

# O zbieżności rozwiązań w nieliniowym mikropolarnym ośrodku sprężysto-plastycznym – zastosowanie elementów skończonych wyższego rzędu

Mgr inż. Stanisław Burzyński

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Zjawiskiem lokalizacji określa się występowanie wąskich pasm uplastycznionego materiału w konstrukcji obciążonej ponad poziom nośności granicznej. Między innymi w pracach [13, 20] przedstawiono literaturę traktującą o badaniach laboratoryjnych i podejściu teoretycznym w rozwiązywaniu tego rodzaju problemów. Prace [13, 23] zawierają wyniki badań modelowych, dla różnych warunków początkowo-brzegowych, dotyczących posadowienia bezpośredniego budowli ziemnych na gruntach niespoistych, w których obserwuje się zjawisko lokalizacji.

Wzrost obciążenia ponad nośność graniczną powoduje zwiększanie odkształceń plastycznych w strefach lokalizacji, podczas gdy pozostałe fragmenty konstrukcji zachowują się niemal jak bryły sztywne, doznając wielokrotnie mniejszych deformacji. Zjawisko to występuje w wielu materiałach konstrukcyjnych, a także w ośrodkach gruntowych stanowiących posadowienie konstrukcji.

W badaniach numerycznych efekt lokalizacji po raz pierwszy stwierdzono w pracy [15]. Zaobserwowano go w materiale wykazującym osłabienie. Materiały takie, nazywane niestatecznymi [16], nie spełniają klasycznego warunku Druckera, ale zadania z ich wykorzystaniem mogą być analizowane tymi samymi narzędziami, jak z materiałami statecznymi, co pokazano w pracy [15].

Zastosowanie metody elementów skończonych (MES) wraz z odpowiednimi prawami materiałowymi pozwala symulować propagację stref lokalizacji wraz ze wzrostem obciążenia. W klasycznej teorii sprężystości deformacja ośrodka opisana jest polami translacji. W standardowym podejściu przyjęcie tego założenia w MES prowadzi do tzw. sformułowania przemieszczeniowego, które charakteryzuje się tym, że wyniki symulacji rozwoju stref lokalizacji są zależne od wielkości i rzędu elementów skończonych (ang. *mesh dependence*) [7]. Cecha ta szczególnie dotyczy elementów skończonych niskiego rzędu (o niskim rzędzie wielomianów interpolacyjnych – funkcji kształtu). Wśród znanych metod przewyższania tego problemu (przebieg np. w pracach [1, 12]), wymienia się teorię niesymetrycznej mechaniki ośrodka ciągłego (ośrodek Cosseratów, ośrodek mikropolarny). Teoria ta wprowadza zorientowanie punktów materialnych w przestrzeni, przez co punkty te mogą być postrzegane jako nieskończenie małe bryły, których kinematyka opisywana jest także przez rotacje, prowadząc w konsekwencji do wystąpienia między nimi oddziaływań o charakterze tzw. naprężeń momentowych. W podejściu tym w naturalny sposób pojawia się tzw. długość charakterystyczna, której wykorzystanie jest jedną z metod regularyzacji. Stosowanie tego podejścia napotyka na pewne trudności związane z identyfikacją dodatkowych stałych materiałowych niezbędnych do zapisu praw konstytutywnych: długości charakterystycznej i dodatkowego modułu ścinania, dla których nie udało się dotąd jednoznacznie określić wartości.

Innym podejściem do rozwiązania problemu zależności rozwiązań od wielkości elementów skończonych jest zastosowanie plastyczności gradientowej (ang. *gradient plasticity*), tj. rozszerzenie funkcji płynięcia o składnik związany z laplasjanem niezmiennika tensora odkształceń plastycznych [17]. W tym podejściu również niezbędne są dodatkowe stałe materiałowe, ale nie ma potrzeby wprowadzania rotacyjnych stopni swobody.

Szczegółowe badania numeryczne nad materiałami wykorzystującymi teorię Cosseratów podjęto w ostatnim dziesięcioleciu ubiegłego wieku. Jednymi z pierwszych prac, gdzie przedstawiono wyniki uzyskane za pomocą MES w zakresie sprężysto-plastycznym były publikacje [6] oraz [7]. Szerszy przegląd prac dotyczących zastosowania ośrodka Cosseratów przedstawiono w pracy [22]. Warto odnotować pracę [14], gdzie zaproponowano algorytm wykorzystujący dekompozycję tensora naprężenia na dewiator i aksjator, przez co uniknięto pewnych problemów numerycznych. W ostatnich latach Khoei i in. zaproponowali rozwiązanie problemów plastyczności w ośrodku Cosseratów z wykorzystaniem adaptacji siatki podziału oraz rozszerzonej metody elementów skończonych (ang. *XFEM – extended finite element method*) [11, 12].

W pracy zarysowano teoretyczne podstawy sprężysto-plastycznego ośrodka mikropolarnego. Zastosowano hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego oraz Druckera-Pragera. Istotnym składnikiem tej pracy jest uwzględnienie nieliniowości geometrycznej w zakresie dużych przemieszczeń i obrotów przy założeniu małych odkształceń. W rozwiązanych przykładach analizowano zbieżność wyników dla różnych dyskretyzacji oraz, co najważniejsze, dla elementów skończonych różnego rzędu. Analizowano tzw. *h*- oraz *p*-zbieżność, czyli badanie charakteru rozwiązań przy zagęszczaniu podziału dziedziny za pomocą tych samych elementów skończonych *h* lub przy podnoszeniu rzędu aproksymacji elementów *p* przy stałej ich liczbie w dyskretyzowanym obszarze.

## OŚRODEK MIKROPOLARNY

Ośrodkiem mikropolarnym lub ośrodkiem Cosseratów nazywany jest ośrodek, którego punkty mają sześć stopni swobody jak dla ciała sztywnego ([18] i cytowana tam literatura). Deformację tego ośrodka opisuje się wektorem przesunięcia i niezależnym od niego wektorem obrotu. Powoduje to niesymetryczność tensorów deformacji i naprężenia. Ośrodek ten należy do obszernej klasy ośrodków z tak zwaną mikrostrukturą [22]. Układ różniczkowych równań równowagi w punkcie ośrodka Cosseratów w zagadnieniach statyki ma postać [18]:

$$\begin{aligned} \text{Div}\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \text{Div}\mathbf{M} + \mathbf{c} + ad^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}^T) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

W równaniu (1)  $\Sigma$  jest pierwszym tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa,  $\mathbf{f}$  jest wektorem gęstości sił objętościowych,  $\mathbf{M}$  jest tensorem naprężeń momentowych,  $\mathbf{c}$  jest wektorem gęstości momentów objętościowych, a  $\mathbf{F}$  jest gradientem deformacji. Operacja  $ad$  w (1) zdefiniowana jako  $ad : E \rightarrow so(3)$  ( $so(3)$  jest przestrzenią tensorów skośnie symetrycznych [22]) i można ją przedstawić w ustalonej bazie:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, [a_i] \rightarrow [A_{ij}] = ad([a_i]) \quad (2)$$

Równanie (1) musi być uzupełnione o warunki brzegowe:

$$\boldsymbol{\sigma}^* - \Sigma \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}^* - \mathbf{M} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3)$$

gdzie:

(...)\* – zadane wektory naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  i naprężeń momentowych  $\mathbf{m}$ ,

$\mathbf{n}$  – jednostkowy wektor zewnętrznie normalny do brzegu  $\partial B_f$  ciała  $B$ , na którym to występują warunki brzegowe (3).

W toku przekształceń (zob. np. [18, 22]) można pokazać, że układowi równań (1) równoważna jest zasada prac wirtualnych  $G_i(B, \mathbf{w}) = G_e(B, \mathbf{w})$ , której składniki mają postać:

$$G_i(B, \mathbf{w}) = \iiint_B (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{W} \mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} dV, \quad \mathbf{W} = ad(\mathbf{w}) \quad (4)$$

$$G_e(M, \mathbf{w}) = \iiint_B (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) dV + \iint_{\partial B \cap \partial B_f} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dV \quad (5)$$

gdzie:

$\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{w})$  – kolekcja kinematycznie dopuszczalnych wektorów pól wirtualnych przesunięć  $\mathbf{v}$  i obrotów  $\mathbf{w}$ , spełniających jednorodne warunki brzegowe na  $\partial B_e$ .

Rozważania pracy [18] wskazują, że wielkości:

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{v} - \mathbf{W} \mathbf{F}, \quad \delta \mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{w} \quad (6)$$

są wirtualnymi miarami odkształceń energetycznie sprzężonymi z I tensorami naprężeń Pioli-Kirchhoffa  $\boldsymbol{\Sigma}$  i ich odpowiednikiem naprężeń momentowych  $\mathbf{M}$ .

Można pokazać ([2, 4, 5] i cytowana tam literatura), że odpowiadające (6) definicje miar odkształceń w ustalonej bazie dane są przez:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{u}_{,\beta} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q}) \mathbf{t}_\beta^0, \quad \boldsymbol{\kappa}_\beta = ad^{-1}(\mathbf{Q}_\beta \mathbf{Q}^T) \quad (7)$$

gdzie:

$\mathbf{Q} \in SO(3)$  – tensor obrotu właściwego

$$SO(3) = \{ \mathbf{Q} : E \rightarrow E \mid \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}, \det(\mathbf{Q}) = 1 \} \quad (8)$$

$\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$  jest wektorem uogólnionych przemieszczeń.

Mając na uwadze cel pracy wygodniej będzie prowadzić dalsze rozważania w ustalonym dwuwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich z wektorami  $\mathbf{t}_1^0 = \{1, 0, 0\}^T$ ,  $\mathbf{t}_2^0 = \{0, 1, 0\}^T$ . Sprowadzenie (7) do postaci obowiązującej w płaskim układzie dwuwymiarowym prowadzi do definicji odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}) \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} + 1 - \cos w_3 \\ u_{2,1} - \sin w_3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{u}) \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,2} + \sin w_3 \\ u_{2,2} + 1 - \cos w_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_1(\mathbf{u}) \rightarrow \{ \kappa_{31} \} = \left\{ \frac{dw_3}{dx_1} \right\}, \quad \boldsymbol{\kappa}_2(\mathbf{u}) \rightarrow \{ \kappa_{32} \} = \left\{ \frac{dw_3}{dx_2} \right\} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_2(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Sprowadzenie zadania do problemu dwuwymiarowego pozwala na ominięcie złożonych operacji związanych ze składaniem i interpolacją klasy  $C^0$  parametrów opisujących obrót. Procedury te opisane są szczegółowo np. w pracy [3] i cytowanej tam literaturze.

Widoczne jest, że równania (9) i (10) są nieliniowe ze względu na występowanie funkcji trygonometrycznych. W szczególnym przypadku, gdy kąt obrotu jest mały ( $\sin w \approx w$ ,  $\cos w \approx 1$ ), otrzymane wzory przechodzą w związki opisujące liniowe odkształcenia ośrodka Cosseratów [6, 20], tzn.:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + w_3, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - w_3, \\ \kappa_{31} = \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \quad \kappa_{32} = \frac{\partial w_3}{\partial x_2} \quad (13)$$

Podstawą formułowania przemieszczeniowych elementów użytych w pracy jest zasada przemieszczeń wirtualnych, którą, nawiązując do notacji macierzowo-operatorowej wprowadzonej w [2], zapisuje się jako

$$G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \equiv G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] - G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = \\ = \iint_B (\mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) da - \iint_B \mathbf{w}^T \mathbf{p} da - \int_{\partial B_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl \quad (14)$$

Relacja konstytutywna  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$  będzie określona w dalszej części pracy, a  $\mathbf{B}$  jest operatorem różniczkowym w związku geometrycznym  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w}$  danym przez

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,1} & 0 & \sin w_3 \\ 0 & (\cdot)_{,2} & \sin w_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ (\cdot)_{,2} & 0 & \cos w_3 \\ 0 & (\cdot)_{,1} & -\cos w_3 \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,1} l \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,2} l \end{bmatrix} \quad (15)$$

gdzie:

$\mathbf{w}^T = \{v_1, v_2, w_3\}$  – wektor przemieszczeń wirtualnych,  
 $l$  – długość charakterystyczna mikrostruktury.

Zapisując równanie (15) uwzględniono odkształcenie  $\varepsilon_{33}$  (niezbędne w dalszej części pracy przy opisie problemów plastyczności).

Ze względu na obecność członów nieliniowych w równaniu (14) jego rozwiązanie poszukiwane jest na drodze linearyzacji, za pomocą metody Newtona [19]

$$\delta G[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}] + G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0 \quad (16)$$

Szczegółowe rozpisanie (16) prowadzi do związku

$$\iint_B (\mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}) da = \\ = \iint_B \mathbf{w}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial B_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl - \iint_B (\mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) da \quad (17)$$

w którym macierz  $\mathbf{G}$  ma postać

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_{21} & \sigma_{12} & -\sigma_{22} & \sigma_{11} & 0 & 0 & G_{7,7} \end{bmatrix} \quad (18)$$

gdzie:

$$G_{7,7} = -\sigma_{11}(u_{1,1} + 1) - \sigma_{21}u_{2,1} - \sigma_{12}u_{1,2} - \sigma_{22}(u_{2,2} + 1),$$

$\mathbf{C}$  – macierz konstytutywna, określona w dalszej części pracy.

## PLASTYCZNOŚĆ W OŚRODKU MIKROPOLARNYM

W pracy ograniczono się do zagadnień płaskiego stanu odkształcenia (PSO), opisanego według koncepcji prezentowanej m.in. w pracy [7], przyjmując założenie, że przyrosty odkształceń są wszędzie małe. Pozwala to na zapisanie równań konstytutywnych za pomocą zlinearyzowanych miar odkształceń (13) zamiast ich nieliniowych odpowiedników (9) – (10). Odkształcenia (13) zestawia się w wektorze

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{21} \quad \kappa_{31}l \quad \kappa_{32}l\} \quad (19)$$

Dzięki takiemu zapisowi, wszystkie składniki wektora są bezwymiarowe. W rozpatrywanym tu płaskim stanie odkształcenia (PSO)  $\varepsilon_{33} = 0$ , ale składnik ten pozostawiono w (19) i dalej ze względu na wygodę późniejszej dekompozycji odkształceń na części sprężyste i plastyczne, z których obie mogą być różne od zera. Wektorowi odkształcenia  $\boldsymbol{\varepsilon}$  odpowiada energetycznie sprzężony wektor naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{21} \quad m_{31}/l \quad m_{32}/l\} \quad (20)$$

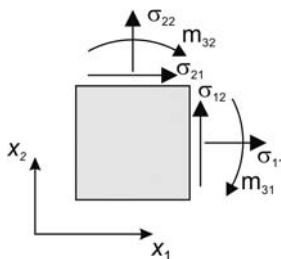
podobnie wzbogacony o składowe związane z mikroobrotom  $m_{31}$ ,  $m_{32}$  – tzw. naprężenia momentowe (rys. 1). Strukturę identyczną do (19) i (20) mają wektory przyrostów  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  oraz  $d\boldsymbol{\sigma}$ , grupujące nieskończenie małe przyrosty składowych tensorów odkształcenia i naprężenia.

W klasycznej analizie sprężysto-plastycznej, w zakresie małych odkształceń [16], zakłada się rozkład wektora przyrostu odkształcenia na część sprężystą  $d\boldsymbol{\varepsilon}^e$  i plastyczną  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (21)$$

Część sprężysta jest liniowo związana z wektorem naprężeń

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e d\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (22)$$



Rys. 1. Składowe tensora naprężenia

gdzie

$\mathbf{C}^e$  – macierz sprężystości zawierająca parametry materiałowe

$$\mathbf{C}^e = \begin{bmatrix} 2\mu c_1 & 2\mu c_2 & 2\mu c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu c_1 & 2\mu c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu + \mu_c & \mu - \mu_c & 0 & 0 \\ & & & & \mu + \mu_c & 0 & 0 \\ sym. & & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \quad (23)$$

gdzie:

$$c_1 = (1 - \nu)/(1 - 2\nu),$$

$$c_2 = \nu/(1 - 2\nu),$$

$\mu$  – moduł Kirchhoffa

$\nu$  – współczynnik Poissona,

$l$  i  $\mu_c$  – dodatkowe stałe niezbędne do opisu materiału mikropolarnego, odpowiednio znane jako długość charakterystyczna i moduł ścinania.

Najczęściej stosowaną funkcją płynięcia, ze względu na czytelne podstawy teoretyczne i łatwość implementacji, jest hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H). Została ona dostosowana do składników tensora naprężenia w ośrodku mikropolarnym [7] i jest zapisana w postaci

$$f = \sqrt{3J_2} - \bar{\sigma} \leq 0 \quad (24)$$

gdzie:

$J_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr}\boldsymbol{\sigma}^2)$  – drugi niezmiennik dewiatora naprężenia  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$ ,  
 $\bar{\sigma}$  – granica plastyczności, która może zależeć od parametru wzmocnienia  $\gamma$  ( $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\gamma)$ ).

Niezmiennik  $J_2$  dla ośrodka mikropolarnego może być uogólniony jako

$$J_2 = a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji} + a_3 m_{ij} m_{ij} / l^2 \quad (25)$$

gdzie:

$s_{ij}$  – składowe dewiatora tensora naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$ ,

$a_1, a_2, a_3$  – pewne stałe swobodne.

We wzorze (25) obowiązuje konwencja sumacyjna dla powtarzających się indeksów. Jeśli  $m_{ij} = 0$ , to zachodzi  $s_{ij} = s_{ji}$ , więc zależność (25) redukuje się do  $J_2 = (a_1 + a_2) s_{ij} s_{ij}$ . Oczywiście musi być spełnione  $a_1 + a_2 = \frac{1}{2}$ , dzięki czemu zapewniona jest zgodność z klasyczną definicją niezmiennika dewiatora. Możliwe jest przyjęcie  $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$  (zestaw standardowy),  $a_1 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{1}{8}$  (model kinematyczny),  $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = -\frac{1}{4}$  (model statyczny).

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia niezmiennik  $J_2$  można zapisać

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + a_1 \sigma_{12}^2 + 2a_2 \sigma_{12} \sigma_{21} + a_1 \sigma_{21}^2 + a_3 [(m_{31}/l)^2 + (m_{32}/l)^2] \quad (26)$$

Dzięki wprowadzeniu macierzy

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 & 2a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_2 & 2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

takiej że składowe tensora  $\mathbf{s}$  można zapisać w formie wektora  $\mathbf{s} = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}$ , wzorowi (24) z wykorzystaniem (20) można nadać zwarty zapis

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma}} \quad (28)$$

Funkcję płynięcia (24) można rozszerzyć o składnik związany z naprężeniem średnim  $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ , otrzymując kryterium Druckera-Pragera (D-P)

$$f = \sqrt{3J_2} + \alpha\sigma_m - \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma}} \leq 0 \quad (29)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\pi}^T = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0\}$ , natomiast  $\alpha$  i  $\bar{\sigma}$  można wyznaczyć, znając eksperymentalnie określone parametry ośrodka: kąt tarcia wewnętrznego  $\phi$  i spójność  $c_0$  [9]. Związki łączące te parametry to:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3} \sin \phi}{3 - \sin \phi}, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{6c_0 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad (30)$$

Przyrost odkształceń plastycznych jest ustalany na podstawie niestowarzyszonego prawa płynięcia w klasycznej formie:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{g} = \sqrt{\frac{3}{2}J_2} + \beta\sigma_m - \bar{\sigma} \quad (31)$$

Parametr  $\beta$  może być wyznaczony przy znanym kącie dyatacji  $\psi$  z zależności

$$\beta = \frac{2\sqrt{3} \sin \psi}{3 - \sin \psi} \quad (32)$$

Wyrażenie (31) można przekształcić do postaci

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \left( \frac{3\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}}{2\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}}} + \beta\boldsymbol{\pi} \right) \quad (33)$$

Mnożnik skalarny  $d\lambda$  jest wyznaczany z warunku zgodności  $df = 0$ .

Parametr wzmocnienia  $\gamma$  w klasycznym podejściu jest wyznaczany z przyrostu  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  dewiatora przyrostu tensora odkształcenia plastycznego  $\mathbf{e}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3}(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^p)\mathbf{I}$

$$d\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}d\boldsymbol{\varepsilon}^p d\boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad (34)$$

W badaniu jednoosiowego rozciągania  $d\gamma = d\varepsilon_{xx}^p$ , stąd  $\gamma$  jest nazywane zastępczym odkształceniem plastycznym (ang. *equivalent plastic strain*) i będzie oznaczone  $\gamma = \varepsilon_{eff}^p$ . W przypadku ośrodka mikropolarnego stosuje się uogólniony wzór w postaci

$$d\gamma = \sqrt{b_1 d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p + b_2 d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ji}^p + b_3 d\kappa_{ij}^p d\kappa_{ij}^p l^2} \quad (35)$$

w którym  $b_1 + b_2 = \frac{2}{3}$ , dzięki czemu w przypadku redukcji do klasycznego zagadnienia spełniony jest wzór (34). W płaskim stanie odkształcenia wzór (35) można rozpisać do postaci

$$d\gamma = \left[ \frac{2}{3}((d\varepsilon_{11}^p)^2 + (d\varepsilon_{22}^p)^2 + (d\varepsilon_{33}^p)^2) + b_1(d\varepsilon_{12}^p)^2 + 2b_2 d\varepsilon_{12}^p d\varepsilon_{21}^p + b_1(d\varepsilon_{21}^p)^2 + b_3((d\kappa_{31}^p)^2 + (d\kappa_{32}^p)^2) \right]^{1/2} \quad (36)$$

Wprowadzenie macierzy

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2b_1 & 3/2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2b_2 & 3/2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2b_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

pozwala zapisać związek (34) w zwartej formie

$$d\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p)^T \mathbf{Q} d\boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad (38)$$

gdzie:

$d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  – wektor przyrostu odkształceń plastycznych.

Wprowadzenie reguły płynięcia (33) do (38), przy uwzględnieniu  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ , daje wzór

$$d\gamma = d\lambda \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} \right)^{1/2} \quad (39)$$

Dzięki odpowiedniemu doborowi współczynników, np.:

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \frac{1}{3}, \quad b_3 = \frac{2}{3} \quad (40)$$

można zapewnić że  $\mathbf{PQP} = \mathbf{P}$ , dzięki czemu

$$d\gamma = d\lambda \quad (41)$$

## ALGORYTM ROZWIĄZANIA PROBLEMU PLASTYCZNOŚCI

W pracy [7] zaprezentowano jeden z podstawowych algorytmów rozwiązywania równań plastyczności – algorytm powrotny Eulera (ang. *return-mapping algorithm*). Opiera się on na dekompozycji wektora przyrostu odkształcenia na część sprężystą i plastyczną

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (42)$$

przy czym przyrost naprężenia zależy od sprężystej części przyrostu odkształcenia

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (43)$$

Obliczenia wymagają wprowadzenia tzw. naprężeń testowych  $\boldsymbol{\sigma}_p$ , obliczanych przy założeniu, że przyrost odkształcenia jest w całości sprężysty

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (44)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\sigma}_0$  – znany wektor naprężenia z poprzedniego kroku.

Wyrażenie (33), określające przyrost odkształceń plastycznych, może być zapisane dla przyrostów w ramach kroku obliczeniowego  $\Delta(\cdot)$  jako

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_n} = \Delta \lambda \left( \frac{3\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_n}{2\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_n^T \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_n}} + \beta\boldsymbol{\pi} \right) \quad (45)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}$  – wektor poszukiwanych składowych naprężenia na końcu kroku.

Ze wzorów tych uzyskujemy

$$\sigma_n = \sigma_t - \Delta\lambda \left[ \frac{3\mathbf{C}^e \mathbf{P}\sigma_n}{2\sqrt{\frac{3}{2}\sigma_n^T \mathbf{P}\sigma_n}} + \beta \mathbf{C}^e \boldsymbol{\pi} \right] \quad (46)$$

Poszukiwane składowe naprężenia muszą spełniać warunek

$$f(\sigma_n, \gamma_n) = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_n^T \mathbf{P}\sigma_n} + \alpha \boldsymbol{\pi}^T \sigma_n - \bar{\sigma}(\gamma_n) = 0 \quad (47)$$

Równania (46) i (47), z wykorzystaniem (41), można zapisać jako układ równań nieliniowych z niewiadomymi  $\sigma_n$  oraz  $\Delta\lambda$

$$\begin{cases} \mathbf{p}(\sigma_n, \Delta\lambda) = \sigma_n - \sigma_t + \Delta\lambda \left[ \frac{3\mathbf{C}^e \mathbf{P}\sigma_n}{2\sqrt{\frac{3}{2}\sigma_n^T \mathbf{P}\sigma_n}} + \beta \mathbf{C}^e \boldsymbol{\pi} \right] = \mathbf{0} \\ f(\sigma_n, \Delta\lambda) = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_n^T \mathbf{P}\sigma_n} + \alpha \boldsymbol{\pi}^T \sigma_n - \bar{\sigma}(\Delta\lambda) = 0 \end{cases} \quad (48)$$

Układ ten można rozwiązać, stosując np. metodę Newtona Raphsona [19]. Zakładamy że wartości startowe niewiadomych są równe:

$$\sigma_n^{(0)} = \sigma_p, \quad \Delta\lambda^{(0)} = 0 \quad (49)$$

Przyrosty w  $j$ -tej iteracji są obliczane jako rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{J}^{(j)} \begin{Bmatrix} \delta\sigma^{(j)} \\ \delta\lambda^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{p}^{(j)} \\ -f^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

gdzie:

$\mathbf{J}^{(j)}$  – jacobian wielkości z  $j$ -tej iteracji obliczany jako:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \sigma_n} & \frac{\partial p}{\partial \Delta\lambda} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n}\right)^T & \frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Wartości niewiadomych są uaktualnianie:

$$\sigma_n^{(j)} = \sigma_n^{(j-1)} + \delta\sigma^{(j)}, \quad \Delta\lambda^{(j)} = \Delta\lambda^{(j-1)} + \delta\lambda^{(j)} \quad (52)$$

a następnie sprawdzana jest zbieżność rozwiązania, tj.  $\|\mathbf{p}\| \leq \text{TOL}_1$  oraz  $|f| \leq \text{TOL}_2$ , gdzie  $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$  (norma euklidesowa), a  $\text{TOL}_1$  i  $\text{TOL}_2$  są ustalonymi wartościami dopuszczalnej tolerancji.

## STYCZNA MACIERZ SZTYWNOŚCI

Jak pokazano w pracach [6, 8], korzystne numerycznie jest wprowadzenie stycznej macierzy sztywności materiałowej  $\mathbf{C}^{ep}$  jako algorytmicznej, związanej z metodą rozwiązania problemu powrotu na powierzchnię uplastycznienia. Różniczkowanie (46) względem zmiennej czasu daje

$$d\sigma = \mathbf{C}^e d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{C}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{C}^e \frac{\mathbf{P}\sigma^T \mathbf{P}\sigma - \mathbf{P}\sigma\sigma^T \mathbf{P}}{(\sigma^T \mathbf{P}\sigma)^{3/2}} d\sigma \quad (53)$$

W przedstawionych równaniach przyjmuje się wektor naprężeń  $\sigma \equiv \sigma_n$ . Po przekształceniach równanie (53) można zapisać w postaci

$$d\sigma = \mathbf{H} \left[ d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] \quad (54)$$

gdzie:

$$\mathbf{H} = \left[ \left[ \mathbf{C}^e \right]^{-1} - \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{P}\sigma^T \mathbf{P}\sigma - \mathbf{P}\sigma\sigma^T \mathbf{P}}{(\sigma^T \mathbf{P}\sigma)^{3/2}} \right]^{-1} \quad (55)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{P}\sigma}{\sqrt{\sigma^T \mathbf{P}\sigma}} + \beta \boldsymbol{\pi}$$

W pracy [8] pokazano, że ze względów numerycznych (złe uwarunkowanie odwracanej macierzy) korzystniejszy jest zapis przedostatniej zależności jako

$$\mathbf{H} = \left[ \mathbf{I} - \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{C}^e \frac{\mathbf{P}\sigma^T \mathbf{P}\sigma - \mathbf{P}\sigma\sigma^T \mathbf{P}}{(\sigma^T \mathbf{P}\sigma)^{3/2}} \right]^{-1} \mathbf{C}^e \quad (56)$$

Wyrażenie wewnątrz nawiasu w równości (56) jest macierzą niesymetryczną, ale  $\mathbf{H}$  symetrię zachowuje. Kiedy materiał jest w stanie plastycznym zachodzi  $f(\sigma, \gamma) = 0$  oraz  $f = 0$  (warunek zgodności), co można zapisać jako

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma - h d\lambda = 0 \quad (57)$$

gdzie:

$h = d\bar{\sigma} / d\gamma$  – moduł wzmocnienia (osłabienia) materiału.

Równanie (57) wraz z (54) daje związek

$$d\sigma = \left[ \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{H}}{\left( h + \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)} \right] d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (58)$$

## APLIKACJA DO METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

W ramach przygotowywanej rozprawy doktorskiej Autora, implementację diskutowanego prawa materiałowego przeprowadzono za pomocą autorskiego programu MES. Program ten powstał na podstawie kodu programu CAM, opracowanego w ramach geometrycznie nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok, udostępnionego przez Jacka Chróścielewskiego [2]. Na potrzeby aktualnego studium opracowano własną wersję programu pozwalającą na analizę dwuwymiarowych nieliniowych geometrycznie i materiałowo zagadnień ośrodka Cosseratów.

Równanie (17) podlega standardowej w MES aproksymacji skończenie elementowej. Dziedzinę zadania  $B$  aproksymuje się jako  $B \approx B_h = \sum_{e=1}^{N_e} \Pi_{(e)}$  niepokrywających się dziedzin – elementów skończonych  $\Pi_{(e)}$ . Typowy element  $\Pi_{(e)}$  jest określony jako gładkie odwzorowanie  $\xi = \{\xi^1, \xi^2\} \in [-1, +1] \times [-1, +1] = \pi_{(e)}$  dwuwymiarowego elementu macierzystego. Niech:

$$\mathbf{L}(\xi) = [\mathbf{L}_1(\xi) \quad \mathbf{L}_2(\xi) \quad \mathbf{L}_3(\xi), \dots, \mathbf{L}_N(\xi)]$$

$$\mathbf{L}_a(\xi) = \begin{bmatrix} L_a(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & L_a(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & L_a(\xi) \end{bmatrix} \quad (59)$$

oznacza macierz funkcji kształtu  $N$ -węzłowego elementu skończonego. Wielomiany interpolacyjne  $L_a(\xi)$  określone są w dziedzinie elementu macierzystego  $\pi_{(e)}$  jako iloczyn  $L_a(\xi) \equiv L_i^{a \leftrightarrow i,j}(\xi^1)L_j^a(\xi^2)$  wielomianów Lagrange'a

$$L_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi^0) \dots (\xi - \xi^{i-1})(\xi - \xi^{i+1}) \dots (\xi - \xi^n)}{(\xi^i - \xi^0) \dots (\xi^i - \xi^{i-1})(\xi^i - \xi^{i+1}) \dots (\xi^i - \xi^n)} \quad (60)$$

W obrębie typowego elementu skończonego można, wykorzystując (59), zapisać schematy interpolacyjne dla wirtualnych przemieszczeń  $\mathbf{w}(\xi)$  i przyrostów przemieszczeń  $\Delta \mathbf{u}(\xi)$  odpowiednio przez:

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(\xi) \\ \mathbf{w}(\xi) \\ \boldsymbol{\varphi}(\xi) \end{Bmatrix} = \mathbf{L}(\xi) \delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad \Delta \mathbf{u}(\xi) = \mathbf{L}(\xi) \Delta \mathbf{q}_{(e)}$$

$$\delta \mathbf{q}_{(e)} = \begin{Bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_N \end{Bmatrix}, \quad \delta \mathbf{q}_a = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

Podstawienie (61) do (17) prowadzi do określenia macierzy sztywności elementu

$$\iint_B (\mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w}^T \mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}) da \rightarrow \delta \mathbf{q}_{(e)}^T (\mathbf{K}_M^{(e)} + \mathbf{K}_G^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} \quad (62)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_M^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{L}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{L} da, \quad \mathbf{K}_G^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{L}^T \mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{L} da \quad (63)$$

elementowego wektora obciążeń zewnętrznych:

$$\iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p} da \rightarrow \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{p}^{(e)}, \quad \mathbf{p}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{L}^T \mathbf{p} da \quad (64)$$

węzłowego wektora sił wewnętrznych:

$$\iint_M (\mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w})^T \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) da \rightarrow \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}^{(e)}, \quad \mathbf{r}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{s}(\mathbf{u}) da \quad (65)$$

W podanych wzorach  $\Pi_{(e)}$  oznacza obszar typowego elementu skończonego w przestrzeni fizycznej zadania. Macierz  $\mathbf{C}$  we wzorze (62) przyjmowana jest w zależności od stanu wyężenia (zakres sprężysty lub plastyczny) w punktach całkowania elementu skończonego. Ostatecznie, globalnemu równaniu (17) odpowiada na poziomie elementu równanie

$$\mathbf{K}_T^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \Delta \mathbf{p}^{(e)} + \mathbf{j}^{(e)} \quad (66)$$

gdzie elementowa styczna macierz sztywności i elementowy wektor sił niezrównoważonych mają odpowiednio postacie:

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \mathbf{K}_M^{(e)} + \mathbf{K}_G^{(e)}, \quad \mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)} \quad (67)$$

Macierze i wektory elementowe są całkowane za pomocą pełnej kwadratury Gaussa (zob. np. [10]). Równania globalne dla całego układu są formułowane w wyniku agregacji macierzy (67) uwzględniającej warunki brzegowe zadania, co prowadzi na poziomie konstrukcji do równania

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{j} \quad (68)$$

które rozwiązywane jest metodą przyrostowo-iteracyjną, (zob. np. [21]).

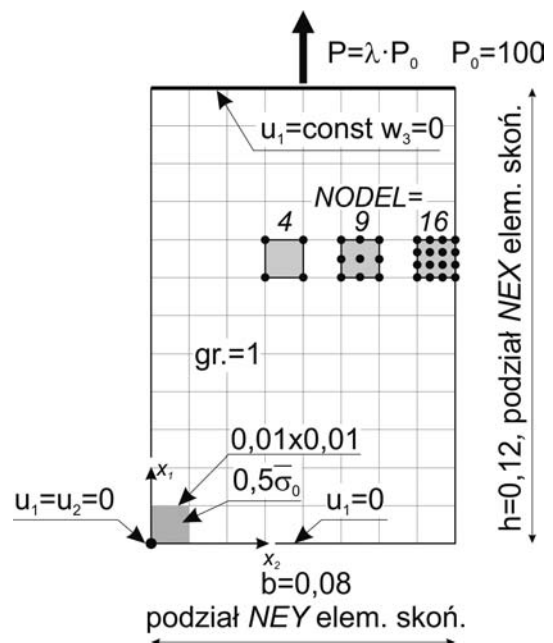
Wszystkie symulacje są dwuwymiarowe i zachowują płaski stan odkształcenia. Wielkości fizyczne podane są w podstawowych i pochodnych jednostkach SI: m, N, Pa.

### Pasmo rozciągane

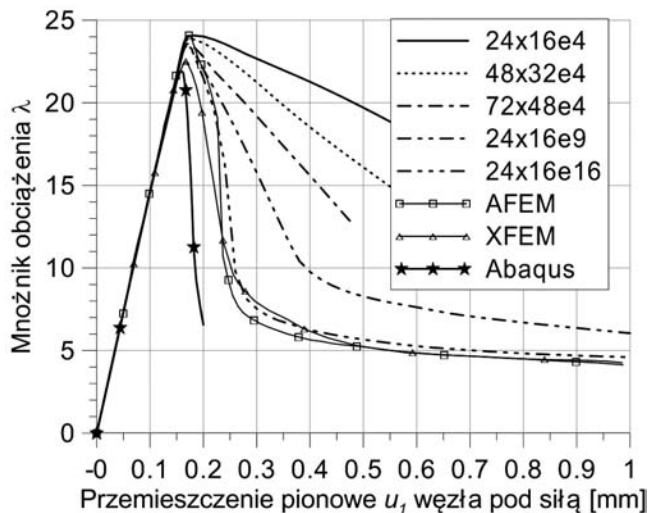
W przykładzie rozpatrywane jest rozciągane pasmo w płaskim stanie odkształcenia. Geometria i warunki brzegowe zadania przedstawiono na rys. 2. Jest to standardowy przykład ilustrujący wystąpienie efektu lokalizacji, użyty do badań m.in. w pracy [12]. Przyjęto materiał o module Younga  $E = 2,0 \cdot 10^7$ , współczynniku Poissona  $\nu = 0,3$ , module osłabienia materiału  $E_T = -E/15$  oraz początkowej granicy plastyczności  $\bar{\sigma}_0 = 2,8 \cdot 10^4$ . Dodatkowe stałe związane z ośrodkiem Cosseratów to  $\mu_c = \mu/3$  oraz  $l = 0,001$ . W pracy [12] stałe materiałowe podano stosując jednostki: kg dla sił, kg/cm<sup>2</sup> dla naprężenia. W obliczeniach zachowano proporcje między stałymi materiałowymi, ale nadano im poprawne jednostki z układu SI.

W celu zainicjowania efektu lokalizacji, niezbędne jest wprowadzenie imperfekcji zaburzającej stan symetrii zadania poprzez redukcję granicy plastyczności na fragmencie pasma. W pracy [12] nie podano wymiarów obszaru wprowadzonej imperfekcji; w artykule przyjęto je jak na rys. 2. W obliczeniach użyte jest kryterium uplastycznienia według hipotezy H-M-H.

Na rys. 3 przedstawiono krzywe siła – przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji. Są one opisane według schematu  $NE-XxNEYeNODEL$ , gdzie  $NEX$  i  $NEY$  oznaczają odpowiednio liczbę elementów skończonych w kierunku  $x$  i  $y$ , natomiast  $NODEL$  oznacza liczbę węzłów w elemencie skończonym. Dyskretyzacja na elementy skończone jest przyjęta w taki sposób, aby uzyskać regularną siatkę kwadratowych elementów. Przez AFEM



Rys. 2. Pasmo rozciągane, geometria, dyskretyzacja i imperfekcja materiałowa

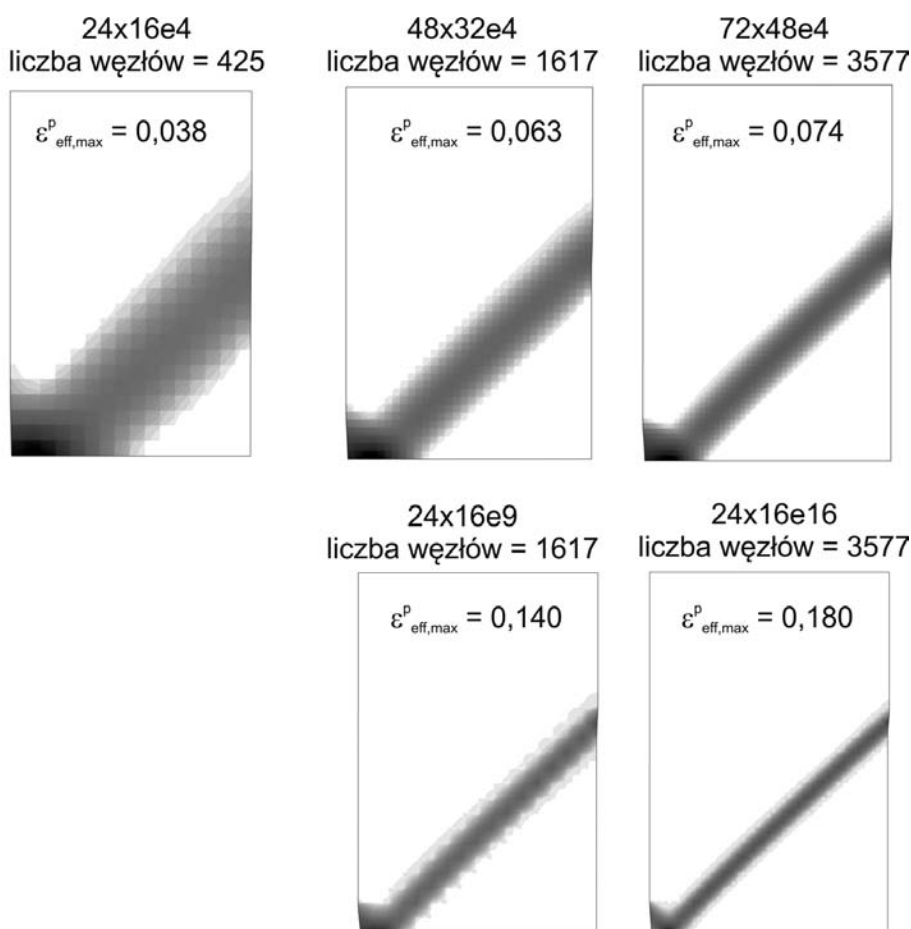


Rys. 3. Krzywe siła – przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji

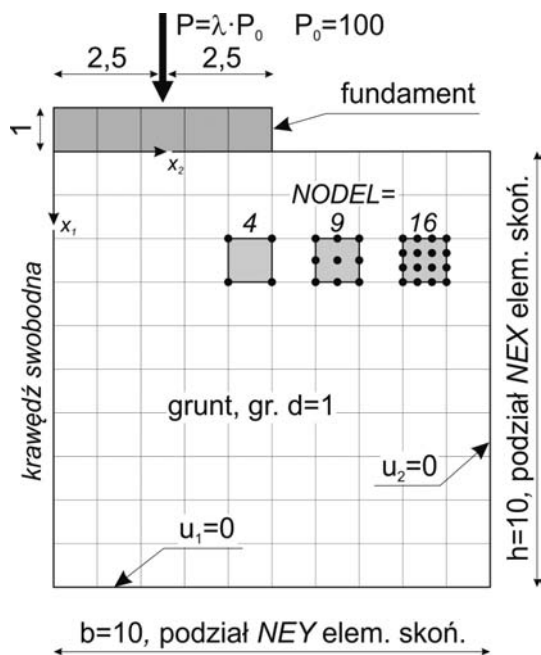
i XFEM oznaczono rozwiązania z pracy [12], odpowiednio z rozwiązania z adaptacyjnym siatkowaniem oraz z rozszerzonej metody elementów skończonych. Ze względu na inne jednostki zaproponowane w oryginalnym przykładzie, niezbędne było dopasowanie krzywych zaprezentowanych tamże poprzez przemnożenie wartości na osi pionowej przez 22,4 oraz podzielenie wartości na osi poziomej przez 8500. Tak przyjęte wartości

gwarantują pokrywanie się rozwiązań w zakresie sprężystym. Brak spójności w oznaczeniach parametrów, opisach wykresów i rysunków oraz użytych jednostkach sprawia trudności w weryfikacji założeń. Dodatkowe sprawdzenie wykonano w programie Abaqus, z dyskretyzacją  $NEX = 24$ ,  $NEY = 16$ , z użyciem 8-węzłowych elementów skończonych w klasycznym (bez obrotowych stopni swobody) płaskim stanie odkształcenia, z całkowaniem pełnym (według oznaczeń katalogu elementów programu Abaqus – *CPE8*).

Na rys. 4 przedstawiono mapy zastępczych odkształceń plastycznych przy różnych dyskretyzacjach przy jednakowym przemieszczeniu  $u_1$  punktu przyłożenia siły. Wyraźnie widać strefy lokalizacji oraz potwierdzony został spodziewany charakter zniszczenia pasma. Szerokość strefy lokalizacji i wartość odkształcenia jest zależna od dyskretyzacji pasma. Użycie biliniowych elementów 4-węzłowych, szczególnie przy małej liczbie elementów skończonych, skutkuje złym odwzorowaniem szerokości strefy lokalizacji. Przy dyskretyzacjach o identycznej liczbie węzłów lepsze wyniki uzyskuje się, stosując elementy wyższych rzędów (badanie  $p$  – zbieżności), mimo większej liczby punktów całkowania w całym modelu przy użyciu elementów 4 węzłowych (w celu porównania, np. dyskretyzacja  $48 \times 32e4$  ma 6144 punktów całkowania, a  $24 \times 16e9$  ma 3456). Porównując krzywe równowagi, widoczne jest też, że rozwiązanie własne  $24 \times 16e16$  jest w bardzo dobrej zgodności z rozwiązaniami z pracy [12].



Rys. 4. Mapy odkształceń zastępczych dla  $u_1 = 0,0005$



Rys. 5. Fundament nad pionowym urwiskiem, geometria i dyskretyzacja

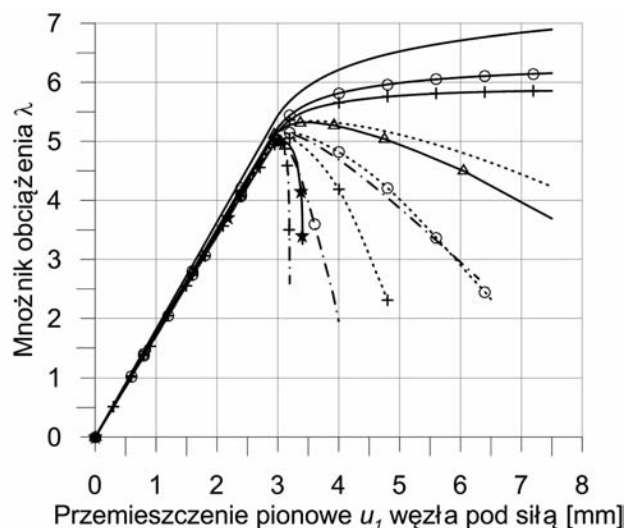
### Fundament na pionowym uskoku

Przykład numeryczny stanowi analizę nieskończenie długiego betonowego fundamentu, obciążonego pionowo i osiowo, umieszczonego na skraju pionowej skarpy (rys. 5). Zadanie analizowane jest w płaskim stanie odkształcenia. Materiał fundamentu jest wielokrotnie sztywniejszy od materiału bryły gruntu, stąd też zachowuje się on niemal jak bryła sztywna.

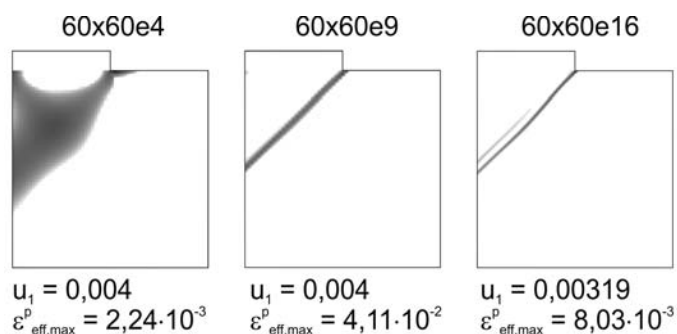
Przyjęto materiał podłoża o module Younga  $E = 2,1 \cdot 10^5$ , współczynnika Poissona  $\nu = 0,49$ , module osłabienia materiału  $E_T = -5,1220 \cdot 10^3$  oraz początkowej granicy plastyczności  $\bar{\sigma}_0 = 86,6$ . Dodatkowo stałe związane z ośrodkiem Cosseratów to  $\mu_c = 2349$  oraz  $l = 0,0003$ . Dla fundamentu przyjęto materiał sprężysty o stałych  $E = 2,1 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\mu_c = 2,6923 \cdot 10^6$  oraz  $l = 0,0003$ . W obliczeniach użyte jest kryterium uplastycznienia według hipotezy H-M-H.

Zadanie to jest rozpatrywane w pracy [11]. Zastosowano tam metodę adaptacyjnego siatkowania, lecz interpretacja zaprezentowanych wyników przysparza pewnych trudności. Wydaje się, tylko na podstawie porównania wyników z zakresu sprężystego, że przemieszczenia punktu pod siłą skupioną są przeszacowane dwukrotnie. Na rys. 6 krzywa opisana jako *Khoei 2007* pochodzi z pracy [11], została jednak przeskalowana przez mnożnik 0,5 dla przemieszczeń. Obliczenia porównawcze, przeprowadzone przez autora w programie Abaqus, wykonano przy klasycznym sformułowaniu płaskiego stanu odkształcenia. Przyjęta dyskretyzacja to  $NEX = NEY = 100$  z użyciem 8-węzłowych elementów skończonych (CPE8).

Na rys. 6 przedstawiono krzywe równowagi rozwiązań przy różnych dyskretyzacjach, natomiast na rys. 7 zaprezentowano mapy odkształceń zastępczych dla wybranych dyskretyzacji. Wynika z nich, że elementy biliniowe (4-węzłowe) nie są właściwe do przeprowadzania tego rodzaju analiz, dając inne jakościowo krzywe równowagi oraz obszar uplastycznienia. Elementy 9- oraz 16-węzłowe dają wyniki podobne jakościowo.



Rys. 6. Krzywe siła – przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji



Rys. 7. Mapy zastępczych odkształceń plastycznych

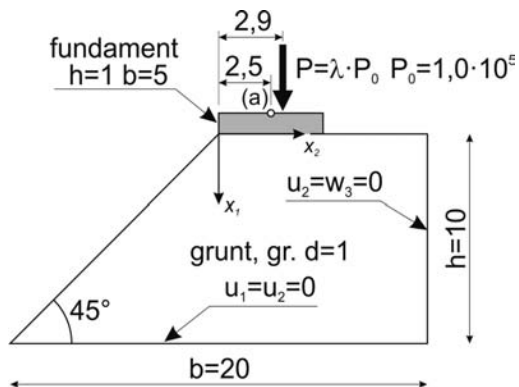
Można zauważyć, że podnoszenie rzędu elementów ( $p$  – zbieżność) jest korzystniejsze ze względu na dokładność obliczeń niż zagęszczanie siatki elementów niskiego rzędu ( $h$  – zbieżność).

Porównanie wyniku uzyskanego w programie Abaqus z wynikami z pracy [11] wskazuje na konieczność używania gęstego podziału na elementy skończone w celu dobrego odwzorowania zachowania symulowanego zjawiska po osiągnięciu maksymalnej siły i dalszym wzroście przemieszczeń.

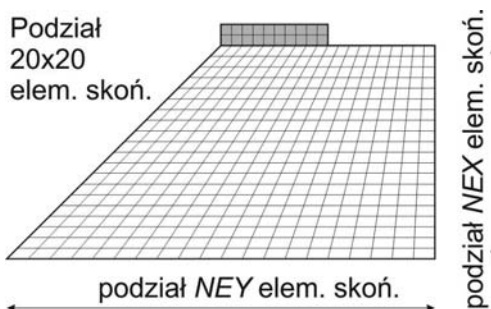
### Fundament na koronie zbocza

W przykładzie analizowano zachowanie zbocza, na którego koronie znajduje się obciążony mimośrodowo fundament (rys. 8). Na rys. 9 przedstawiono przykładową dyskretyzację zadania. Taki schemat zadania użyto w pracy [12] do testowania metody XFEM, z kryterium uplastycznienia H-M-H i z osłabieniem materiału. Wobec braku rozwiązań odniesienia w literaturze dla niżej podanych stałych materiałowych obliczenia porównawcze zrealizowano w programie Abaqus.





Rys. 8. Fundament na koronie zbocza, geometria zadania



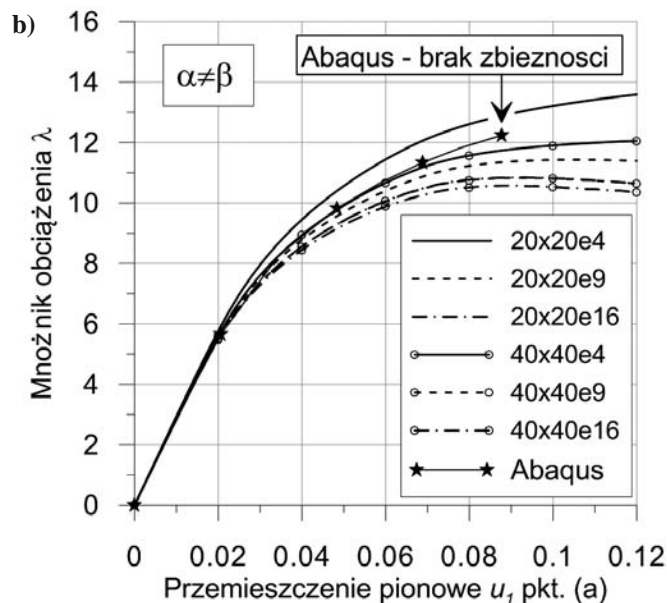
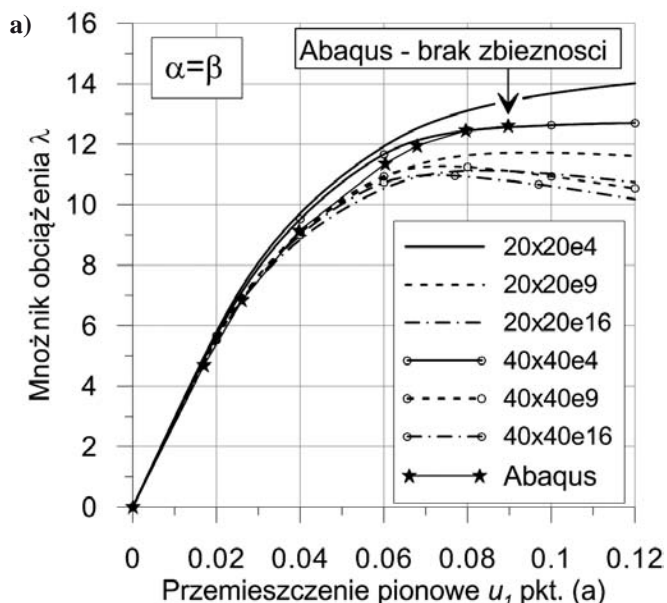
Rys. 9. Fundament na koronie zbocza, dyskretyzacja zadania

Przyjęto materiał podłoża jako idealnie sprężysto-plastyczny o module Younga  $E = 2,8 \cdot 10^7$ , współczynnika Poissona  $\nu = 0,25$  oraz początkowej granicy plastyczności  $\bar{\sigma}_0 = 6,7857 \cdot 10^4$ . Dodatkowe stałe związane z ośrodkiem Cosseratów to  $\mu_c = 3,7333 \cdot 10^6$  oraz  $l = 0,1$ . Dla fundamentu przyjęto materiał sprężysty o stałych  $E = 3,35 \cdot 10^{10}$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $\mu_c = 4,6528 \cdot 10^9$  oraz  $l = 0,01$ . W przykładzie w obliczeniach użyte jest kryterium uplastycznienia według hipotezy D-P, dodatkowe stałe przyjęto na dwa sposoby:  $\phi = \psi = 18^\circ$  ( $\alpha = \beta = 0,3978$ ) oraz  $\phi = 18^\circ$ ,  $\psi = 0$ , ( $\alpha = 0,3978$ ,  $\beta = 0$ ), odpowiednio dla stowarzyszonego oraz niestowarzyszonego prawa płynięcia.

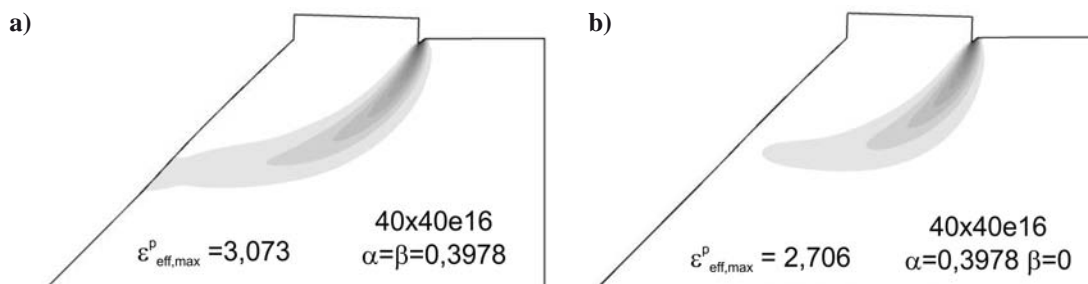
Na rys. 10 przedstawiono krzywe siła-przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji. Rozwiązanie w programie Abaqus uzyskano dla siatki  $NEX = NEY = 40$  z elementami CPE8. Podobnie jak w poprzednich przykładach, rozwiązania elementami 4-węzłowymi odbiegają jakościowo od tych uzyskanych za pomocą elementów wyższych rzędów.

Na rys. 11 zaprezentowano mapy zastępczych odkształceń plastycznych dla identycznego przemieszczenia  $u_1$  przy różnych prawach płynięcia. Widoczny jest wyraźny rozwój strefy poślizgu zbocza, inny dla stowarzyszonego (rys. 11a) i niestowarzyszonego prawa płynięcia (rys. 11b).

W podanym przykładzie, mimo zastosowania idealnie sprężysto-plastycznego materiału ( $h = 0$ ), można mówić o wystąpieniu efektu lokalizacji. Odkształcenia plastyczne występują



Rys. 10 Krzywe siła – przemieszczenie dla różnych dyskretyzacji: a) prawo stowarzyszone, b) prawo niestowarzyszone



Rys. 11 Mapy zastępczych odkształceń plastycznych dla  $u_1 = 0,12$ : a) prawo stowarzyszone, b) prawo niestowarzyszone

w małym obszarze, podczas gdy część zbiega doznaje obrotu jako bryła quasi-szytywna. Ponownie można zauważyć nieporównane wyniki uzyskiwane elementami 4-węzłowymi. Należy uznać, że elementy wyższych rzędów, nawet przy słabo zagęszczonej siatce, dają dobre jakościowo rezultaty.

## PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono przykłady analizy zbieżności rozwiązań MES w odniesieniu do dwuwymiarowych zagadnień sprężysto-plastycznych, jakie mogą występować w zagadnieniach geotechniki. Do opisu ośrodka gruntowego przyjęto dwuwymiarowy model ciała Cosseratów. Omówiono sformułowanie czworobocznych elementów skończonych różnych rzędów i porównano rezultaty numeryczne otrzymane z ich pomocą w zakresie geometrycznie i fizycznie nieliniowym. W wybranych zadaniach przyjęto model materiału z osłabieniem.

Analizując wyniki, szczególną uwagę poświęcono zjawisku lokalizacji stref uplastycznienia i ich modelowaniu w zależności od gęstości podziału na elementy skończone. Otrzymane rozwiązania własne wskazują, że klasyczne przemieszczeniowe elementy 4-węzłowe, o liniowych funkcjach kształtu prowadzą do wyników niezgodnych z rozwiązaniami odniesienia, co widać zarówno na ścieżkach równowagi, jak i w obrazie propagacji stref uplastycznienia. Przeprowadzenie analizy zbieżności rodzaju  $h$  (zagęszczanie siatki) nie poprawia w znaczący sposób wyników.

Zasadnicze polepszenie rozwiązań uzyskano poprzez podwyższenie rzędu interpolacji, tzn. poprzez zastosowanie elementów 9- i 16-węzłowych, nawet bez zmiany ich liczby w dyskretyzacji w stosunku do elementów 4-węzłowych ( $p$  – zbieżność).

Przedstawione wyniki obliczeń własnych wskazują, że modelowanie zagadnień sprężysto-plastycznych wymaga zawsze przeprowadzenia analizy zbieżności rozwiązań. Dotyczy to szczególnie tych problemów, gdzie prawo materiałowe ujmuje osłabienie. Konieczne jest wtedy zastosowanie odpowiednich technik regularyzacji rozwiązania. Wniosek ten jest szczególnie ważny wtedy, gdy stosuje się komercyjne pakiety MES, gdzie nie zawsze istnieje możliwość zastosowania elementów wyższego rzędu czy innych znanych z literatury technik regularyzacyjnych.

## LITERATURA

1. Bobiński J.: Implementacja i przykłady zastosowań nieliniowych modeli betonu z nielokalnym osłabieniem. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2006.
2. Chróścielewski J.: Rodzina elementów skończonych klasy  $C^0$  w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 540, Budownictwo Lądowe, 53, 1–291 (1996)
3. Chróścielewski J., Kreja I., Sabik A., Witkowski W.: Modeling of composite shells in 6-parameter nonlinear theory with drilling degree of freedom, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 18, iss. 6, 2011, 403-419.
4. Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W.: Statyka i dynamika powłok wielopłatowych. Wydawnictwo IPPT PAN, Warszawa 2004.

5. Chróścielewski J., Witkowski W.: Four-node semi-EAS element in three-field nonlinear theory of shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68, 2006, 1137-1179.
6. De Borst R.: A generalization of  $J_2$ -flow theory for polar continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 103, 1993, 347-362.
7. De Borst R.: Simulation of strain localization a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations* 8, 1991, 317-332.
8. De Borst R., Groen A. E.: Note on the calculation of consistent tangent operators for von Mises and Drucker-Prager plasticity. *Communications In Numerical Methods In Engineering*, 10, 1994, 1021-1025.
9. Duxbury P., Li X.: Development of elasto-plastic material models in a natural coordinate system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 135, 1996, 283-306.
10. Hildebrandt F. B.: Introduction to numerical analysis. McGraw-Hill Book Company Inc., 1956.
11. Khoei A. R., Gharehbaghi S. A., Tabarraie A. R., Riahi A.: Error estimation adaptivity and data transfer in enriched plasticity continua to analysis of shear band localization. *Applied Mathematical Modelling* 31, 2007, 983-1000.
12. Khoei A. R., Karimi K.: An enriched-FEM model for simulation of localization phenomenon in Cosserat continuum theory. *Computational Materials Science* 44, 2008, 733-749.
13. Leśniewska D.: Analysis of shear band pattern formation in soil. IBW PAN, Gdańsk 2000.
14. Li X., Tang H.: A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modeling of strain localization. *Computers and Structures* 83, 1-10, 2005.
15. Nayak G. C., Zienkiewicz O. C.: Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 5, 1972, 113-115.
16. Olszak W., Perzyna P., Sawczuk A.: Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1965.
17. Pamin J., de Borst R.: Numerical simulation of localization phenomena using gradient plasticity and finite elements. *Heron* 40, 1995, 71-92.
18. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.: On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum, *International Journal of Solids and Structures* 46, 2009, 774-787.
19. Szymkiewicz R.: Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics. Springer 2010.
20. Tejchman J., Wu W.: Numerical study on patterning of shear bands in a Cosserat continuum. *Acta Mechanica* 99, 1993, 61-74.
21. Waszczyszyn Z.: Zagadnienia stateczności i ich rozwiązywanie MES. [W:] *Seria Mechanika techniczna*, tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych, M. Kleiber. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 1995, 61-74.
22. Witkowski W. Synteza sformułowania nieliniowej mechaniki powłok podlegających skończonym obrotom w ujęciu MES. Politechnika Gdańska, Monografie, 111, 1-180, Gdańsk 2011.
23. Zadroga B., Malesiński K. Stateczność fundamentów bezpośrednich. Badania modelowe i analizy numeryczne. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2010.

**Praca jest częściowo finansowana w ramach umowy UMO-2012/05/D/ST8/02298.**