

## Modelowanie krzywizny i odtwarzanie kształtu geometrycznego układów torowych

Prof. dr hab. inż. Władysław Koc, dr inż. Piotr Chrostowski, dr inż. Katarzyna Palikowska  
Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Projektowanie układu geometrycznego toru kolejowego polega na łączeniu z sobą określonych punktów charakterystycznych trasy za pomocą odcinków prostych oraz łuków o stałej i zmiennej krzywiznie. W miejscach połączeń, na skutek zmian krzywizny poziomej, dochodzi do zwiększenia oddziaływań dynamicznych występujących w układzie tor – pojazd. W procesie modelowania krzywizny projektant dąży do zapewnienia płynnej zmiany krzywizny przy spełnieniu odpowiednich warunków [8], by poprzez właściwe ukształtowanie krzywych przejścia zapewnić możliwie najkorzystniejsze właściwości dynamiczne układu.

Poszukiwanie nowych postaci krzywych przejścia i ocena istniejących są tematami wciąż aktualnymi, czego dowodem są liczne publikacje poświęcone tym zagadnieniom. W Katedrze Transportu Szynowego Politechniki Gdańskiej opracowano uniwersalną metodę modelowania krzywizny z wykorzystaniem równań różniczkowych. W ostatnich latach pojawiło się także szereg publikacji dotyczących nowych sposobów konstruowania tzw. krzywych Bezier [1, 3, 4, 5]; wskazano na możliwość zastosowania tego rodzaju krzywych przy projektowaniu dróg kołowych i kolejowych. W niniejszej pracy ocenę możliwości zastosowania krzywych Bezier w projektowaniu dróg kolejowych dokonano na podstawie analizy oddziaływań dynamicznych w układzie tor – pojazd oraz sprawdzenia, czy były spełnione warunki stawiane układom geometrycznym toru [8, 18, 19]. Jako element porównawczy wykorzystano krzywe klasy  $C^0$  i  $C^1$  uzyskane na drodze analitycznej, przy zastosowaniu uniwersalnej metody modelowania krzywizny.

Zastosowany model oraz sposób oceny oddziaływań dynamicznych przedstawiono w pracach [17, 24]. Zasadniczym elementem analizy oddziaływań dynamicznych jest wyznaczenie wielkości drgań  $X(t)$  oraz wypadkowego przyspieszenia w ruchu drgającym  $X''(t)$  w rejonach, w których występują zmiany poziomej krzywizny toru. W pracy [24] przedstawiono opis metody numerycznej stosowanej do wyznaczenia wielkości drgań  $X(t)$  przy założeniu, że czynnikiem wymuszającym drgania poprzeczne pojazdu szynowego są zmiany krzywizny poziomej toru.

Modelowanie matematyczne układów torowych może służyć nie tylko projektowaniu korzystnego ukształtowania geometrycznego, lecz również odtwarzaniu kształtu istniejącego toru w płaszczyźnie poziomej. W tym zakresie pojawiły się ostatnio zupełnie nowe możliwości. Zastosowanie opracowanej przez zespół naukowy Politechniki Gdańskiej i Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni techniki Mobilnych Pomiarów Satelitarnych [20, 21, 25] pozwala na wyznaczenie współrzędnych osi toru w odstępach rzędu  $20 \div 30$  cm. W związku z tym pojawia się potrzeba opisanie pomierzonej trasy takimi elementami geometrycznymi (w postaci odcinków prostych oraz łuków o stałej i zmiennej krzywiznie), które są dostosowane do pojazdów szynowych poruszających się z określoną prędkością.

W pracy przedstawiono metodykę postępowania, wykorzystującą zapis matematyczny i odpowiednie algorytmy obliczeniowe oraz opracowany system wspomagania komputerowego. Wybór najkorzystniejszego wariantu może odbywać się na drodze optymalizacji. W przypadku odtwarzania przebiegu trasy

kolejowej o złożonym ukształtowaniu geometrycznym jedynym rozwiązaniem może okazać się wykorzystanie techniki numerycznej.

## UNIwersalna METODA MODELOWANIA KRZYWIZNY

### Założenia ogólne

Połączenie elementów trasy kolejowej o zróżnicowanej krzywiźnie powinno zapewniać ciągłą zmianę niezrównoważonego przyspieszenia bocznego, w sposób korzystny w dynamice oddziaływań w układzie droga – pojazd. Wiąże się to ściśle z właściwym sposobem kształtowania krzywizny. Uogólniając metodę identyfikacji przyspieszeń niezrównoważonych występujących na różnych rodzajach krzywych przejściowych [23], możemy poszukiwać funkcji krzywizny  $k(l)$  wśród rozwiązań równania różniczkowego:

$$k^{(m)}(l) = f[l, k, k', \dots, k^{(m-1)}] \quad (1)$$

z warunkami na początku (dla  $l = 0$ ) i na końcu (dla  $l = l_k$ ) krzywej przejścia

$$k^{(i)}(0^+) = \begin{cases} k_1 & \text{dla } i = 0 \\ 0 & \text{dla } i = 1, 2, \dots, n_1 \end{cases} \quad (2)$$

$$k^{(j)}(l_k) = \begin{cases} k & \text{dla } j = 0 \\ 0 & \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

przy czym parametrem  $l$  jest położenie danego punktu na długości krzywej. Rząd równania różniczkowego (1) wynosi  $m = n_1 + n_2 + 2$ , a otrzymana funkcja  $k(l)$  jest funkcją klasy  $C^n$  w przedziale  $\langle 0, l_k \rangle$ , gdzie  $n = \min(n_1, n_2)$ .

Zastosowanie przedstawionej metody stwarza możliwość łączenia różnorodnych elementów geometrycznych, np. prostej z łukiem kołowym czy też dwóch łuków kołowych o przebiegu zgodnym lub odwrotnym. Metoda ta pozwala na generowanie rozwiązań o liniowej lub nieliniowej zmianie krzywizny.

Po wyznaczeniu krzywizny  $k(l)$  zadaniem podstawowym staje się określenie współrzędnych krzywej w układzie  $x, y$ . Zakładamy, że początek tego układu znajduje się w punkcie końcowym krzywej wejściowej o krzywiźnie  $k_1$ , a oś odciętych jest styczna do tej krzywej w tymże punkcie. Równanie szukanego połączenia możemy zapisać w postaci parametrycznej:

$$x(l) = \int \cos \Theta(l) dl \quad (4)$$

$$y(l) = \int \sin \Theta(l) dl \quad (5)$$

Funkcję  $\Theta(l)$  określamy na podstawie wzoru

$$\Theta(l) = \int k(l) dl \quad (6)$$

### Przypadek liniowej zmiany krzywizny

Jak powszechnie wiadomo, liniowa zmiana krzywizny występuje na krzywej przejściowej zwanej klotoidą, łączącą pro-

stą ( $k_1 = 0$ ) z łukiem kołowym ( $k_2 = \frac{1}{R}$ ). Spróbujmy teraz ten przypadek uogólnić. Liniową zmianę krzywizny na określonej długości  $l_k$  uzyskuje się przez przyjęcie dwóch elementarnych warunków:

$$\begin{cases} k(0^+) = k_1 \\ k(l_k^-) = k_2 \end{cases} \quad (7)$$

oraz równania różniczkowego rzędu drugiego dającego rozwiązanie wielomianowe

$$k''(l) = 0 \quad (8)$$

Rozwiązanie problemu różniczkowego (7), (8) stanowi funkcja klasy  $C^0$ :

$$k(l) = k_1 + \frac{1}{l_k}(k_2 - k_1)l \quad (9)$$

Wyznaczenie funkcji  $\Theta(l)$

$$\Theta(l) = k_1 l + \frac{1}{2l_k}(k_2 - k_1)l^2 \quad (10)$$

umożliwia określenie współrzędnych  $x(l)$  i  $y(l)$  za pomocą wzorów (4) i (5) i rozwinięciu funkcji podcałkowych w szereg MacLaurina [22]. Po przeprowadzeniu całej procedury otrzymujemy następujące równania parametryczne:

$$\begin{aligned} x(l) = \int \cos \Theta(l) dl = & l - \frac{k_1^2}{6} l^3 - \frac{k_1}{8l_k} (k_2 - k_1) l^4 + \\ & + \left[ \frac{k_1^4}{120} - \frac{1}{40 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^5 + \frac{k_1^3}{72 l_k} (k_2 - k_1) l^6 - \\ & - \left[ \frac{k_1^6}{5040} - \frac{k_1^2}{112 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^7 - \\ & - \left[ \frac{k_1^5}{1920 l_k} (k_2 - k_1) - \frac{k_1}{384 l_k^3} (k_2 - k_1)^3 \right] l^8 + \\ & + \left[ \frac{k_1^8}{362880} - \frac{k_1^4}{1728 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 + \frac{1}{3456 l_k^4} (k_2 - k_1)^4 \right] l^9 + \dots \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(l) = \int \sin \Theta(l) dl = & \frac{k_1}{2} l^2 + \frac{1}{6 l_k} (k_2 - k_1) l^3 - \frac{k_1^3}{24} l^4 - \\ & - \frac{k_1^2}{20 l_k} (k_2 - k_1) l^5 + \left[ \frac{k_1^5}{720} - \frac{k_1}{48 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^6 + \\ & + \left[ \frac{k_1^4}{336 l_k} (k_2 - k_1) - \frac{1}{336 l_k^3} (k_2 - k_1)^3 \right] l^7 - \\ & - \left[ \frac{k_1^7}{40320} - \frac{k_1^3}{384 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^8 - \\ & - \left[ \frac{k_1^6}{12960 l_k} (k_2 - k_1) - \frac{k_1^2}{864 l_k^3} (k_2 - k_1)^3 \right] l^9 + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe równania dla  $k_1 = 0$  opisują krzywą przejściową w postaci klotoidy.

W przypadku łuków zgodnych funkcja  $\Theta(l)$  jest funkcją monotoniczną. W przypadku łuków odwrotnych funkcja  $\Theta(l)$  ma ekstremum w punkcie  $l_0$

$$l_0 = -\frac{k_1}{k_2 - k_1} l_k \quad (13)$$

Równania parametryczne (11) i (12) obowiązują dla  $l \in \langle 0, l_0 \rangle$ ; dla  $l \in \langle l_0, l_k \rangle$  funkcje podcałkowe należy rozwinąć w szereg Taylora [22]. Otrzymujemy wówczas:

$$\begin{aligned}
 x(l) = & x(l_0) + \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)(l - l_0) - \\
 & - \left[\frac{(k_2 - k_1)}{6l_k} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^3 - \\
 & - \left[\frac{(k_2 - k_1)^2}{40l_k^2} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^5 + \\
 & + \left[\frac{(k_2 - k_1)^3}{336l_k^3} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^7 + \\
 & + \left[\frac{(k_2 - k_1)^4}{3456l_k^4} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^9 + \dots \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(l) = & y(l_0) + \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)(l - l_0) + \\
 & + \left[\frac{(k_2 - k_1)}{6l_k} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^3 - \\
 & - \left[\frac{(k_2 - k_1)^2}{40l_k^2} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^5 - \\
 & - \left[\frac{(k_2 - k_1)^3}{336l_k^3} \cos\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^7 + \\
 & + \left[\frac{(k_2 - k_1)^4}{3456l_k^4} \sin\left(-\frac{k_1^2}{2(k_2 - k_1)}l_k\right)\right](l - l_0)^9 + \dots \quad (15)
 \end{aligned}$$

### Przypadek nieliniowej zmiany krzywizny

Przedstawione rozwiązanie liniowej zmiany krzywizny ma charakter jednoznaczny. Natomiast rozwiązań wielomianowych można uzyskać wiele, przyjmując różne warunki brzegowe oraz postaci równań różniczkowych. Spróbujmy zająć się przypadkiem, który w odniesieniu do klasycznych krzywych przejściowych łączących prostą z łukiem kołowym identyfikuje krzywą Blossa [8].

Przyjmijmy warunki brzegowe

$$\begin{cases} k(0^+) = k_1 & k(l_k^-) = k_2 \\ k'(0^+) = 0 & k'(l_k^-) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

oraz następujące równie różniczkowe:

$$k^{(4)}(l) = 0 \quad (17)$$

Po rozwiązaniu równania różniczkowego (16), (17) otrzymujemy następujący wzór na krzywiznę  $k(l)$ :

$$k(l) = k_1 + \frac{3}{l_k^2}(k_2 - k_1)l^2 - \frac{2}{l_k^3}(k_2 - k_1)l^3 \quad (18)$$

Uzyskane rozwiązanie jest funkcją klasy  $C^1$ . Postać funkcji  $\Theta(l)$  jest następująca:

$$\Theta(l) = k_1 l + \frac{1}{l_k^2}(k_2 - k_1)l^3 - \frac{1}{2l_k^3}(k_2 - k_1)l^4 \quad (19)$$

Tak jak w przypadku liniowej zmiany krzywizny, określenie współrzędnych  $x(l)$  i  $y(l)$  za pomocą wzorów (4) i (5) wymaga rozwinięcia funkcji podcałkowych w szereg Maclaurina i ewentualnie Taylora [22].

## KRZYWE BEZIER

Spośród omawianych w literaturze krzywych Bezier [1, 3, 4, 5] analizie poddano kubiczne krzywe C-Bezier (*cubic C-Bezier curves*) [3] i PH krzywe Bezier piątego stopnia (*Pythagorean hodograph quintic Bezier curves*) [5].

### Kubiczne krzywe C-Bezier

Kubiczna krzywa C-Bezier jest opisana następującym równaniem parametrycznym:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{2}{\pi - 2} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{2 - \pi}{4 - \pi} & \frac{2}{4 - \pi} & -1 \\ -1 & \frac{2}{4 - \pi} & \frac{2 - \pi}{4 - \pi} & 0 \\ -1 & \frac{2}{4 - \pi} & \frac{-2}{4 - \pi} & 1 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-2}{4 - \pi} & \frac{\pi - 2}{4 - \pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

i zdefiniowana parametrem  $t$  spełniającym zależność  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Spośród punktów kontrolnych  $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^3$  punkty  $\mathbf{P}_0$  i  $\mathbf{P}_3$ , będące węzłami krzywej Bezier, stanowią punkty styczności krzywej z łukiem, odpowiednio – większym i mniejszym.

Pierwsza pochodna krzywej (20) wyrażona jest następującą formułą:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}'(t) = & \frac{2}{\pi - 2} [(1 - \sin t)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + (1 - \cos t)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)] + \\
 & + \frac{2}{4 - \pi} (\cos t + \sin t - 1)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (21)
 \end{aligned}$$

Druga pochodna krzywej (20) przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}''(t) = & \frac{2}{\pi - 2} \left[ \left( \frac{\pi - 2}{4 - \pi} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \right) \cos t + \right. \\
 & \left. + \left( \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 - \frac{\pi - 2}{4 - \pi} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \sin t \right) \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

W pracy [3] podano algorytm wyznaczania punktów kontrolnych  $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^3$  z uwzględnieniem parametrów geometrycznych układu oraz parametru kształtu  $m$ . Na szczególne podkreślenie zasługuje fakt dokładnego uwzględnienia położenia środków łuków i zaprojektowanie krzywej przejścia nie wymagającej zmiany położenia tychże łuków.

### PH krzywe Bezier piątego stopnia

W pracy [5] przedstawiono zastosowanie krzywej Bezier piątego stopnia (*Pythagorean hodograph quintic Bezier curve*) opisanej wzorem:

$$\mathbf{P}(t) (= x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} \mathbf{P}_i (1-t)^{5-i} t^i \quad (23)$$

zdefiniowanej parametrem  $t$ , spełniającego zależność  $0 \leq t \leq 1$ . Spośród punktów kontrolnych  $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^5$  punkty  $\mathbf{P}_0$  i  $\mathbf{P}_5$  styczności krzywej z łukiem, odpowiednio – większym i mniejszym, stanowią węzły krzywej Bezier.

Zastosowana krzywa spełnia warunek stawiany Pitagorejским hodografom (*Pythagorean hodograph*), polegający na możliwości przedstawienia wyrażenia  $x'(t)^2 + y'(t)^2$  jako wielomianu kwadratowego zmiennej  $t$ . Pochodną krzywej wyrażono następującym wzorem:

$$\mathbf{P}'(t) (= x'(t), y'(t)) = (u^2(t) - v^2(t), 2u(t)v(t)), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (24)$$

gdzie:

$$u(t) = u_0(1-t)^2 + 2u_1t(1-t) + u_2t^2$$

$$v(t) = v_0(1-t)^2 + 2v_1t(1-t) + v_2t^2$$

W pracy [5] poddano analizie sposób wyznaczenia współczynników  $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2$  w odniesieniu do konkretnego układu geometrycznego łuków z uwzględnieniem parametru kształtu  $m$ .

Algorytm konstruowania PH krzywych Bezier piątego stopnia w przypadku układu łuków zgodnych, w którym jeden łuk leży wewnątrz drugiego [5], różni się od algorytmu stosowanego w przypadku łuków zgodnych, oddalonych od siebie [4]. W pracy [5] podano możliwość uzyskania połączenia  $G^3$  krzywej z łukiem większym lub połączenia  $G^3$  z łukiem mniejszym. W projektowaniu dróg kolejowych można rozważać jedynie wariant połączenia  $G^3$  krzywej z łukiem większym ze względu na fakt, że w proponowanym połączeniu  $G^3$  krzywej z łukiem mniejszym nie jest spełniony warunek monotoniczności krzywizny.

## Analiza możliwości zastosowania

Analizę możliwości zastosowania przeprowadzono poprzez rozpatrzenie przykładowych układów geometrycznych toru kolejowego, obejmujących zadanie łączenia krzywą przejściową dwóch zgodnych łuków kołowych, z których jeden jest zawarty wewnątrz drugiego (*C-oval transition*). Wymagane jest spełnienie warunku monotoniczności krzywizny [8].

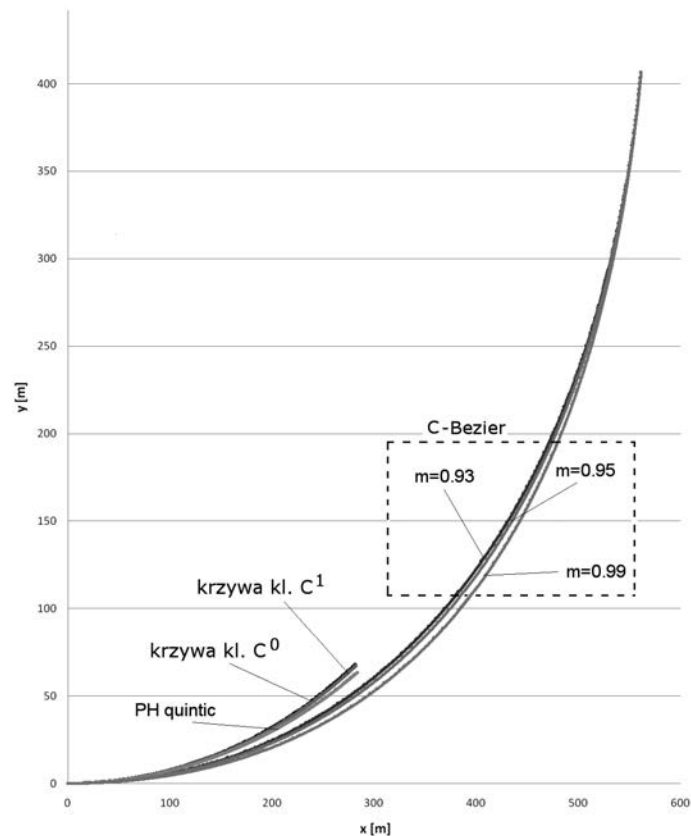
Rozważmy układ geometryczny dwóch zgodnych łuków kołowych:  $\Omega_0$  o promieniu  $R_0 = 700$  m i  $\Omega_1$  o promieniu  $R_0 = 500$  m, w którym łuk  $\Omega_1$  jest położony wewnątrz łuku  $\Omega_0$ . Środek łuku  $\Omega_0$  znajduje się w punkcie  $C_0(0; 700)$  m; współrzędne środka łuku  $\Omega_1$  są ustalane w toku algorytmu konstruowania krzywej.

W układ ten wpisujemy PH krzywą Bezier piątego stopnia, przyjmując  $\Theta = 0,2332$ , w wyniku czego otrzymujemy położenie środka  $C_1 = (58,79; 510,11)$  m łuku  $\Omega_1$  oraz odległość pomiędzy środkami łuków  $r = \|C_1 - C_0\| = 198,78$  m. Algorytm konstruowania PH krzywej Bezier piątego stopnia przedstawiony w pracy [5] wykazuje się znacznie mniejszą elastycznością od algorytmu stosowanego w opracowaniu [4], dotyczącego łączenia oddalonych łuków zgodnych.

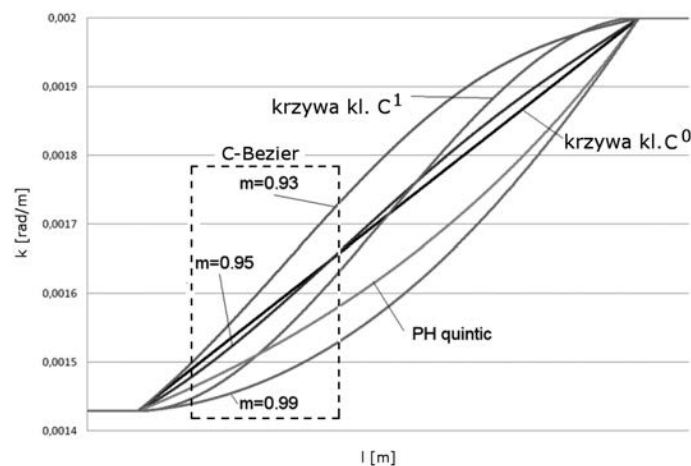
W celu porównania tej krzywej z krzywymi uzyskanymi metodą analityczną wyznaczono krzywe klasy  $C^0$  i  $C^1$  o zało-

żonej długości  $l_k = 293$  m. Następnie skonstruowano rodzinę kubicznych krzywych C-Bezier dla różnych wartości parametru kształtu  $m \in \{0,93; 0,95; 0,99\}$ , zachowując położenie środków łuków  $C_0$  i  $C_1$  uzyskane w trakcie konstruowania krzywej klasy  $C^0$ . Parametr kształtu  $m$  kubicznych krzywych C-Bezier dobrano tak, by spełnić wymagania niezbędne do uzyskania monotoniczności krzywizny określone przez algorytm [3], który w tym przypadku okazał się dużo mniej elastyczny niż w przypadku łączenia łuków zgodnych oddalonych od siebie.

W rezultacie opisanego toku postępowania otrzymano połączenie łuków zgodnych przedstawione na rys. 1. Krzywe pokazane na rys. 1 różnią się długością, krzywizną (rys. 2), a także punktami styczności krzywej z łukiem  $\Omega_1$ . Położenie środka  $C_1$  łuku  $\Omega_1$  uległo przesunięciu jedynie w przypadku krzywej kla-



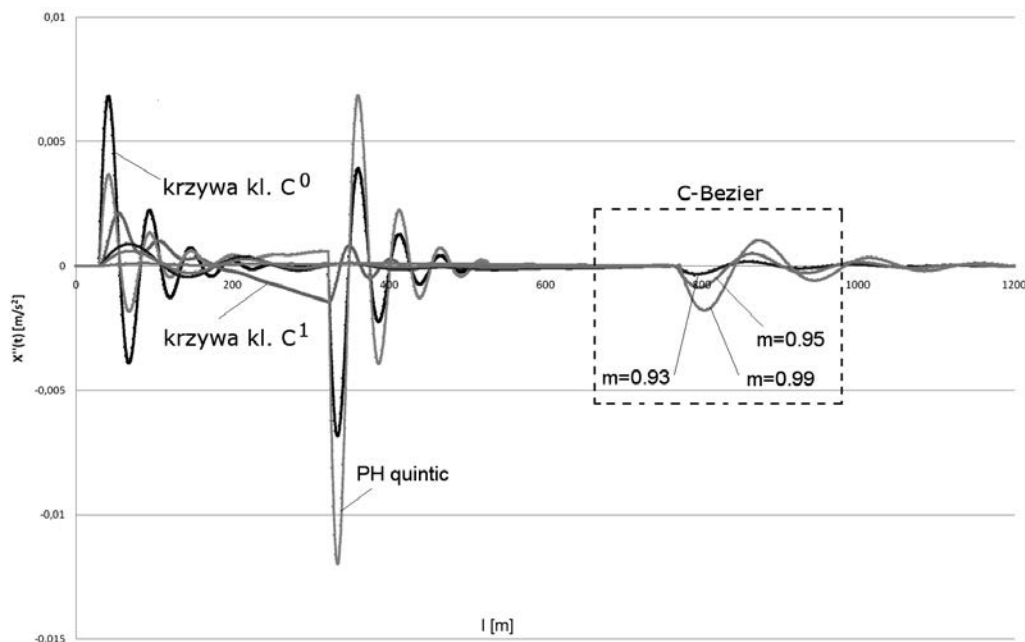
Rys. 1. Połączenie łuków zgodnych porównywanymi krzywymi przejścia



Rys. 2. Wykresy krzywizny porównywanych krzywych przejścia

Tabl. 1. Długości, położenia środka  $C_1$  łuku  $\Omega_1$  oraz punkty styczności krzywych klasy  $C^0$  i  $C^1$ , kubicznych krzywych C-Bezier oraz PH krzywej Bezier piątego stopnia

Krzywa	Krzywa kl. $C^0$	Krzywa kl. $C^1$	PH quintic	C-Bezier $m = 0,93$	C-Bezier $m = 0,95$	C-Bezier $m = 0,99$
Długość krzywej $l$ [m]	293,00	293,00	293,23	734,14	736,47	741,21
Punkt styczności z łukiem $\Omega_1$ [m]	(281,81; 68,11)	(282,25; 67,36)	(283,63; 63,52)	(534,84; 394,98)	(534,84; 394,98)	(534,84; 394,98)
Położenie środka $C_1$ [m]	(41,22; 506,42)	(42,73; 506,26)	(58,79; 510,11)	(41,22; 506,42)	(41,22; 506,42)	(41,22; 506,42)



Rys. 3. Przyspieszenia w ruchu drgającym  $X''$  porównywanych krzywych przejścia

sy  $C^1$  oraz PH krzywej Bezier piątego stopnia (tabl. 1). Użytkano kubiczne krzywe C-Bezier o znacznie większej długości w stosunku do pozostałych krzywych. Nie istniało rozwiązanie o mniejszej długości krzywej, zachowujące jednocześnie położenie środka  $C_1$  łuku  $\Omega_1$ .

Na rys. 2 przedstawiono krzywizny porównywanych krzywych, a na rys. 3 przyspieszenie w ruchu drgającym  $X''$ .

Spośród krzywych o długości  $l_k = 293$  m zdecydowanie najlepsze właściwości dynamiczne ma krzywa klasy  $C^1$ . PH krzywa Bezier piątego stopnia ma lepsze właściwości dynamiczne od krzywej klasy  $C^0$  w początkowym rejonie, a gorsze w rejonie końcowym. Wynika to z zastosowania wariantu algorytmu konstruowania krzywej gwarantującego połączenie  $G^3$  z łukiem większym. Dobre właściwości rodziny kubicznych krzywych C-Bezier wynikają z ich większej długości w stosunku do pozostałych krzywych.

## ODTWARZANIE KSZTAŁTU OSI TORU KOLEJOWEGO

Minęło właśnie sześć lat od uruchomienia w naszym kraju (w połowie 2008 roku) Aktywnej Sieci Geodezyjnej ASG-EU-POS [2]. Otworzyło to zupełnie nowe perspektywy w zakresie określania rzeczywistego położenia toru kolejowego. Wykorzystanie opracowanej przez zespół naukowy Politechniki Gdańskiej i Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni techniki Mobilnych Pomiarów Satelitarnych [20, 25] umożliwia bardzo precyzyjne określenie podstawowych danych do projektowania

modernizacji linii kolejowej. Technika ta pozwala na odtworzenie kierunków prostych trasy (i określenie występujących na nich deformacji poziomych), a także rejonów zmiany kierunku trasy (kąty zwrotu trasy, łuki kołowe i krzywe przejściowe).

Stanowiło to inspirację do podjęcia działań nad opracowaniem nowych metod projektowania, dostosowanych do techniki MPS [7, 9, 10, 11], wraz z odpowiednim wspomaganie komputerowym [12, 14]. Dzięki technice satelitarnej stało się możliwe odtworzenie, w sposób bezpośredni, rzeczywistego kształtu toru w płaszczyźnie poziomej. Tradycyjne podejście (a także obowiązujące wytyczne projektowania) wymaga wyodrębnienia z układu składowych elementów geometrycznych: odcinków prostych, łuków kołowych i krzywych przejściowych. Obecnie można to osiągnąć przez odpowiedni opis matematyczny pomierzonych rzędnych. W następnym etapie będzie odbywać się korygowanie rzędnych, mające na celu eliminowanie występujących nieprawidłowości oraz dostosowywanie układu do wymaganych parametrów eksploatacyjnych. Stosowane metody projektowania muszą znaleźć zastosowanie zarówno do odtwarzania kształtu toru (stanowiącego przecież podstawę do określonych decyzji modernizacyjnych), jak też do wykonania właściwego projektu modernizacji.

Odtwarzanie kształtu osi toru kolejowego jest niewątpliwie zagadnieniem bardziej złożonym niż projektowanie wariantu docelowego. Mogą się tutaj okazać przydatne algorytmy obliczeniowe obejmujące trudniejsze przypadki geometryczne, np. łuki koszarowe [10] i łuki odwrotne.

## Algorytm obliczeniowy

W opracowaniu ograniczono się do rozpatrywania przypadku standardowego, tj. zamodelowania istniejącego układu za pomocą łuku kołowego i dwóch krzywych przejściowych, przy czym stworzono możliwość zróżnicowania rodzaju i długości krzywych przejściowych. Sposób określenia podstawowych danych wejściowych oraz procedurę projektowania rzędnych trasy (dla rozpatrywanego przypadku) przedstawiono w pracy [11]. Pomierzone współrzędne  $Y_i$  i  $X_i$  (w państwowym systemie odniesień przestrzennych 2000) prostych stanowiących przecinające się kierunki główne trasy możemy wykorzystać do wyznaczenia – metodą najmniejszych kwadratów – ich równań w postaci  $X = A + B Y$ . Znajomość równań obydwu prostych umożliwi wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia kierunków głównych trasy w układzie 2000 oraz zdefiniowanie warunków określających współrzędne końcowej strefy kierunku głównego trasy na *Prostej 1* oraz strefy początkowej drugiego kierunku głównego na *Prostej 2*. Wyznaczenie kątów nachylenia  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  obu prostych względem osi  $Y$  pozwala na określenie kąta zwrotu trasy  $\alpha$ .

Określenie nowych rzędnych osi toru będzie odbywać się przy następujących danych wyjściowych:

- kąta zwrotu stycznych  $\alpha$ ,
- promienia łuku kołowego  $R$ ,
- przechyłki na łuku  $h_0$ ,
- długości  $l_1$  i  $l_2$  przyjętych postaci krzywych przejściowych.

W celu wykorzystania uzyskanych danych pomiarowych do zaprojektowania rejonu zmiany kierunku trasy należy interesujący nas jej fragment wyodrębnić z całości układu geometrycznego oraz dokonać odpowiedniej transformacji (przesunięcia i obrotu) układu współrzędnych. Wzory na nowe współrzędne trasy w przesuniętym do punktu  $O(Y_0, X_0)$  i obróconym o kąt  $\beta$  lokalnym układzie współrzędnych  $x, y$  są opisane zależnościami [22]:

$$x = (Y - Y_0) \cos \beta + (X - X_0) \sin \beta \quad (25)$$

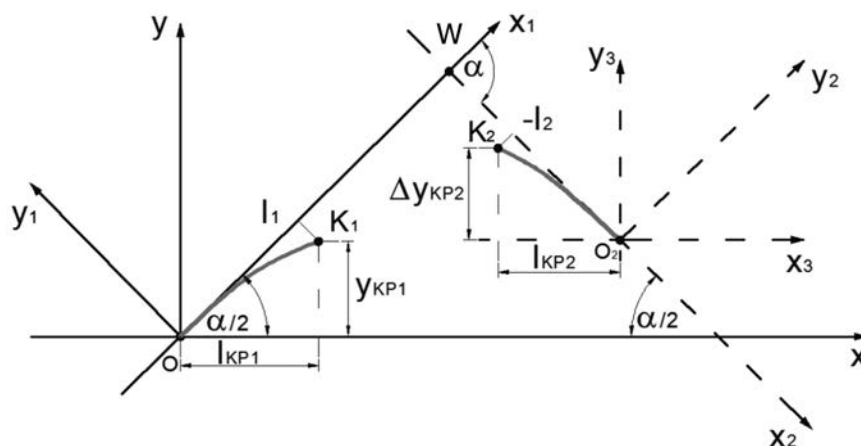
$$y = -(Y - Y_0) \sin \beta + (X - X_0) \cos \beta \quad (26)$$

Na rys. 4 przedstawiono lokalny układ współrzędnych  $Oxy$ , w którym będzie odbywać się projektowanie układu geome-

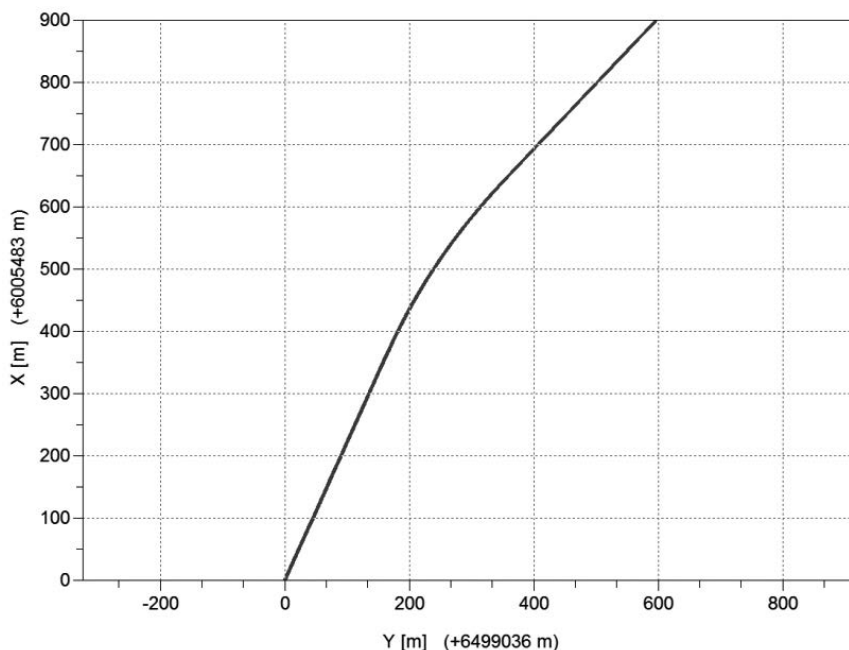
trycznego, by następnie – na drodze odpowiedniej transformacji – przenieść go do układu globalnego.

Proces projektowania przebiega sekwencyjnie, obejmując następujące etapy:

- przyjęcie (w sposób przybliżony) początku lokalnego układu współrzędnych (punktu  $O$ ) na jednym z kierunków głównych trasy (na prostej  $l$ ); będzie on również początkiem pomocniczego układu współrzędnych  $Ox_1y_1$  wykorzystywanego do wyznaczania punktów krzywej przejściowej  $KP1$ ,
- określenie rzędnych krzywej przejściowej  $KP1$  zlokalizowanej w układzie współrzędnych  $Ox_1y_1$  (rys. 1),
- transformacja krzywej przejściowej  $KP1$  do przyjętego lokalnego układu współrzędnych poprzez dokonanie obrotu jej układu odniesienia w prawo o kąt  $\alpha/2$ ; otrzymujemy równania parametryczne  $x(l)$  i  $y(l)$  krzywej  $KP1$ ,
- określenie rzędnych krzywej przejściowej  $KP2$  zlokalizowanej w układzie współrzędnych  $O_2x_2y_2$  (rys. 1),
- transformacja krzywej przejściowej  $KP2$  do układu współrzędnych  $O_2x_3y_3$  poprzez dokonanie obrotu jej układu odniesienia w lewo o kąt  $\alpha/2$ ; ponieważ osie tego układu są równoległe do osi układu lokalnego  $Oxy$ , operacja ta pozwoli na określenie współrzędnych punktu  $K_2$  (tj. wartości  $l_{KP2}$  i  $\Delta y_{KP2}$ ),
- wyznaczenie równania łuku kołowego  $y(x)$  połączonego stycznie w punkcie  $K_1$  z krzywą przejściową  $KP1$ ,
- określenie współrzędnych punktu  $K_2(x_{K2}, y_{K2})$  z warunku styczności łuku kołowego i krzywej przejściowej  $KP2$ ,
- zorientowanie pomocniczego układu współrzędnych  $O_2x_3y_3$  w układzie lokalnym  $Oxy$  dzięki określeniu położenia punktu  $O_2(x_{O2}, y_{O2})$ ,
- wyznaczenie równań parametrycznych  $x(l)$  i  $y(l)$  krzywej przejściowej  $KP2$  w lokalnym układzie współrzędnych,
- określenie położenia początku lokalnego układu współrzędnych, tj. punktu  $O$  (na odpowiednim kierunku głównym trasy) w układzie 2000; położenie to wyznaczają współrzędne wierzchołka  $W(x_w, y_w)$  w układzie  $Oxy$ , gdyż z pomiarów satelitarnych jesteśmy w stanie łatwo określić jego współrzędne  $Y_w$  i  $X_w$  w układzie 2000,



Rys. 4. Przyjęty lokalny układ współrzędnych (z wrysowanymi krzywymi przejściowymi)



Rys. 5. Widok fragmentu trasy w przesuniętym układzie współrzędnych

- przeniesienie rozwiązania do układu globalnego przy wykorzystaniu wzorów [22]:

$$Y = Y_0 + x \cos \beta - y \sin \beta \quad (27)$$

$$X = X_0 + x \sin \beta + y \cos \beta \quad (28)$$

### Komputerowe generowanie wariantów

W celu nadania charakteru aplikacyjnego przedstawionej koncepcji należało opracować odpowiedni program komputerowy. Program ten generuje kolejne warianty przebiegu trasy, wykorzystując omówiony algorytm obliczeniowy, następnie – na drodze optymalizacji – dokonuje wyboru rozwiązania najlepiej opisującego kształt istniejącej osi toru [16]. Program umożliwia:

- szybkie zaprojektowanie poprawnego układu geometrycznego łączącego dwa kierunki główne,
- szybką ocenę wygenerowanego układu geometrycznego, szczególnie w przypadku, gdy projekt dotyczy modernizacji istniejącej linii,
- tworzenie dowolnej liczby wariantów, stosując różne rodzaje i długości krzywych przejściowych, a także poprzez zmianę wartości promienia łuku kołowego,
- wygenerowania tablicy zawierającej współrzędne geograficzne punktów z określonym krokiem wzdłuż osi toru, niezbędnych do wytyczenia zaprojektowanego przebiegu trasy w terenie.

Algorytm obliczeniowy, zaimplementowany w środowisku SciLab [26], pozwala użytkownikowi zaprojektować zarówno nowy, tj. nie związany z żadnym istniejącym układem geometrycznym wariant, jak również wariant modernizacji układu istniejącego na podstawie danych pomiarowych odnoszących się do konkretnego toru kolejowego. Tworząc kolejne warianty, dążymy do minimalizacji przemieszczeń istniejącego toru kolejowego.

Cały tok postępowania można podzielić na fazę przygotowawczą oraz projektową. Pierwsza z nich polega na przygotowaniu niezbędnych danych do zaprojektowania nowego wariantu przebiegu trasy. Dane te stanowią tablicę punktów pomiarowych, obejmującą swoim zakresem interesujący nas rejon trasy. Wybór tego rejonu wykonuje się w module programu SATTRACK [15], który służy do wizualizacji i oceny przebiegu trasy kolejowej na podstawie mobilnych pomiarów satelitarnych.

Faza projektowa polega już na generowaniu kolejnych wariantów przebiegu trasy i jest ona w dużym stopniu zautomatyzowana, przez co rola projektanta polega głównie na podejmowaniu krytycznych decyzji. Wspomaganie komputerowe przenosi zatem wysiłek związany z czynnościami obliczeniowymi oraz prezentacyjnymi na proces decyzyjny. Tok prowadzonego postępowania zilustrowano na konkretnym przykładzie.

Użytkownik wczytuje do programu tablicę zawierającą współrzędne punktów w układzie 2000, utworzoną w fazie poprzedzającej projektowanie. Na rys. 5 pokazano wykonaną na ich podstawie wizualizację przebiegu trasy na siatce przesuniętego układu współrzędnych [13], którego początek powiązany jest z pierwszym punktem pomiarowym. Należy zaznaczyć, że punkty z tablicy są opisane ich rzeczywistymi współrzędnymi w układzie 2000, jednak do celów wizualizacji praktyczniej jest operować w układach lokalnych.

Następnym krokiem jest określenie kierunków głównych trasy (zakładamy, że modernizacja dotyczy jedynie rejonów położonych w łuku, czyli zachowano poligon trasy). Program prowadzi użytkownika przez etapy, w których wyodrębnia on z całego zakresu punktów obszary prostoliniowe po obu stronach łuku. Na wyświetlających się wykresach użytkownik widzi (w skali skazonej) przebieg punktów trasy w układzie, którego oś pozioma pokrywa się z wyznaczoną ze wskazanego zakresu punktów prostą najmniejszych kwadratów. W zależności od rozpatrywanego kierunku głównego jest to *Prosta 1* lub *Prosta 2*. Rzędne wykresu stanowią miarę odchylenia punktów pomierzonej trasy

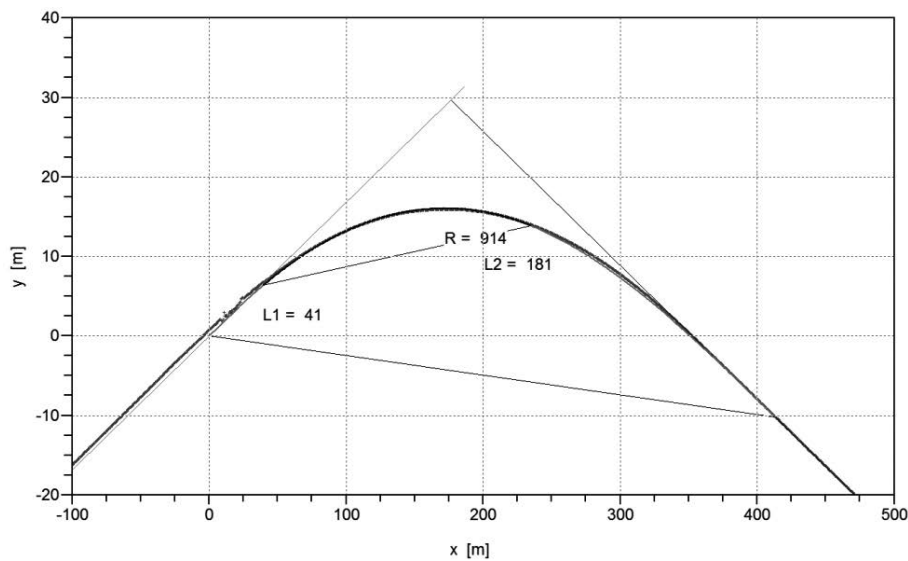
od wyznaczanego analitycznie kierunku prostej. Użytkownik ma możliwość zaznaczenia nowego zakresu punktów, przez co będą odrzucone te punkty, które wyraźnie odstają od liniowego trendu. W czasie tych operacji śledzi on na ekranie współczynniki  $A$  i  $B$  prostej w układzie 2000 oraz wskaźnik dopasowania prostej do konfiguracji aktualnej ( $R^2$ ) oraz po zaproponowaniu nowego zakresu punktów (next  $R^2$ ). Operacje te mogą być wykonywane tak długo, aż użytkownik zadecyduje o ostatecznej postaci prostej opisującej wybrany kierunek główny trasy.

Projektowanie odbywa się w lokalnym układzie współrzędnych (jak na rys. 4). Użytkownik określa rodzaje krzywych przejściowych oraz wprowadza ich długości  $l_1$  i  $l_2$ , jak również promień łuku kołowego  $R$ , dla których program komputerowy ma wygenerować wariant przebiegu trasy pomiędzy określonymi wcześniej kierunkami głównymi. Po wprowadzeniu i zatwierdzeniu danych użytkownik widzi na ekranie układ punktów w lokalnym układzie współrzędnych  $x, y$ . Na tle punktów pomiarowych wrysowany jest obliczony wariant projektowy z wyróżnionymi zakresami krzywych przejściowych i łuku kołowego.

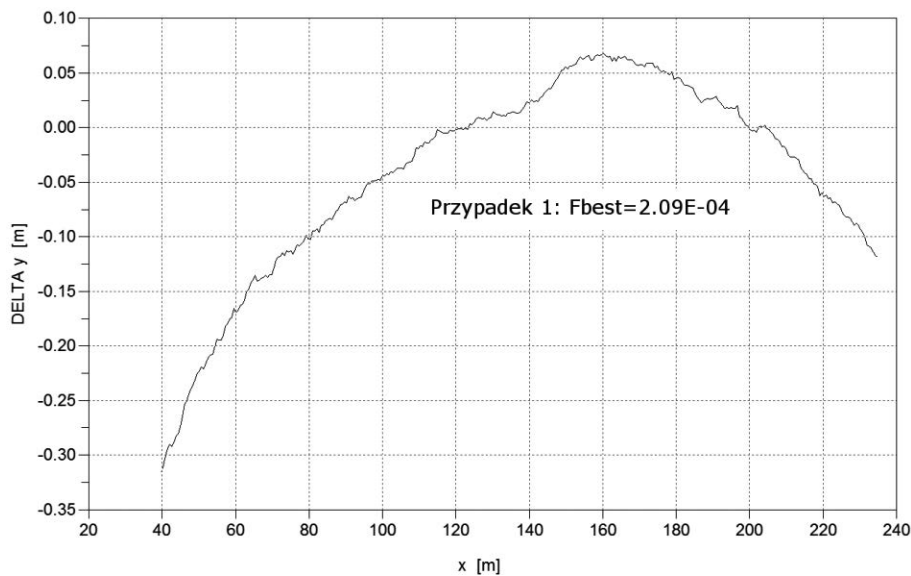
Na rys. 6 pokazano rozwiązanie uzyskane po przyjęciu promienia  $R = 914$  m i dwóch krzywych w postaci kłoidy o długościach  $l_1 = 41$  m i  $l_2 = 181$  m. W celu podniesienia czytelności układu początku i końca obydwu krzywych przejściowych połączono z sobą liniami prostymi.

Wartości różnic rzędnych nowo zaprojektowanych i istniejących w zakresie odciętych  $x$  (opisujących zaprojektowany łuk kołowy) użytkownik ocenia na wykresie towarzyszącym aktualnemu wariantowi. Wykres różnic odpowiadający wariantowi przedstawionemu na rys. 6 pokazano na rys. 7. Prezentowane różnice  $\Delta y$  stanowią pomocny wskaźnik przy podejmowaniu decyzji dotyczącej danego wariantu podczas projektowania. Ponieważ rozwiązanie problemu pokazane na rys. 6 uzyskano w procesie optymalizacji, na rys. 7 zamieszczono również wartość funkcji oceny  $FF$  (*fitness function*), opisanej równaniem (32) i zdefiniowanej w dalszej części pracy.

Gdy użytkownik zakończy proces generowania wariantów przebiegu trasy, program dostarcza tablicę współrzędnych punktów



Rys. 6. Wariant połączenia dwóch kierunków głównych łukiem kołowym o promieniu  $R = 914$  m oraz dwiema krzywymi przejściowymi o długościach  $l_1 = 41$  m i  $l_2 = 181$  m (w skali skażonej)



Rys. 7. Różnice pomiędzy rzędnymi projektowymi i istniejącymi (w skali skażonej) odpowiadające wariantowi z rys. 6



tów rozmieszczonych wzdłuż zaprojektowanego układu geometrycznego. Punkty te stanowią opis projektowanej trasy w państwowym systemie odniesień przestrzennych 2000. Dodatkowo istnieje możliwość wydrukowania raportu zawierającego analityczny zapis przyjętego rozwiązania w lokalnym układzie współrzędnych  $x, y$ . Zawarte w raporcie dane pozwalają odtworzyć w dowolnym czasie wartości współrzędnych zaprojektowanej trasy w układzie 2000.

### Optymalizacja procesu wyboru wariantu

Generowanie i ocena kolejnych wariantów może być prowadzone bezpośrednio przez użytkownika, jednak istnieje możliwość automatyzacji tego procesu. Wybór wariantu następuje w procesie optymalizacji prowadzonym algorytmem roju cząstek PSO (*Particle Swarm Optimization*) [6]. Algorytm PSO działa na podstawie populacji cząstek poruszających się w przestrzeni rozwiązań. Każda cząstka reprezentuje potencjalne rozwiązanie problemu, tj. szukany promień łuku  $R$  oraz długości dwóch krzywych przejściowych  $l_1$  i  $l_2$ . Cząstki zmieniają swoje położenie w kierunku uzależnionym od najlepszego dotychczasowego położenia cząstki, najlepszego dotychczasowego położenia cząstek sąsiednich oraz własnej prędkości. Modyfikacja prędkości cząstki następuje zgodnie z formułą:

$$v_{id} = \omega \times v_{id} + C_1 \times \text{Rand}() \times (p_{id}^{best} - p_{id}) + C_2 \times \text{Rand}() \times (p_{gd}^{best} - p_{id}) \quad (29)$$

gdzie:

$\omega$  – współczynnik inercji, zmieniający się w czasie według wzoru

$$\omega = \omega_{max} - n \times \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{N} \quad (30)$$

$N$  – maksymalna liczba iteracji algorytmu,

$n$  – numer bieżącej iteracji,

$C_1, C_2$  – współczynniki uczenia: indywidualny i grupowy,

$\text{Rand}()$  – funkcja losowa generująca liczbę losową z przedziału (0,1),

$p_{id}^{best}$  – najlepsze dotychczasowe położenie cząstki,

$p_{gd}^{best}$  – najlepsze dotychczasowe położenie cząstek sąsiednich.

Modyfikacja położenia cząstki następuje zgodnie z formułą:

$$p_{id} = p_{id} + v_{id} \quad (31)$$

Schemat działania algorytmu roju przedstawiono na rys. 8. Zastosowano PSO-Toolbox v. 0.7-1 dostępny w SciLab v. 5.4.0 [26]. Ocena cząstki reprezentującej rozwiązanie problemu jest przeprowadzana na podstawie różnicy rzędnych odtwarzanego położenia łuku kołowego i rzędnych pomierzonych, zgodnie z formułą:

$$FF(R, l_1, l_2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |y_i - py_i| \quad (32)$$

gdzie:

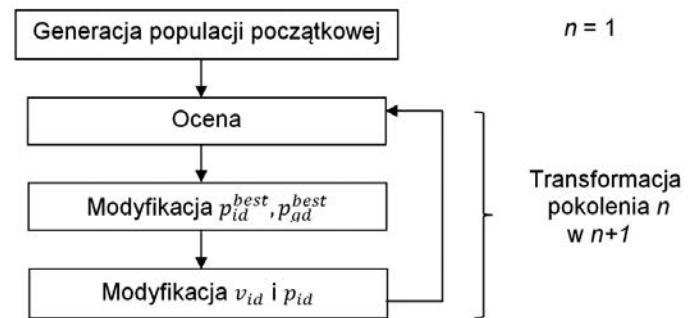
$FF$  – wartość funkcji oceny (*fitness function*),

$n$  – liczba uwzględnionych próbek reprezentujących rzędne łuku kołowego,

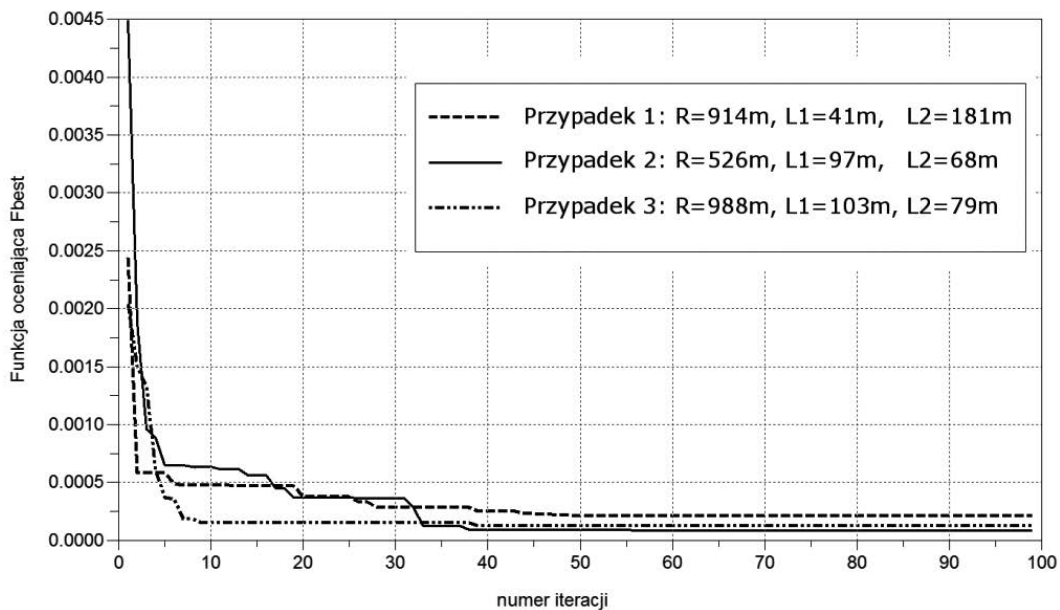
$y_i$  – rzędne odtwarzanego łuku o promieniu  $R$  łączącego dwa kierunki proste w układzie z dwoma krzywymi przejściowymi o długościach  $l_1$  i  $l_2$ ,

$py_i$  – rzędne wynikające z pomiarów.

W procesie optymalizacji dąży się do wyznaczenia promienia łuku  $R$  oraz długości krzywych przejściowych  $l_1$  i  $l_2$  zapewniających minimalne średnie przesunięcie rzędnych łuku. Uwzględnienie w formule (32) odwrotności kwadratu liczby próbek posłużyło do powstrzymania tendencji procesu do nadmiernego wydłużania krzywych przejściowych i minimalizacji przesunięć poprzez skracanie długości odtwarzanego łuku.



Rys. 8. Schemat działania algorytmu roju cząstek



Rys. 9. Przebieg wybranych procesów optymalizacji

Tabl. 2. Parametry procesu optymalizacji

Parametr	Przyjęta wartość
Współczynnik inercji $\omega_{\max}$	0,9
Współczynnik inercji $\omega_{\min}$	0,4
Indywidualny współczynnik uczenia $C_1$	0,7
Grupowy współczynnik uczenia $C_2$	1,47
Liczba iteracji	100

Wariant przedstawiony na rys. 6 stanowi rozwiązania optymalne osiągnięte w procesie optymalizacyjnym, którego parametry przedstawiono w tabl. 2. Odpowiedni proces optymalizacyjny, na tle przebiegu innych wybranych procesów optymalizacji, przedstawiono na rys. 9. Opisane w pracy rozwiązanie problemu oznaczono jako przypadek 1. Algorytm roju cząstek PSO z parametrami przedstawionymi w tabl. 2 wykazał się szybką zbieżnością we wszystkich przypadkach (najwyższą w przypadku 3). Założona liczba 100 iteracji okazała się wystarczająca.

## PODSUMOWANIE

Zapewnienie płynnej zmiany krzywizny, przy spełnieniu odpowiednich warunków, stanowi podstawę uzyskania korzystnych właściwości dynamicznych układu geometrycznego. Poszukiwanie nowych postaci krzywych przejścia i ocena istniejących są tematami wciąż aktualnymi, czego wyrazem może być opracowana w Katedrze Transportu Szynowego Politechniki Gdańskiej uniwersalna metoda modelowania krzywizny oraz wykazanie możliwości zastosowania krzywych Bezier przy projektowaniu dróg kołowych i kolejowych.

Przeprowadzone w pracy porównanie właściwości dynamicznych krzywych Bezier oraz krzywych klasy  $C^0$  i  $C^1$  uzyskanych metodą analityczną wykazało przewagę krzywych o nieliniowej krzywiznie, wśród których najkorzystniejszą właściwość ma krzywa klasy  $C^1$ . Zastosowanie połączenia  $G^3$  krzywej z łukiem o większym promieniu spowodowało znaczne pogorszenie właściwości dynamicznych PH krzywej Bezier piątego stopnia w końcowym rejonie przy połączeniu z łukiem o mniejszym promieniu.

Okazało się, że przypadek łączenia dwóch łuków kołowych zgodnych, z których jeden zawiera się w drugim, jest przypadkiem znacznie utrudniającym konstrukcję krzywych Bezier w porównaniu z przypadkiem łuków zgodnych oddalonych od siebie. Możliwości operowania parametrem kształtu  $m$  i uzyskiwania szerokiego wachlarza krzywych są ograniczone wąskim zakresem dopuszczalnych wartości  $m$ , gwarantującym uzyskanie rozwiązania spełniającego warunek monotoniczności krzywizny.

Mobilne pomiary satelitarne, z antenami zainstalowanymi na poruszającym się pojeździe szynowym, umożliwiają odtworzenie położenia osi torów w bezwzględny układzie odniesienia. Powoduje to konieczność opracowania nowej, odpowiedniej metodyki projektowania układów geometrycznych toru, która pozwoli na odtworzenie kształtu istniejącej osi toru,

a w następnym etapie – wprowadzenie niezbędnych zmian oraz dostosowywanie układu do wymaganych parametrów eksploatacyjnych.

Przedstawiona w pracy koncepcja sposobu projektowania rejonu zmiany kierunku trasy prowadzi do uzyskania rozwiązania analitycznego, z zastosowaniem odpowiednich formuł matematycznych. Wykorzystanie odpowiedniego algorytmu obliczeniowego w opracowanym systemie wspomagania komputerowego daje możliwość natychmiastowego generowania zestawu współrzędnych projektowanej trasy praktycznie w nieograniczonej liczbie wariantów. W takiej sytuacji problemem podstawowym staje się już tylko kwestia wyboru rozwiązania najkorzystniejszego.

W pracy do rozwiązania problemu wykorzystano algorytm „roju cząstek” (ang.: *Particle Swarm Optimization*). Jako kryterium optymalizacji założono minimalizację przesunięć istniejącego układu torowego. Zastosowaną funkcję oceny FF (*fitness function*) dostosowano do specyfiki rozpatrywanego zagadnienia i przeprowadzono na podstawie różnicy rzędnych odtwarzanego położenia łuku kołowego i rzędnych pomierzonych. Algorytm roju cząstek PSO z przyjętymi parametrami wykazał się we wszystkich przypadkach szybką zbieżnością, a założona liczba iteracji okazała się wystarczająca.

## LITERATURA

- Ahmad A., Md.Ali J.:  $G^3$  transition curve between two straight lines. 5<sup>th</sup> International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualisation, Penang 2008.
- Bosy J., Graszka W., Leonczyk M.: ASG-EUPOS – the Polish contribution to the EUPOS project. Symposium on Global Navigation Satellite Systems, Berlin, Germany, 11-14 November 2008.
- Cai H., Wang G.: A new method in highway route design: joining circular arcs by a single C-Bezier curve with shape parameter. Journal of Zhejiang University SCIENCE A 2009, 10(4).
- Habib Z., Sakai M.:  $G^2$  Pythagorean hodograph quintic transition between two circles with shape control. Computer Aided Geometric Design 2007, no. 24.
- Habib Z., Sakai M.: On PH quantic spirals joining two circles with one circle inside the other. Computer-Aided Design 2007, no. 39.
- Kennedy J., Eberhart R.: Swarm intelligence, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2001.
- Koc W.: Design of rail-track geometric systems by satellite measurement. Journal of Transportation Engineering 2012, Vol. 138, No. 1, January 1. © ASCE.
- Koc W.: Elementy teorii projektowania układów torowych. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2004.
- Koc W.: Metoda projektowania rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej. Problemy Kolejnictwa 2011, zeszyt 152.
- Koc W.: Projektowanie łuków koszowych dostosowane do pomiarów satelitarnych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, seria Transport, z. 98, 2013.
- Koc W.: Projektowanie rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej w zapisie matematycznym. Przegląd Komunikacyjny 2012, nr 7-8.

12. Koc W., Chrostowski P.: Computer-aided design of railroad horizontal arc areas in adapting to satellite measurements. *Journal of Transportation Engineering* 2014, Vol. 140, No. 3,
13. Koc W., Chrostowski P.: Ocena odcinków prostych trasy kolejowej na podstawie pomiarów satelitarnych. *Przegląd Komunikacyjny* 2011, nr 9-10.
14. Koc W., Chrostowski P.: Uniwersalny program komputerowy do projektowania zmiany kierunku trasy. *Zeszyty Naukowo-Techniczne Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji Rzeczpospolitej Polskiej Oddział w Krakowie*, seria: Materiały Konferencyjne, nr 3 (zeszyt 102), Kraków 2013.
15. Koc W., Chrostowski P.: Wizualizacja przebiegu trasy kolejowej na podstawie pomiarów satelitarnych. IV Konferencja Naukowo-Techniczna „Projektowanie, Budowa i Utrzymanie Infrastruktury w Transporcie Szynowym INFRASZYN 2011”, Zakopane 2011.
16. Koc W., Chrostowski P., Palikowska K.: Program komputerowy do odzwierciedlenia osi toru kolejowego. *Zeszyty Naukowo-Techniczne Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji Rzeczpospolitej Polskiej Oddział w Krakowie*, seria: Materiały Konferencyjne, nr 2 (zeszyt 101), Kraków 2013.
17. Koc W., Mieloszyk E.: Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu dynamicznego, *Archiwum Inżynierii Lądowej* 1987, t. 33, z. 2.
18. Koc W., Palikowska K.: Analiza sposobów modelowania krzywizny – krzywe Bezier a metoda analityczna. *Zeszyty Naukowo-Techniczne Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji Rzeczpospolitej Polskiej Oddział w Krakowie*, seria: Materiały Konferencyjne, nr 3 (zeszyt 99), Kraków 2012.
19. Koc W., Palikowska K.: Ocena dynamiczna wybranych sposobów łączenia elementów trasy o zróżnicowanej krzywiznie. *Technika Transportu Szynowego* 2012, nr 9, CD-ROM.
20. Koc W., Specht C.: Wybrane problemy wyznaczania przebiegu trasy kolejowej z wykorzystaniem rozwiązań sieciowych GPS. *Logistyka* 2010, nr 4, CD-ROM 1.
21. Koc W., Specht C., Jurkowska A., Chrostowski P., Nowak A., Lewiński L., Bornowski M.: Określanie przebiegu trasy kolejowej na drodze pomiarów satelitarnych. II Konferencja Naukowo-Techniczna „Projektowanie, Budowa i Utrzymanie Infrastruktury w Transporcie Szynowym INFRASZYN 2009”, Zakopane 2009.
22. Korn G. A., Korn T. M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*. Warszawa: PWN 1983.
23. Mieloszyk E., Koc W.: General dynamic method for determining transition curve equations. *Rail International – Schienen der Welt* 1991, No. 10.
24. Palikowska K.: Projektowanie układów geometrycznych toru kolejowego z zastosowaniem programowania ewolucyjnego, *Rozprawa doktorska*, Politechnika Gdańska 2002.
25. Specht C., Nowak A., Koc W., Jurkowska A.: Application of the Polish Active Geodetic Network for railway track determination. W: Weintraub A., Neumann T. (red.) *Transport Systems and Processes – Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, CRC Press – Taylor & Francis Group 2011, London, UK.
26. Strona internetowa <http://www.scilab.org> (The Free Platform for Numerical Computation), Scilab Enterprises 2012.