

Koncepcja zastosowania klasycznego modelu Preisacha w opisie histerezy mechanicznej toru kolejowego

Władysław Koc, Andrzej Wilk, Piotr Chrostowski, Sławomir Grulkowski

W pracy przedstawiono implementację klasycznego, skalarowego modelu histerezy Preisacha w zastosowaniu do opisu zjawiska histerezy mechanicznej, występującej w torze kolejowym podczas procesu regulacji geometrycznej jego osi (tj. w trakcie przesuwania rusztu torowego w kierunku poprzecznym). Opisano zwięźle założenia teorii Preisacha oraz skalarny model matematyczny histerezy mechanicznej, oparty na rozkładzie statystycznym zmodyfikowanych operatorów histerezowych. Przedstawiono charakterystyczne stany przemieszczeń toru pod wpływem sił poprzecznych oraz dokonano interpretacji tych stanów na płaszczyźnie fazowej Preisacha. Podano relacje matematyczne umożliwiające modelowanie trajektorii przemieszczeń toru za pomocą funkcji dystrybucji Preisacha (FDP) lub funkcji Everetta (FE). Wymieniono znane w literaturze sposoby identyfikacji FDP oraz FE. W pracy opisano również szczegółowo sposób wyznaczenia FE z wyników eksperymentalnych tzw. głównej pętli histerezy. Dokonano porównania pomiędzy wynikami badań eksperymentalnych przeprowadzonych w torze kolejowym i wynikami obliczeń numerycznych przyjętego modelu histerezy. Uzyskano stosunkowo dużą zgodność pomiędzy tymi wynikami, co pozwala wnioskować, iż przyjęta koncepcja modelowania histerezy w przemieszczeniach poprzecznych toru kolejowego powinna być rozwijana. Ponieważ kształt pętli histerezy zależy również od występującej w szynach siły osiowej, analiza omawianego zjawiska może stanowić podstawę do poszukiwań skutecznej metody określania sił podłużnych w torze bezстыkowym.



prof. dr hab. inż.
Władysław Koc
Politechnika Gdańska,
Katedra Transportu
Szynowego



dr inż. Andrzej Wilk
Politechnika Gdańska,
Katedra Energoelektroniki
i Maszyn Elektrycznych



dr inż. Piotr Chrostowski
Politechnika Gdańska,
Katedra Transportu
Szynowego

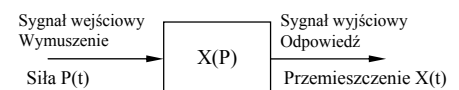


dr inż.
Sławomir Grulkowski
Politechnika Gdańska,
Katedra Transportu
Szynowego

Zjawisko histerezy jest obserwowane w wielu procesach fizycznych. Można tutaj wymienić takie określenia, jak: histereza magnetyczna, histereza dielektryczna, histereza mechaniczna, histereza adsorpcyjna itp. Każdy układ histerezowy może być przedstawiony jako pewnego rodzaju przetwornik, na którego wejście podawany jest sygnał wymuszający, a na jego wyjściu uzyskuje się sygnał odpowiedzi. W przypadku histerezy mechanicznej takim sygnałem wejściowym może być siła mechaniczna P , natomiast odpowiedzią układu – przemieszczenie X (rys.1).

Znamienną cechą każdej histerezy jest strata energii proporcjonalna do pola zamkniętej pętli histerezy. Energia ta dostarczana jest z zewnątrz do układu histerezowego i najczęściej rozpraszana wewnątrz na ciepło, co prowadzi do pogorszenia sprawności układu. Drugą znamienną cechą układu histerezowego jest to, że funkcja determinująca relacje pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym $X(P)$ tegoż układu jest nieliniowa i różnowartościowa. Oznacza to, że przy określonej wartości sygnału wejściowego, a jednoznaczne przyporządkowanie wartości odpowiedzi na wartość wymuszenia jest możliwe, gdy znana jest historia oddziaływań pomiędzy P i X przynajmniej w pewnym przedziale czasu t .

Znanych jest obecnie kilka modeli makroskopowych, które mogą być zastosowane do modelowania histerezy mechanicznej. Do najczęściej stosowanych należą: model Ishlinskiego (MI) [3], model Jilesa-Athertona (MJA) [4] i model Preisacha (MP) [14]. Model MI został pierwotnie opracowany do odwzorowywania histerezy mechanicznej, ale uniwersalność jego operatorów histerezo-

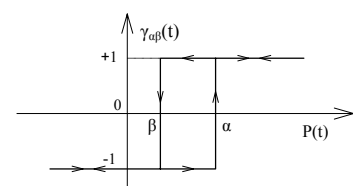


1. Schemat blokowy histerezowego przetwornika mechanicznego

wych spowodowała, iż jest także stosowany w opisie histerezy magnetycznej [1]. Modele MJA oraz MP pierwotnie opracowano do modelowania histerezy magnetycznej, ale ich uniwersalność i odpowiednie modyfikacje sprawiły, że mogą być z powodzeniem stosowane również w odwzorowywaniu histerezy mechanicznej [16]. W niniejszej pracy przyjęto do analizy klasyczny skalarny model Preisacha, który po zastosowaniu kilku uogólnień uznawany jest przez wielu badaczy za najlepiej ujmujący zjawisko histerezy.

Klasyczny, skalarny model Preisacha

Opracowany przez Preisacha model histerezy odnosił się do fizycznych domen magnetycznych, które określają właściwości ferromagnetyku. Model ten został zmodyfikowany przez rosyjskiego matematyka Krasnosielskiego, który opracował teorię histerezy bez odniesienia do konkretnego zjawiska fizycznego [10]. Powstał w ten sposób formalizm Krasnosielskiego, który może być



2. Elementarny operator histerezowy

zastosowany do różnych zjawisk fizycznych o znamionach histerezy. Formalizm ten był następnie rozwijany w kierunku opracowania szeregu uogólnień (dynamiczny model histerezy, model histerezy ze sprzężeniem zwrotnym, wektorowy model histerezy) dotyczących teorii histerezy opartej na modelu Preisacha [11, 12, 13].

Podstawowym założeniem w modelu Preisacha jest to, iż każdy przetwornik histerezowy zbudowany jest z nieskończonej liczby elementarnych operatorów histerezowych (rys.2). Stan operatora histerezowego określa funkcja $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, która w klasycznym modelu Preisacha może przyjmować dyskretne wartości ze zbioru $\{-1, +1\}$. Każdy operator charakteryzowany jest dwoma niezależnymi od siebie parametrami (współzrędnymi) α i β , które definiują jego szerokość. Musi być przy tym spełniony warunek $\alpha \geq \beta$. Parametry α i β przyjmują wartości z pewnego skończonego zbioru $\alpha, \beta \in (-P_s, P_s)$, gdzie P_s jest wartością tzw. siły nasycenia. Za stan nasycenia przyjmuje się taką wartość siły, przy której wszystkie operatory przyjęły stan +1 lub -1, czyli przetwornik histerezowy został nasycony i dalszy wzrost siły wymuszającej $P(t)$ nie spowoduje zmiany stanu $X(t)$.

Jeśli wymuszenie, jako funkcja czasu, przyjmuje stan $P(t) > \alpha$, to operator przyjmuje stan $\gamma_{\alpha\beta}(t) = +1$; jeśli $P(t) < \beta$, to stan operatora jest równy $\gamma_{\alpha\beta}(t) = -1$. Wspólnym parametrem dla P i $\gamma_{\alpha\beta}$ jest czas t . Zależność pomiędzy przemieszczeniem $X(t)$ i wymuszeniem $P(t)$ jest dla mechanicznego przetwornika histerezowego zdefiniowana wzorem

$$X(t) = \iint_{\alpha, \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta}(P(t)) d\alpha d\beta \quad (1)$$

gdzie: $\mu(\alpha, \beta)$ jest tzw. funkcją dystrybucji Preisacha (FDP). Jest to funkcja skalarna dwóch zmiennych, która wyraża gęstość prawdopodobieństwa istnienia operatorów o parametrach α, β . FDP może być interpretowana jako funkcja wagowa, która wskazuje na wagę, z jaką operatory o danych parametrach α, β wpływają na wartość funkcji podcałkowej w równaniu (1). Jeśli struktura układu histerezowego nie ulega zmianie, to FDP może być traktowana jako funkcja charakterystyczna tegoż układu, która nie zależy od wartości wymuszenia $P(t)$. Jest oczywiste, że ze względu na efekt nasycenia funkcja FDP zanika dla wartości $\alpha > P_s$ lub $\beta < -P_s$.

Interpretacja stanów przemieszczenia mechanicznego przetwornika histerezowego na płaszczyźnie Preisacha

Przemieszczenie przetwornika wzdłuż krzywej początkowej

Analizę różnych stanów przemieszczenia $X(t)$ w funkcji $P(t)$ ułatwia tzw. płaszczyzna Pre-

isacha (PP). PP jest najczęściej przedstawiana jako trójkąt (rys.3) zdefiniowany przez proste $\alpha = \beta$, $\beta = -P_s$ i $\alpha = P_s$. Łatwo zauważyć, że dla stanu początkowego, w którym $X(t=0) = 0$, przy $P(t=0) = 0$ PP jest podzielona na dwa regiony: S^+ (operatory ustawione w stan +1) i S^- (operatory ustawione w stan -1) o równych powierzchniach. W regionie S^+ liczba operatorów spełniających warunek $\gamma_{\alpha\beta}(t) = +1$ równa jest liczbie operatorów spełniających warunek $\gamma_{\alpha\beta}(t) = -1$ w regionie S^- . Równanie (1) może być dla tego stanu przedstawione w postaci

$$X(t=0) = \iint_{S^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 0 \quad (2)$$

Na rysunku 4 pokazano schematycznie początkową krzywą przemieszczenia i główną pętlę histerezy hipotetycznego przetwornika. Punkty P_0, P_1 i P_2 definiują początkową krzywą przemieszczenia aż do stanu nasycenia. Odpowiada to dodatnim przyrostom siły $P(t)$. Gdy $P(t) = P_1$, część operatorów z regionu S^- zmienia stan na +1 i odpowiadająca temu PP przedstawiona jest na rysunku 5.

Odpowiedź przetwornika dla stanu z rysunku 5 może być wyznaczona ze wzoru

$$X_i(P) = \iint_{S^+} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \iint_{\text{region ABC}} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = T(P, -P) \quad (3)$$

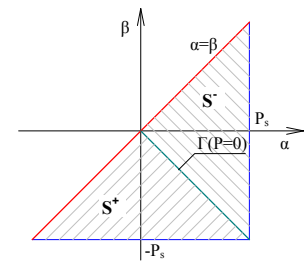
gdzie region ABC jest trójkątem, po którym wystarczy scałkować FDP, aby otrzymać odpowiedź układu. Wyrażenie $T(\alpha, \beta)$ określane jest w literaturze jako funkcja Everetta [2] i jest całką z FDP po trójkącie prostokątnym zdefiniowanym przez prostą $\alpha = \beta$ i dowolny punkt o współrzędnych (α, β) wewnątrz PP.

$$T(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} \int_{\beta}^{\alpha'} \mu(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' = \int_{\beta}^{\alpha} \int_{\beta'}^{\alpha} \mu(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \quad (4)$$

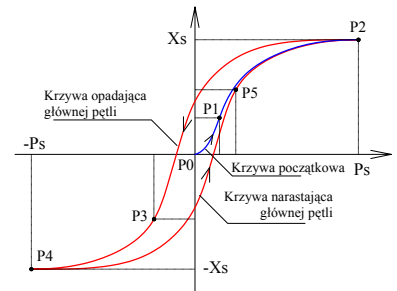
Jeśli wymuszenie $P(t)$ dojdzie do punktu P_2 , wszystkie operatory są przełączone w stan +1 i przetwornik przechodzi w stan nasycenia, przyjmując wartość X_s . Możliwy jest dalszy wzrost wartości $X(t)$, ale musi on być realizowany za pomocą innej funkcji, najczęściej jednowartościowej.

Przemieszczenie przetwornika wzdłuż głównej pętli histerezy

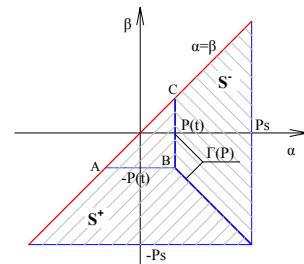
Podczas zmniejszania wartości $P(t)$ od punktu P_2 poprzez P_3 do P_4 układ porusza się wzdłuż tzw. opadającej krzywej głównej pętli histerezy. Wszystkie operatory poprzednio ustawione w stan +1, które spełniają warunek $P < \beta$, zostają przełączone w stan -1. Odpowiadająca temu procesowi PP (punkt P_3) widoczna jest na rysunku 6.



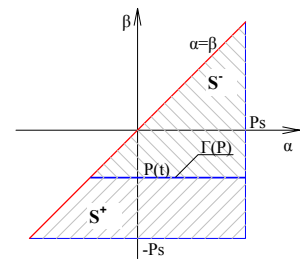
3. Płaszczyzna Preisacha dla stanu $X(0) = 0$, przy $P(0) = 0$



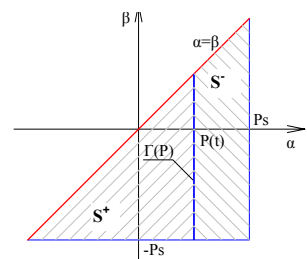
4. Typowa główna pętla histerezy przetwornika mechanicznego oraz krzywa początkowa



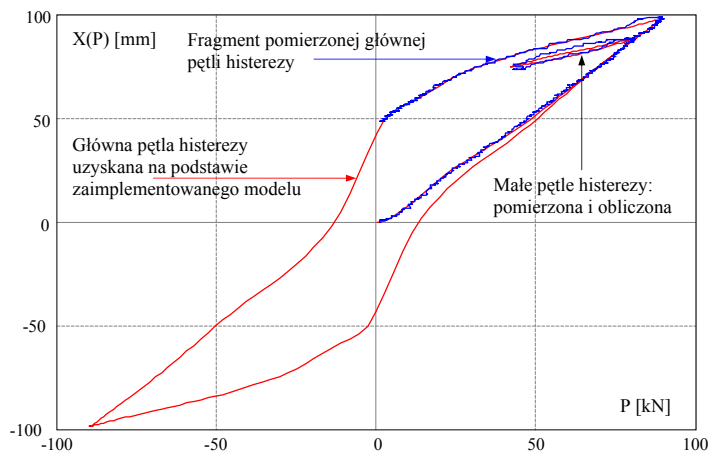
5. Płaszczyzna Preisacha dla stanu przemieszczenia przetwornika wzdłuż krzywej początkowej P_0-P_1



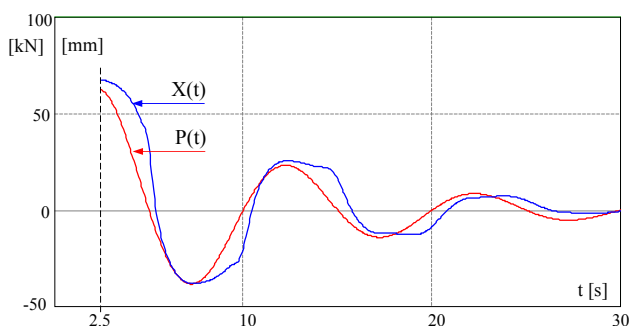
6. Płaszczyzna Preisacha odpowiadająca przemieszczeniu przetwornika wzdłuż opadającej głównej pętli histerezy (od punktu P_2 do P_3)



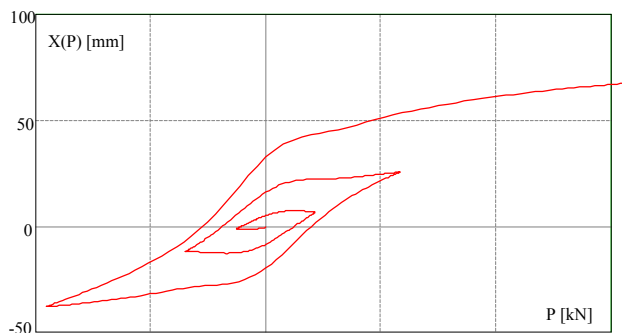
7. Płaszczyzna Preisacha odpowiadająca przemieszczeniu przetwornika wzdłuż narastającej głównej pętli histerezy (od punktu P_4 do P_5)



8. Porównanie wyników pomiarów z wynikami obliczeń modelu histerezy Preisacha na przykładzie głównych pętli histerezy, małych pętli histerezy oraz krzywych początkowych



9. Wyniki symulacji komputerowej przemieszczenia poprzecznego $X(t)$ rusztu torowego na skutek wymuszenia poprzecznego $P(t)$, otrzymane z zaimplementowanego modelu histerezy



10. Relacje fazowe pomiędzy $X(t)$ oraz $P(t)$ przebiegów symulacji komputerowej z rysunku 9

Odpowiedź przetwornika dla przemieszczenia wzdłuż opadającej krzywej głównej pętli histerezy, przy uwzględnieniu wartości ze stanu nasycenia i funkcji Everetta, jest wyznaczana ze wzoru

$$X_d(P) = \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = X_s(P_s) - 2T(X_s, X) \quad (5)$$

Przy wymuszeniu $P(t) < P_s$ układ przechodzi w stan nasycenia i przyjmuje odpowiedź $-X_s$.

Podczas zwiększania wartości $P(t)$ od punktu P4 poprzez P5 do P2 układ porusza się wzdłuż tzw. narastającej krzywej głównej pętli histerezy. Wszystkie operatory poprzednio ustawione w stan -1, które spełniają warunek $P > \alpha$, zostają przełączone w stan +1.

Odpowiadająca temu procesowi PP (punkt P5) widoczna jest na rysunku 7.

Odpowiedź przetwornika dla przemieszczenia wzdłuż narastającej krzywej głównej pętli histerezy, przy uwzględnieniu wartości ze stanu nasycenia i funkcji Everetta, jest wyznaczana ze wzoru

$$X_u(P) = \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_S \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = X_s(-P_s) + 2T(P, -P_s) \quad (6)$$

Wyznaczanie przemieszczeń realizowanych wzdłuż tzw. małych pętli histerezy

W ogólnym przypadku przetwornik może realizować trajektorie także wzdłuż tzw. małych pętli histerezy. W każdym przypad-

ku, gdy następuje zmiana znaku przyrostu wymuszenia $P(t)$ (rewersja siły P), trajektoria przemieszczenia ma lokalne maksima i minima w punktach rewersji. Gdy układ osiąga w punkcie rewersji P_n lokalne maksimum przemieszczenia $X(P_n)$ i porusza się w kierunku opadającej małej pętli histerezy, to jego stan można wyznaczyć ze wzoru

$$X(P) = X(P_n) - 2T(P, P_n) \quad (7)$$

Podobnie, gdy układ osiąga w punkcie rewersji P_n lokalne minimum przemieszczenia $X(P_n)$ i porusza się w kierunku narastającej małej pętli histerezy, to jego stan można wyznaczyć ze wzoru

$$X(P) = X(P_n) + 2T(P, P_n) \quad (8)$$

Dane głównej pętli histerezy mogą być uwikłane do wyznaczania stanów przetwornika realizowanych wzdłuż małych pętli histerezy. Najczęściej dane głównej pętli stosuje się do wyznaczenia FE za pomocą wzoru [5]:

$$T(\alpha, \beta) = \frac{B_u(\alpha) - B_d(\beta)}{2} + \int_{-H_s}^{\beta} \int_{\alpha}^{H_s} \mu(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \quad (9)$$

gdzie ostatnie wyrażenie po prawej stronie równania (9) jest całką podwójną z FDP obliczoną na prostokącie zdefiniowanym przez współrzędne przekątnej (α, β) oraz $(P_s, -P_s)$.

W celu wyznaczenia jednoznacznej odpowiedzi układu niezbędna jest znajomość FE lub FDP. Jeśli znana jest FE, to można z niej wyznaczyć FDP lub odwrotnie, przy zastosowaniu odpowiednich metod numerycznych. Na ogół żadna z tych funkcji nie jest znana i musi być wyznaczona na drodze eksperymentu. Istnieje szereg metod identyfikacji FDP lub FE. Algorytmy identyfikacji są prezentowane w stosownej literaturze, lecz ich opis w niniejszym artykule wykraczałby poza jego ramy. Zostanie przedstawiona tylko metoda identyfikacji zastosowana przez autorów.

Metodyka identyfikacji funkcji Everetta

Zakładając warunki symetrii głównej pętli histerezy względem prostej $\alpha = -\beta$, FDP może być przedstawiona jako iloczyn dwóch funkcji jednej zmiennej [15]

$$\mu(\alpha, \beta) = \mu(-\beta, -\alpha) = \mu_a(\alpha) \mu_b(\beta) \quad (10)$$

Podójście takie pozwala przedstawić równanie (9) w postaci

$$T(\alpha, \beta) = \frac{B_u(\alpha) - B_d(\beta)}{2} + \int_{-\alpha}^{\beta} \mu_b(\beta') d\beta' \int_{\alpha}^{H_s} \mu_a(\alpha') d\alpha' = \frac{B_u(\alpha) - B_d(\beta)}{2} + F(-\beta)F(\alpha) \quad (11)$$

gdzie $F(-\beta)$ i $F(\alpha)$ są całkami funkcji jednej zmiennej, uwikłanymi z danymi głównej pętli histerezy poprzez równania

$$\begin{aligned} X_u(P) &= \frac{1}{2} F(-P)^2 - F(-P)F(P) - \frac{1}{2} F(P)^2 \\ X_d(P) &= X_u(P) + 2F(-P)F(P) \end{aligned} \quad (12)$$

Z układu (12) można łatwo wyznaczyć wartość $F(P)$ za pomocą wzoru

$$F(P) = \sqrt{\frac{X_d^2(P) + X_u^2(P)}{2} - \frac{X_d(P) + X_u(P)}{2}} \quad (13)$$

Weryfikacja modelu histerezy mechanicznej w przemieszczeniach poprzecznych toru

Wykorzystując wyniki reprezentatywnych pomiarów przeprowadzonych w ramach badań nad oporem poprzecznym podsypki [7, 8], dokonano identyfikacji funkcji $F(P)$ na podstawie umownie przyjętej głównej pętli histerezy. Na rysunku 8 pokazano fragment głównej pomierzonej pętli histerezy oraz całą główną pętlę wyznaczoną na podstawie zaimplementowanego modelu Preisacha. Widoczne są także tzw. małe pętłe histerezy oraz krzywe początkowe. Jak widać, główna, pomierzona pętla nie charakteryzuje się stanem nasycenia. Nie jest to jednak warunek konieczny. Oznacza to tylko tyle, iż model histerezy nie jest uprawniony do generowania właściwych wyników poza zakresem pomierzonej pętli.

Na rysunku 9 przedstawiono wyniki symulacji komputerowej przemieszczenia $X(t)$ fragmentu rusztoru kolejowego na podstawie opracowanego modelu histerezy. Siła $P(t)$ ma przebieg sinusoidalny, który zanika wykładniczo. Relacje fazowe pomiędzy $X(t)$ oraz $P(t)$ pokazano na rysunku 10.

Dyskusja wyników

Uzyskana dobra zgodność głównej pętli histerezy zaimplementowanego modelu z pętlą pomierzoną wydaje się oczywista, gdyż wynika to z faktu, iż dane głównej pętli są źródłem opracowywania wartości parametrów modelu. Krytycznym weryfikatorem modelu są natomiast małe pętłe histerezy. Tutaj zgodność też okazuje się względnie dobra. W pracy – z uwagi na ograniczenia redakcyjne – pokazano porównanie tylko jednej pary małych pętli histerezy, ale badania porównawcze obejmowały również wiele innych przypadków. Na tej podstawie można stwierdzić, że zaimplementowany model histerezy mechanicznej Preisacha poprawnie wyznacza przemieszczenie rusztorowego na skutek dowolnego wymuszenia, w zakresie nie przekraczającym wartości ekstremalnych umownie przyjętej głównej pętli histerezy. Powyżej tego zakresu model może już generować wyniki odbiegające od rzeczywisty-

ści i w takim przypadku należy pomierzyć główną pętlę histerezy dla większego zakresu sił i przemieszczeń. Relacje fazowe pomiędzy X i P , a ściślej opóźnienia fazowe pokazane na rysunku 10, nie są wynikiem bezwładności elementów konstrukcji toru kolejowego. Czas symulacji został bowiem tak dobrany, że bezwładność nie ma tutaj większego znaczenia. Opóźnienie fazowe jest wynikiem histerezy mechanicznej.

Przedstawione w niniejszej pracy wyniki pomiarów i symulacji słuszne są tylko dla przypadku, gdy FDP jest reprezentatywna dla danej struktury toru kolejowego. W przypadku, gdy kształt rusztorowego w trakcie regulacji geometrycznej ulega zmianie lub też zmienia się także wartość siły osiowej w szynach, to zmienia się także FDP i zmieniają także krzywe histerezy układu. I to właśnie sprawia, że pojawia się możliwość oszacowania wartości siły osiowej w szynie na podstawie kształtu pętli histerezy.

Podsumowanie

- Zaimplementowany klasyczny model skalarny Preisacha względnie dobrze reprezentuje zjawisko histerezy mechanicznej występującej w torze kolejowym podczas procesu regulacji geometrycznej jego osi (tj. w trakcie przesuwania rusztorowego w kierunku poprzecznym).
- Funkcja dystrybucji Preisacha lub funkcja Everetta mogą być wyznaczone na podstawie umownie przyjętej głównej pętli histerezy. Zakres głównej pętli wskazuje jednocześnie na zakres stosowania zaimplementowanego modelu matematycznego histerezy.
- Funkcja dystrybucji Preisacha ulega zmianie na skutek zmian kształtu geometrycznego nasuwającego rusztorowego oraz zmian sił osiowych występujących w szynach.
- Przedstawione rozważania wskazują na celowość istotnej modyfikacji dotychczasowej koncepcji prowadzonych przez zespół badań nad opracowaniem skutecznej metody określania sił podłużnych w torze bezстыkowy [6, 9]. Ponieważ kształt pętli histerezy zależy również od występującej w szynach siły osiowej, analiza omawianego zjawiska może stanowić podstawę do ostatecznego rozwiązania problemu. ◀

Materiały źródłowe:

- [1] Bergqvist A.J., Engdahl S.G.: A homogenization procedure of field quantities in laminated electric steel, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 37, No. 5, Sept. 2001.
- [2] Everett D.: A general approach to hysteresis – Part 4., An alternative formulations of the domain model. Trans. Faraday Society, vol. 51, 1955.

- [3] Ishlinskii A.Y.: General theory of plasticity with linear strain-hardening. Ukrainskii Matem. Zhurnal, vol.6, 1954.
- [4] Jiles D.C., Atherton D.: Theory of ferromagnetic hysteresis. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol. 61, 1986.
- [5] Hui S.Y.R., Zhu J.: Numerical modeling and simulation of hysteresis effects in magnetic cores using transmission-line modeling and the Preisach theory. IEE Proc. – Electr. Power App, vol. 142, No.1, January 1995.
- [6] Koc W., Wilk A.: Investigations of methods to measure longitudinal forces in continuous welded rail tracks using the tamping machine. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal Rail and Rapid Transit, 2009, 223 (F1).
- [7] Koc W., Wilk A., Chrostowski P., Grulkowski S.: Determination of the transverse resistance characteristics in railway track. Journal of Transportation Engineering, vol. 136, December 2010.
- [8] Koc W., Wilk A., Chrostowski P., Grulkowski S.: Tests on lateral resistance in railway tracks during the operation of tamping machine. Journal of Rail and Rapid Transit, vol.225, May 2011.
- [9] Koc W., Wilk A., Grulkowski S., Chrostowski P.: The use of tamping machine for diagnosing the longitudinal forces in rails of CWR track. Journal of Civil Engineering and Architecture, vol. 4, No. 11 (Serial No. 36), November 2010.
- [10] Krasnosel'skii, M.A., Pokrovskii, A.V.: Sistemy s gisterizom (Systems with Hysteresis). Moscow: Nauka, 1983.
- [11] Mayergoyz I. D.: Mathematical models of hysteresis. IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-22, No.5, September 1986.
- [12] Mayergoyz I.D.: Dynamic Preisach models of hysteresis. IEEE Transactions on Magnetics, vol.24. No.6, November 1988.
- [13] Mayergoyz I.D., Friedman G.: Generalized Preisach model of hysteresis. IEEE Transactions on Magnetics, vol.24, No.1, January 1988.
- [14] Preisach F.: Über die magnetische Nachwirkung. Zeitschrift für Physik, Bd. 94, 1935.
- [15] Ragusa C.: An analytical method for the identification of the Preisach distribution function. Journal of Magnetism and Magnetic Materials 354-255, 2003.
- [16] Ruderman M., Hoffmann F., Bertram T.: Preisach model of nonlinear transmission at low velocities in robot joints. 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, AMC'08, 26-28 March 2008.