

## OBCIĄŻENIA DŁUGIEGO, WIOTKIEGO PRĘTA PRZENOSZONEGO PRZEZ UKŁAD ROBOTÓW

KRZYSZTOF LIPIŃSKI

*Katedra Mechaniki i Mechatroniki, Politechnika Gdańska  
e-mail: klipinsk@pg.gda.pl*

Streszczenie. W pracy opisano układ manipulacji przemieszczający długie i delikatne przedmioty. Wykorzystano dwa niezależne manipulatory. Po uchwyceniu ładunku układ staje się dynamicznie nadmobilny. Powstają dodatkowe obciążenia przenoszone przez ładunek. Mogą być one krytyczne, zwłaszcza dla przenoszonego przedmiotu. Układ zamodelowano jako wieloczłonowy. Poszczególne osie manipulatora sterowane są autonomicznie. Przeprowadzono badania numeryczne. Badano obciążenia pojawiające się w centralnym punkcie pręta.

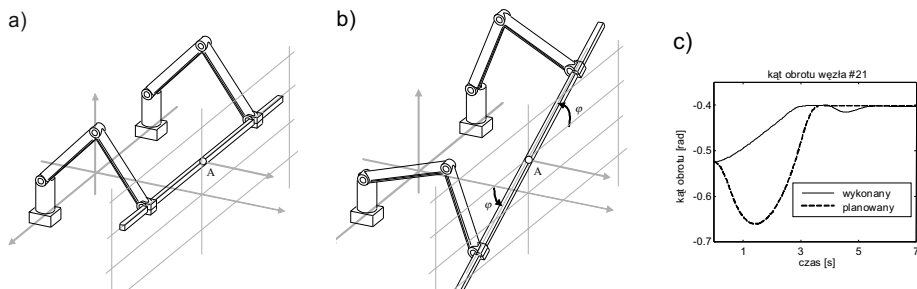
### 1. WSTĘP

W pracy opisano zjawiska występujące w układzie manipulacji przemieszczającym długie, wiotkie i delikatne przedmioty. Gdy operuje się za pomocą pojedynczego robota, precyzyjne manipulowanie staje się kłopotliwe. Z uwagi na długość pręta pozycjonowanie jego końca wymaga dokładnej informacji o kącie obrotu kiści (nadgarstka). Co więcej, z uwagi na bezwładność pręta, pojawiają się znaczne, dynamiczne obciążenia chwytaka jak i znaczne obciążenia poprzedzającej go kiści. Przez analogię do pracy zespołu ludzi, rekomendowane jest korzystanie z układu robotów (manipulatorów) (rys. 1a). W swojej najprostszej postaci składa się on z dwóch manipulatorów, ustawionych przy końcach manipulowanego przedmiotu. Ponieważ klasyczne manipulatory to urządzenia pracujące autonomicznie (wykonują zadania indywidualne), ich możliwości współpracy (wymiany informacji) są ograniczone. Po uchwyceniu ładunku, pomimo powiązań mechanicznych, układy sterowania pozostają autonomiczne (niepowiązane). Utrudnia to manipulację. Co więcej, uzyskany układ jest dynamicznie nadmobilny, a zadane trajektorie ruchu (poza ustawieniem końcowym i początkowym) okazują się niekompatybilne z równaniami więzów. W efekcie trajektorie rzeczywiste nie oddają trajektorii zadanych (niezgodności z więzami materialnymi nie są możliwe). Prowadzi to do powstania obciążeń wewnętrznych, w tym obciążeń przenoszonych przez ładunek. Mogą być one krytyczne, zwłaszcza wtedy, gdy przedmiot manipulacji jest długi.

Publikacje dotyczące wspólnego przenoszenia ładunku spotykane są sporadycznie [1]. Częściej spotyka się informacje o dynamice układów nadmobilnych dynamicznie [2-5]. Niestety, z uwagi na brak powiązań pomiędzy układami sterowania opisany tam algorytm wyznaczania momentów napędowych nie może być zastosowany.

Z uwagi na wymagania dotyczące precyzji, jak i na wartość manipulowanego przedmiotu, skorzystanie z kosztownych manipulatorów jest nieuzasadnione. Analizę ograniczono do

prostego, taniego układu manipulacji. Manipulatory wyposażono w układ sterowania typu point-to-point (szczegóły opisujące trajektorie traktowane są jako drugorzędne). Każda z osi sterowana jest autonomicznie. W zależności od etapu ruchu stosowane są odmienne algorytmy sterowania. W położeniach odległych od finalnego stosowana jest proporcjonalna kontrola prędkość kątowej (obrót w przegubie). W położeniach bliskich finalnego stosowany jest sterownik proporcjonalno-różniczkowy kontrolujący pozycję. Z modelu usunięto efekty wynikające z istnienia siły grawitacji. Zdecydowano się na to, pragnąc wyeksponować efekty wynikające z nadmierności dynamicznej. Prezentowane wyniki ograniczono do opisu wybranego, elementarnego ruchu manipulatora.



Rys. 1. Układ manipulacji: ustawienie początkowe (a); ustawienie końcowe (b); trajektoria założona i realizowana (c)

Pracę podzielono na 5 rozdziałów. Rozdział pierwszy wprowadza w prezentowaną tematykę. W rozdziale drugim zarysowano elementy stosowanej metody symulacji. Rozdział trzeci poświęcono na prezentację danych numerycznych prezentowanego modelu. W rozdziale czwartym zaprezentowano uzyskane wyniki symulacji. Rozdział piąty przeznaczono na podsumowanie i wnioski.

## 2. DYNAMIKA UKŁADU WIELOCZŁONOWEGO

Układ zbudowano z członów nieodkształcalnych. Człony łączone są za pomocą węzłów (postępowych i obrotowych par kinematycznych o jednym stopniu swobody). Układ ma formę zamkniętego łańcucha kinematycznego. Rozcinając pętle kinematyczne, konstruuje się układ referencyjny - otwarty układ o strukturze drzewa. Rozpoczynając od nieruchomego członu odniesienia (numerowanego jako człon zerowy), pozostałe człony numerowane są w kolejności występowania w łańcuchu układu referencyjnego (rys. 2a oraz rys. 3).

W kartezjańskim układzie członu odniesienia wyznaczane są prędkości i przyspieszenia środków mas oraz prędkości i przyspieszenia kątowe. Są one kombinacjami liniowymi wektorów cząstkowych. Mnożnikami są prędkości i/lub przyspieszenia współrzędnych złączowych. Korzystając z zasad rachunku macierzowego, zapisuje się to w postaci [5, 7]:

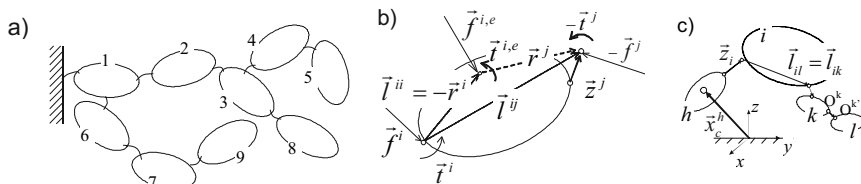
$$\vec{\omega}^i = \vec{A}^{2,i} \cdot \dot{\mathbf{q}} ; \quad \vec{x}^i = \vec{A}^{1,i} \cdot \dot{\mathbf{q}} ; \quad \vec{\omega}^i = \vec{A}^{2,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{\omega}^{i,R} ; \quad \vec{x}^i = \vec{A}^{1,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{x}^{i,R} , \quad (1)$$

gdzie:  $\vec{\omega}^i$  - prędkość kątowa członu  $i$ ;  $\vec{x}^i$  - położenie jego środka masy;  $\vec{A}^{1,i}$ ;  $\vec{A}^{2,i}$  - macierze wektorów cząstkowych (ich elementami są wektory);  $\vec{\omega}^{i,R}$ ;  $\vec{x}^{i,R}$  - wektory resztkowe grupujące wyrażenia niezależne od przyspieszeń złączowych (przyspieszeń w węzłach).

Na etapie dynamiki rozcinane są wszystkie węzły, a w ich miejsce wprowadzane są oddziaływania (siły i momenty reakcji dynamicznych). Dynamikę oswobodzonego członu opisują: II zasada dynamiki Newtona (ruch postępowy) oraz równania Eulera (obrotowy) [7]:

$$m \cdot \ddot{\vec{x}}_C = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \vec{f}_{\alpha} \quad ; \quad \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) + \vec{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \sum_{\delta=1}^{\epsilon} \vec{t}_{\delta C} + \sum_{\alpha=1}^{\beta} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha}, \quad (2)$$

gdzie:  $\ddot{\vec{x}}_C$  – przyspieszenie środka masy;  $\vec{f}_{\alpha}$  - siła zewnętrzna;  $\vec{t}_{\delta C}$  - zewnętrzny moment sił, (wyznaczany względem środka masy członu);  $\vec{r}_{\alpha}$  - wektor określający położenie punktu przyłożenia siły (mierzony względem środka masy).



Rys. 1. Układ wielocłonowy: przykładowa numeracja (a); obciążenia członu (b); wektory opisujące geometrię (c)

Równania dynamiki (2) łączone są z równaniami kinematyki (1). Grupując wyrażenia poprzedzające przyspieszenia współrzędnych uogólnionych, otrzymuje się [5, 7]:

$$\begin{aligned} \vec{B}^{1,j} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + m^j \cdot \ddot{\vec{x}}^{i,R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \vec{f}^{z,j} + \sum_{j \in \{i, i^*\}} \vec{f}^j \quad ; \\ \vec{B}^{2,j} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{\omega}^i \times (\vec{I}^i \cdot \vec{\omega}^i) + \vec{I}^i \cdot \dot{\vec{\omega}}^{i,R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \vec{t}^{z,j} + \sum_{j \in \{i, i^*\}} \vec{t}^j + \sum_{j \in \{i, i^*\}} \vec{r}^{ij} \times \vec{f}^j. \end{aligned} \quad (3)$$

Podobnie jak w (1), elementami macierzy  $\vec{B}^{1,j}$ ,  $\vec{B}^{2,j}$  są wektory. Jako pierwsze wyznaczane są równania dynamiki końcowego członu łańcucha (brak następców). Kolejne równania dynamiki uzyskuje się drogą iteracji zstępującej. Wyznaczane są oddziaływania w węzle poprzedzającym. Następnie usuwane są symbole oddziaływań bezpośrednich następców. Po zakończeniu otrzymuje się [7]:

$$\vec{f}^i = \vec{C}^{1,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{D}^{1,i} + \vec{E}^{1,i} \quad ; \quad \vec{t}^i = \vec{C}^{2,i} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \vec{D}^{2,i} + \vec{E}^{2,i}, \quad (4a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \vec{C}^{1,i} &= \sum_{l:i \leq l} \vec{B}^{2,l} \quad ; \quad \vec{D}^{1,i} = \sum_{l:i \leq l} m^l \cdot \ddot{\vec{x}}^{l,R} \quad ; \quad \vec{E}^{1,i} = -\sum_{l:i \leq l} \vec{f}^{z,l} \quad ; \quad \vec{C}^{2,i} = \sum_{l:i \leq l} [\vec{B}^{1,l} + (\sum_{k:i \leq k \leq l} \vec{r}^{kl}) \times \vec{B}^{2,l}] \quad ; \\ \vec{D}^{2,i} &= \sum_{l:i \leq l} [\vec{\omega}^l \times (\vec{I}^l \cdot \vec{\omega}^l) + \vec{I}^l \cdot \dot{\vec{\omega}}^{l,R} + m^l \cdot (\sum_{k:i \leq k \leq l} \vec{r}^{kl}) \times \ddot{\vec{x}}^{l,R}] \quad ; \quad \vec{E}^{2,i} = -\sum_{l:i \leq l} [\vec{t}^{z,l} - (\sum_{k:i \leq k \leq l} \vec{r}^{kl}) \times \vec{f}^{z,l}]. \end{aligned} \quad (4b)$$

Dla danego węzła  $i$  tylko jedna z reakcji (4a) (siła lub para sił) jest aktywna. W celu wyznaczenia jej składowej aktywnej wyznaczany jest iloczyn skalarny (rzut) reakcji i wektora kierunku przemieszczenia. Grupując wyniki w macierzach, uzyskujemy [5, 6, 7]

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{f}_e, \mathbf{t}_e, t) = 0, \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$  - macierz mas;  $\mathbf{F}$  – wektor pozostałych efektów bezwładnościowych (odśrodkowych, żyroskopowych i Coriolisa);  $\mathbf{Q}$  – wektor oddziaływań zewnętrznych.



Dla układu z więzami, równania (5) układu referencyjnego rozszerzane są o wyrazy reprezentujące reakcje więzów (równań Lagrange'a I rodzaju). Ponadto są one łączone z algebraicznymi równaniami wiążącymi współrzędne położenia (równania więzów). Efekt zapisywany jest w postaci [6,7]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_\#, t) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_\# + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}_\#, \mathbf{q}_\#) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}_\#, \mathbf{q}_\#, \mathbf{f}_e, \mathbf{t}_e, t) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_\#) \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad ; \quad \mathbf{h}(\mathbf{q}_\#) = 0, \quad (6)$$

gdzie:  $\mathbf{h}$ - macierz równań więzów;  $\mathbf{J}$  - Jakobian macierzy  $\mathbf{h}$ ;  $\boldsymbol{\lambda}$  - macierz mnożników Lagrange'a;  $\mathbf{q}_\#$  - macierz współrzędnych złączowych układu rozciątego.

Z uwagi na rozcięcie więzów liczba współrzędnych złączowych jest większa niż liczba stopni swobody. Elementy macierzy  $\mathbf{q}_\#$  dzielone są na elementy zależne  $\mathbf{v}$  oraz niezależne  $\mathbf{q}$ . Wielkości  $\boldsymbol{\lambda}$  oraz  $\mathbf{v}$  są eliminowane. Wykorzystywana jest metoda podziału zmiennych [8]. Znajdywane jest numeryczne rozwiązanie nieliniowego równania (6b):

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{q}, t), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{q}_\# = [\mathbf{q}, \mathbf{v}]^T. \quad (7)$$

Równanie (6b) jest różniczkowane i wyznaczane są relacje opisujące prędkości i przyspieszenia współrzędnych zależnych  $\mathbf{v}$ . Mają one postać [6, 7, 9]:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{J}_v^{-1} \cdot \mathbf{J}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{v}} = -\mathbf{J}_v^{-1} \cdot \mathbf{J}_q \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_v^{-1} \cdot [(\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}})_{q_\#} \cdot \dot{\mathbf{q}}_\#]. \quad (8)$$

Eliminując mnożniki  $\boldsymbol{\lambda}$  oraz współrzędne  $\mathbf{v}$  z relacji (6a), otrzymuje się

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{q}_\#, t) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}^*(\dot{\mathbf{q}}_\#, \mathbf{q}_\#) + \mathbf{Q}^*(\dot{\mathbf{q}}_\#, \mathbf{q}_\#, \mathbf{f}_e, \mathbf{t}_e, t) = 0, \quad (9a)$$

gdzie:  $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_{qq} - \mathbf{M}_{qv} \cdot \mathbf{J}_v^{-1} \cdot \mathbf{J}_q - \mathbf{J}_q^T \cdot (\mathbf{J}_v^{-1})^T (\mathbf{M}_{vq} - \mathbf{M}_{vv} \cdot \mathbf{J}_v^{-1} \cdot \mathbf{J}_q)$ ;

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_q - \mathbf{M}_{qv} \cdot \mathbf{J}_v^{-1} \cdot (\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}})_{q_\#} \cdot \dot{\mathbf{q}}_\# - \mathbf{J}_q^T \cdot (\mathbf{J}_v^{-1})^T (\mathbf{F}_v - \mathbf{M}_{vv} \cdot \mathbf{J}_v^{-1} \cdot (\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}})_{q_\#} \cdot \dot{\mathbf{q}}_\#); \quad (9b)$$

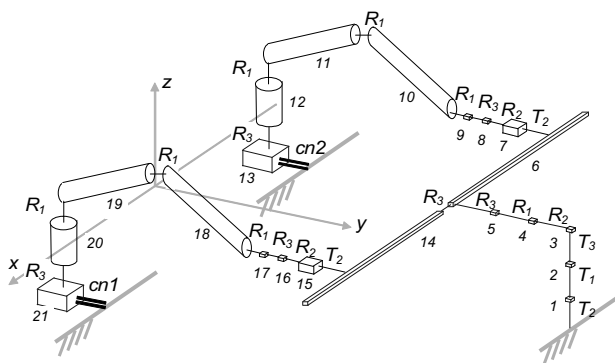
$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_q - \mathbf{J}_q^T \cdot (\mathbf{J}_v^{-1})^T \mathbf{Q}_v.$$

### 3. PROPONOWANY UKŁAD WIELOCZŁONOWY

Użyty mechanizm (rys. 1) modelowany jest jako układ wieloczłonowy (rys. 3). Składa się on z 21 członów połączonych węzłami. W położeniu konstrukcyjnym osie węzłów pokrywają się z osiami głównego kartezjańskiego układu współrzędnych (układu związanego z członem odniesienia). Układ węzłów zaprezentowano na rys. 3. Symbol  $\mathbf{R}_i$  oznacza węzeł rotacyjny, a symbol  $\mathbf{T}_i$  węzeł translacyjny (oś równoległa do  $i$ -tej osi głównego układu współrzędnych). W modelu występują zamknięte łańcuchy kinematyczne. Z uwagi na specyfikę użytych równań więzów (typu człon-cień [6]) pętla rozcinana jest w miejscu, gdzie kolumna manipulatora osadzona jest na członie odniesienia. Aby uniknąć numerycznego „uprzywilejowania” (przez umieszczenie manipulatora na końcu łańcucha kinematycznego), przywołano współrzędne absolutne (pręta). Wprowadzono pięć dodatkowych członów pozornych. Ich węzły modelują współrzędne absolutne środka przenoszonego pręta. Jest on modelowany za pomocą dwóch członów połączonych parą obrotową. Para ta jest unieruchomiona za pomocą równania więzów. Mnożniki Lagrange'a odpowiadające tej współrzędnej reprezentują badaną składową obciążenia pręta.



Przenoszony pręt to pręt stalowy o średnicy  $\Phi_p = 8$  mm i długości  $l = 6$  m. Jest on przenoszony przez dwa manipulatory, w położeniu początkowym ustawione prostopadłe do pręta. Odległość między manipulatorami wynosi  $l_2 = 4$  m. Manipulatory są identyczne (masowo i geometrycznie). Masa członów modelujących pręt to  $m_6 = m_{14} = 1,2$  kg. Ich moment bezwładności względem osi pręta to  $I_x^6 = I_x^{14} = 9,422 \cdot 10^{-6}$  kg m<sup>2</sup>. Dla osi prostopadłych do osi pręta  $I_y^6 = I_z^6 = I_y^{14} = I_z^{14} = 0,90048$  kg m<sup>2</sup>. Kolumna manipulatora (wysokość  $h_k = 70$  cm) modelowana jest jako rura stalowa o średnicy  $\Phi_k = 16$  cm i grubości ścianki  $d_k = 1$  cm. Jej masa to  $m_k = 35$  kg, a moment bezwładności względem osi kolumny to  $I_z^k = 0,224$  kg m<sup>2</sup>. Ramiona (o długości  $l_r = 1,5$  m) modelowane są jak rury stalowe o średnicy  $\Phi_r = 8$  cm i grubości ścianki  $d_r = 6$  mm. Ich masa to  $m_r = 20$  kg, a centralny moment bezwładności względem osi ramienia to  $I_y^r = 0,032$  kg m<sup>2</sup>, względem osi prostopadłych to  $I_x^r = I_z^r = 3,766$  kg m<sup>2</sup>. Momenty dewiacyjne są zerowe. Chwytki modelowane są członami o masie  $m_c = 0,5$  kg. Ich centralne momenty bezwładności to  $I_x^c = I_z^c = 2,66 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup> oraz  $I_y^c = 1,33 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>2</sup>. Punkt chwytu znajduje się o  $l_c = 8$  cm od centralnego punktu końca chwytaka.



Rys. 3. Struktura układu wielocłonowego, schemat numeracji członów i użytych par kinematycznych

Tabela 1. Zastosowane, nominalne współczynniki sterowania poszczególnymi osiami

Numery osi	sterownik prędkości		sterownik położenia	
	$k_{pv}$	zakres	$k_{pp}$	$k_{vp}$
8/16	7	90%	20	3
9/17	7	90%	20	3
10/18	7	90%	20	3
11/19	40	90%	400	100
12/20	80	90%	1500	500
13/21	100	90%	7000	700

W testowanym manipulatorze każda z osi sterowana jest autonomicznie. Proporcjonalne sterowniki prędkości połączono z proporcjonalno-różniczkowymi sterownikami położenia końcowego. Prędkość nominalna wyznaczana jest na podstawie zadanego czasu nominalnego.



Czas ten jest parametrem odniesienia (pominięcie czasu przyśpieszenia i hamowania). Rzeczywisty czas ruchu jest dłuższy. Podchodząc „dostatecznie blisko” położenia końcowego (wartość graniczna zadawana przez użytkownika), sterownik prędkości zamieniany jest na sterownik położenia końcowego. Współczynniki wzmocnienia umieszczono w tabeli 1.

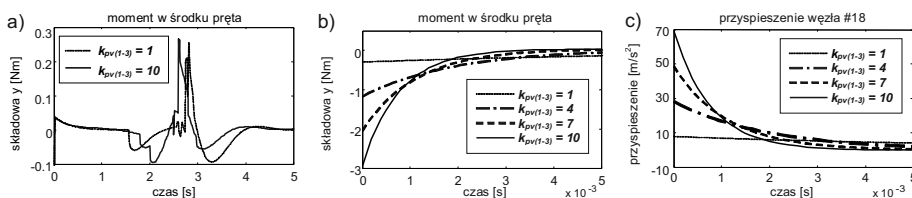
#### 4. WYNIKI OBLICZEŃ

Korzystając z opisanego modelu numerycznego, badano wpływ wybranych parametrów układu sterowania na obciążenia pręta. Badania zawężono do analizy jednego, elementarnego ruchu pręta (rys. 1). Podczas testu pręt obraca się w płaszczyźnie pionowej. Pozycja jego środka masy nie ulega zmianie.

Jak pokazano na rys. 4, nominalne wartości parametrów przedstawione w tabeli 1 pozwalają na zadowalające odwzorowanie zadanego położenia końcowego. Ruch w węzłach wykonany jest z zadowalającą precyzją (rys. 4a). Przy przebiegach zbliżonych do liniowych, z uwagi na nieliniowość geometrii mechanizmu, trajektoria ruchu środka masy pręta jest złożona (rys. 4c). O ile charakterystyka opisująca zmianę orientacji pręta jest bliska oczekiwanej (rys. 4b), o tyle pozycja środka masy obciążona jest niepożądanym, przejściowym wychyleniem z pozycji nominalnej (rys. 4c). Ponieważ wychylenie takie jest akceptowane przez użytkownika, zaproponowany sposób sterowania został zaakceptowany (przyjęty) do dalszych rozważań.



Rys. 4. Przemieszczenia wybranych elementów układu: kąt obrotu w węźle przedramienia (a); kąt przechylenia pręta (b); położenie środka masy pręta (c)

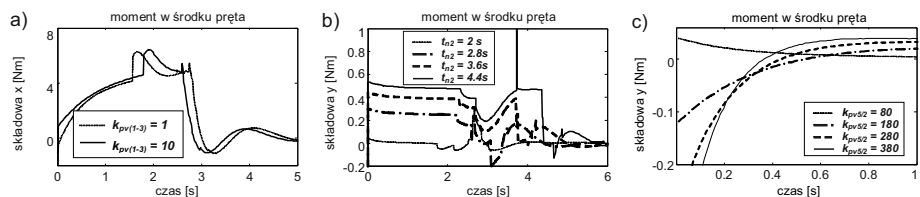
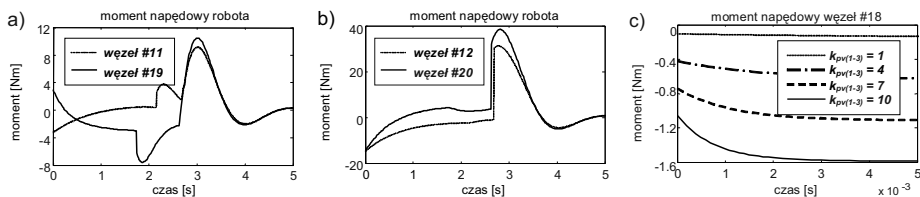


Rys. 5. Składowa poprzeczna momentu przenoszona przez punkt centralny pręta: pełny okres ruchu (a); początkowy okres ruchu (b); przyśpieszenie w węźle kiści (c)

Z uwagi na własności przenoszonego elementu obciążeniem neuralgicznym jest zginanie. Wyznaczana jest składowa pozioma (w lokalnym układzie związanym z prętem) momentu w centralnym punkcie pręta. Otrzymane charakterystyki przedstawiono na rys. 5. Potwierdzają one (rys. 5a) niewielką wartość przenoszonego momentu (zwłaszcza w porównaniu z momentami generowanymi w napędach – rys. 6). Nieco większe wartości obserwowane są w bardzo krótkim, początkowym okresie ruchu (rys. 5b). Obserwowane tu wartości zależą od wartości współczynników wzmocnienia występujących w układzie sterowania. W konsekwencji powiązane są z przyśpieszeniami pojawiającymi się w kiści manipulatora (rys. 5c). Wynikają z niewielkiej bezwładności pręta (względem własnej osi). Osiągnięte tu

przyśpieszenia są bardzo duże. Zmniejszenie współczynników nie jest możliwe z uwagi na inne funkcje manipulatorów.

Analiza przenoszonych momentów pokazuje ważną rolę momentu skręcającego (rys. 7a). Jest on dwudziestokrotnie większy od momentu zginającego. Przeprowadzone badania porównawcze wykazały, że wpływ współczynników wzmocnienia układu sterowania kiścią jest tu mniejszy. Kolejne badania porównawcze pokazują, jak ważną rolę odgrywa symetria współpracujących manipulatorów. Jej zachwianie, na przykład przez przyjęcie odmiennych czasów nominalnych (rys. 7.b) lub odmiennych współczynników wzmocnienia układu sterowania przegubem ramienia (rys. 7c), może znacząco wpłynąć na wartość przenoszonych momentów.



#### 4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

Uznając manipulatory za urządzenia pracujące autonomicznie (bez wymiany informacji), zauważa się, że operowanie dwoma manipulatorami ustawionymi przy końcach przedmiotu jest utrudnione. Uzyskiwany układ jest nadmobilny dynamicznie. Trajektorie ruchu uzyskiwane są kosztem obciążeń wewnętrznych przenoszonych przez ładunek. Obciążenia te mogą okazać się krytyczne, zwłaszcza przy manipulacji długimi i delikatnymi przedmiotami. W analizowanym ruchu (obrocie w płaszczyźnie pionowej) niewalgiiczne obciążenia zginające nie przyjmują znaczących wartości. Wyjątkiem jest początkowy okres ruchu. O wiele większe wartości przyjmują obciążenia skręcające. Bardzo istotną rolę odgrywa symetria mechaniczna i symetria sterowania manipulatorami. Jej zanik prowadzi do istotnego zwiększenia przenoszonych obciążeń. Przedstawione wyniki stanowią ważny wstęp do dalszych badań. Należy je poszerzyć o analizę innych ruchów elementarnych oraz analizę wpływu pozostałych parametrów przedmiotu i manipulatorów. Ważnym aspektem jest także wpływ podatności przenoszonego przedmiotu.



## LITERATURA

1. Zheng Y.F., Luh J.Y.S.: Optimal load distribution for two industrial robots handling a single object. In: Proceedings of the 1988 IEEE Inter. Conf. on Robotics and Autom., 1988, p. 344-349.
2. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S.: Force redundancy in parallel manipulators: theoretical and practical issues." Mech. Mach Theory" 1998, 33, p. 727-742.
3. Ebrahimi I., Carretero J.A., Boudreau R.: 3-PRRR redundant planar manip.: inverse displacement, workspace and singularity analyses. "Mech. Mach. Theory" 2007, 42, p. 1007-1016.
4. Zaho Y., Gao F.: Dynamic performance of the 8PSS redundant parallel manipulator and its non-redundant counterpart – the 6PSS parallel manipulator. "Mech. Mach. Theory" 2009, 44, p. 991-1008.
5. Lipiński K.: Trajectory tracking problem for a redundantly actuated walking robot. "Int. J. of Applied Mechanics and Engineering" 2010, Vol. 15, No3, p.743-753.
6. Fisette P., Samin J.C.: Symbolic modeling of multibody system. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.
7. Lipiński K.: Multibody and electromechanical modelling in dynamic balancing of mechanisms for mechanical and electromechanical systems. "Solid State Phenomena" 2009, 147-149, p. 339-344.
8. Haug E.J., Yen J.: Generalized coordinate partitioning methods for numerical integration of differential-algebraic equations of dynamics. NATO ASI Series, Vol. F69, Springer-Verlag Berlin, 1990, p. 97-114.

**INTERNAL FORCES PRESENT IN A LONG,  
FLABBY BAR CARRIED BY A SET OF ROBOTS**

Summary. In the paper, a manipulation set composed of a set of manipulators (robots) is presented. The set is devoted to carry a long and delicate element. Two manipulators are used. When the element is captured, the system converts to a dynamically over-articulated system. Some additional internal loads become present in the carried element. Such loads can be critical, especially for the captured element. The considered system is modelled as a multibody system. Each of its axes is controlled individually (in an autonomic way). A set of numerical tests is performed to predict the load present in the central point of the carried element.

