



## Modelowanie propagacji fal sprężystych w tarczy typu T w kontekście możliwości diagnostycznych

JACEK CHRÓŚCIELEWSKI, MAGDALENA RUCKA,  
KRZYSZTOF WILDE, WOJCIECH WITKOWSKI

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska,  
Katedra Mechaniki Budowli i Mostów, 80-233 Gdańsk, ul. Narutowicza 11/12

**Streszczenie.** Tematem pracy są symulacje przebiegu fal sprężystych w płaskiej tarczy o kształcie przypominającym literę T. Obliczenia wykonano, stosując metodę elementów spektralnych. Porównawcze rozwiązania numeryczne wykonane zostały dla tarczy nieuszkodzonej, jak również dla tarczy z wprowadzonym uszkodzeniem. Zadaniem rejestrowanych sygnałów czasowych przyspieszeń fal sprężystych jest próba wykrycia i zlokalizowania uszkodzenia. W pracy przeprowadzono dyskusję nad możliwością detekcji uszkodzeń w rozpatrywanym typie węzła konstrukcji kratowych.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów spektralnych, węzły kratownicy, propagacja fal sprężystych, wykrywanie uszkodzeń

### 1. Wstęp

Modelowanie propagacji fal sprężystych jest tematem intensywnych badań naukowych. Możliwe jest sformułowanie problemu w dziedzinie czasu [1, 2] lub w dziedzinie częstotliwości [3]. Obliczenia w dziedzinie czasu mogą być przeprowadzane metodą elementów skończonych. Podejście to wymaga jednak stosunkowo dużej liczby węzłów na długość fali (około 40). Dlatego też w pracy zastosowano metodę elementów spektralnych, będącą rozwinięciem klasycznej metody elementów skończonych. W metodzie elementów spektralnych stosuje się wielowęzłowe elementy, w każdym z przestrzennych kierunków aproksymacji z interpolacją Lagrange'a. Jednak wykorzystują one nierównoodległy rozkład węzłów elementu wzorcowego zgodny z położeniem punktów całkowania numerycznego kwadraturą Gaussa-Lobatto-Legendre'a (węzły GLL). Podejście to umożliwia zmniejszenie

wymaganej liczby węzłów na długość fali do około 5-10, a także gwarantuje, iż otrzymana macierz mas przyjmuje formę diagonalną.

Wcześniejsze prace dotyczące propagacji fal sprężystych w płaskim stanie naprężenia dotyczyły m.in. tarczy kwadratowej [4] ze wzbudzeniem punktowym. Tematem niniejszej pracy są symulacje przebiegu fal sprężystych w płaskiej tarczy o kształcie przypominającym literę T. Analizowany element konstrukcyjny stanowi „zgrubne” przybliżenie kształtu węzłów kratowych charakterystycznych dla takich konstrukcji jak dźwigary mostowe, wieże wysokiego napięcia czy też przekrycia strukturalne różnych obiektów. Obszar zastosowań praktycznych niniejszej pracy skierowany jest na poszukiwanie sposobów taniej i bezinwazyjnej lokalizacji uszkodzeń eksploatowanych konstrukcji w warunkach polowych. Obliczenia wykonano stosując metodę elementów spektralnych. Porównawcze rozwiązania numeryczne przeprowadzono dla tarczy nieuszkodzonej, jak również dla tarczy z wprowadzonym uszkodzeniem. Zadaniem rejestrowanych sygnałów czasowych przyspieszeń fal sprężystych jest próba wykrycia i zlokalizowania uszkodzenia. W pracy przeprowadzono dyskusję nad możliwością detekcji uszkodzeń w rozpatrywanym typie węzła konstrukcji kratowych.

## 2. Metoda elementów spektralnych

Rozpatrywane spektralne elementy skończone są przemieszczeniowymi wielowęzłowymi, dwuwymiarowymi elementami  $C^0$ . Ogólne podstawy formułowania elementów przemieszczeniowych można odnaleźć na przykład w pracach [5, 6, 7]. Z tego też względu w poniższym paragrafie ograniczamy wywody do niezbędnego minimum.

Rozpatrujemy pewne ciało  $B$  z brzegiem  $\partial B = \partial B_d \cup \partial B_f$ , takim że  $\partial B_d \cap \partial B_f = \emptyset$ , wykonane z materiału sprężystego, jednorodnego i izotropowego, o gęstości  $\rho > 0$ . W dalszym ciągu zakładamy, że indeksy greckie przyjmują wartości 1 i 2, indeks poprzedzony przecinkiem oznacza obliczanie pochodnej względem odpowiedniej współrzędnej kartezjańskiej. Standardowo, kropka nad symbolem oznacza różniczkowanie po czasie.

W przypadku liniowej elastodynamiki podstawowy, hiperboliczny układ równań problemu brzegowo-początkowego może być zapisany jako

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + b_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \equiv u_{(\alpha,\beta)}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\pi} u_{(\gamma,\pi)}, \quad C_{\alpha\beta\gamma\pi} = \bar{\lambda} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\pi} + \mu(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\pi} + \delta_{\alpha\pi} \delta_{\beta\gamma}), \quad (3)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{Ev}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$



W powyższych wzorach  $u_\alpha, \dot{u}_\alpha, \ddot{u}_\alpha, \varepsilon_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}, b_\alpha, C_{\alpha\beta\gamma\pi}$  oznaczają odpowiednio kartezyjskie współrzędne: wektora przemieszczenia  $\mathbf{u}$ , wektora prędkości  $\dot{\mathbf{u}}$ , wektora przyspieszenia  $\ddot{\mathbf{u}}$ , tensora małych odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , tensora naprężeń (Cauchy'ego)  $\boldsymbol{\sigma}$ , wektora gęstości sił masowych  $\mathbf{b}$  i tensora sprężystości  $\mathbf{C}$ .

Równania (1)-(3) należy uzupełnić o warunki brzegowe  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  na  $\partial B_d$  i  $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$  na  $\partial B_f$ . Tutaj  $\mathbf{t} \rightarrow t_\alpha = \sigma_{\beta\alpha} n_\beta$  jest wektorem naprężenia kontaktowego na dowolnej powierzchni (w tym  $\partial B$ ), a  $\mathbf{n}$  oznacza wektor zewnętrznie normalny do tej powierzchni. Wymagane dla spójności sformułowania warunki początkowe zapisujemy w postaci  $u_i(\mathbf{x}, 0) = u_{0i}(\mathbf{x}), \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = v_{0i}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in B, t = 0$ .

W toku standardowej argumentacji, por. na przykład [5], odpowiadający równaniom (1)-(3) funkcjonał zasady przemieszczeń wirtualnych przyjmuje postać

$$\int_B \rho \delta u_\alpha \ddot{u}_\alpha dV + \int_B C_{\alpha\beta\gamma\pi} \delta u_{(\alpha, \beta)} u_{(\gamma, \pi)} dV = \int_B \delta u_\alpha b_\alpha dV + \int_{\partial B_f} \delta u_\alpha t_\alpha dS, \quad (4)$$

gdzie  $\delta \mathbf{u} \rightarrow \delta u_\alpha$  jest kinematycznie dopuszczalną wariacją przemieszczenia, która znika na brzegu  $\partial B_d$ .

Równanie (4) podlega aproksymacji przestrzennej, to znaczy  $B \approx \cup_{e \in N_e} B_{(e)}$ , gdzie  $N_e$  jest liczbą elementów skończonych. Każdy element  $B_{(e)}$  jest definiowany jako gładkie przekształcenie tak zwanego elementu bazowego (naturalnego)  $\pi_{(e)}$  określonego przez produkt kartezyjski  $\pi_{(e)} = [-1, +1] \times [-1, +1] \subset R \times R, \mathbf{k} = (\xi^1, \xi^2) \in \pi_{(e)}$ . W dyskutowanym podejściu element skończony ma w ogólnym przypadku  $N = m_1 \cdot m_2$  węzłów, przy czym  $m_a$  oznacza liczbę węzłów w kierunku odpowiedniej osi  $\xi^\alpha$ . Interpolacja wielkości węzłowych węzła  $a$  odbywa się poprzez macierz

$$\mathbf{L}_a(\mathbf{k}) = L_a(\mathbf{k}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie:  $L_a(\mathbf{k}) = L_r^{m_1}(\xi^1) L_s^{m_2}(\xi^2), 1 \leq a \leq m_1 \cdot m_2, 1 \leq r \leq m_1, 1 \leq s \leq m_2$  jest iloczynem wielomianów Lagrange'a  $L_p^m(\xi) = \prod_{\substack{q \neq p \\ q=1 \\ q=m}}^m \frac{\xi - \xi_{(q)}}{\xi_{(p)} - \xi_{(q)}}$  rzędu  $m - 1, m \leftarrow m_1, m_2$ . Zaznacz-

my tu jeszcze raz, że węzły są rozłożone zgodnie z metodą GLL.

Wobec (5) macierz interpolacyjna elementu dana jest przez

$$\mathbf{L}_{(e)}(\mathbf{k}) = [\mathbf{L}_1(\mathbf{k}) | \mathbf{L}_2(\mathbf{k}) | \dots | \mathbf{L}_N(\mathbf{k})]. \quad (6)$$

Schemat interpolacyjny dla dowolnej wielkości wektorowej problemu przyjmuje postać

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{L}_{(e)}(\mathbf{k}) \mathbf{u}_{(e)}(t), \quad (7)$$



gdzie  $\mathbf{u}_{(e)}(t) = \{\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_a(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}_a^T, \dots, \mathbf{u}_N(t)\}^T$ ,  $a = 1, 2, 3, \dots, m_1 \cdot m_2$ . Przyjmując wygodną konwencję zamiany macierzy na wektory:  $\varepsilon \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^T$  i  $\delta\varepsilon \rightarrow \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\delta\varepsilon_{11}, \delta\varepsilon_{22}, 2\delta\varepsilon_{12}\}^T$  interpolację odkształceń zapisujemy jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{D}\mathbf{L}_{(e)}(\mathbf{k})\mathbf{u}_{(e)}(t) = \mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{k})\mathbf{u}_{(e)}(t), \quad (8)$$

a odkształceń wirtualnych

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \mathbf{D}\mathbf{L}_{(e)}(\mathbf{k})\delta\mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{k})\delta\mathbf{u}_{(e)}. \quad (9)$$

Tutaj

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,1} & 0 \\ 0 & (\cdot)_{,2} \\ (\cdot)_{,2} & (\cdot)_{,1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

jest operatorem różniczkującym. Prawo konstytutywne (3)<sub>1</sub> we wprowadzonym zapisie brzmi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (11)$$

W dalszym ciągu zakładamy, że grubość tarczy w obrębie elementu skończonego  $h_0$  i gęstość  $\rho$  są stałe. Wykorzystując reprezentację (7) w równaniu (4), uzyskujemy standardowe wyrażenia dla, odpowiednio, macierzy mas, macierzy sztywności i wektora obciążeń węzłowych

$$\begin{aligned} \int_B \rho w_\alpha \ddot{u}_\alpha dV &\rightarrow \mathbf{M}_{(e)} = \rho h_0 \int_{B_{(e)}} \mathbf{L}_{(e)}^T(\mathbf{k}) \mathbf{L}_{(e)}(\mathbf{k}) dx_1 dx_2 \\ \int_B C_{\alpha\beta\gamma\pi} \delta u_{(\alpha,\beta)} u_{(\gamma,\pi)} dV &\rightarrow \mathbf{K}_{(e)} = h_0 \int_{B_{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T(\mathbf{k}) \mathbf{E} \mathbf{B}_{(e)}(\mathbf{k}) dx_1 dx_2 \\ \int_B w_\alpha b_\alpha dV + \int_{\partial B_f} w_\alpha t_\alpha dS &\rightarrow \mathbf{p}_{(e)}^{ext} = h_0 \int_{B_{(e)}} \mathbf{L}_{(e)}^T(\mathbf{k}) b dx_1 dx_2 + \int_{\partial B_f} \mathbf{L}_{(e)}^T(\mathbf{k}) \mathbf{t} dS. \end{aligned} \quad (12)$$

Dodatkowo zakładamy następującą postać macierzy tłumienia proporcjonalnego do macierzy mas  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{C}_{(e)} = \eta \mathbf{M}_{(e)}. \quad (13)$$

Tutaj  $\eta$  [1/s] oznacza współczynnik tłumienia. Wielkości (12) są całkowane numerycznie przy pomocy kwadratury Lobatto, zob. na przykład [8, 9, 10]. Reguła ta ujmuje węzły skrajne elementu jako węzły całkowania i przy takim rozłożeniu węzłów elementu, że pokrywają się one z węzłami całkowania, macierz mas elementu (12)<sub>1</sub> staje się w pełni diagonalna. Ma to decydujące znaczenie dla przyspieszenia całkowania



numerycznego równań dynamiki w dziedzinie czasu. Macierz sztywności elementu  $(12)_2$  ma pełną strukturę. W związku z tym aby uniknąć jej obliczenia, wykorzystujemy w algorytmie wektor sił wewnętrznych  $\mathbf{r}_{(e)} = h_0 \int_{B_{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T(\mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma}_{(e)}(\mathbf{k}) dx_1 dx_2$  oraz pozostawiając odpowiednio, wektory bezwładności i tłumienia:  $\mathbf{b}_{(e)} = \mathbf{M}_{(e)} \ddot{\mathbf{u}}_{(e)}$  i  $\mathbf{c}_{(e)} = \mathbf{C}_{(e)} \dot{\mathbf{u}}_{(e)}$  w klasycznej postaci.

Wynikowe równanie ruchu, zapisane względem wektorów przemieszczeń  $\mathbf{q}$ , prędkości  $\dot{\mathbf{q}}$  i przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{q}}$ , uzyskuje się poprzez agregację tylko macierzy diagonalnych i wektorów, otrzymuje postać

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} - \mathbf{r}(\mathbf{q}). \quad (14)$$

Wykorzystanie aproksymacji Newmarka [11] w dziedzinie czasu do (14) daje

$$[\mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{C}] \delta \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{b}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{c}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)} + (\Delta t)^2 \beta \delta \ddot{\mathbf{q}}). \quad (15)$$

Wyliczenie poprawki iteracyjnej  $\delta \ddot{\mathbf{q}}$  uzyskuje się z równania

$$\delta \ddot{\mathbf{q}} = [\mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{C}]^{-1} (\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{b}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{c}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)})). \quad (16)$$

Widać, że rozwiązanie tego równania, ze względu na diagonalną rozprężoną strukturę macierzy mas i tłumienia, jest trywialne. Aktualizacja zmiennych problemu odbywa się dalej na podstawie zależności

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i+1)} = \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)} + \delta \ddot{\mathbf{q}}, \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i+1)} = \underbrace{\dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)}]}_{\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)}} + \Delta t \gamma \delta \ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)} + \Delta t \gamma \delta \ddot{\mathbf{q}}, \quad (18)$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} = \underbrace{\mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [(1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)}]}_{\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}} + (\Delta t)^2 \beta \delta \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{n+1}^{(i)} + (\Delta t)^2 \beta \delta \ddot{\mathbf{q}}. \quad (19)$$

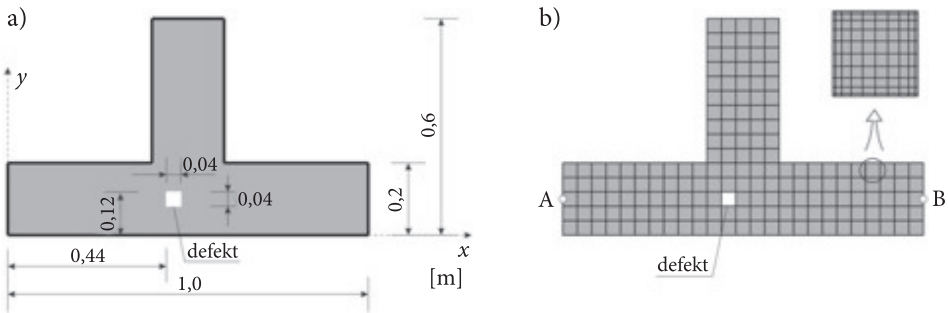
W obliczeniach przyjmujemy  $\beta = 1/4$  i  $\gamma = 1/2$ .

### 3. Symulacje numeryczne

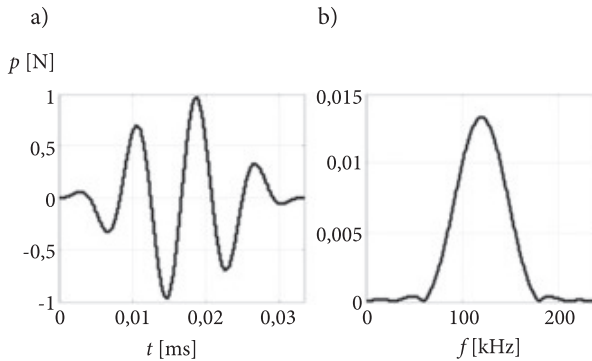
Symulacje numeryczne przeprowadzone zostały na panelu o kształcie litery T. Panel wykonany jest ze stali o module sprężystości  $E = 196,58$  GPa, gęstości masy  $\rho = 7976$  kg/m<sup>3</sup> i współczynnika Poissona  $\nu = 0,27$ . Grubość panelu wynosi 0,005 m, a jego geometrię pokazano na rysunku 1a. Symulacje przeprowadzono dla panelu



bez uszkodzenia oraz panelu z wyciętym otworem o wymiarach 0,04 m na 0,04 m. Panel został podzielony na 175 elementów spektralnych o wymiarach 0,04 m na 0,04 m (rys. 1b). Każdy z elementów posiada  $11 \times 11 = 121$  węzłów typu GLL. Warunki brzegowe założono jako swobodne na wszystkich krawędziach. Całkowanie w czasie przeprowadzono z krokiem  $\Delta t = 10^{-7}$  s. Jako wzbudzenie przyjęto paczkę falową składającą się z czterech cykli sinusoidy o częstotliwości 120 kHz zmodulowanej oknem Hanninga (rys. 2).

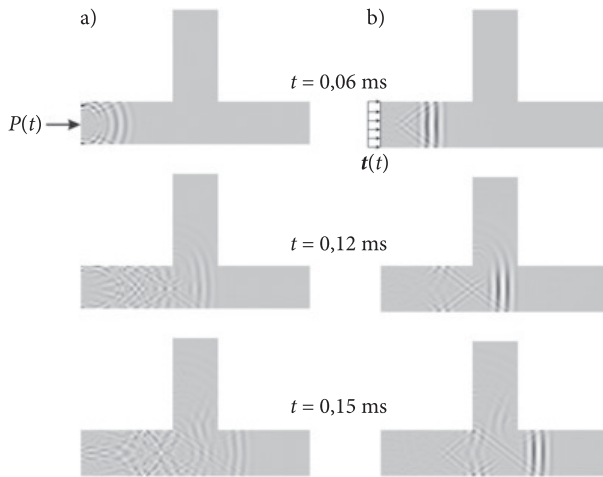


Rys. 1. Panel T: (a) geometria; (b) podział na elementy skończone

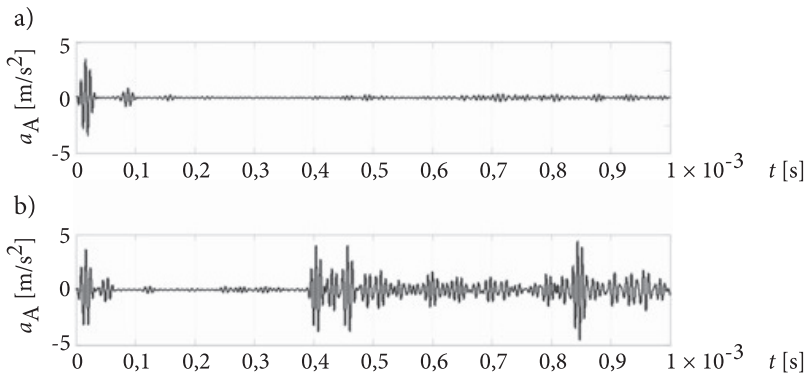


Rys. 2. Wzbudzenie w formie paczki falowej (a) w dziedzinie czasu; (b) w dziedzinie częstotliwości

W symulacjach wzbudzano falę podłużną. Zastosowano dwie formy wzbudzenia: punktową w węźle A siłą skupioną  $P(t)$  oraz ciągłą liniową wzdłuż krawędzi zawierającej węzeł A, obciążeniem  $t(t)$ , jak pokazano na rysunku 3. W pierwszej kolejności symulacje przeprowadzone zostały na panelu nieuszkodzonym. Wzbudzenie punktowe powoduje, iż czoło fali ma kształt kulisty (rys. 3a), i z powodu wielokrotnych odbić fala odbita od przeciwległej krawędzi jest trudna do zidentyfikowania w sygnale zarejestrowanym w węźle A (rys. 4a). Wzbudzenie wzdłuż krawędzi powoduje, iż czoło fali ma kształt liniowy (rys. 3b), i fala odbita od krawędzi zawierającej węzeł B jest widoczna w czasie 0,4 ms (rys. 4b).

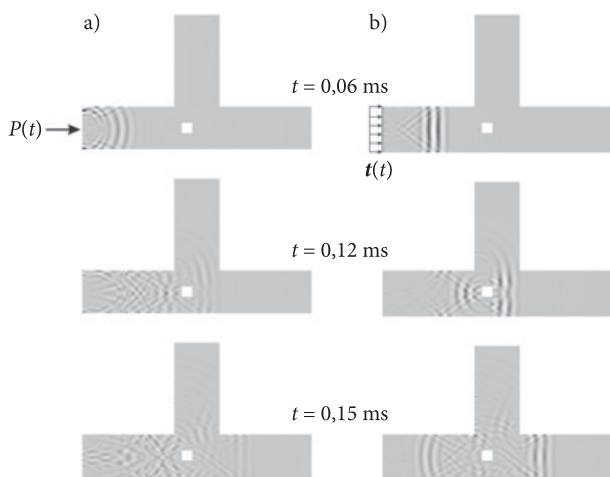


Rys. 3. Propagacja fali podłużnej w panelu bez uszkodzenia: (a) wzbudzenie punktowe; (b) wzbudzenie liniowe

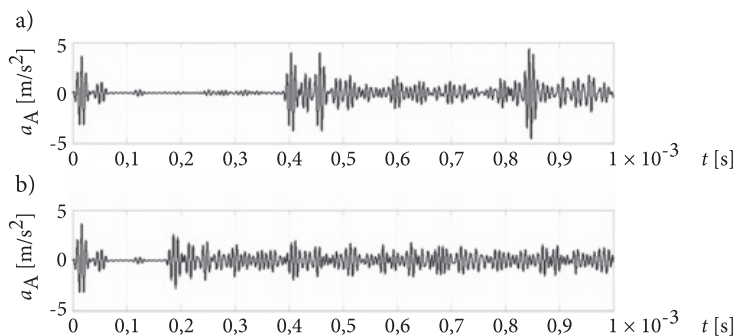


Rys. 4. Sygnał przyspieszenia w węźle A w panelu bez uszkodzenia: (a) wzbudzenie punktowe; (b) wzbudzenie liniowe

Druga symulacja dotyczy analizy propagacji fali w panelu z uszkodzeniem. W przypadku zastosowania wzbudzenia punktowego, wielokrotne odbicia od krawędzi panelu uniemożliwiają wskazanie położenia uszkodzenia. Zastosowanie wzbudzenia liniowego (rys. 5b) powoduje, że po odbiciu od uszkodzenia front fali jest wyraźny i dochodzi do punktu A w czasie 0,2 ms (rys. 6b), wskazując dokładnie na miejsce położenia uszkodzenia.



Rys. 5. Propagacja fali podłużnej w panelu z uszkodzeniem: (a) wzbudzenie punktowe; (b) wzbudzenie liniowe



Rys. 6. Sygnał przyspieszenia w węzle A w panelu z uszkodzeniem: (a) wzbudzenie punktowe; (b) wzbudzenie liniowe

#### 4. Podsumowanie

W pracy opisano metodę symulacji propagacji fal sprężystych z założeniem płaskiego stanu naprężenia w panelu o kształcie litery T. Zastosowano elementy spektralne z węzłami Gaussa-Legendre'a-Lobatto. Sformułowanie to pozwala na wyprowadzenie równań zjawiska propagacji fal z diagonalną macierzą mas. Dzięki zastosowaniu kwadratury Lobatto, całkowanie w czasie może zostać przeprowadzone efektywnie z wykorzystaniem dedykowanego schematu całkowania.

Przedstawione symulacje propagacji fal sprężystych w panelu o kształcie litery T pokazały, że do celów diagnostycznych nie jest wskazane zastosowanie wymuszenia punktowego. Dla takiego wymuszenia w elemencie rozchodzi się fala czołowa o kształcie kołowym, który powoduje liczne odbicia od krawędzi. Skomplikowana



interferencja odbić uniemożliwia identyfikację fali odbitej od uszkodzenia i tym samym nie pozwala na określenie położenia uszkodzenia. Zastosowanie wzbudzenia liniowego, gdy siła wymuszająca przyłożona została na całej krawędzi, powoduje powstanie fali czołowej o kształcie zbliżonym do liniowego. W tym przypadku odbicie od uszkodzenia jest wyraźnie widoczne na przebiegu przyspieszenia obliczonym w punkcie na krawędzi wzbudzenia. Wyznaczenie położenia uszkodzenia jest możliwe na bazie pomiaru czasu powrotu fali odbitej od uszkodzenia oraz znanej prędkości rozchodzenia się podłużnych fal sprężystych w panelu.

Artykuł wpłynął do redakcji 21.01.2010 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w maju 2010 r.

#### LITERATURA

- [1] T. PATERA, *A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion*, Journal of Computational Physics, 54, 1984, 468-488.
- [2] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI, T. A. ZANG, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [3] J. F. DOYLE, *Wave propagation in structures: spectral analysis using fast discrete Fourier transforms*, (second ed.), Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] A. ŻAK, M. KRAWCZUK, W. OSTACHOWICZ, *Propagation of in-plane wave in an isotropic panel with a crack*, Finite Elements in Analysis and Design, 42, 2006, 929-941.
- [5] M. KLEIBER, *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*, IPPT PAN, Warszawa-Poznań, 1989.
- [6] G. RAKOWSKI, Z. KACPRZYK, *Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2005.
- [7] K. J. BATHE, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [8] J. CHRÓŚCIELEWSKI, M. RUCKA, W. WITKOWSKI, K. WILDE, *Formulation of spectral truss element for guided waves damage detection in spatial steel trusses*, Archives of Civil Engineering, 55, 1, 2009, 43-63.
- [9] W. WITKOWSKI, M. RUCKA, J. CHRÓŚCIELEWSKI, K. WILDE, *Wave propagation analysis in spatial frames using spectral Timoshenko beam elements in the context of damage detection*, Archives of Civil Engineering, 55, 3, 2009, 367-402.
- [10] F. B. HILDEBRANDT, *Introduction to numerical analysis*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1956.
- [11] N. N. NEWMARK, *A method of computation for structural dynamics*, Proc ASCE, J. Engng. Mech. Div., (EM3), 85.

J. CHRÓŚCIELEWSKI, M. RUCKA, K. WILDE, W. WITKOWSKI

#### Modelling of elastic wave propagation in T-panel in the context of damage detection

**Abstract.** A computational approach to analysis of wave propagation in plane stress problems is presented on the example of a T-panel. Numerical simulations were conducted using spectral element method, for the intact T-joint and the T-joint with damage. The accelerations time histories of elastic waves have been applied to find the locations of a defect. Finally, a possible application of the present formulation to damage detection in plane stress problems is discussed.

**Keywords:** spectral element method, truss joints, wave propagation, damage detection



