e^d \cdot dx \cdot dy \cdot dz ; \quad (12)$$

$$V_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \cdot \mathbf{C}_e \cdot \mathbf{q}_e \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{C}_e = \frac{1}{2} \int \int \int_{x_e y_e z_e} \mathbf{B}_I^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{B}_I \cdot dx \cdot dy \cdot dz . \quad (13)$$

Całkowite energie układu otrzymano, sumując energie po wszystkich elementach układu. Podstawiając wyrażenia (9) do równań Lagrange'a II rodzaju oraz uzupełniając równanie o macierz tłumienia, otrzymano równanie różniczkowe w postaci macierzowej [1, 2]:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_e = \mathbf{P} , \quad (14)$$

gdzie: \mathbf{M} - macierz mas; \mathbf{D} - macierz mas; \mathbf{K} - macierz sztywności.

4. DYNAMIKA UKŁADU Z WIEZAMI

Rozważane równania dynamiki zbudowano z równań: dynamiki (5) otwartego układu wieloczłonowego, dynamiki (14) układu odkształcalnego bez wieżów oraz równań wieżów. Równania dynamiki rozszerzane są o mnożniki Lagrange'a λ reprezentujące oddziaływania wieżów [10]:

$$\mathbf{M}_b(\mathbf{q}_b) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{Q}_b(\dot{\mathbf{q}}_b, \mathbf{q}_b, \mathbf{f}_e, \mathbf{t}_e, t) + \mathbf{J}_R^T(\mathbf{q}_b) \cdot \lambda = 0 \quad ; \quad \mathbf{J}_R = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_b} \boldsymbol{\Phi} ; \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_c \cdot \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{D}_c \cdot \dot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{q}_c + \mathbf{J}_c^T \cdot \lambda = 0 \quad ; \quad \mathbf{J}_c = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_c} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{N} ; \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_b) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_c - p(\mathbf{q}_b) = 0 , \quad (17)$$

gdzie: $p(\mathbf{q}_b)$ – składowa poprzeczna pozycji punktu kontaktu wyznaczona dla układu wieloczłonowego; \mathbf{J}_R – jacobian równań (17) względem współrzędnych otwartego układu wieloczłonowego; \mathbf{J}_c – jacobian równań (17) względem współrzędnych części elastycznej.

Równania wieżów dla prędkości otrzymano, licząc pochodną względem czasu z (17) [10]:

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{q}}_c + \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{N}_\xi \cdot \mathbf{q}_c - \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}_b = 0 \quad ; \quad \mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_b} p(\mathbf{q}_b) ; \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = v_t(\dot{\mathbf{q}}_b, \mathbf{q}_b) / l_e ; \quad \mathbf{N}_\xi = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{N} , \quad (18)$$

gdzie: $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ – względna, wzdłużna prędkość kontaktu; v_t – wzdłużna prędkość kontaktu; \mathbf{N}_ξ – pochodna macierzy funkcji kształtu względem parametru położenia względnego.

Równania wieżów dla przyspieszeń otrzymano, licząc drugą pochodną [10]:

$$\mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_c + \ddot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{N}_\xi \cdot \mathbf{q}_c + 2\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{N}_{\xi\xi} \cdot \dot{\mathbf{q}}_c + \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \cdot \mathbf{N}_{\xi\xi\xi} \cdot \mathbf{q}_c - (\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}_b)_q \cdot \dot{\mathbf{q}}_b - \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_b = 0 \quad ; \quad (19)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = a_t(\ddot{\mathbf{q}}_b, \dot{\mathbf{q}}_b, \mathbf{q}_b) / l_e ; \quad \mathbf{N}_{\xi\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\xi}^2} ; \quad \mathbf{N}(\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}_b)_q = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_b} (\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}_b) , \quad (20)$$

gdzie: $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$ – względne przyspieszenie wzdłużne; a_t – wzdłużne przyspieszenie kontaktu.



Prędkości i przyspieszenia wzdłużne wyznaczono z kinematyki układu wieloczłonowego:

$$\dot{\xi} = (1/l) \mathbf{J}_T \cdot \dot{\mathbf{q}}_b ; \quad \ddot{\xi} = (1/l) (\mathbf{J}_T \cdot \ddot{\mathbf{q}}_b + (\mathbf{J}_T \cdot \dot{\mathbf{q}}_b)_q \cdot \dot{\mathbf{q}}_b) , \quad (21)$$

gdzie: \mathbf{J}_t – jacobian położenia wzdłużnego wyznaczony z układu wieloczłonowego.

Podstawiając (21), wprowadzając symbole γ_T oraz γ_N , równanie (18) przedstawiono w postaci [10]:

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{J}_R \cdot \dot{\mathbf{q}}_b = 0 ; \quad \mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{J}_R \cdot \ddot{\mathbf{q}}_b + \gamma = 0 ; \quad (22)$$

$$\mathbf{J}_R = (1/l) \mathbf{N}_\xi \cdot \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{J}_T - \mathbf{J} ; \quad \gamma_T = (\mathbf{J}_T \cdot \dot{\mathbf{q}}_b)_q \cdot \dot{\mathbf{q}}_b ; \quad \gamma_N = (\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}_b)_q \cdot \dot{\mathbf{q}}_b ; \quad (23)$$

$$\gamma = 2(1/l) \cdot \dot{\mathbf{q}}_c^T \cdot (\mathbf{N}_\xi^T \cdot \mathbf{J}_T) \cdot \dot{\mathbf{q}}_b + (1/l)^2 \cdot \dot{\mathbf{q}}_b^T \cdot (\mathbf{J}_T^T \cdot \mathbf{N}_{\xi\xi} \cdot \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{J}_T) \cdot \dot{\mathbf{q}}_b + (1/l) \mathbf{N}_\xi \cdot \mathbf{q}_c \cdot \gamma_T - \gamma_N , \quad (24)$$

Współrzędne \mathbf{q}_b układu wieloczłonowego podzielono na współrzędne niezależne \mathbf{u} oraz zależne \mathbf{v} . Rozszerzając metodę podziału zmiennych, zaproponowaną w [9], równania dynamiki układu wieloczłonowego i równania więzów zapisano w postaci [10]:

$$\mathbf{M}_{buu} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{buv} \cdot \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{Q}_{bu} + \mathbf{J}_{Ru}^T \cdot \lambda = 0 ; \quad \mathbf{M}_{bvu} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{bvv} \cdot \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{Q}_{bv} + \mathbf{J}_{Rv}^T \cdot \lambda = 0 ; \quad (25)$$

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{J}_{Ru} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{J}_{Rv} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0 ; \quad \mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{J}_{Ru} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{J}_{Rv} \cdot \ddot{\mathbf{v}} + \gamma = 0 ; \quad (26)$$

$$\mathbf{J}_{Rv} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{J}_R \cdot \dot{\mathbf{q}}_b) ; \quad \mathbf{J}_{Ru} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{J}_R \cdot \dot{\mathbf{q}}_b) \quad (27)$$

Eliminując współrzędne zależne i mnożniki Lagrange'a, równania dynamiki układu z więzami zapisano w postaci zależnej jedynie od współrzędnych niezależnych [10]:

$$\mathbf{M}_{11}^* \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{12}^* \cdot \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{Q}_1^* = 0 ; \quad \mathbf{M}_{21}^* \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{22}^* \cdot \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{D}_2^* \cdot \dot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{K}_2^* \cdot \mathbf{q}_c + \mathbf{Q}_2^* = 0 , \quad (28)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_{11}^* = \mathbf{M}_{buu} - \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{M}_{bvu} - \mathbf{M}_{bvu} \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot \mathbf{B}_1 ; \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{J}_{Rv}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{Ru} ;$$

$$\mathbf{M}_{12}^* = -\mathbf{M}_{buv} \cdot \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot \mathbf{B}_3 ; \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{J}_{Rv}^{-1} \cdot \gamma ;$$

$$\mathbf{M}_{21}^* = -\mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{M}_{bvu} + \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot \mathbf{B}_1 ; \quad \mathbf{B}_{2N} = \mathbf{J}_{Rv}^{-1} \cdot \gamma_N ;$$

$$\mathbf{M}_{22}^* = \mathbf{M}_c + \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot \mathbf{B}_3 ; \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{J}_{Rv}^{-1} \cdot \mathbf{N} ;$$

$$\mathbf{Q}_1^* = \mathbf{Q}_{bu} - \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{Q}_{bv} - (\mathbf{M}_{buv} - \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{M}_{bvv}) \cdot \mathbf{B}_2 ; \quad \mathbf{B}_4 = \mathbf{J}_{Rv}^{-1} \cdot \mathbf{N}_\xi ;$$

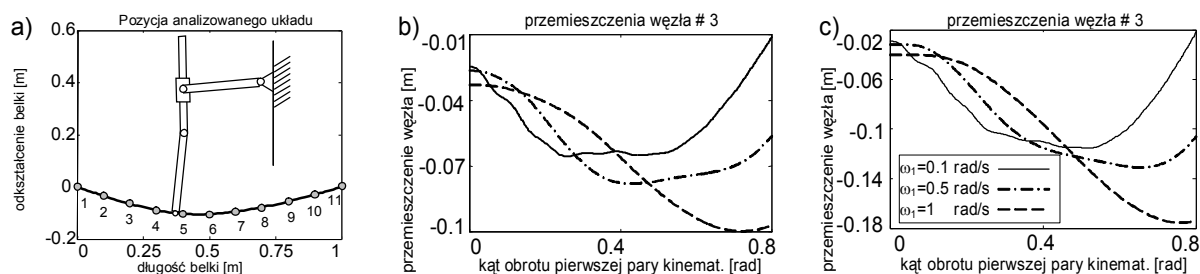
$$\mathbf{D}_2^* = \mathbf{D}_c + 2(1/l_e) \cdot \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot \mathbf{J}_T \cdot \dot{\mathbf{q}}_b \cdot \mathbf{B}_4 ; \quad \mathbf{B}_5 = \mathbf{J}_{Rv}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\xi\xi} ;$$

$$\mathbf{K}_2^* = \mathbf{K}_c + (1/l_e)^2 \cdot \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_b^T \cdot (\mathbf{J}_T^T \cdot \mathbf{J}_T) \cdot \dot{\mathbf{q}}_b) \cdot \mathbf{B}_5 + (1/l_e) \gamma_T \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot \mathbf{B}_4 ;$$

$$\mathbf{Q}_2^* = -\mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{Q}_{bv} - \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{M}_{bvv} \cdot \mathbf{B}_{2N} .$$

5. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Analizowanym układem wieloczłonowym jest model manipulatora 2D (rys. 1b). Dwa pierwsze węzły są obrotowe, podobnie ostatni. Trzeci węzeł jest postępowy. Ramiona wykonano z rurek o długości 0,3 m. Masa każdego z ramion to 1 kg. Moment bezwładności to 0,1 kg m². Środek masy umieszczono w połowie długości ramienia. Nadano zerowe momenty odśrodkowe. Parametry suwaka (członu #2) to: masa – 0,5 kg; moment bezwładności – 0,01 kg m²; pozycja środka masy – 0; moment odśrodkowy 0.



Rys. 3 Wyniki analizy: wybrany slajd deformacji układu (a); poprzeczne przesunięcie trzeciego węzła belki (b); poprzeczne przesunięcie piątego węzła belki (c);

Końcówka manipulatora ślizga się po elastycznej belce o długości to l m. Belkę podzielono na 10 elementów skończonych (rys 3a). Pole przekroju belki to $0,001 \text{ m}^2$, geometryczny moment bezwładności to 10^{-8} m^4 , gęstość materiału to $4,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Z uwagi na ilustracyjny charakter obliczeń, przyjęto relatywnie niski moduł Younga, równy $2,1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$.

Symboliczne postaci równań dynamiki układu wieloczłonowego uzyskano za pomocą programu ROBOTRAN [7, 8]. Poszerzono je o równania dynamiki układu zamodelowanego elementami skończonymi. Numerację węzłów przedstawiono na rys. 3a. Równania dynamiki przygotowano na podstawie równań i reguł zaprezentowanych w pracach [1-3]. Następnie, korzystając z równań (17)-(24), wyznaczono równania więzów i ich pochodnych względem czasu. Przesunięcia trzeciego węzła układu wieloczłonowego przyjęto jako zależne.

Wykorzystując program MATLAB [11], wykonano serię symulacji numerycznych. Równania dynamiki zredukowanego układu z więzami scałkowano numerycznie procedurą ode45. Ustawienie początkowe odpowiada stanowi równowagi statycznej układu. Prędkość kątowa pierwszego węzła układu wieloczłonowego jest stała i równa 1 rad/s .

Na rys. 3a przedstawiono wybrany slajd prezentujący ustawienie układu wieloczłonowego i odpowiadającą mu deformację belki. Zaproponowany test powtórzono dla kilku wybranych prędkości kątowych obrotu pierwszego węzła układu wieloczłonowego. Przebiegi odkształceń wybranych węzłów belki przedstawiono na rys. 3b-c.

5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Zaproponowane równania z powodzeniem wykorzystano do modelowania kontaktu pomiędzy manipulatorem (modelowanym jako układ wieloczłonowy) i strukturą elastyczną (modelowaną za pomocą elementów skończonych). W zaproponowanym modelu końcówka manipulatora i belka pozostają w stałym kontakcie (więzy dwustronne). Kontakt wyrażono w postaci holonomicznych/skleronomicznych równań więzów. Pomiedzy stykającymi się elementami występuje poślizg (bez tarcia). W celu eliminacji współrzędnych zależnych i współczynników Lagrange'a z powodzeniem zastosowano metodę podziału współrzędnych. Przedstawione równania mogą być wykorzystane do analizy bardziej złożonych układów, zarówno wieloczłonowych jak i odkształcalnych.

LITERATURA

1. Gawroński W., Kruszewski J., Ostachowicz W., Tarnowski J. Wittbrodt E.: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Warszawa : Arkady, 1984.
2. Kruszewski J., Wittbrodt E., Walczyk Z.: Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym. T.2. Warszawa :WNT, 1993.

3. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: The finite element method. Vol. 1: The Basis, fifth ed., Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000.
4. Adaci M., Terumichi Y., Suda Y., Sogabe K.: Coupled motion between wheel and an irregular track for high speed trains. Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference in Multibody Dynamics. Mediolan 2007.
5. Allotta B., Pugi L., Bartolini F.: Design and development of a railway pantograph with a wire-pulley transmission system. Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference in Multibody Dynamics. Mediolan 2007.
6. Ambrosio J., Pombo J., Rauter F., Pereira M.: A memory based communication for the co-simulation of multibody and finite element codes for the pantograph-catenary interaction simulation. Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference in Multibody Dynamics. Mediolan 2007.
7. Fisette P., Samin J.C.: Symbolic modeling of multibody system. Kluwer Acad. Pub. 2003.
8. Fisette P., Lipinski K., Samin J.C.: Symbolic modelling for the smulation, control and optimisation of multibody systems. In: Advances in Multibody Systems and Mechatronics. Gratz : Technische Universitaet, 1999, p. 139–174.
9. Haug E.J., Yen J.: Generalized coordinate partitioning methods for numerical integration of differential–algebraic equations of dynamics. NATO ASI Series, Vol. F69. Berlin:Springer_Verlag 1990, p. 97–114.
10. Lipiński K.: Multibody system in a contact with a model composed of finite elements. W: Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference in Multibody Dynamics. Warszawa 2009.
11. <http://www.mathworks.com/>

CONSTRAINT EQUATIONS BETWEEN A MULTIBODY SYSTEM AND A FINITE ELEMENT MODEL

Summary. In the paper, constraint equations are presented for a punctual contact between a multibody system and an elastic structure. The multibody system is composed of rigid bodies, joined by kinematic pairs. The elastic structure is built of deformable finite elements. Dynamic equations of the both (the multibody and the finite elements) models are presented. The main zoom is set on the constraint equations. Then the differentially-algebraic system of equations is transformed into a differential set of equations, by used of a dedicated version of the coordinate partitioning technique. Dependent coordinates, as well as the Lagrange' multipliers are eliminated. The method is illustrated with a numerical example.