

# REKONSTRUKCJA ŚWIATOWEGO ROZKŁADU DOCHODÓW NA PODSTAWIE MINIMALNEJ INFORMACJI STATYSTYCZNEJ

ŚLĄSKI  
PRZEGLĄD  
STATYSTYCZNY  
Nr 11 (17)

Stanisław Maciej Kot, Hanna Adamkiewicz-Drwiłło

Politechnika Gdańska

ISSN 1644-6739

**Streszczenie:** Celem pracy jest uzyskanie próby ze światowego rozkładu dochodów (WID). Zakładamy, że krajowe rozkłady dochodów są log-logistyczne z jednostkową średnią. Wynika z tego, że takie rozkłady są całkowicie określone przez indeks Giniego. Oceny indeksu Giniego dla 119 krajów w latach 1990-2005 uzyskaliśmy z baz danych Deningera-Squire'a, WID2 i innych. Wygenerowaliśmy próbę losową z każdego rozkładu i pomnożyliśmy jej wartości przez  $GDP/capita$ . Wielkość prób ustalaliśmy za pomocą sekwencyjnego testu ilorazowego. Na światową próbę złożyły się próby krajowe ważone udziałami populacji. Stwierdziliśmy, że WID jest bimodalny z malejącymi nierównościami i ubóstwem w rozważanym okresie.

**Słowa kluczowe:** światowy rozkład dochodów, sekwencyjny test ilorazowy, nierówności, ubóstwo.

## 1. Wstęp

Celem pracy jest wygenerowanie losowych prób ze światowego rozkładu dochodów dla lat 1990-2005 i na ich podstawie poszukiwanie odpowiedzi na dwa następujące pytania badawcze:

1. Jaki jest kształt światowego rozkładu dochodów?
2. Jakie są tendencje w kształtowaniu się poziomu nierówności i ubóstwa w świecie?

Przeprowadzone badania dostarczyły argumentów na rzecz dwóch hipotez, stanowiących odpowiedzi na powyższe pytania.

Hipoteza 1. Rozkład dochodów w świecie jest bimodalny i ta własność jest stała w czasie.

Hipoteza 2. Przeciętne dochody na osobę rosną, natomiast nierówności i ubóstwo maleją w całym rozważanym okresie.

Do badań wybrano kraje, dla których istnieją oceny indeksu Giniego  $G$  i dochodu narodowego brutto na osobę ( $GDP/capita$ ). Dla

każdego kraju w kolejnych latach generowano próby losowe z rozkładu log-logistycznego. Liczność prób ustalano za pomocą sekwencyjnego testu ilorazowego Walda. Wygenerowaną próbę przeskalowano tak, by średnia była równa  $GDP/capita$ . Łączną próbę dla świata utworzyły przeskalowane próby z wagami równymi udziałowi populacji danego kraju w populacji świata.

Do podjęcia niniejszych badań skłoniła nas rozbieżność ocen kierunków rozwoju światowego rozkładu dochodów, która ujawnia się ze szczególną mocą w dyskusji nad skutkami globalizacji. Zdumiewające jest zwłaszcza to, że całkowicie rozbieżne opinie na temat kierunków zmian nierówności, dobrobytu i ubóstwa w świecie formułują badacze korzystający z tych samych baz danych. Przyczyny tych rozbieżności analizował Ravallion [Ravallion 2003], wskazując m.in. na ewidentne niespójności pomiarów wspomnianych aspektów rozkładu dochodów. Trzeba dodać, że jakość informacji statystycznych na temat krajowych rozkładów dochodów w dotychczas utworzonych bazach danych pozostawia wiele do życzenia pod względem kompletności, porównywalności i wiarygodności [Atkinson, Brandolini 2001].

Próby rekonstrukcji światowego rozkładu dochodów podjęli się też Shorrocks i Wan [Shorrocks, Wan 2009]. Korzystali z danych w postaci udziałów grup kwantylowych (decylowych, kwintylowych lub kwantylowych). Tego rodzaju dane pozwalają jedynie na oszacowanie funkcji Lorenza, a tym samym na oszacowanie rozkładów dochodów o średniej równej jedności. Badacze zaproponowali algorytm umożliwiający takie korygowanie wygenerowanych prób, aby uzyskać zgodność udziałów grup kwantylowych empirycznych i symulowanych. Zaobserwowali też, że spośród kilku rozkładów teoretycznych najlepsze dopasowanie wykazywał rozkład log-normalny<sup>1</sup>.

Zauważmy, że log-normalna postać krajowych rozkładów dochodów oraz założenie, że średnia równa się 1, oznacza, że takie rozkłady całkowicie określa indeks Giniego. Z tego powodu nie trzeba już korzystać z danych w postaci udziałów grup kwantylowych. Jest to bardzo korzystne, ponieważ liczba krajów prezentujących indeks Giniego jest znacznie większa niż liczba krajów prezentujących udziały

---

<sup>1</sup> Pinkovskiy i Sala-i-Martin [2009] również korzystali z rozkładu log-normalnego do szacowania światowego rozkładu dochodów.

kwantylowe. Ponadto luki w pojedynczych szeregach czasowych indeksów Giniego można uzupełniać znacznie łatwiej niż luki w ciągach grup kwantylowych.

W pracy korzystaliśmy z rozkładu log-logistycznego, o którym wiadomo, że daje lepsze dopasowanie do empirycznych rozkładów dochodów niż rozkład log-normalny [McDonald1984; McDonald, Xu 1995]. Shorrocks i Wan [Shorrocks, Wan 2009] nie uwzględnili w swoich badaniach rozkładu log-logistycznego. Jeśli się przyjmie średnią równą 1, to rozkład log-logistyczny jest także w pełni określony przez indeks Giniego, podobnie jak rozkład log-normalny.

Dalszy układ pracy jest następujący: w punkcie 2 prezentowane są dane statystyczne wykorzystane do generowania prób z krajowych rozkładów dochodów. Przedstawiono tu również metodę generowania owych prób. W punkcie 3 zaprezentowano wyniki analizy światowego rozkładu dochodów, punkt 4 zawiera zaś wnioski z przeprowadzonych badań.

## 2. Dane statystyczne i metoda generowania prób

### 2.1. Bazy danych

Główną przeszkodą w badaniach światowego rozkładu dochodów jest brak danych statystycznych. Mikrodane, najstosowniejsze do tego celu, są udostępniane przez nieliczne kraje i nie zawsze corocznie. Najczęstszą formą prezentacji rozkładów dochodów są udziały grup kwantylowych, bez podania granic tych grup. Znacznie więcej krajów prezentuje tylko indeks Giniego i niekiedy średnią. Porównywalność danych między krajami jest bardzo ograniczona, głównie ze względu na niejednorodność terminologiczną i odmienność krajowych systemów badań statystycznych. Istnieją też naturalne luki w szeregach czasowych prezentowanych statystyk wynikłe np. z rozpadu bądź łączenia się krajów, z rozpoczynania badań budżetów gospodarstw domowych i udostępniania danych przez kraje, które dotychczas tego nie czyniły.

Aktualnie głównym źródłem danych statystycznych dla analiz światowego rozkładu dochodów są dwie światowe bazy danych: tzw. DS i WID2. Baza DS pochodzi z Banku Światowego i zawiera sza-



cunki Deningera-Squira [Deninger, Squire 1996]. Znajdują się tu oceny Giniego i dodatkowo, dla niektórych krajów, udziały grup kwantylowych (z reguły decylowych). Oceny te uzyskano na podstawie rozkładów dochodów lub wydatków. Bazę WID2 opracowano w ośrodku UNU-WIDER (World Institute for Development Economic Research). Stanowi ona kompilację wielu danych pochodzących z różnych źródeł, m.in. z DS, LIS (Luxembourg Income Study). Dochody średnie lub/i mediana są podane tylko dla niewielu krajów. Jakość obu omawianych baz danych budzi jednak wiele zastrzeżeń [Atkinson, Brandolini 2001].

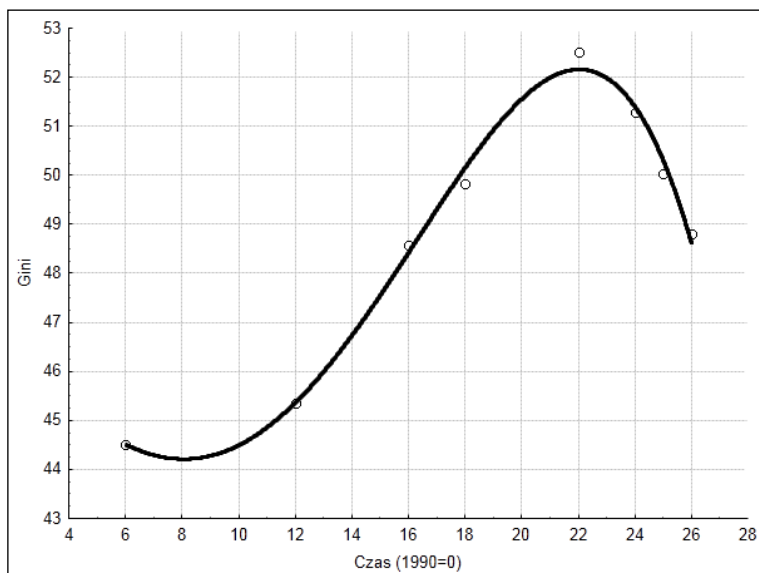
W niniejszym artykule będziemy korzystać głównie z baz DS, WID2. Dodatkowo wykorzystamy mikrodane pochodzące z badań polskich budżetów domowych, a także wyniki badań innych autorów, mających dostęp do mikrodanych, m.in. dla Brazylii, Japonii i USA.

Dane o dochodzie narodowym brutto na osobę (GDP/capita), wykorzystane do skalowania wygenerowanej próby, pochodzą z raportu Banku Światowego World Development Index [2012]. Dane te są wyrażone w cenach stałych roku 2005 w tzw. międzynarodowych dolarach amerykańskich, czyli przeliczonych po stosownym kursie walut krajowych skorygowanych o parytet siły nabywczej (PPP).

Do badań wybrano kraje, dla których były dostępne oceny indeksu Giniego co najmniej z trzech okresów. Dodatkowym kryterium wyboru krajów do analiz była porównywalność danych statystycznych stanowiących podstawę szacowania indeksu Giniego. Ograniczono się do krajów, które przeprowadzały sondaże budżetów gospodarstw domowych obejmujące obszar całego kraju i całą populację, a indeks Giniego był szacowany na podstawie empirycznych rozkładów dochodów (na gospodarstwo, na osobę lub na inną jednostkę ekwiwalentności). Uwzględnienie powyższych warunków ograniczyło liczbę krajów do 119, których łączna liczba zamieszkałych osób stanowiła około 90% populacji świata. Badaniem objęto okres 1990-2005.

Szeregi czasowe indeksu Giniego w wybranych krajach zawierały luki wynikające z rozmaitych przyczyn. Zastosowano wygładzanie tych szeregów czasowych za pomocą wielomianów rozmaitego stopnia. Przykład tej procedury zilustrowano na rys.1, na którym dane dla Argentyny wygładzано wielomianem stopnia czwartego.





**Rys. 1.** Empiryczne i wygładzone wartości indeksu Giniego dla Argentyny;  
 $Gini = 47.3362 - 0.4382 \cdot x - 0.0516 \cdot x^2 + 0.0092 \cdot x^3 - 0.0002 \cdot x^4$

Źródło: opracowanie własne.

Interpolacja brakujących danych oraz ekstrapolacja na jeden krok w przód i wstecz poszerzyły znacznie zakres posiadanych danych dla rozważanego okresu. W dalszych analizach wykorzystano wygładzone wartości indeksu Giniego, eliminując dzięki temu zakłócenia losowe.

## 2.2. Metoda generowania prób krajowych rozkładów dochodów

Dla każdego kraju w kolejnych latach generowano próby losowe z rozkładu log-logistycznego, oznaczanego skrótem  $LL(a, b)$  o funkcji gęstości:

$$f(x) = \frac{ax^{a-1}}{b^a [1 + (x/b)^a]^2}, \quad x > 0, \quad (1)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są parametrami dodatnimi.

Dystrybuenta tego rozkładu ma postać bardzo wygodną do rozmaitych obliczeń:



$$F(x) = \left[ 1 + \left( \frac{x}{b} \right)^{-a} \right]^{-1}, \quad x > 0. \quad (2)$$

W szczególności łatwo wyznaczyć z (2) kwantyle  $q_p$  rzędu  $p \in (0,1)$ :

$$q_p = b \left( \frac{p}{1-p} \right)^{1/a}. \quad (3)$$

Momenty zwykłe rzędu  $r$  w tym rozkładzie wyraża wzór:

$$m_r = E[X^r] = b^r B(1+r/a, 1-r/a), \quad (4)$$

gdzie  $B(p,q)$  jest funkcją Beta Eulera.

Ponieważ argumenty funkcji Beta muszą być dodatnie, z (4) wnioskujemy, że w rozkładzie  $LL$  istnieje moment  $m_r$ , gdy  $r < a$ .

Wzór (4) możemy zapisać też w postaci:

$$m_r = E[X^r] = \frac{b^r \pi \cdot r}{a \sin(\pi \cdot r / a)}. \quad (5)$$

W szczególności wartość przeciętna  $\mu$  w tym rozkładzie będzie równa:

$$\mu = E[X] = \frac{b\pi}{a \sin(\pi / a)}. \quad (6)$$

Można też wykazać, że indeks Giniego w rozkładzie log-logistycznym jest równy:

$$G = \frac{1}{a}. \quad (7)$$

Zauważmy, że warunek istnienia momentów rzędu  $r$  możemy wyrazić, korzystając z tożsamości (7), czyli  $G < 1/r$ . Widzimy, że średnia ( $\mu = m_1$ ) istnieje zawsze, a dokładniej, dla  $G \in (0,1)$ . Natomiast moment zwykły rzędu drugiego istnieje tylko dla  $G < 1/2$ . Warto dodać, że w wielu krajach rozwijających się indeks Giniego często przyjmuje wartości większe od  $1/2$ , co oznacza, że przy posługiwaniu się rozkładem log-logistycznym nie można obliczać momentów wyższych rzędów niż pierwszy, a w konsekwencji. wariacji, skośności czy kurtozy.



Rozkład log-logistyczny znany był od dawna [Kleiber, Kotz 2003]; został ponownie odkryty przez Fiska [1961]<sup>2</sup>. Rozkład ten jest szczególnym przypadkiem uogólnionego rozkładu Beta ta drugiego rodzaju  $GB2(a,b,p,q)$  gdy  $p = q = 1$  [McDonald 1984].

Jeśli dysponujemy ocenami indeksu Giniego  $\hat{G}$  dla danego kraju i przyjmiemy średnią  $\mu = 1$ , to korzystając z tożsamości (5) i (6), otrzymamy oceny parametrów  $a$  i  $b$  omawianego rozkładu:

$$\hat{a} = \frac{1}{\hat{G}}, \quad (8)$$

$$\hat{b} = \frac{\sin(\pi\hat{G})}{\pi\hat{G}} \quad (9)$$

Po podstawieniu (8) i (9) do wzoru (3) otrzymamy ocenę kwantyli rzędu  $p$  jako funkcję tylko indeksu Giniego  $\hat{G}$ :

$$\hat{q}_p = \frac{\sin(\pi\hat{G})}{\pi\hat{G}} \left( \frac{p}{1-p} \right)^{\hat{G}}. \quad (10)$$

Posługując się generatorem liczb pseudolosowych z rozkładu prostokątnego  $U(0,1)$  określonego na przedziale  $(0,1)$ , można wygenerować pewną liczbę wartości  $p$  i, korzystając z równości (10), otrzymać próbę kwantyli z rozkładu log-logistycznego o średniej  $\mu = 1$ . Mnożąc przez  $GDP/capita$  wygenerowane kwantyle, otrzymamy próbę losową z rozkładu log-logistycznego o średniej równej  $GDP/capita$ <sup>3</sup>.

Pojawia się tu problem ustalenia liczności prób. Dla każdego kraju z osobna można w zasadzie wygenerować dowolną liczbę kwantyli, np. proporcjonalną do udziału populacji danego kraju w populacji światowej. Gdyby przyjąć zasadę, że dla każdego kraju generujemy próbę o liczności 1 promila populacji, wówczas w przypadku kraju o najmniejszej populacji należałoby wygenerować 382 obserwacje, a dla Chin aż 1 135 185 obserwacji (dla przykładowego roku 1990).

<sup>2</sup> Fisk [Fisk 1961] przedstawił funkcję gęstości tego rozkładu za pomocą tangensa hiperbolicznego, co utrudniało rozpoznanie na pierwszy rzut oka rozkładu znanego już wcześniej.

<sup>3</sup> Zauważmy, że jest to zwykle przeskalowanie rozważanego rozkładu mającego pierwotnie średnią równą 1.



Można też wygenerować jednakowo liczne próby i włączyć je do próby światowej z wagami proporcjonalnymi do udziałów populacji każdego kraju w populacji światowej.

W niniejszym artykule proponujemy znacznie oszczędniejszą metodę ustalania liczności prób za pomocą sekwencyjnego testu ilorazowego Walda (\*). W tym interesującym podejściu do wnioskowania statystycznego liczebność próby nie jest stała, jak w przypadku klasycznego podejścia Neymana-Pearsona.

Metoda sekwencyjna Walda pozwala też uwzględnić pewien dodatkowy aspekt generowanych prób. Mianowicie, ocena indeksu Giniego na podstawie wygenerowanych kwantyli powinna być jak najbliższa faktycznej ocenie  $\hat{G}$  wykorzystanej do symulacji. Proponowana tu metoda umożliwi generowanie prób dających ocenę indeksu Giniego z dokładnością przyjętą z góry.

Ideę testu Walda przedstawimy, korzystając z pracy [Fisz 1969]. Niech ciągła zmienna losowa  $X$  ma funkcję gęstości  $g(x/\theta)$  zależną od parametru  $\theta$ . Stawiamy następującą hipotezę zerową i alternatywną:  $H_0 : \theta = \theta_0$ ,  $H_1 : \theta = \theta_1$ . Niech będą dane dwie liczby  $a$  i  $b$  spełniające nierówność:  $0 < a < 1 < b$ . Liczby te będą wyznaczone później.

Losujemy jeden element  $x_1$  do próby prostej i obliczamy iloraz:

$$S_1 = g(x_1/\theta_1)/g(x_1/\theta_0). \quad (11)$$

Jeśli ten iloraz spełnia nierówność  $S_1 \leq a$ , to przyjmujemy  $H_0$ . Jeśli  $S_1 \geq b$ , to odrzucamy  $H_0$  i przyjmujemy  $H_1$ . Natomiast jeśli  $a < S_1 < b$ , to losujemy kolejny element  $x_2$  i obliczamy iloraz:

$$S_2 = \frac{g(x_1 | \theta_1)g(x_2 | \theta_1)}{g(x_1 | \theta_0)g(x_2 | \theta_0)}. \quad (12)$$

Postępujemy jak poprzednio, tzn. przyjmujemy  $H_0$ , jeśli  $S_2 \leq a$ , przyjmujemy  $H_1$ , jeśli  $S_2 \geq b$ , i wreszcie losujemy kolejny element  $x_3$ , jeśli  $a < S_2 < b$ .

Ogólnie, jeśli próba zawierająca  $n-1$  elementów nie doprowadziła do powzięcia decyzji, to losujemy  $n$ -ty element i dalsze postępowanie zależy będzie od wartości ilorazu:





$$S_n = \frac{g(x_1 | \theta_1)g(x_2 | \theta_1)\dots g(x_n | \theta_1)}{g(x_1 | \theta_0)g(x_2 | \theta_0)\dots g(x_n | \theta_0)}. \quad (13)$$

Przy dodatkowych założeniach, których omówienie pominiemy, procedura sekwencyjna jest skończona z prawdopodobieństwem 1 [Fisz 1969, s. 609].

Zauważmy, że wyrażenie (13) jest ilorazem funkcji wiarygodności odpowiednio  $L(\theta_1)$  i  $L(\theta_0)$ . Do obliczeń korzysta się z logarytmu tego ilorazu oraz logarytmów.

Fisz [Fisz 1969, s. 619] wykazał, że liczby  $a$  i  $b$  można aproksymować następującymi wyrażeniami:

$$a \approx \beta / (1 - \alpha), \quad b \approx (1 - \beta) / \alpha, \quad (14)$$

gdzie  $\alpha$  jest poziomem istotności, natomiast  $\beta$  jest prawdopodobieństwem popełnienia błędu drugiego rodzaju polegającego na przyjęciu hipotezy fałszywej.  $1 - \beta$  jest zatem mocą testu. W klasycznej teorii testów istotności badacz kontroluje tylko poziom istotności  $\alpha$ . W analizie sekwencyjnej jest możliwość ustalania zarówno  $\alpha$ , jak i  $\beta$ . W naszych badaniach przyjęliśmy  $\alpha = \beta = 0,05$ .

W naszym problemie generowania prób proponujemy następujące postępowanie. Stawiamy hipotezy zerową i alternatywną:  $H_0: G = G_0$ ,  $H_1: G = G_1$ , przy czym  $G_1 = G_0 + d$ , gdzie  $G$  jest oceną indeksu Giniego dla danego kraju, natomiast  $d > 0$  jest przyjętą przez nas małą liczbą ujmującą precyzję szacunku.

Losujemy liczbę  $p_1$  z rozkładu prostokątnego  $U(0,1)$  i obliczamy kwantyl rzędu  $p_1$  według wzoru (10). Następnie obliczamy logarytm ilorazu Walda (11) i porównujemy go tylko z logarytmem  $a$ . Postępowanie kontynuujemy tak długo, aż dla pewnego  $n$  przyjmiemy hipotezę zerową. Oznacza to, że dopiero próba o liczności  $n$  pozwala na statystycznie istotne rozróżnienie pomiędzy  $G_0$  a  $G_1 = G_0 + d$  z dokładnością  $d$ , przy założonym z góry poziomie istotności  $\alpha$  i mocy testu  $1 - \beta$ .

W badaniach empirycznych może się zdarzyć, że wylosowane wartości  $p$  są bardzo bliskie albo zeru albo jedności. W efekcie można otrzymać bardzo małe albo bardzo duże wartości kwantyli, które mogą się okazać obserwacjami odstającymi. Wpływ obserwacji odstających na oceny nierówności i bóstwa może być bardzo znaczny [Van Kerm 2007]. Z tego powodu dopuścimy możliwość generowania lo-



sowych wartości  $p_i$  z przedziału  $[p_{min}, p_{max}]$ . W pracy przyjęto  $d = 0,005$ ,  $p_{min} = 0,01$ ,  $p_{max} = 0,99$ .

Po pomnożeniu  $n$  wygenerowanych kwantyli dla danego kraju przez  $GDP/capita$  otrzymujemy losową próbę dochodów na osobę tego kraju. Próbę dla światowego rozkładu dochodów otrzymamy, łącząc próby poszczególnych krajów z wagami równymi udziałowi populacji kraju w łącznej populacji analizowanych krajów.

Nierówności ekonomiczne w świecie będziemy oceniać za pomocą indeksu Giniego:

$$G = \frac{\Delta}{2\mu}. \quad (15)$$

W powyższym wzorze  $\mu$  jest średnią dochodów, a  $\Delta$  jest średnią różnicą bezwzględną, którą dla każdego rozkładu ciągłego o dystrybucji  $F(x)$  można zdefiniować następująco<sup>4</sup>:

$$\Delta = 2 \int_0^{\infty} F(x)[1 - F(x)]dx \quad (16)$$

[Kendall, Stuart 1961].

Ytzhaki [Ytzhaki 2003] zaproponował następujący estymator parametru  $\Delta$ :

$$\hat{\Delta} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \hat{F}(x_i)[1 - \hat{F}(x_i)](x_{i+1} - x_i). \quad (17)$$

Wzór (17) pozwala na szacowanie indeksu Giniego (15), gdy dysponujemy obserwacjami ważonymi. Wówczas dystrybuanta empiryczna  $\hat{F}(x_i)$  jest obliczana na podstawie wag przypisanych każdej obserwacji  $x_i$ . W naszym przypadku wagami są udziały populacji kraju w łącznej populacji wszystkich analizowanych krajów.

Ubóstwo ekonomiczne w światowym rozkładzie dochodów będziemy mierzyć za pomocą rodziny indeksów  $FGT_\epsilon$  [Foster, Greer, Thornbecke 1984]:

<sup>4</sup> W ogólnym przypadku całkowanie przebiega od  $-\infty$  do  $+\infty$ .



$$FGT_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{z - x_i}{z} \right)^{\alpha} I(x_i < z) w_i, \quad (18)$$

gdzie  $z$  jest linią ubóstwa,  $I(x_i < z)$  jest funkcją wskaźnikową równą 1 w wypadku spełnienia warunku oraz 0 w przeciwnym wypadku, a  $w_i$  są wspomnianymi wyżej wagami.

Dla  $\alpha = 0$ ,  $FGT_0$  jest frakcją osób ubogich w populacji. Jest to miara skali ubóstwa. Dla  $\alpha = 1$   $FGT_1$  mierzy intensywność ubóstwa. Można tę miarę zinterpretować również jako „zubożenie społeczeństwa jako całości”. Dla  $\alpha = 2$   $FGT_2$  wyraża „dotkliwość ubóstwa”.

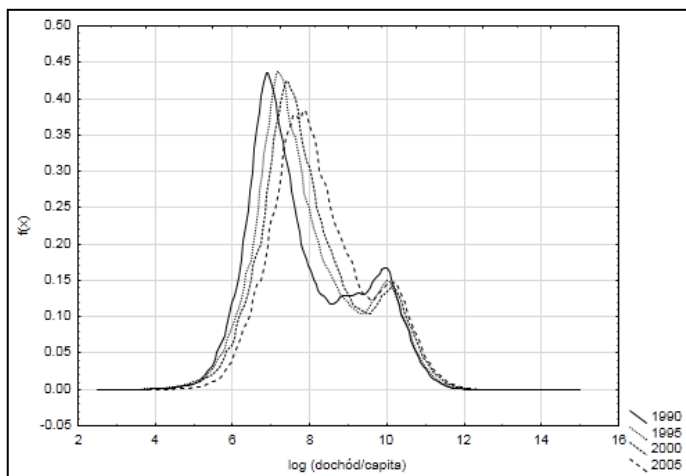
Numeryczna procedura generowania prób i szacowania parametrów światowego rozkładu dochodów bazowała na autorskich programach napisanych w języku FORTRAN99. Do szacowania funkcji gęstości korzystano z estymatorów typu *kernel* dostępnych w pakiecie DAD4.5 2008. Rysunki opracowano z pomocą pakietu STATISTICA oraz graficznego modułu w edytorze Word.

### 3. Rezultaty badań empirycznych

Nieparametryczny opis światowego rozkładu dochodów za pomocą oszacowanych funkcji gęstości przedstawia rys. 2. Dla przejrzystości wykreślono na nim tylko cztery funkcje gęstości dla lat 1990, 1995, 2000 i 2005. Logarymiczna skala na osi poziomej umożliwiła pełniejsze ukazanie własności wykreślonych funkcji.

Na rysunku 2 można zauważyć dwie charakterystyczne cechy światowego rozkładu dochodów. Po pierwsze, jest to rozkład bimodalny i ten charakterystyczny rys wydaje się być niezmienny w czasie. Jest to argument na rzecz pierwszej hipotezy zaprezentowanej we wstępie. Po drugie, w kolejnych latach masa prawdopodobieństwa rozkładu przesuwają się na prawo. To oznacza sukcesywny wzrost wartości przeciętnej i innych miar położenia rozkładu.





**Rys. 2.** Światowe rozkłady dochodów w wybranych latach

Źródło: opracowanie własne.

Parametryczny opisu światowego rozkładu dochodów prezentuje tab. 1.

**Tabela 1.** Statystyki opisowe światowego rozkładu dochodów

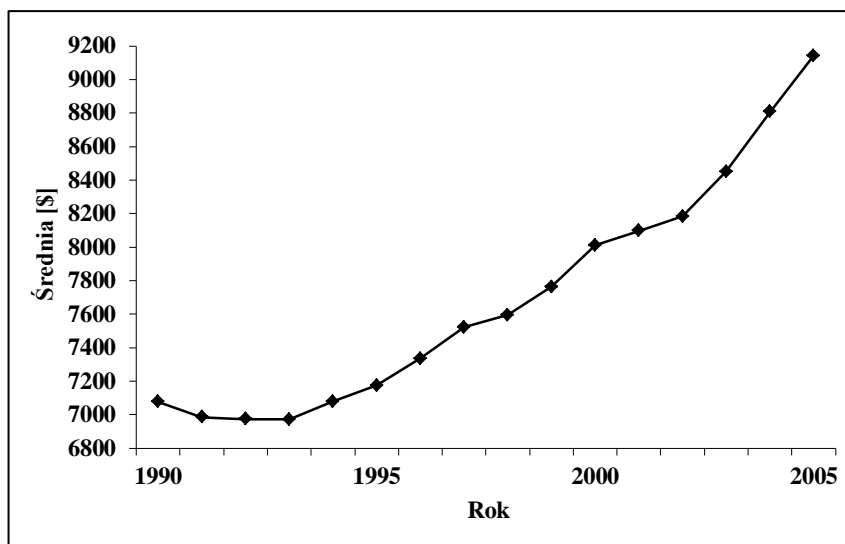
Rok	Średnia	Mediana	V	Skośność	Eksces	Gini	n
1990	7077.76	1700.22	1.7099	3.3969	17.2959	.6901	191158
1991	6985.12	1719.70	1.7229	3.4074	17.1063	.6909	210795
1992	6973.91	1787.93	1.7434	3.5674	19.0588	.6899	225229
1993	6972.87	1863.22	1.7575	3.7143	20.9449	.6861	234741
1994	7079.13	1953.27	1.7673	3.7706	21.5484	.6859	237632
1995	7174.22	2039.78	1.7663	3.7892	21.6918	.6831	243377
1996	7334.08	2148.48	1.7619	3.8249	22.1568	.6792	245571
1997	7522.72	2220.53	1.7630	3.8571	22.6116	.6765	245857
1998	7595.49	2249.25	1.7792	3.9370	23.6194	.6794	248220
1999	7762.84	2318.42	1.7872	4.0019	24.4836	.6787	244163
2000	8011.24	2398.52	1.7811	3.9986	24.4598	.6779	239979
2001	8097.90	2503.20	1.7738	4.0752	25.7080	.6714	234376
2002	8182.85	2586.38	1.7586	4.0185	24.7059	.6708	225477
2003	8450.54	2784.52	1.7331	4.0989	26.2070	.6643	211620
2004	8808.21	2997.42	1.7051	4.0891	26.2216	.6635	198041
2005	9141.87	3259.84	1.6730	4.0885	26.3683	.6488	186801

Źródło: obliczenia własne.



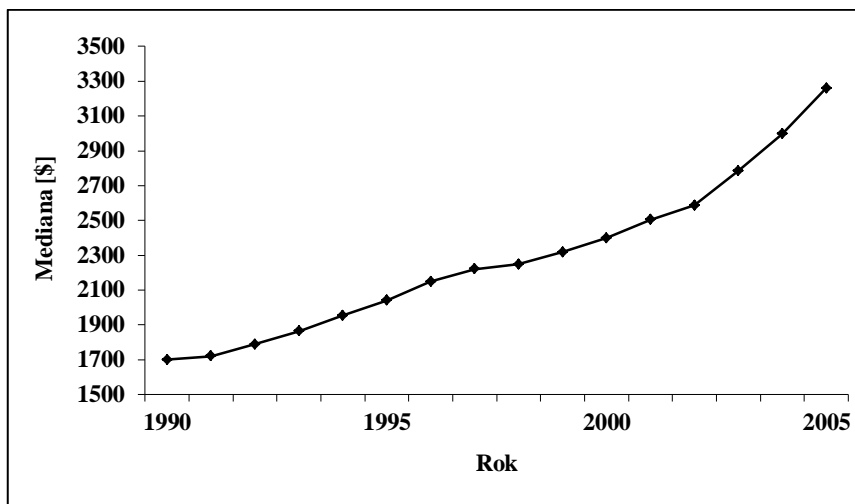
Zwróćmy uwagę na liczebności  $n$  łącznej próby światowego rozkładu dochodów zawarte w ostatniej kolumnie tab. 1. Okazuje się, że o owym rozkładzie można już wnioskować na podstawie prób liczących 120000-155000 obserwacji. Przypomnijmy, że obserwacje odnoszą się do pojedynczych osób, a nie do liczby gospodarstw domowych. Warto też dodać, że w polskich sondażach budżetów domowych, obejmujących około 34 tys. gospodarstw, łączna liczba osób jest rzędu 100 tys. Korzyści ze stosowania analizy sekwencyjnej Walda są ewidentne.

Z danych zawartych w tab. 1 wynika, że w rozważanym okresie 1990-2005 średni dochód na osobę w świecie systematycznie wzrastał. Należy przy tym zauważyć, że średnie te są ważonymi wartościami krajowego *GDP/capita*, gdzie wagami są udziały populacji poszczególnych krajów w populacji wszystkich analizowanych krajów. Szeregi czasowe średniej i mediany przedstawiają odpowiednio rys. 3 i 4.



Rys. 3. Średnia dochodu na osobę w światowym rozkładzie dochodów (dol. międzynarodowy, ceny stałe w 2005 r.)

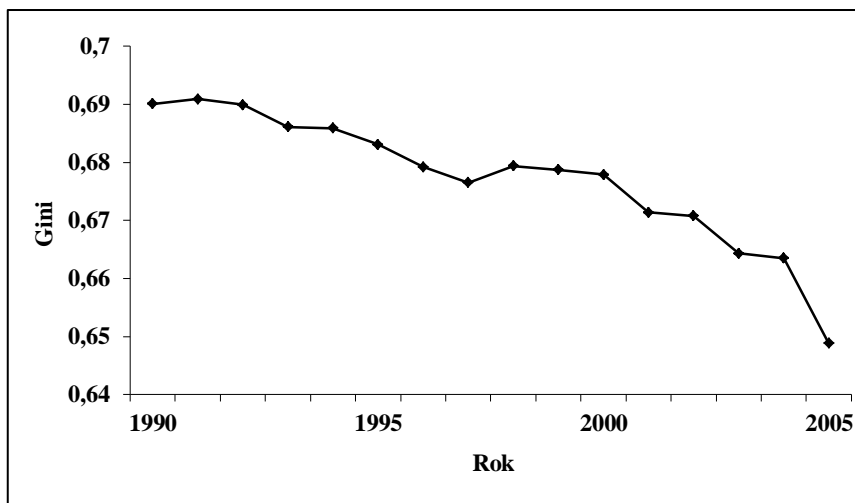
Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 4.** Mediana dochodu na osobę w światowym rozkładzie dochodów (dol. międzynarodowy, ceny stałe w 2005 r.)

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 5 ilustruje kształtowanie się w czasie nierówności ekonomicznych na świecie mierzonych indeksem Giniego.



**Rys. 5.** Nierówności ekonomiczne na świecie

Źródło: opracowanie własne.



Nierówności ekonomiczne w świecie wykazują tendencję malejącą. Podobny trend zauważył Sala-i-Martin [Sala-i-Martin 2006]. Zatem opinia o pogłębiających się nierównościach ekonomicznych świata nie znajduje potwierdzenia w faktach.

Tabela 2 zawiera oceny miar ubóstwa. Zastosowano tu absolutną linię ubóstwa (według standardu ONZ) równą 2 USD na osobę na dzień, z uwzględnieniem parytetu siły nabywczej (PPP). Dane zawarte w tab. 2 zilustrowano rysunkami.

**Tabela 2.** Ubóstwo w świecie (linia ubóstwa równa 2 dol. na dzień na osobę)

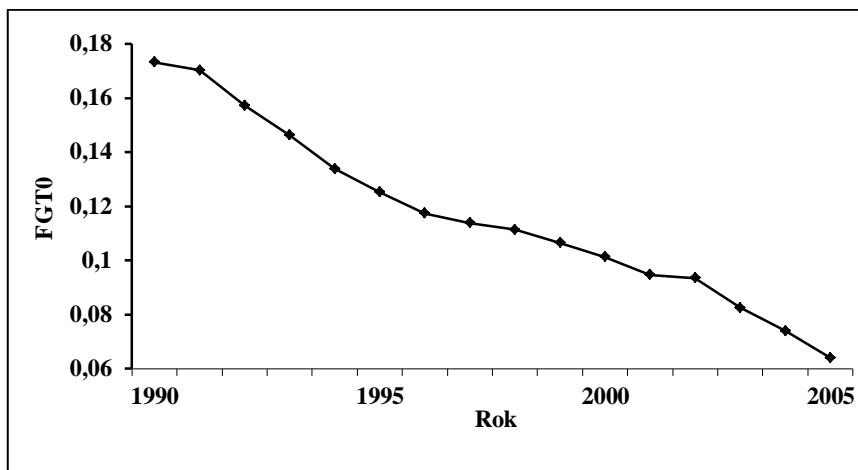
Rok	$\mu_z$ [\$]	$FGT_0$	$GAP$	$FGT_1$	$FGT_2$
1990	86.02	.1732	.8822	.1528	.0257
1991	84.02	.1703	.8849	.1507	.0262
1992	76.82	.1573	.8948	.1407	.0253
1993	71.16	.1463	.9025	.1320	.0238
1994	64.46	.1338	.9117	.1220	.0225
1995	59.56	.1252	.9184	.1150	.0218
1996	55.95	.1174	.9234	.1084	.0202
1997	54.68	.1138	.9251	.1053	.0193
1998	53.76	.1114	.9264	.1032	.0188
1999	51.70	.1065	.9292	.0989	.0176
2000	49.37	.1013	.9324	.0945	.0164
2001	46.27	.0947	.9366	.0887	.0150
2002	46.05	.0935	.9369	.0876	.0145
2003	40.73	.0825	.9442	.0779	.0124
2004	37.28	.0740	.9489	.0702	.0103
2005	32.89	.0641	.9549	.0612	.0083

Objaśnienia:  $\mu_z$  średni dochód wśród ubogich,  $GAP$  relatywna luka ubóstwa,  $FGT_\alpha$  miary ubóstwa.

Źródło: obliczenia własne.

Skalę ubóstwa w świecie, mierzoną indeksem  $FGT_0$  (18), ilustruje rys. 6.



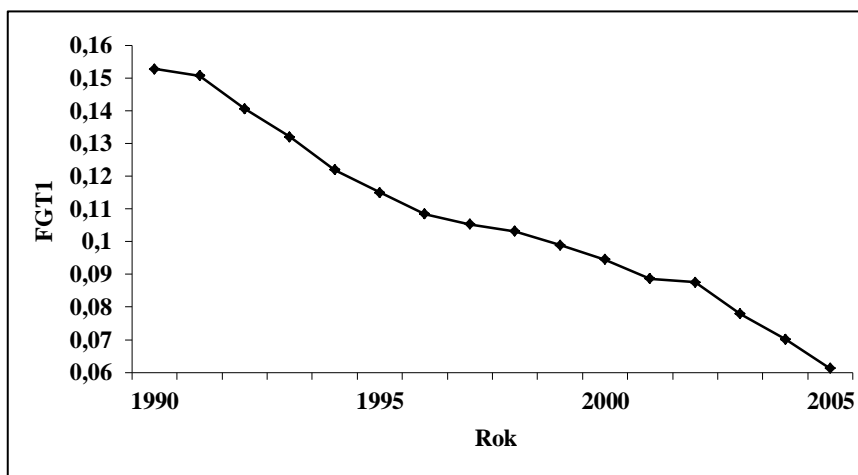


Rys. 6. Skala ubóstwa w świecie ( $z = 2$  dol.)

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 6 widoczny jest systematyczny spadek frakcji osób, które są uznane za ubogie w świetle przyjętego standardu absolutnego  $z$ .

Rysunek 7 prezentuje, jak zmieniała się w czasie intensywność ubóstwa na świecie mierzona indeksem  $FGT_1$ .



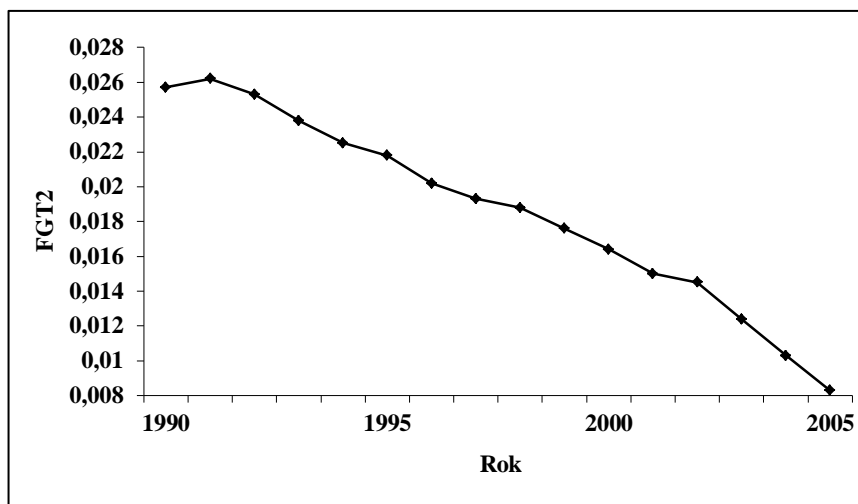
Rys. 7. Intensywność ubóstwa na świecie ( $z = 2$  dol.)

Źródło: opracowanie własne.





Z rysunku 7 wynika, że zubożenie ludności świata jako całości systematycznie malało w całym rozważanym okresie. Zmniejszyła też dotkliwość ubóstwa, o czym przekonuje rys. 8, na którym wykreślono szereg czasowy miary  $FGT_2$ .



Rys. 8. Dotkliwość ubóstwa na świecie ( $z = 2$  dol.)

Źródło: opracowanie własne.

Podobnego obrazu kształtowania się ubóstwa w świecie dostarczają miary  $FGT_\omega$ , gdy zastosujemy relatywną linię ubóstwa przyjętą przez nas na poziomie połowy dochodu średniego, tj.  $\mu/2^5$ . W tabeli 3 przedstawiono oceny miar ubóstwa z wykorzystaniem tej linii ubóstwa.

<sup>5</sup> Za taki standard przyjmuje się też frakcję innych miar położenia, np. 60% mediany rozkładu dochodów.

**Tabela 3.** Ubóstwo w świecie (linia ubóstwa równa połowie dochodu średniego)

Rok	$z$ [\$]	$\mu_z$ [\$]	$FGT_0$	$GAP$	$FGT_1$	$FGT_2$
1990	3538.87	821.47	.6536	.7679	.5018	.3014
1991	3492.55	831.34	.6551	.7620	.4992	.2959
1992	3486.94	861.65	.6551	.7529	.4932	.2856
1993	3486.45	887.93	.6538	.7453	.4873	.2758
1994	3539.56	929.78	.6552	.7373	.4831	.2685
1995	3587.11	958.70	.6534	.7327	.4788	.2621
1996	3667.07	994.64	.6509	.7288	.4743	.2558
1997	3761.33	1021.77	.6498	.7283	.4733	.2547
1998	3797.74	1042.03	.6508	.7256	.4722	.2524
1999	3881.40	1072.25	.6502	.7237	.4705	.2499
2000	4005.63	1098.93	.6466	.7257	.4692	.2493
2001	4048.96	1116.06	.6406	.7244	.4640	.2429
2002	4091.47	1131.92	.6374	.7233	.4611	.2397
2003	4225.27	1171.55	.6273	.7227	.4534	.2308
2004	4404.10	1214.80	.6181	.7242	.4476	.2250
2005	4570.93	1253.19	.6058	.7258	.4397	.2165

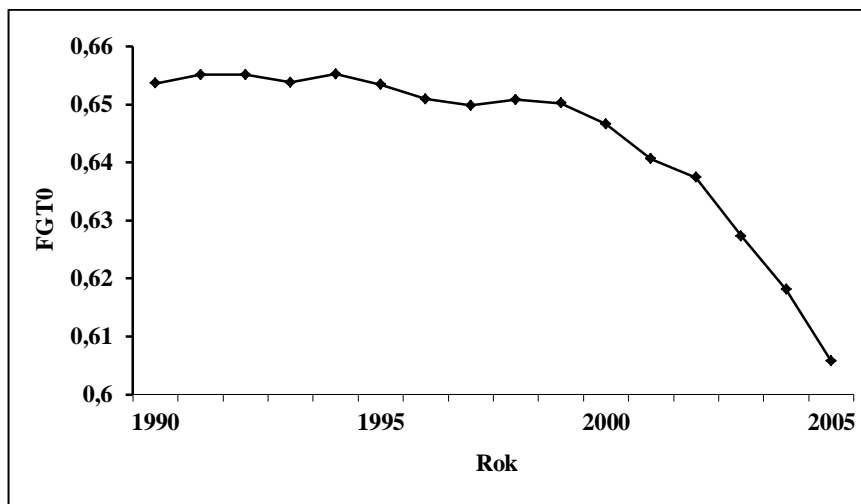
Objaśnienia:  $z$  – linia ubóstwa,  $\mu_z$  – średni dochód wśród ubogich,  $GAP$  – relatywna luka ubóstwa,  $FGT_\alpha$  – miary ubóstwa.

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 9 ilustruje, jak zmieniała się w czasie mierzona indeksem  $FGT_0$  skala ubóstwa na świecie.

Na rysunku 9 można zauważyć, że w latach 1990-1994 frakcja ubogich na świecie była bardzo wysoka i utrzymywała się na prawie stałym poziomie. Od roku 1995 można zauważyć powolne zmniejszanie się skali ubóstwa, a szybsze tempo spadku uwidacznia się od roku 2000. Niemniej odsetek ubogich na świecie jest bardzo wysoki w świetle przyjętego standardu relatywnego.





Rys. 9. Skala ubóstwa na świecie ( $z = \mu/2$ )

Źródło: opracowanie własne.

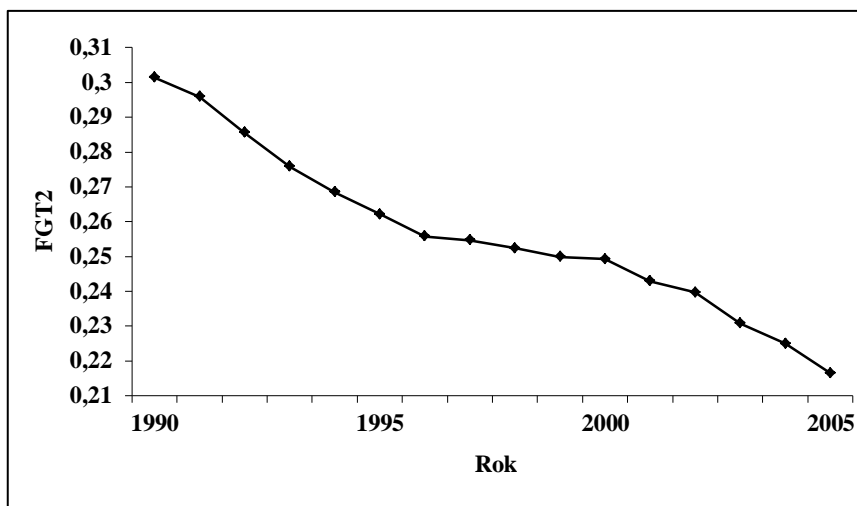
Tendencję kształtowania się intensywności ubóstwa przedstawia rys. 10.



Rys. 10. Intensywność ubóstwa na świecie ( $z = \mu/2$ )

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 10 widoczne jest systematyczne zmniejszanie się zużycia energii światła. Podobną tendencję malejącą wykazuje miara  $FGT_2$  obrazująca dotkliwość ubóstwa, co ukazuje rys. 11.



Rys. 11. Dotkliwość ubóstwa ( $z = \mu/2$ )

Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane przez nas wyniki świadczą o tym, że w rozważanym okresie skala ekonomicznego ubóstwa, jego intensywność i dotkliwość zmniejszały się, niezależnie od przyjętej linii ubóstwa. Zatem mamy empiryczne potwierdzenie drugiej hipotezy przedstawionej w wstępie. To oznacza, że opinie wyrażane przez niektórych ekonomistów i polityków o rozszerzającym i stale pogłębiającym się ubóstwie w świecie nie znajdują potwierdzenia w faktach.

#### 4. Wnioski końcowe

Z przeprowadzonych badań można wysnuć następujące wnioski o charakterze merytorycznym i formalnym.

- Światowy rozkład dochodów jest bimodalny, co wskazuje na polaryzację ekonomiczną świata<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Problemowi polaryzacji ekonomicznej świata będzie poświęcone osobne studium.



- Nierówności ekonomiczne w świecie mają tendencję malejącą.
- Ubóstwo ekonomiczne świata zmniejsza się, tak pod względem skali, jak i intensywności i dotkliwości.
- Opinie niektórych środowisk ekonomistów i polityków o wzrastających nierównościach i ubóstwie w świecie nie mają pokrycia w faktach.
- Analiza sekwencyjna Walda umożliwia badanie światowego rozkładu dochodów na podstawie prób znacznie mniejszych niż dotychczas sądzono.

## Literatura

- Atkinson A.B., Brandolini A., *Promise and pitfalls in the use of 'secondary' data-sets: income inequality in OECD Countries*, "Journal of Economic Literature" 2001, 39, s. 771-99.
- Deninger K., Squire L., *A new data set measuring income inequality*, "The World Bank Economic Review" 1996, 10, s. 565-591.
- DS World Bank database, <http://econ.worldbank.org/projects/inequality>.
- Fisk P.R., *The graduation of income distributions*, "Econometrica" 1961, 29, s. 171-185.
- Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
- Foster J.E., Greer J., Thorbecke E., *A class of decomposable poverty indices*, "Econometrica" 1984, 52, s. 761-766.
- Kendall M.G., Stuart A., *The advanced theory of statistics*, Vol. 2, Griffin & Co. Ltd., London 1961.
- Kleiber Ch., Kotz S., *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, Wiley and Sons Publications, New Jersey 2003.
- McDonald J.B., *Some generalized functions for the size distribution of income*, "Econometrica" 1984, 52, s. 647-663.
- McDonald J.B., Xu Y.J., *A generalization of the beta distribution with applications*, "Journal of Econometrics" 1995, 66, s. 133-152: erratum: "Journal of Econometrics" 1995, 69, s. 427-428.
- Pinkovskiy M., Sala-i-Martin X., *Parametric estimations of the Word distribution of income*, "NBER Working Paper" 2009, No. 15433.
- Ravallion M., *The debate on globalization, poverty and inequality: Why measurement matters*, "Policy Research Working Papers", WPS3031, The World Bank, May 2003.
- Sala-i-Martin X., *The world distribution of income: Falling poverty and... convergence, period*, "Quarterly Journal of Economics" 2006, 121(2), s. 351-397.
- Shorrocks A., Wan G., *Ungrouping income distributions: Synthesising samples for inequality and poverty analysis*, [w:] K. Basu, R. Kanbur (red.), *Arguments for a Better World: Essays in Honor of Amartya Sen*, Vol. I: *Ethics, Welfare and Measurement*, Oxford University Press, Oxford, 2009, s. 414-434.



Van Kerm P., *Extreme incomes and the estimation of poverty and inequality indicators from EU-SILC*, "IRISS Working Paper" 2007-01, CEPS/INSTEAD, Differdange, Luxembourg 2007.

WIID2 *World income inequality database*, UNU-WIDER, Helsinki, May 2005.

*World Development Indicators*, World Bank, Washington 2012.

Yitzhaki S., *Gini's mean difference: A superior measure of variability for non-normal distributions*, "METRON – International Journal of Statistics" 2003, 41(2), s. 285-316.

## RECONSTRUCTION OF WORLD INCOME DISTRIBUTION BASED ON MINIMAL STATISTICAL INFORMATION

**Summary:** The aim of this paper is to obtain a sample from the world income distribution (WID). We assumed log-logistic form of countries' income distributions with unit means. This implies that such distributions are fully described by their corresponding Gini indices. Gini estimates came from Deninger-Squire, WID2, and other databases for 119 countries in the years 1990-2005. We generated random sample for every distribution and multiplied its values by GDP/capita. Sample size was controlled by sequential ratio test. The world sample consisted of country samples weighted by population shares. We have found that WID is bimodal with diminishing inequality and poverty during analyzed period.

**Keywords:** world income distribution, sequential ratio test, inequality, poverty.

