



## O poprawianiu dokładności periodogramu — estymaty widma gęstości mocy stacjonarnego procesu stochastycznego

MAREK BLOK, MIROSŁAW ROJEWSKI

Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki,  
Katedra Sieci Teleinformacyjnych, 80-233 Gdańsk, ul. Narutowicza 11/12

**Streszczenie.** W pracy pokazano, jak dzięki odpowiedniemu wyborowi długości odcinka realizacji (obserwacji) dyskretnego stacjonarnego procesu stochastycznego można istotnie poprawić dokładność estymacji parametrów sinusoid w nim zawartych. Wybór ten oparto o nowy, tu zdefiniowany parametr nazwany indeksem widmowej koncentracji energii periodogramu. Rozważania zilustrowano wynikami eksperymentu numerycznego.

**Słowa kluczowe:** dyskretny stacjonarny proces stochastyczny, periodogram, dokładność estymacji parametrów.

**Symbole UKD:** 621.317.361

### 1. Wstęp

Stacjonarne procesy stochastyczne są często stosowanym modelem matematycznym wielu zjawisk świata naturalnego i wyników działalności technicznej człowieka. Szczególnym zainteresowaniem badaczy do dziś cieszą się takie procesy stacjonarne, które w swoim składzie zawierają (m.in.) skończoną liczbę, na ogół do kilkunastu, składowych sinusoidalnych, których parametry (częstotliwość, moc/amplitudę, a często i fazę początkową) zamierzamy poznać (zmierzyć, wyestymować) jak najdokładniej. Za przykłady takich procesów mogą posłużyć niektóre zjawiska astrofizyczne (np. fale grawitacyjne generowane przez naszą galaktykę, zwłaszcza przez gwiazdy podwójne), indykatory chronosygnalów do synchronizacji precyzyjnych zegarów lub telekomunikacyjnych odbiorników koherentnych, jak

również wibroakustyczne sygnały ciężkich maszyn wirnikowych wykorzystywane do ich diagnostyki. Takie właśnie stacjonarne procesy stochastyczne są w tej pracy przedmiotem naszego zainteresowania.

Ogólnie przyjętym opisem właściwości stacjonarnych procesów stochastycznych jest ich widmo gęstości (gęstość widmowa) mocy, której nieparametryczną estymatę, zwaną periodogramem, przed ponad stu laty opublikował Schuster [1]. Szczególnie burzliwe zainteresowanie periodogramem, zwłaszcza w zastosowaniach przyrodniczych i technicznych, notuje się po kolejnym, dziesiątym wynalezieniu przez Cooleya i Tukeya algorytmu szybkiego przekształcenia (transformacji) Fouriera (FFT) [2]. (Pierwsze wyprowadzenie i zastosowanie FFT w 1805 r. należy do Gaussa [3]). Z rokiem 1965 wiąże się narodziny empirycznego działu statystyki matematycznej zwanego analizą widmową (*spectral analysis*) [4]. Dziesięć lat później, w 1975 r., periodogram jako asymptotycznie nieobciążona, aczkolwiek niezgodna (niekonsystentna) estymata widma gęstości mocy [5] wchodzi do kanonu wiedzy cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS) w dwu pierwszych podręcznikach tego przedmiotu [6, 7].

Dziś periodogram w wersji opublikowanej przez Schustera jest nazywany surowym (*raw periodogram*); są bowiem znane i szeroko stosowane jego liczne modyfikacje i ulepszenia, systematycznie wykładane m.in. w sławnych monografiach [8, 9 i 10]. Celem wszystkich tych udoskonaleń jest poprawa właściwości statystycznych (głównie redukcja obciążenia i wariancji) periodogramu jako estymaty widma gęstości mocy. Ma to z zasady niewielki wpływ na dokładność estymacji parametrów składowych sinusoidalnych badanego procesu, gdyż tu dokładność w najwyższym stopniu zależy od czasu trwania (długości) obserwacji poddawanej transformacji Fouriera. W dzisiejszej praktyce periodogramowej estymacji widma przyjęło się wybierać długość obserwacji (przyczynając ją bądź uzupełniając ciągiem zer) równą naturalnej potęgze  $p$  liczby 2 ( $N = 2^p$ ) po to, by przekształcenie DFT wykonać, stosując szczególnie szybki algorytm FFT. Przy dzisiejszych olbrzymich (w porównaniu np. z rokiem publikacji prac [2, 4]) szybkościach procesorów takie uzasadnienie wyboru długości obserwacji, w szczególności procesu stacjonarnego, należy uznać za nieuzasadnione. Dziś do rzadkości należą sytuacje, w których argument szybkości obliczenia estymaty widma uznajemy za ważniejszy od argumentu dokładności odczytu z tej estymaty parametrów sinusoid zawartych w badanym procesie. Badaniu tak zdefiniowanej dokładności periodogramu Schustera w funkcji długości obserwacji, w oparciu o którą obliczono ten periodogram, jest poświęcona ta praca.

Kompozycja pracy jest następująca. W następnym punkcie przypominamy podstawowe definicje i analityczny wzór na widmo DFT superpozycji skończonej liczby sinusoid. Dalej proponujemy kryterium wyboru takiej długości obserwacji transformowanej przez te DFT, dla której otrzymane widmo scharakteryzuje się najmniejszym rozmyciem (najmniejszymi przeciekami), oraz sprawdzamy skuteczność tego kryterium w eksperymencie numerycznym przeprowadzonym w MATLABie i wyciągamy wnioski.



## 2. Periodogram superpozycji sinusoid

Rozpatrzmy realizację

$$x[n]; \quad n = \dots, 0, 1, 2, \dots, N-1, N, \dots \quad (1)$$

dyskretnego, w ogólności zespolonego, stacjonarnego, w (co najmniej) szerokim sensie procesu stochastycznego  $\{x[n]\}$ . Przyjmując, że proces ten spełnia hipotezę ergodyczności w stosunku do swojej autokorelacji i dysponując skończonym fragmentem realizacji (1), np.

$$x_N[n] \equiv x[n]; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

zwany dalej obserwacją o długości (czasie trwania)  $N$  próbek (w skrócie  $N$  Sa), potrafimy oszacować najważniejszą charakterystykę procesu  $\{x[n]\}$ , czyli widmo gęstości jego mocy

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_x[l] e^{-j\omega l}; \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3)$$

W tej definicji  $r_x[l]$ ,  $l = \dots, -1, 0, 1, \dots$  jest ciągiem autokorelacji tego procesu [6-10]. Argument  $\omega$  widma (3) mianowany w [rad/Sa] i, dalej, jego estymatę  $\omega_{mN}$  nazywamy pulsacją (*angular frequency*), a argument  $l$  autokorelacji — opóźnieniem (*lag*).

Najpopularniejszą nieparametryczną estymatą widma (3) jest periodogram Schustera [1] zdefiniowany jako

$$S_N[k] = \frac{1}{N} |X_N[k]|^2, \quad (4)$$

gdzie

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] \exp(-j2\pi kn/N) \quad (5)$$

jest „ $N$ -punktową” transformatą (widmem zespolonym) DFT, przy czym

$$k = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2-1, \quad (6)$$

gdy  $N$  jest parzyste i

$$k = -(N-1)/2, \dots, 0, \dots, (N-1)/2, \quad (7)$$

gdy  $N$  jest nieparzyste. Przy  $N \rightarrow \infty$  estymata (4) zmierza do widma prawdziwego:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N[k] = S_x(e^{j\omega_k}), \quad (8)$$



gdzie  $\omega_k = 2\pi k/N$  jest pulsacją  $k$ -tego prążka widma DFT. Zbieżność szeregu (8) nie jest jednostajna; szybkość tej zbieżności istotnie zależy od charakteru analizowanego procesu. I tak, zbieżność (8) jest szybsza dla procesów szumopodobnych (o płaskim widmie) lub fluktuacyjnych (o widmie wielomodalnym z względnie płaskimi maksimumami) niż dla procesów zawierających w sobie superpozycję  $M$  sinusoid zespolonych (kompleksoid):

$$x_N[n] = \sum_{m=1}^M a_m \exp(j(\omega_m n + \varphi_m)) \quad (9)$$

o parametrach:  $a_m > 0 \forall m$  — zwanych amplitudami,  $\varphi_m \in [-\pi, \pi)$  — zwanych fazami początkowymi i o różnych pulsacjach  $\omega_m \in (-\pi, \pi)$ . Superpozycja  $M$  sinusoid rzeczywistych przyjmuje szczególną postać wyrażenia (9):

$$\begin{aligned} x_N[n] &= a_0 + \sum_{m=1}^M a_m \cos(\omega_m n + \varphi_m) = \\ &= a_0 + \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{2} (\exp(j(\omega_m n + \varphi_m)) + \exp(-j(\omega_m n + \varphi_m))) \end{aligned} \quad (10)$$

Tu pulsacje  $\omega_m \in (0, \pi) \forall m$ , przy czym „amplitudę”,  $a_0 \in \mathbf{R}$ ,  $M+1$ -szej sinusoidy (*de facto* kosinusoidy) o zerowej pulsacji nazywa się składową stałą (DC). Zauważmy, że procesy stochastyczne, których realizacje zawierają w sobie superpozycję typu (9) i (10), są przedmiotem żywego zainteresowania diagnostyki technicznej [11, 12], a najczęstszą dokumentacją obecności składowych sinusoidalnych w ich składzie są periodogramy.

Graficzne wykresy periodogramów (4) są z reguły przedstawiane na liniowej (rzadziej — logarytmicznej) osi częstotliwości unormowanych względem szybkości próbkowania:

$$f = \omega/(2\pi) \in [-1/2, 1/2). \quad (11)$$

Mianem tak unormowanej częstotliwości jest Hz/(Sa/s), czyli część szybkości próbkowania. Skala pionowa periodogramów, gęstość mocy [(W/Hz)/(Sa/s)], [8-10], na ogół jest cechowana w decybelach, [dB], nierzadko względem maksymalnej wartości, [dBc]. Większość GUI pakietów oprogramowania numerycznego (np. MATLAB, MathCad,...) kreśli periodogram odcinkowo-linearną interpolatą  $N$ -prążkowych widm dyskretnych (4),  $S_N[k]$  lub  $10\lg S_N[k]$ , przy czym użytkownikowi/operatorowi pozostawia się swobodę wyboru długości obserwacji  $N$ , zwykle jednocześnie sugerując wybór  $N$  spośród liczb 256, 512, 1024,... motywując ten wybór szybkością obliczeń. Tymczasem, obierając długość obserwacji (2) podlegającej transformacji w (5) inną, różną od naturalnej potęgi liczby 2, możemy istotnie poprawić dokładność periodogramu odnośnie wydobytych/ujawnionych



składowych sinusoidalnych badanego procesu. W tej pracy chcemy odpowiedzieć na pytanie, jak długą obserwację realizacji typu (9) lub (10) przetransformować w dziedzinę częstotliwości, by z otrzymanego periodogramu można było najdokładniej odczytać moce:  $a_m^2$  i pulsacje:  $\omega_m$  poszczególnych sinusoid superpozycji (9) lub (10) zakłóconej np. addytywnym szumem białym lub innym procesem stacjonarnym o stosunkowo płaskim widmie.

Na potwierdzenie powyżej sformułowanej tezy wstawmy (9) do (5), nieco modyfikując przy tym zastosowane oznaczenia. I tak niech

$$A_m = a_m \exp(j\varphi_m) \quad (12)$$

oznacza amplitudę zespoloną  $m$ -tej składowej kompleksoidy  $A_m \exp(j\omega_m n)$ , której pulsację zapiszemy jako

$$\omega_m = \kappa_m 2\pi/N. \quad (13)$$

Tu  $\kappa_m \in (-N/2, N/2)$  jest „ułamkowym numerem” tej kompleksoidy na całkowitoliczbowej skali (6), (7)  $N$ -punktowego widma DFT (5). Zatem

$$\begin{aligned} X_N[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=1}^M A_m \exp\left(j \frac{2\pi\kappa_m}{N} n\right) \right) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{N} n\right) \\ &= \sum_{m=1}^M A_m \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi(\kappa_m - k)n/N) \\ &= \sum_{m=1}^M A_m \frac{1 - \exp(j2\pi(\kappa_m - k))}{1 - \exp(j2\pi(\kappa_m - k)/N)} \\ &= N \sum_{m=1}^M \exp\left(j\pi \frac{N-1}{N}(\kappa_m - k)\right) A_m \operatorname{asinc}\left(\frac{2\pi}{N}(\kappa_m - k)\right), \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie

$$\operatorname{asinc}_N(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{N \sin(\omega/2)} \quad (14a)$$

jest zaliasowaną funkcją sinc [6].

Z ostatniego wiersza wyprowadzenia (14) wynika, że tylko wtedy gdy każda różnica  $(\kappa_m - k)$  jest liczbą całkowitą (tj. gdy  $\kappa_m$  jest jedną z liczb wymienionych w (6) lub w (7)),  $N$ -punktowe widmo DFT (5) jest sumą delt Kroneckera o zespolonych „amplitudach”  $A_m \sqrt{N}$  ulokowanych dokładnie na pulsacjach kompleksoid,  $\omega = 2\pi\kappa_m/N = \omega_m$ . Taka korzystna sytuacja może zaistnieć tylko wtedy, gdy po pierwsze: częstotliwość każdej z tych kompleksoid ( $f$  wg (11)) jest ułamkiem wy-



miernym szybkości próbkowania (jest współmierna z szybkością próbkowania), oraz po drugie:  $N$ -próbkowa obserwacja mieści w sobie całkowitą liczbę „pełnych” okresów każdej z sinusoid. W przeciwnym przypadku widmo DFT (5), a w ślad za nim i periodogram (4), są rozmyte z powodu „przecieków energii” tych sinusoid, które nie spełniają powyższych dwu warunków. (Zwalczaniu tych przecieków wiele uwagi poświęca się w klasycznym kursie CPS [6, 7], jak i literaturze specjalistycznej [8-10]).

W praktyce analizy widmowej nie ma większego sensu zakładać, że obie z wymienionych sprzyjających okoliczności zachodzą; więc skutki przecieków staramy się łagodzić, stosując takie modyfikacje nieparametrycznej estymacji widma, jak okienkowanie obserwacji, jej segmentację, uśrednianie widm segmentów i inne, opisane w wielu akademickich podręcznikach [6-10]. W tej pracy proponujemy inne rozwiązanie tego problemu, wyłącznie poprzez odpowiedni wybór długości  $N$  obserwacji  $x_N[n]$ , na podstawie której obliczamy surowy periodogram Schustera (4). Wybór ten opieramy o kryterium zaproponowane w następnym punkcie.

### 3. Indeks widmowej koncentracji energii

Periodogram zdefiniowany wzorami (4) i (5) i obliczony na podstawie obserwacji  $x_N[n]$  o długości  $N$  unormujemy następująco:

$$I_N[k] = S_N[k] / \sum_k S_N[k] = |X_N[k]|^2 / \sum_k |X_N[k]|^2, \quad (15)$$

gdzie  $k$  przyjmuje wartości jak w (6) bądź jak w (7). Tak unormowany periodogram,  $I_N[k]$ , który ma teraz charakter rozkładu prawdopodobieństwa dyskretnej, równomiernie skwantowanej zmiennej losowej  $\{k\}$ , opisuje ułamekowy udział (*share*) każdego z prążków widma DFT,  $X_N[k]$  w energii całej obserwacji o długości  $N$ . Z tym rozkładem udziałów powiążmy parametr

$$J[N] = \sum_k I_N[k], \quad (16)$$

który proponujemy nazwać widmowym indeksem koncentracji (skupienia) energii (*spectral energy concentration index* — SECI) obserwacji użytej do obliczania periodogramu (4). Zdefiniowany tu indeks będziemy dalej traktować jako parametr periodogramu  $S_N[k]$ .

Interesującą nas właściwością indeksu (16) jest ograniczenie jego wartości do przedziału  $J[N] \in [1/N, 1]$ . Łatwo sprawdzić, że kres dolny,  $J[N] = 1/N$ , ten indeks osiąga, gdy rozkład udziałów (15) jest równomierny:  $I_N[k] = 1/N \forall k$ . Natomiast kres górny,  $J[N] = 1$ , zdarza się, gdy  $I_N[k] = \delta[k - \kappa_m]$  (tu  $\delta[n]$  jest deltą Kroneckera), a więc gdy widmo  $X_N[k]$  stanowi jeden jedyny prążek ulokowany na pulsacji



$\omega_m = 2\pi\kappa_m/N$ , a  $\kappa_m$ , jest jedną z liczb całkowitych wyszczególnionych w (6) bądź w (7). Tę właściwość traktujemy jako przesłankę następującej hipotezy.

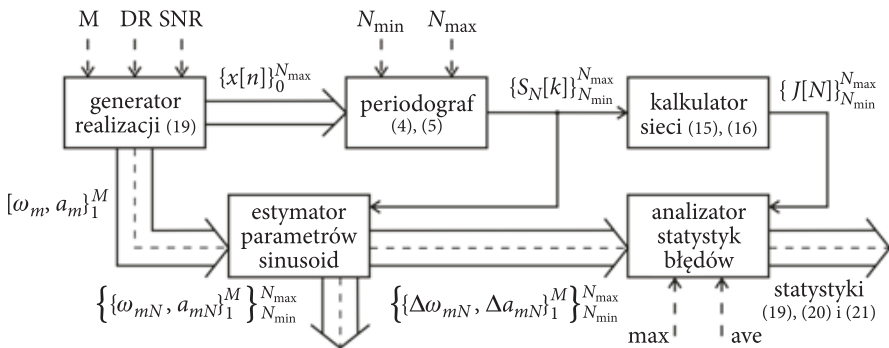
Jeśli stochastyczny proces stacjonarny  $\{x[n]\}$  zawiera w sobie pewną liczbę  $M$  składowych sinusoidalnych, to periodogram  $S_N[k]$ , obliczony na podstawie obserwacji  $x_N[n]$ , o dostatecznie dużej długości  $N > N_{\min}$ , o największym indeksie  $J[N]$ , jest dokładniejszy w tym sensie, że z niego można odczytać parametry tych sinusoid dokładniej niż z periodogramów o mniejszych indeksach (powiedzmy)  $J[N']$ , nawet gdy  $N'$  jest większe od  $N$ .  $N_{\min}$  [Sa] oznacza tu najdłuższy „ukryty okres” (*hidden periodicity* [1]), który nas jeszcze interesuje w danym badaniu. Postawioną tu tezę staramy się potwierdzić następującym przykładem.

### 4. Eksperyment numeryczny

Schemat eksperymentu numerycznego potwierdzającego tezę postawioną w poprzednim punkcie przedstawia rysunek 1. Poszczególne bloki tego rysunku zostały już opisane w poprzednich punktach bądź zostaną opisane poniżej. I tak generator realizacji (9) z addytywnym białym szumem gaussowskim o zadawanym stosunku mocy sumy składowych sinusoidalnych do średniej mocy szumu (SNR) ma zadaną liczbę sinusoid  $M = 1, 2, 3, \dots$  i ich zakres dynamiczny (*dynamic range* — DR) zdefiniowany jako

$$DR = 20\lg(a_{\max}/a_{\min}), \tag{17}$$

gdzie  $a_{\max}$  i  $a_{\min}$  to odpowiednio największa i najmniejsza amplituda wylosowanych sinusoid.



Rys. 1. Schemat eksperymentu numerycznego

Ten generator wytwarza ciąg zespolony  $\{x[n]\}_0^{N_{\max}}$ , który traktujemy jako fragment realizacji dyskretnego stacjonarnego procesu stochastycznego, w skład którego wchodzi superpozycja kompleksoid (9) o wylosowanych z przedziału  $[-\pi, \pi]$



pulsacjach  $\omega_m$  i fazach początkowych  $\varphi_m$ . Tu  $N_{\max}$  oznacza największą długość obserwacji, która nas interesuje (z różnych powodów: np. ograniczeń sprzętowych, ograniczeń czasowych, przesadnej potencjalnej rozdzielczości,...).

Następny blok tego schematu — periodograf oblicza na podstawie obserwacji  $x_N[n]$  o długościach  $N = N_{\min}, N_{\min}+1, \dots, N_{\max}$  wszystkie periodogramy  $S_N[k]$ , dla których kalkulator SECI oblicza parametry  $J[N]$ . Równolegle, estymator parametrów sinusoid wyznacza wartość poszczególnych pulsacji  $\omega_{mN}$  jako położenia  $M$  największych maksimów periodogramów i wartości amplitud  $a_{mN}$  — jako wartość tych maksimów, a następnie oblicza błędy estymacji pulsacji

$$\Delta\omega_{mN} = \omega_{mN} - \omega_m \text{ dla } \forall m \text{ i } \forall N \quad (18a)$$

i amplitud 
$$\Delta a_{mN} = a_{mN} - a_m \text{ dla } \forall m \text{ i } \forall N. \quad (18b)$$

Blok nazwany analizatorem statystyk daje możliwość powiązania tak zdefiniowanych błędów pulsacji i amplitudy poszczególnych periodogramów  $S_N[k]$  z ich parametrami  $J[N]$ . Jednym z takich powiązań jest skojarzenie wartości maksymalnych modułów błędów z parametrami  $J[N]$  odpowiednich periodogramów. Ponieważ w układzie współrzędnych na rysunkach 8 i 9 wartość  $J[N]$  odkładamy na osi poziomej, a błędy — na pionowej, tę zależność zapisujemy symbolicznie parą wzorów:

$$\left\{ \max_m \left| \frac{\Delta\omega_{mN}}{\Delta\omega_N} \right| (J[N]) \right\}_{N_{\min}}^{N_{\max}}, \text{ gdzie } \Delta\omega_N = \frac{2\pi}{N}, \quad (19a)$$

$$\left\{ \max_m 20 \lg \left| \frac{\Delta a_{mN}}{a_m} \right| (J[N]) \right\}_{N_{\min}}^{N_{\max}}, \quad (19b)$$

gdzie skrót max oznacza wartość maksymalną szukaną po wszystkich  $m$ . Podobny wzór

$$\left\{ \text{ave}_m \left| \frac{\Delta\omega_{mN}}{\Delta\omega_N} \right| (J[N]) \right\}_{N_{\min}}^{N_{\max}}, \quad (20a)$$

$$\left\{ \text{ave}_m 20 \lg \left| \frac{\Delta a_{mN}}{a_m} \right| (J[N]) \right\}_{N_{\min}}^{N_{\max}}, \quad (20b)$$

gdzie skrót ave oznacza uśrednianie arytmetyczne po wszystkich  $m$ , reprezentuje zależność średnich modułów błędów odczytu parametrów sinusoid od parametru  $J[N]$ . (Możliwość wyboru jednej z dwu lub obu tych statystyk zaznaczono na





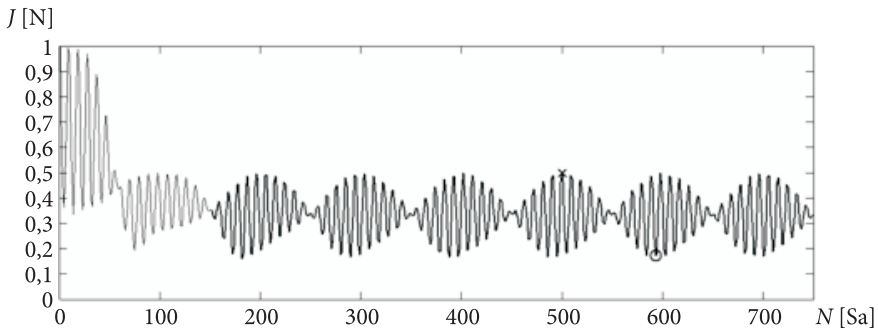
schemacie z rysunku 1). Z uwagi na to, że jesteśmy zainteresowani, by oba odczyty: pulsacji  $\omega_{mN}$  i amplitud  $a_{mN}$  były równocześnie jak najdokładniejsze, stosujemy jeszcze jedną parę statystyk:

$$\left\{ \max_m 20 \lg |\Delta a_{mN} / a_m| \left( \max_m \left| \frac{\Delta \omega_{mN}}{\Delta \omega_N} \right| \right) \right\}_{N_{\min}}^{N_{\max}}, \quad (21a)$$

$$\left\{ \text{ave}_m 20 \lg |\Delta a_{mN} / a_m| \left( \text{ave}_m \left| \frac{\Delta \omega_{mN}}{\Delta \omega_N} \right| \right) \right\}_{N_{\min}}^{N_{\max}}. \quad (21b)$$

## 5. Wyniki eksperymentu

Omawianie wyników zaczniemy od eksperymentu przeprowadzonego dla następujących nastaw systemu symulującego:  $M = 2$ ,  $DR = 0$  dB,  $SNR = 30$  dB. Analizowany sygnał jest prostym sygnałem dwutonowym (bichromatycznym) ze składowymi o jednakowych amplitudach. Taki właśnie sygnał pozwala zaobserwować wszystkie podstawowe zjawiska związane z widmowym indeksem koncentracji energii i doбором długości obserwacji  $N$ .

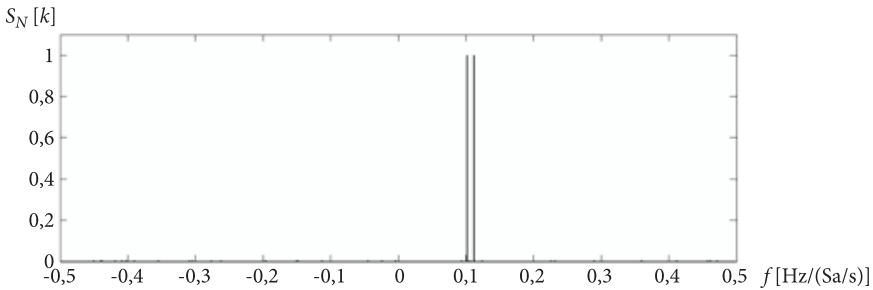


Rys. 2. Indeks widmowej koncentracji energii dla sygnału dwutonowego

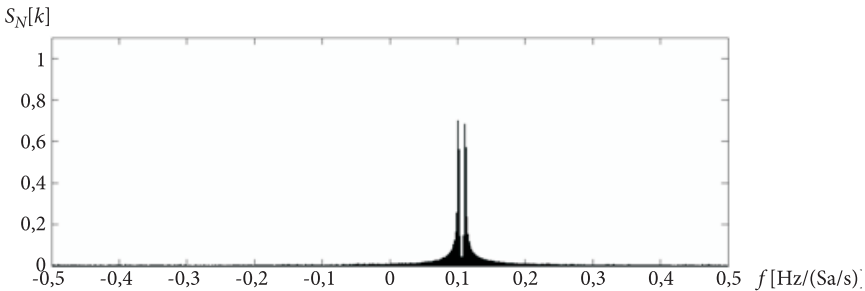
Po pierwsze, dla dostatecznie dużego  $N$  (tutaj  $N_{\min} = 150$ ) indeks  $J[N]$  wyznaczony dla obserwacji (prawie)okresowego sygnału jest również (prawie)okresowy (rys. 2). Na rysunku 2 wyróżniono dwa punkty, w których indeks  $J[N]$  przyjmuje wartość maksymalną (krzyżyk) oraz minimalną (kółko). Jak widać z rysunku 3, periodogram sygnału wyznaczony dla  $N$  odpowiadającego dużej (tutaj największej) wartości indeksu  $J[N]$  cechują słabe przecieki widma (lub całkowity ich brak). Z kolei periodogram sygnału wyznaczony dla  $N$  odpowiadającego małej (tutaj



najmniejszej) wartości indeksu  $J[N]$  cechują silne przecieki (na rysunku 4 problem przecieków dotyka obydwie składowe analizowanego sygnału), co skutkuje pogorszeniem jakości estymacji parametrów składowych sygnału, ze szczególnie dużymi błędami amplitud.



Rys. 3. Periodogram analizowanego sygnału dwutonowego dla indeksu  $J[N]$  przyjmującego wartość maksymalną



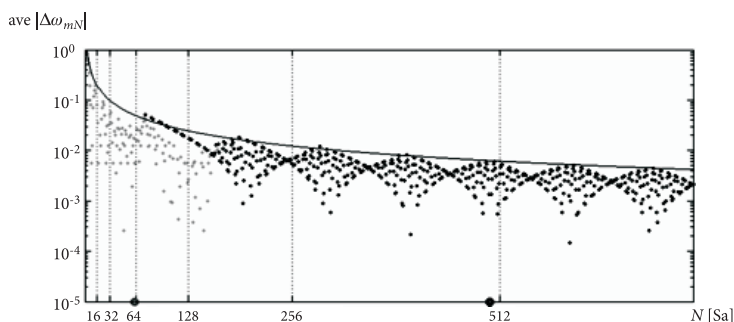
Rys. 4. Periodogram analizowanego sygnału dwutonowego dla indeksu  $J[N]$  przyjmującego wartość minimalną

Górna granica średniego bezwzględnego błędu estymacji pulsacji (wg wzoru (20a) bez normowania do  $\Delta\omega_N$ ) (rys. 5) maleje odwrotnie proporcjonalnie do długości obserwacji  $N$ . Jednak, jak widać z rysunku 5, obniżanie się górnej granicy (linia ciągła) tego błędu ma istotnie mniejsze znaczenie niż odpowiedni dobór  $N$ . Zwiększanie długości obserwacji  $N$  nawet kilkudziesięciokrotnie może skutkować większym błędem estymacji pulsacji składowych sygnału niż odpowiedni dobór niewielkiej wartości  $N$ . Na przedstawionym przykładzie widać również, że wybór  $N$  jako potęgi dwójki nie jest uzasadniony w przypadku analizy sygnałów (prawie) okresowych. Co ciekawe, nawet zmiana długości obserwacji  $N$  o jedną próbkę z reguły skutkuje znaczną zmianą dokładności estymacji.

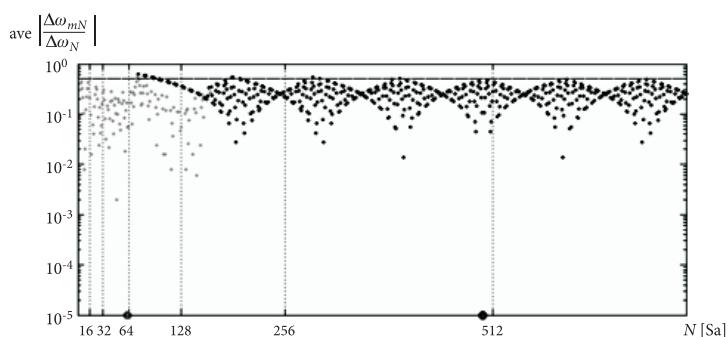
Na rysunku 5 szarymi kropkami zaznaczono błędy estymacji pulsacji dla tych długości obserwacji  $N$ , dla których, na skutek zbyt małej rozdzielczości lub przecieków, w periodogramie  $S_N[k]$  można wyróżnić tylko jedną składową. Tłumaczy to zachowanie

się indeksu  $J[N]$  (rys. 2), który dla małych  $N$  przekracza wartość  $1/M$ . Dlatego bardzo ważne jest określenie wartości  $N_{min}$ , poniżej której nie analizujemy przebiegu  $J[N]$ .

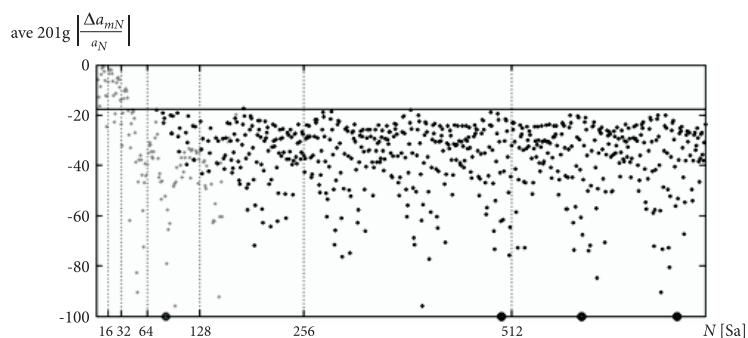
Ponieważ wpływ zwiększania długości obserwacji  $N$  na dokładność estymacji pulsacji składowych sygnału jest drugorzędny, w analizach wygodnie jest posługiwać się średnim względnym błędem estymacji pulsacji składowych sygnału (20a) (rys. 6).



Rys. 5. Średni bezwzględny błąd estymacji pulsacji składowych w funkcji długości obserwacji  $N$



Rys. 6. Średni względny błąd estymacji pulsacji składowych (20a) w funkcji długości obserwacji  $N$

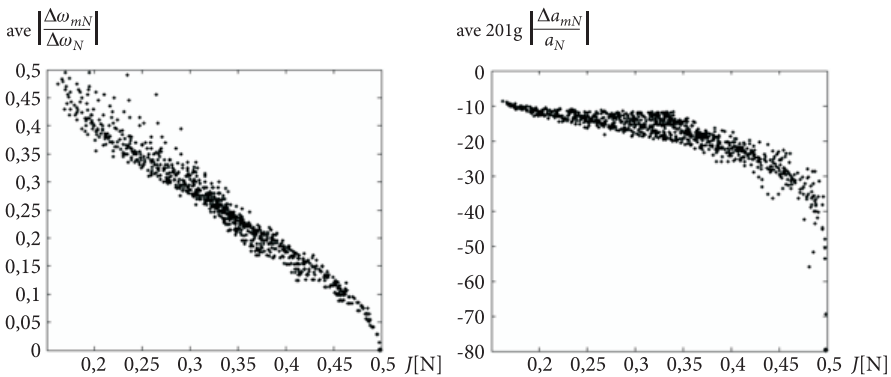


Rys. 7. Średni względny błąd estymacji amplitud (mocy) składowych (20b) w funkcji długości obserwacji  $N$



Poza jakością estymacji pulsacji składowych sygnału, bardzo często istotna jest dokładność estymacji amplitud (mocy) tych składowych (rys. 7). Jak widać, przebieg ten, podobnie jak przebieg z rysunku 6, jest (prawie)okresowy. Warto zauważyć, że obydwa przebiegi osiągają często minima i maksima dla tych samych długości obserwacji  $N$ .

Dokładniej związki pomiędzy tymi błędami można przeanalizować w oparciu o zaprezentowane na rysunkach 8-10 skupienia statystyk (20) z parametrem  $J[N]$ . Widać tutaj błędy odczytu parametrów sinusoid z periodogramów o większym indeksie widmowej koncentracji energii  $J[N]$ , jest ona (w sensie kryteriów zawartych w zapisach (20)) istotnie najlepsza. Jednak osiągnięcie optimum wymaga znalezienia globalnego maksimum indeksu  $J[N]$  dla  $N_{\min} < N < \infty$ . W praktyce jednak poszukiwania ograniczamy od góry do pewnego sensownego  $N_{\max}$ . W takim przypadku poszukiwanie najkorzystniejszego  $N$  należy prowadzić pośród kilku największych wartości indeksu  $J[N]$ .



Rys. 8. Statystyki średniego błędu estymacji pulsacji (20a) (po lewej) i średniego błędu estymacji amplitud (20b) (po prawej)

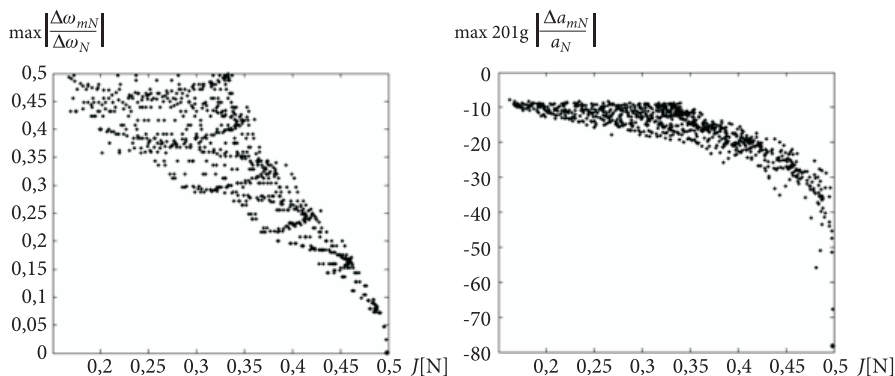
Podobne zależności można zaobserwować dla kryteriów sformułowanych wzorami (19) (rys. 9), z tą różnicą, że odpowiedni dobór  $N$  jest tutaj bardziej istotny, ponieważ wszystkie składowe sygnału w jednakowym stopniu muszą być pozbawione przecieków.

Natomiast ze skupień statystyk (21) (rys. 10) potwierdza się wcześniejsze spostrzeżenie, że błąd estymacji pulsacji składowych (19a) i (20a) jest wyraźnie skorelowany z błędem estymacji amplitud składowych (19b) i (20b). Stąd dla dużych wartości indeksu  $J[N]$  periodogramy dają możliwość szczególnie dokładnej estymacji i pulsacji i amplitudy/mocy wydobytych przez nie sinusoid.

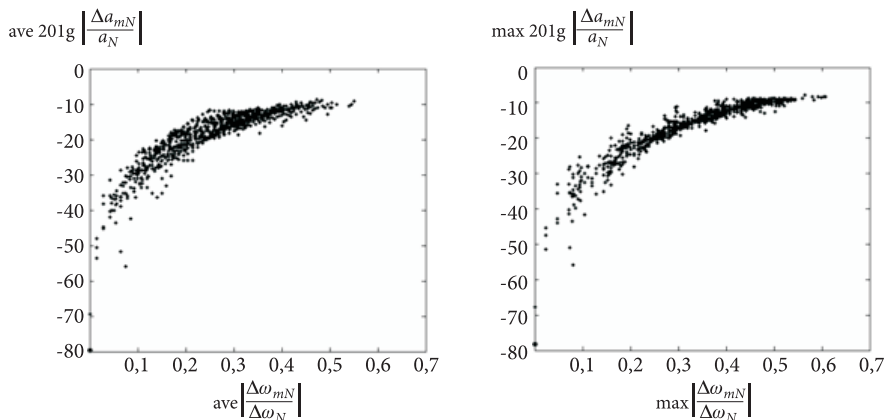
Wszystkie wnioski, które przedstawiono powyżej na przykładzie sygnału o dwu składowych sinusoidalnych o jednakowych amplitudach, sprawdzają się również dla sygnałów bardziej złożonych. Podstawowa różnica polega na tym, że przy



większej liczbie sinusoid zwykle poszukiwana wartość  $N$ , dla której jakość estymat parametrów składowych sygnału jest najlepsza, jest znacząco większa. Dodatkowo, jeżeli składowe sygnału znacząco różnią się amplitudami, to wpływ najmniejszej ze składowych na indeks  $J[N]$  jest bardzo mały, co może utrudnić poszukiwanie optymalnej długości obserwacji  $N$ .



Rys. 9. Statystyki maksymalnego błędu estymacji pulsacji (19a) (po lewej) i maksymalnego błędu estymacji amplitud (19b) (po prawej)



Rys. 10. Statystyki błędu estymacji amplitudy w funkcji błędu pulsacji; średni (po lewej) (21b), maksymalny (po prawej) (21a)

## 6. Podsumowanie

Przedmiotem badań autorów w tej pracy jest klasyczny (surowy) periodogram — estymata widma gęstości mocy opublikowana ponad sto lat temu, ale szczególnie przydatna do dziś do wykrywania składowych sinusoidalnych zawartych w badanym



procesie i do estymacji ich parametrów: pulsacji i mocy. Znanym faktem jest to, że błędy takiej estymacji (odczytu z periodogramu) parametrów sinusoid silnie zależą od długości obserwacji, na podstawie których obliczono periodogram. Autorzy zaproponowali tu nowy parametr periodogramu nazwany indeksem widmowej koncentracji energii, który umożliwia wybór takiej długości obserwacji, dla której odczyty parametrów sinusoid z jej periodogramu są znacznie dokładniejsze. Zachęcające wyniki eksperymentu numerycznego potwierdzają hipotezę autorów i zapowiadają praktyczną przydatność nowego podejścia, np. w badaniach diagnostycznych ciężkich maszyn wirnikowych w oparciu o generowane przez nie sygnały wibroakustyczne [11, 12].

Artykuł wpłynął do redakcji 3.11.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w listopadzie 2009 r.

#### LITERATURA

- [1] A. J. SCHUSTER, *The Periodogram of Magnetic Declination as obtained from the records of the Greenwich Observatory during the years 1871-1895*, Trans. Cambridge Phil. Soc., 18, 1899, 107-135.
- [2] J. W. COOLEY, J. W. TUKEY, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp., 19, 1965, 297-301.
- [3] M. T. HEIDEMAN, D. H. JOHNSON, C. S. BURRUS, *Gauss and the history of the fast Fourier Transform*, IEEE ASSP Magazine, 1, 4, 1984, 14-21.
- [4] R. H. JONES, *A reappraisal of the periodogram in spectral analysis*, Technometrics, 7, 1965, 531-542.
- [5] R. A. OLSHEN, *Asymptotic properties of the periodogram of the discrete stationary process*, Journal Appl. Probability, 4, 1967, 508-528.
- [6] A. V. OPPENHEIM, R. W. SCHAFER, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975 (tłum. pol., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, WKŁ, Warszawa, 1979).
- [7] L. R. RABINER, B. GOLD, *Theory and Applications of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [8] S. M. MARPLE, *Modern Spectral Estimation with Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- [9] S. M. KAY, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- [10] P. STOICA, R. L. MOSES, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1997, 1-st edition, 2005, 2-nd edition.
- [11] Cz. CEMPEL, *Diagnostyka wibroakustyczna maszyn*, AGH, Kraków, 2005.
- [12] W. CHOLEWA, J. KAZIMIERCZAK, *Data Processing and Reasoning in Technical Diagnostics*, WNT, Warszawa, 1995.



M. BLOK, M. ROJEWSKI

**On accuracy improvement of periodogram — stationary stochastic process  
power spectral density estimate**

**Abstract.** In this paper, it has been demonstrated that if the length of the discrete-time stationary stochastic process observation length is carefully selected, the accuracy of sinusoidal components parameters estimation can be significantly improved. Observation length selection is based on new, defined in this paper, parameter called spectral energy concentration index. Our reasoning has been illustrated with results of numerical experiments.

**Keywords:** discrete-time stationary stochastic process, periodogram, parameters estimation accuracy

**Universal Decimal Classification:** 621.317.361

