

Zdzisław KOWALCZUK, Marek TATARAPOLITECHNIKA GDAŃSKA,
ul. Gabriela Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk**Analiza wyliczalności modelu stanowego procesu przepływu**

Prof. dr hab. inż. Zdzisław KOWALCZUK

Prof. dr hab. inż. (2003, 1993, 1986, 1978). Prof. zw. Automatyki i Robotyki oraz kier. katedry Systemów Decyzyjnych na wydziale ETI PG. Interesuje się sterowaniem adaptacyjnym, identyfikacją i estymacją, diagnostyką, detekcją, sztuczną inteligencją, robotyką, automatyką i informatyką. Kilkanaście książek (WNT, Springer, PWNT), około 100 artykułów oraz 300 referatów konferencyjnych i rozdziałów książkowych. Członek Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, wiceprezes TKP (NOT) i prezes PolSPAR (IFAC).

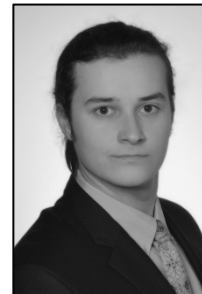
e-mail: kova@pg.gda.pl



Inż. Marek TATARA

Student drugiego stopnia studiów Automatyki i Robotyki Wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki (ETI) Politechniki Gdańskiej. Obecnie pracuje nad swoją pracą magisterską. Jego zainteresowania naukowe obejmują modelowanie matematyczne oraz przetwarzanie sygnałów w zastosowaniach przemysłowych.

e-mail: mstatara@gmail.com

**Streszczenie**

W niniejszej pracy przedstawiono ogólną metodę wyznaczania modelu stanowego procesu przepływu medium w rurociągu, zwracając uwagę na problem osobliwości równania i odwracalności macierzy rekombinacji. Dokonano analizy macierzy rekombinacji dowodząc jej nieosobliwości dla skończonych kroków kwantyzacji w czasie i przestrzeni. Pokazano również sposób wyznaczenia odwrotności tej macierzy i przedstawiono analizę porównawczą macierzy odwracanych proponowaną metodą analityczną oraz metodą numeryczną.

Słowa kluczowe: proces przepływu, diagnostyka procesów, detekcja i lokalizacja wycieku, rurociągi przemysłowe.

Computability analysis of state-space models of a flow process in pipelines**Abstract**

The paper considers the issue of possible singularity in the state-space models of pipeline flow processes, giving a prove of invertibility of a recombination matrix for finite space and time quantization intervals and presenting an explicit formula for computing an inverse matrix. Importance of good modeling is discussed and a derivation of state space equations is presented. In examining the potential singularity of the recombination matrix, we show that its determinant is always nonzero. Consequently, an effective analytical method for inverting the recombination matrix is given. In an efficacy study the derived analytical method is compared to the classical numerical approach, taking into account a sum of the modules of elements of a residual matrix and a ratio of the Frobenius norm to the number of the elements of the same matrix. The study demonstrates the advantage of the proposed method in terms of accuracy.

Keywords: pipeflow, process diagnostics, leak detection and isolation, industrial pipelines.

1. Wprowadzenie

Systemy Detekcji i Izolacji Uszkodzeń (FDI) często opierają się na modelu matematycznym nadzorowanego systemu w celu obliczenia residuum, określenia rodzaju i lokalizacji usterki oraz oszacowania jej parametrów. Niekiedy dokładne określenie tych wielkości ma istotne znaczenie w zakresie bezpieczeństwa pracy instalacji, jak na przykład w systemach Detekcji i Izolacji/Lokalizacji Wycieków (ang. *Leak Detection and Isolation*, LDI). Przykładając większą wagę do procesu tworzenia modelu, zwiększa się dokładność i jakość takiego systemu.

2. Model stanowy procesu przepływu

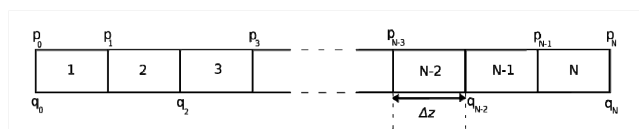
Punktem wyjściowym w analizie jakości takiego modelu jest jego opis wyprowadzony z praw fizyki. Proces przepływu medium opisany w postaci równania ciągłości [4] wynika z prawa zachowania masy oraz zachowania pędu:

$$\frac{A}{v^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\lambda v^2}{2DA^2} \frac{q|q|}{p} - \frac{g \sin \alpha}{v^2} p, \quad (2)$$

gdzie q jest natężeniem przepływu, p ciśnieniem, A polem przekroju, v prędkością dźwięku w rozpatrywanej cieczy, D średnicą, α kątem nachylenia do poziomu, λ współczynnikiem tarcia, g stałą grawitacji, t czasem zaś z – współrzędną odległości.

Model taki należy jednak przenieść do dziedziny czasu dyskretnego, aby możliwa była jego implementacja komputerowa. Otrzymuje się to dzięki założeniu, że rurociąg został podzielony na parzystą liczbę segmentów N , co zilustrowano na rys. 1, gdzie jako zmienne stanu przyjmuje się wartości ciśnienia na końcach nieparzystych segmentów, zaś na końcach parzystych przepływ masowy. Dodatkowo dokonuje się pomiaru obu tych wielkości na początku oraz na końcu rurociągu [5].



Rys. 1. Koncepcja podziału rurociągu na segmenty
Fig. 1. Division of the pipeline into sections

Poza przyjętymi założeniami odnośnie podziału, do dyskretyzacji stosuje się metodę różnic centralnych [1]:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{3x_z^{k+1} - 4x_z^k + x_z^{k-1}}{2\Delta t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{x_{z+1}^{k+1} - x_{z-1}^{k+1} + x_{z+1}^k - x_{z-1}^k}{4\Delta z}, \quad (4)$$

gdzie indeks górny oznacza moment czasu, natomiast indeks dolny oznacza numer sekcji rurociągu.

Poczyniwszy powyższe założenia można przystąpić do zapisania równań ciągłości (1) oraz (2) w dziedzinie czasu dyskretnego:

$$3G_A p_z^k - G_B (q_{z-1}^k - q_{z+1}^k) = G_A (4p_z^{k-1} - p_z^{k-2}) + G_B (q_{z-1}^{k-1} - q_{z+1}^{k-1}), \quad (5)$$

$$G_B (p_{z+1}^k - p_{z-1}^k) + G_C q_z^k = G_B (p_{z-1}^{k-1} - p_{z+1}^{k-1}) + Y_z p_z^{k-1} + (4G_C + F_z^{k-1}) q_z^{k-1} - G_C q_z^{k-2}, \quad (6)$$

dla współczynników zdefiniowanych jako:

$$a = 3G_A = \frac{3A}{2v^2 \Delta t}, \quad b = G_B = \frac{1}{4\Delta z}, \quad c = 3G_C = \frac{3}{2A\Delta t},$$

$$d = \frac{b^2}{c}, \quad Y_z = \frac{g \sin \alpha_z}{v^2}, \quad F_z^{k-1} = \frac{-\lambda v^2 |q_z^{k-1}|}{2DA^2 p_z^{k-1}}.$$

Dysponując równaniami (5) oraz (6), proces przepływu można opisać w bardziej przystępnej formie, w postaci modelu stanowego, który ma zastosowanie w systemach LDI [5]:

$$x^k = A^{-1}(Bx^{k-2} + C(x^{k-1})x^{k-1} + Du^{k-1} + Eu^k). \quad (7)$$

Opis poszczególnych macierzy można znaleźć w literaturze [4], przy czym macierz A ma postać:

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 2b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & & 0 & 0 & | & -b & b & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & c & 0 & | & 0 & 0 & & -b & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & | & 0 & 0 & \dots & 0 & -2b \\ - & - & - & - & - & | & - & - & - & - & - \\ -b & b & 0 & \dots & 0 & | & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & & 0 & | & 0 & a & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & -b & b & 0 & | & 0 & 0 & & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -b & b & | & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \quad (8)$$

W równaniu (7) występuje konieczność odwrócenia macierzy A , zwanej dalej macierzą rekombinacji, co mogłoby wiązać się z koniecznością implementacji dodatkowego systemu sprawdzającego jej osobliwość oraz przeliczającego parametry modelu. Jednak, jak pokażemy dalej, macierz ta dla skończonych i niezerowych kroków kwantyzacji jest zawsze nieosobliwa.

3. Wyznacznik macierzy rekombinacji

Aby dowieść odwracalności macierzy rekombinacji, można skorzystać z rozkładu LU. Jeśli rozszerzymy macierz A lewostronnie o macierz jednostkową, a następnie sprowadzimy lewą część do macierzy dolnej trójkątnej L , natomiast prawą do górnej trójkątnej U , to wyznacznik macierzy rekombinacji będzie równy iloczynowi wyznaczników macierzy trójkątnej dolnej oraz górnej [6]. Faktoryzację macierzy A można uzyskać w dwóch krokach:

Krok 1. Należy do $\frac{N}{2} + 2$ wiersza dodać wiersz pierwszy przemnożony przez $\frac{b}{c}$, a następnie odjąć od niego wiersz drugi przemnożony przez ten sam współczynnik. Taką czynność należy powtórzyć za każdym razem zwiększając indeks wierszowy, aż wykonamy dodawanie do ostatniego wiersza. W rezultacie otrzymuje się macierz:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 2b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & c & & 0 & 0 & -b & b & & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{1,n} & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & & c & 0 & 0 & 0 & & -b & b \\ l_{1,n+1} & & & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{1,N} & l_{2,N} & & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & -b & b \\ l_{1,N+1} & l_{2,N+1} & \dots & l_{N,N+1} & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & -2b & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9)$$

Warto zaznaczyć, że współczynniki macierzy trójkątnej dolnej nie mają znaczenia w dalszych rozważaniach, dlatego zastąpiono je symbolami l z oznaczeniem współrzędnych. Jak można zauważyć, należy jeszcze usunąć współczynniki $-d$ z macierzy (9) spod diagonalnej prawej macierzy, aby uzyskać macierze L i U .

Krok 2. Aby pozbyć się niechcianych wartości, należy do każdego z wierszy poniżej pierwszego pod linią przerywaną dodać wiersz go poprzedzający, przemnożony przez odpowiednią wartość. W ten sposób otrzymuje się macierz:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 2b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & c & & 0 & 0 & -b & b & & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & & c & 0 & 0 & 0 & & -b & b \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 & 0 & & 0 & -2b \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ l'_{1,n} & \dots & 1 & \dots & 0 & & & & & f_1 & u_{1,2} & & 0 & 0 \\ l'_{1,n+1} & & & & 0 & & & 0 & & 0 & f_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l'_{1,N} & l'_{2,N} & & 1 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & f_{\frac{N-1}{2}} & u_{\frac{N-1}{2}, \frac{N}{2}} & & 0 \\ l'_{1,N+1} & l'_{2,N+1} & \dots & l'_{N,N+1} & 1 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{\frac{N}{2}} & & 0 \end{array} \right] \quad (10)$$

będąca złożeniem macierzy trójkątnej dolnej oraz trójkątnej górnej. Wyznacznik tej macierzy można obliczyć jako:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{N+1} l_{j,j} u_{j,j} = c^{\frac{N+1}{2}} \prod_{j=1}^N f_j, \quad (11)$$

gdzie $l_{j,j}$ oraz $u_{j,j}$ są współczynnikami na diagonalach macierzy L oraz U . Wynik po prawej stronie wzoru (11) uzyskuje się uwzględniając, że macierz L ma na głównej przekątnej same jedynki, natomiast macierz U ma na części przekątnej wartości c . Po podstawieniu przykładowych wartości do (11) uzyskano wyniki zestawione w tab. 1:

Tab. 1. Wartości wyznacznika macierzy A dla przykładowych wartości N
Tab. 1. Values of the determinant of matrix A for exemplary N

N	Wyznacznik $\det(A)$
2	$ac^2 + 4b^2c$
4	$a^2c^2 + 6ab^2c^2 + 8b^4c$
6	$a^3b^4 + 8a^2b^2c^3 + 19ab^4c^2 + 12b^6c$

Analizując otrzymane wyniki, można podać wzór na wartość wyznacznika macierzy A :

$$\det(A) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} C_i^N a^{\frac{N}{2}-i} b^{2i} c^{\frac{N}{2}-i+1}, \quad (12)$$

gdzie dla brzegowych współczynników:

$$\begin{aligned} C_0^N &= 1, \quad \text{dla } N = 0, 2, 4, \dots, \\ C_{\frac{N}{2}}^N &= 2N, \quad \text{dla } N = 2, 4, 6, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

oraz dla pozostałych

$$\begin{aligned} C_i^N &= 2C_{i-1}^{N-2} + C_i^{N-2}, \quad \text{dla } N = 4, 6, 8, \dots; i = 1, \\ C_i^N &= 2C_{i-1}^{N-2} + C_i^{N-2} - C_{i-2}^{N-4}, \quad \text{dla } N = 4, 6, 8, \dots; i = 2, 3, 4, \dots; \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Biorąc pod uwagę to, że wartości współczynników określonych równaniami (13) oraz (14) są zawsze dodatnie oraz to, że wartości współczynników a , b oraz c są zawsze dodatnie (b mogłoby teoretycznie przyjmować ujemne wartości ze względu na możliwość przyjęcia ujemnego kroku w przestrzeni, jednak we wzorze (12) występuje ono jedynie w potęgach parzystej), można wnioskować, że wartość wyznacznika macierzy rekombinacji jest zawsze dodatnia, a co za tym idzie macierz ta jest zawsze odwracalna.

4. Inwersja macierzy rekombinacji

Aby wykonać inwersję macierzy A , można ją podzielić na cztery podmacierze:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & & A_2 & \\ - & & - & \\ A_3 & & A_4 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c & 0 & \dots & 0 & 0 & 2b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & & 0 & 0 & -b & b & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & c & 0 & 0 & 0 & & -b & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 & -2b \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -b & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & & 0 & a & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & -b & b & 0 & 0 & 0 & & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -b & b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{array} \right], \quad (15)$$

a następnie, korzystając z powyższej partycji, odwrotność macierzy A można wyznaczyć jako [2]:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A'_1 & | & A'_2 \\ \hline A'_3 & | & A'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} & & -A_1^{-1} A_2 (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} \\ & & \\ -A_4^{-1} A_3 (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} & & (A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Występujące w (16) macierze A_1 i A_4 są diagonalne, zatem ich odwrotności też są diagonalne z odwrotnościami 'oryginalnych' elementów diagonalnych. Wobec tego, macierze A'_1 oraz A'_4 można zapisać jako:

$$A'_1 = \begin{bmatrix} c + \frac{2b^2}{a} & \frac{-2b^2}{a} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-b^2}{a} & c + \frac{2b^2}{a} & \frac{-b^2}{a} & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{-b^2}{a} & c + \frac{2b^2}{a} & \frac{-b^2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-2b^2}{a} & c + \frac{2b^2}{a} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (17)$$

$$A'_4 = \begin{bmatrix} a + \frac{3b^2}{c} & \frac{-b^2}{c} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-b^2}{c} & a + \frac{2b^2}{c} & \frac{-b^2}{c} & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{-b^2}{c} & a + \frac{2b^2}{c} & \frac{-b^2}{c} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-b^2}{c} & a + \frac{3b^2}{c} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (18)$$

Ponieważ macierze (17) oraz (18) są macierzami wstęgowymi o szerokości wstęgi równej 3, zwanymi też macierzami trójdiagonalnymi, do wyznaczenia ich odwrotności można skorzystać z metody, którą zaproponowali da Fonseca oraz Petronilho [3]. Stanowi ona, że odwrotność macierzy w postaci:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & & \\ & \gamma_2 & & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & & \gamma_{n-1} & & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

można obliczyć według poniższego wzoru:

$$T^{-1}(i, j) = t_{i, j} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j} \beta_i \dots \beta_{j-1} \theta_{i-1} \Phi_{j+1}}{\theta_n} & \text{dla } i \leq j \\ \frac{(-1)^{i+j} \gamma_j \dots \gamma_{i-1} \theta_{j-1} \Phi_{i+1}}{\theta_n} & \text{dla } i > j \end{cases} \quad (20)$$

przy czym zakłada się, że iloczyn bez żadnych składowych równy jest 1, a współczynniki θ_i oraz Φ_i są wyznaczane rekurencyjnie:

$$\theta_i = \alpha_i \theta_{i-1} - \beta_{i-1} \gamma_{i-1} \theta_{i-2} \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots, n; \\ \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = \alpha_1, \quad (21)$$

$$\phi_i = \alpha_i \phi_{i+1} - \beta_i \gamma_i \phi_{i+2} \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \dots, 1; \\ \phi_{n+1} = 1, \quad \phi_n = \alpha_1. \quad (22)$$

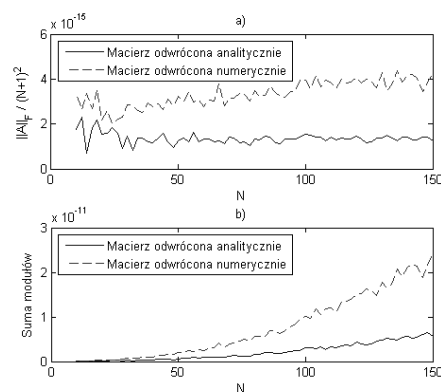
Skoro obie macierze (17) i (18) są centrosymetryczne, współczynniki θ_i będą współczynnikami Φ_i zapisanymi w odwrotnej kolejności, co skraca obliczenia. Z własności tej wnioskujemy, że elementy wynikowej macierzy będą również centrosymetryczne, co upraszcza problem odwracania macierzy do wyznaczenia połowy elementów. Ponadto, macierz (18) jest symetryczna, co sprowadza problem do wyznaczania tylko czwartej części wszystkich elementów tej macierzy.

Znając odwrotności macierzy (17) oraz (18), można zapisać wzory na odwrotności macierzy A_2' i A_3' , które są antycycentrosymetryczne (kolejne uproszczenie obliczeń). Po wyznaczeniu tych podmacierzy, konstruuje się pożądaną odwrotność macierzy rekombinacji A , która przyczynia się do znacznego uproszczenia modelu obliczeniowego.

5. Wyniki porównawcze i wnioski

Opisany powyżej sposób odwracania macierzy rekombinacji porównany zostanie z metodą numerycznego odwracania. W badaniu tym wykorzystamy oczywisty fakt, że macierz przemnożona przez swoją odwrotność powinna w wyniku dać macierz jednostkową. Jednak, z uwagi na błędy zaokrągleń powstające w wyniku obliczeń komputerowych, macierz ta zwykle różni się od macierzy jednostkowej. Dlatego utworzymy macierz resztkową, powstałą poprzez odjęcie od macierzy jednostkowej iloczynu macierzy A i jej odwrotności. Jako wyznacznik poprawności wyznaczenia odwrotności macierzy przyjmujemy stosunek normy Frobeniusa do liczby elementów macierzy resztkowej oraz zwykłą sumę modułów elementów macierzy resztkowej. Wyniki uzyskane w przypadku odwracania macierzy rekombinacji proponowaną metodą analityczną oraz klasyczną metodą numeryczną zostały przedstawione na rys. 2.

Jak można zauważyć, oba wskaźniki mierzące odstępstwo macierzy resztkowej od zera mają dużo wyższe wartości dla macierzy odwracanej numerycznie. Można zatem wnioskować, że jest ona bardziej zaszumiona i reprezentuje gorszą jakość operacji odwracania. Metoda analityczna przedstawiona w niniejszym artykule jest wyraźnie lepsza. Może to mieć istotne konsekwencje w zastosowaniach diagnostycznych przy określaniu parametrów wycieku, może zmniejszyć liczbę fałszywych alarmów, pozwolić na zmianę stosowanych progów sygnałowych oraz wykrywanie przecieków o mniejszej wartości.



Rys. 2. Dwa wskaźniki błędów odwrócenia macierzy rekombinacji, tj. odstępstwa od zera macierzy resztkowej, w funkcji liczby segmentów wyznaczanego: a) normą Frobeniusa odniesioną do liczby elementów macierzy resztkowej; b) sumą modułów elementów macierzy resztkowej

Fig. 2. Two indices of the error of inverting the recombination matrix, i.e. of the deviation of the residue matrix, as a function of the number of pipeline segments, using: a) the Frobenius norm related to the number of the residue matrix elements; b) the sum of the modules of the residue matrix elements

6. Literatura

- [1] Billmann L., Isermann R. (1987): Leak detection methods for pipelines, Automatica, vol. 23, no. 3, ss. 381-385.
- [2] Brogan W. (1991): Modern Control Theory, (third edition), Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [3] da Fonseca C.M., Petronilho J. (2001): Explicit inverses of some tridiagonal matrices, Linear Algebra and its Applications, vol. 325, no. 13, ss. 721.
- [4] Gunawickrama K. (2001): Leak Detection Methods for Transmission Pipelines, (PhD Thesis, Supervisor: prof. Z. Kowalczyk), Gdansk University of Technology, Gdańsk.
- [5] Kowalczyk Z., Gunawickrama K. (1998): Wykrywanie przecieków w rurociągach przemysłowych metodą korelacyjno-modelową. PAK, no. 4, ss. 140-146.
- [6] Kreyszig E. (2006): Advanced Engineering Mathematics, (9th edition), John Wiley & Sons, Inc., New York.