METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XV/3, 2014, str. 145 – 158

DOKŁADNOŚĆ SKAL EKWIWALENTNOŚCI A INDYFERENCJA STOCHASTYCZNA

Stanisław Maciej Kot
Katedra Nauk Ekonomicznych, Politechnika Gdańska
e-mail: skot@zie.pg.gda.pl

Streszczenie. W pracy dowodzimy twierdzenia, które wiąże założenie dokładności skal ekwiwalentności (ESE) z symetrycznym czynnikiem dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Dokładniej, niech X i Y będą rozkładami wydatków, odpowiednio, analizowanej grupy gospodarstw domowych i grupy gospodarstw odniesienia. Niech Z oznacza rozkład X skorygowany za pomocą pewnej skali ekwiwalentności. Jeśli spełnione jest założenie ESE, to Z jest stochastycznie indyferentne z X. Jednakże indyferencja stochastyczna (SI) nie implikuje ESE. Oznacza to, że SI jest założeniem słabszym niż ESE. Proponujemy obliczać skale ekwiwalentności na podstawie kryterium SI, gdy ESE nie jest spełnione.

Słowa kluczowe: skale ekwiwalentności, indyferencja stochastyczna, rozkład wydatków

WSTĘP

Celem niniejszej pracy jest wykazanie związku między relacją indyferencji stochastycznej (IS) pary rozkładów wydatków a tzw. kryterium dokładności skal ekwiwalentności (ESE)[1]. Wykażemy, że ESE implikuje IS, jednakże implikacja ta zachodzi tylko w jedną stronę. Pokażemy też sposób konstruowania nowej klasy skal ekwiwalentności bazujący na IS.

W empirycznych porównaniach dobrobytu osób na podstawie rozkładów wydatków lub dochodów występuje poważna trudność polegająca na tym, że jednostką statystyczną badań jest gospodarstwo domowe, a populacja owych gospodarstw jest niejednorodna z uwagi na rozmaite atrybuty, np. wielkość

[1] Dokładność skal ekwiwalentności jest równoważna warunkowi *niezależności od bazy* (IB).

gospodarstwa (liczba osób), struktura demograficzna, obecność osób niepełnosprawnych, itp., co oznacza heterogeniczność zaspokajanych potrzeb.

Z powodu heterogeniczności populacji gospodarstw domowych procedura badań przebiega zwykle w dwóch etapach. W pierwszym etapie przekształca się rozkłady wydatków[2] owej populacji w abstrakcyjną jednorodną populację wydatków gospodarstw odniesienia jednoosobowych[3] za pomocą indeksów zwanych skalami ekwiwalentności. W drugim etapie przekształcone rozkłady wydatków analizuje się z uwagi na nierówności, ubóstwo, dobrobyt, etc. Zakłada się przy tym, że oba etapy są niezależne.

Powyższa dwuetapowa procedura badawcza ma dwie poważne ułomności. Po pierwsze, okazało się, że owe dwa etapy nie są niezależne, co oznacza, że pomiar nierówności, ubóstwa i dobrobytu zależy od wyboru skali ekwiwalentności [Coulter, Cowell and Jenkins, 1992a,b]. Po drugie okazało się, że stosowane dotychczas skale ekwiwalentności nie są identyfikowalne[4] na podstawie obserwacji rynkowych zachowań konsumentów (w danym układzie cen) [Blundell and Lewbel, 1991].

Wykazano, że przezwyciężenie problemu identyfikowalności skal ekwiwalentności jest możliwe albo przez przyjęcie dodatkowych założeń, albo też odwołanie się do wyjątkowych i na ogół niedostępnych danych statystycznych o wydatkach w różnych reżimach cenowych. Owe dodatkowe, matematycznie równoważne, założenia sformułowali niezależnie Blackorby and Donaldson (1993) (dokładność skal ekwiwalentności, ESE) oraz Lewbel, (1989) (niezależność od bazy, IB)[5]. Wielu badaczy testowało spełnienie tych założeń i ostatecznie zostały one odrzucone [Blundell and Lewbel, 1991, Blundell et al., 1998, Dickens et al., 1993, Pashardes, 1995, Gozalo, 1997, Pedankur, 1999].

Naszym zdaniem założenie ESE/IB jest zbyt restrykcyjne. Jednakże implikuje ono słabszy warunek w postaci relacji indyferencji stochastycznej (SI), przy czym ta implikacja zachodzi tylko w jedną stronę. Proponujemy, aby SI przyjąć za podstawę konstruowania skal ekwiwalentności, gdy założenia ESE/IB nie są spełnione..

Dalszy układ pracy jest następujący. W części pierwszej, zatytułowanej *Arbitralność dotychczasowych skal ekwiwalentności*, prezentujemy standardowe skale ekwiwalentności oraz skale *praktyczne*. Ukazujemy też, jakie konsekwencje niesie owa arbitralność dla pomiaru nierówności i ubóstwa ekonomicznego. Część

[2] W pracy ograniczymy się do rozkładów wydatków. Jednakże wiele z omawianych tu problemów odnosi się również do rozkładów dochodów.

[3] W niektórych badaniach przyjmuje się inną grupę gospodarstw odniesienia niż jednoosobowe.

[4] W ekonometrii identyfikowalność jakiejś wielkości oznacza możliwość jej obliczenia lub oszacowania na podstawie danych rzeczywistych.

[5] Ponieważ założenia ESE i IB są matematycznie równoważne, to w dalszych rozważaniach będziemy powoływać się na nie zamiennie.

druga, zatytułowana *Stochastyczne skale ekwiwalentności*, zawiera podstawowe twierdzenie pracy oraz sposób jego wykorzystania do budowy nowej klasy skal. Ostatnia część zawiera wnioski oraz wskazuje kierunki dalszych badań.

ARBITRALNOŚĆ DOTYCHCZASOWYCH SKAL EKWIWALENTNOŚCI

Załóżmy, że populacja gospodarstw domowych składa się z $m+1>2$ rozłącznych grup, wyróżnionych z uwagi na pewien atrybut, oprócz wydatków, np. liczba osób, struktura demograficzna, obecność w gospodarstwie domowym osób niepełnosprawnych, itp. Oznaczmy symbolem $\boldsymbol{h}=\{h_0,h_1,\ldots,h_m\}$ zbiór $m+1$ atrybutów. Dla ułatwienia wypowiedzi będziemy używać określenia *gospodarstwa typu h,* oznaczające grupę gospodarstw o atrybucie $h\epsilon\boldsymbol{h}$. Niech gospodarstwa typu h_0, np. jednoosobowe[6], stanowią grupę odniesienia.

Wydatki gospodarstw domowych typu $h\epsilon\boldsymbol{h}$ będziemy opisywać dodatnią i ciągłą zmienną losową X_h o rozkładzie określonym dystrybuantą $F_h(x)$, co będziemy zapisywać symbolicznie $X_h \sim F_h(x)$. Dla gospodarstw odniesienia rezerwujemy symbol $Y \sim G(y)$.

Paradygmatyczne pytanie porównań dobrobytu można sformułować na dwa następujące sposoby:

1) Jakie miesięczne wydatki gospodarstwa odniesienia typu h_0 pozwolą mu osiągnąć poziom dobrobytu u pojedynczej osoby gospodarstwa typu h wydającego miesięcznie x?

2) Jakie miesięczne wydatki gospodarstwa domowego typu h, pozwolą mu osiągnąć poziom dobrobytu u gospodarstwa odniesienia (typu h_0) wydającego miesięcznie y?

Odpowiedzi na powyższe pytania uzyskuje się tradycyjnie za pomocą indeksów zwanych *skalami ekwiwalentności*.

W celu zdefiniowania skal ekwiwalentności rozważmy prosty model użyteczności i preferencji członków gospodarstwa domowego, funkcjonującego w środowisku ekonomicznym z wektorem **q** dóbr prywatnych. Zakładamy, że dwa odrębne gospodarstwa domowe jednakowego typu, charakteryzujące się takim samym wektorem konsumpcji, mają jednakowy poziom dobrobytu [Blackorby, Donaldson, 1993].

Zdefiniujmy funkcję kosztów (wydatków) $c(\mathbf{p},u,h)$ gospodarstwa domowego typu h, [odpowiadającą funkcji użyteczności $u(\mathbf{q},h)$ tego gospodarstwa], jako minimalny wydatek niezbędny dla osiągnięcia użyteczności u w układzie cen $\mathbf{p}$

$$c(u,\mathbf{p},h)=\min_q\{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q}\mid u(\mathbf{q},h)\geq u\} \tag{1}$$

Pośrednia funkcja użyteczności $v(\mathbf{p},x,h)$ będzie wówczas równa

[6] Jako gospodarstwa odniesienia można przyjąć grupę dowolnego typu, w zależności od celu badań.

$$u = v(\mathbf{p}.x.h) = \max_q \{u(\mathbf{q}, h) \mid \mathbf{p}'\cdot\mathbf{q} \le x\} \tag{2}$$

gdzie *x* jest całkowitym wydatkiem przy cenach **p**. Funkcje *c* oraz *v* są powiązane następującą tożsamością [Blackorby, Donaldson, 1993]:

$$x=c(u,\mathbf{p},h)\leftrightarrow u=v(\mathbf{p},x,h) \tag{3}$$

Niech *d* oznacza liczbę osób ekwiwalentnych osobie dorosłej w gospodarstwie domowym typu *h*, o dochodzie *x* i napotykającego ceny **p**. Blackorby i Donaldson, (1993) definiują *d* następująco:

$$u = v(\mathbf{p}, x, h) = v\left(\mathbf{p}, \frac{x}{d}, h_0\right) \tag{4}$$

gdzie h_0 oznacza typ jednoosobowego gospodarstwa odniesienia. Zakładamy, że równanie (4) ma jednoznaczne rozwiązanie ze względu na *d*, dla każdego $h \in \boldsymbol{h}$.

Zauważmy, że równanie (4) jest matematycznym zapisem pierwszej wersji paradygmatycznego pytania porównań dobrobytu. Pytanie paradygmatyczne w wersji drugiej możemy zapisać jako:

$$u = v(\mathbf{p}, y\cdot d, h) = v(\mathbf{p}, y, h_0). \tag{5}$$

Równania (4) lub (5) definiują implicite skalę ekwiwalentności w postaci funkcji $d=eq(\mathbf{p},u,h)$, gdzie $eq(\mathbf{p},u,h_0)=1$.

Korzystając z równości (3) i (4) możemy *d* przedstawić za pomocą funkcji kosztów [Blackorby, Donaldson, 1993][7]

$$d = eq(\mathbf{p}, u, h) = \frac{c(\mathbf{p}, u, h)}{c(\mathbf{p}, u, h_0)} \tag{6}$$

Funkcja (6) zależy od nieobserwowalnej użyteczności *u* członków gospodarstwa. Oznacza to, że mamy do czynienia nie z jedną skalą ekwiwalentności, lecz z całą ich rodziną $\{eq(\mathbf{p},u,h\}_{u\in\mathcal{U}}$, indeksowaną po zbiorze $\mathcal{U}$ wszystkich wartościach użyteczności.

Blundell i Lewbel (1991) wykazali, że skala ekwiwalentności (6) nie jest identyfikowalna w jednym układzie cen. Innymi słowy, nie można obliczyć wartości (6) na podstawie obserwowanych wydatków gospodarstw domowych typu *h* i gospodarstw odniesienia.

Twierdzenie Blundella i Lewbela (1991) przewiduje jednak identyfikowalność skal ekwiwalentności, jeśli byłyby dostępne obserwacje o rynkowych zachowaniach gospodarstw domowych w *różnych* układach cen. Takie obserwacje są niezwykle rzadkie, ponieważ zmiany cen zachodzą zwykle w dłuższych odstępach czasu, ale wówczas może ulec zmianie struktura

[7] Por. Deaton, A., Muellbauer, J. (1980) Economics and Consumer Behaviour., Cambridge Univ. Press., Cambridge, pp..205.

gospodarstwa domowego. Z tego powodu ten wariant obliczania skal ekwiwalentności raczej nie nadaje się do zastosowań.

Aby uniknąć konsekwencji wspomnianego twierdzenia, Blackorby i Donaldson, (1993) i - niezależnie - Lewbel (1989) wykazali, że można osiągnąć identyfikowalność skal ekwiwalentności, jeśli przyjmie się dodatkowe założenie. I tak, Blackorby i Donaldson zaproponowali porównywanie funkcji kosztów gospodarstwa typu h i h_0 dla jednego, ustalonego, poziomu użyteczności, powiedzmy u_1. Wówczas indeks (6) przyjmie postać

$$\bar{d} = \overline{eq}(\mathbf{p},h) = \frac{c(\mathbf{p},u_1,h)}{c(\mathbf{p},u_1,h_0)} \tag{7}$$

W ogólnym wypadku indeks d nie jest równy indeksowi $\bar{d}$. Porównywanie dobrobytu będzie poprawne wtedy i tylko wtedy, gdy ten indeks będzie *dokładny*, tj. wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(\mathbf{p},u,h)$ zachodzi równość

$$\overline{eq}(\mathbf{p},h) = eq(\mathbf{p},u,h)\,, \tag{8}$$

Gdy równość (8) jest spełniona, to Blackorby, Donaldson (1993) powiadają, że użyteczności spełniają warunek *dokładności skali ekwiwalentności* (ang. *Equivalence Scale Exactness,* ESE).

Lewbel (1989) uzyskał identyczny warunek i nazwał go *niezależnością od bazy* (ang. *Independence of Base,* IB). Wykazał że jeśli istnieje skala ekwiwalentności $\Delta(\mathbf{p},h)$ zależna tylko od cen $\mathbf{p}$ oraz atrybutu h gospodarstwa domowego, spełniająca IB, to funkcje kosztów są związane następującą tożsamością:

$$c(\mathbf{p},u,h) = c(\mathbf{p},u,h_0)\Delta(\mathbf{p},h) \tag{9}$$

gdzie $\Delta(\mathbf{p},h)$ jest niezależne od u. Korzystając z (3) i (4), funkcja pośredniej użyteczności przyjmie postać

$$v(\mathbf{p},x,h) = v\left(\mathbf{p},\frac{x}{\Delta(\mathbf{p},h)},h_o\right), \tag{10}$$

Nazwijmy $x/\Delta(\mathbf{p},\alpha_i)$ *wydatkami ekwiwalentnym*. Równość (10) pokazuje, że dwa gospodarstwa domowe mają taki sam dobrobyt jeśli, spotykając te same ceny, wykazują takie same wydatki ekwiwalentne.

Podobnie, na podstawie (3) i (5) otrzymamy następującą funkcję pośredniej użyteczności $v(\cdot)$ odpowiadającą funkcji kosztów c:

$$v(\mathbf{p}, y\cdot\Delta(\mathbf{p},h),\alpha_i) = v(\mathbf{p},y,h_o) \tag{11}$$

Założenia ESE I IB są wielce kontrowersyjne, gdyż wymagają uznania, iż wszyscy konsumenci maja jednakowe preferencje[8]. Z tego powodu wielu ekonomistów je odrzuca. Owe założenia były też testowane empirycznie przez wielu badaczy i ostatecznie zostały odrzucone [Blundell and Lewbel, 1991,

[8] Dla jasności wywodów pomijamy tu ważny problem *porównywalności interpersonalnej,*

Blundell et al., 1998, Dickens et al., 1993, Pashardes, 1995, Gozalo, 1997, Pedankur, 1999].

Z powyższych rozważań wypływa mało optymistyczny wniosek, że oceny skali ekwiwalentności uzyskiwane na podstawie ekonometrycznych modeli popytu są arbitralne, gdyż nie dadzą się wywieść z teorii rynkowych zachowań konsumentów w sytuacji niespełnienia założenia ESE/IB. Równie dobrze można by wybrać *dowolne* wartości skal, bo z powodu arbitralności niemożliwe jest rozstrzygnięcie, która skala jest właściwa.

Arbitralne są też skale ekwiwalentności stosowane przez praktyków, ponieważ nie da się ich wywieść z teorii ekonomicznej. Praktyka jednak jest zmuszona do posługiwania się jakimiś skalami ekwiwalentności, gdy dokonuje porównań dobrobytu, np. przy ustalaniu minimum socjalnego, zasiłków socjalnych, itp. Przy braku podstaw teoretycznych wymyślono wiele skal ekwiwalentności, nazywanych *pragmatycznymi* [Coulter, Cowell, Jenkins, 1992], jak np. skale autorstwa Buhmann et al. (1988), Cutler, Katz (1992), Jenkins, Cowell (1994), skale OECD itp.

Arbitralność skal ekwiwalentności nie miałaby większego znaczenia, gdyby nie miały one wpływu na pomiar nierówności i ubóstwa. Jak już wzmiankowaliśmy we *Wstępie*, pomiar tych charakterystyk rozkładu wydatków i dochodów *zależy* od wyboru skali ekwiwalentności, na co zwrócili już uwagę Coulter, Cowell, Jenkins (1992).

Obserwacje wspomnianych autorów, poczynione na podstawie rozkładów dochodów w Wielkiej Brytanii, zilustrujemy na przykładzie danych pochodzących z polskich budżetów gospodarstw domowych. W tym celu wybierzemy potęgową skalę autorstwa Buhmann et al. (1988) postaci

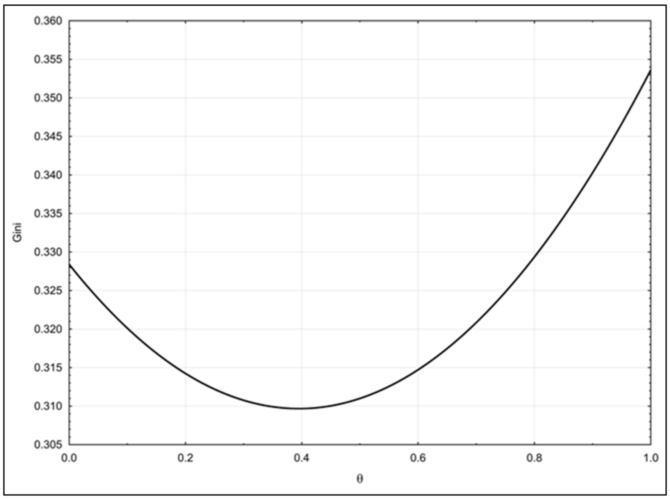
$$y = \frac{x_h}{m_h^\theta} \tag{12}$$

gdzie x_h oznacza wydatki gospodarstwa domowego m_h osobowego, y jest dochodem ekwiwalentnym, a parametr $\theta \in [0,1]$ jest elastycznością skali względem liczby osób.

W praktyce parametr θ jest ustalany arbitralnie. Gdy θ=1, otrzymujemy wydatki na osobę, co oznacza brak korzyści z wielkości gospodarstwa domowego. Przypadek θ=0 oznacza wydatki na gospodarstwo domowe. Gdy $\theta=1/2$, otrzymujemy tzw. pierwiastkową skalę ekwiwalentności.

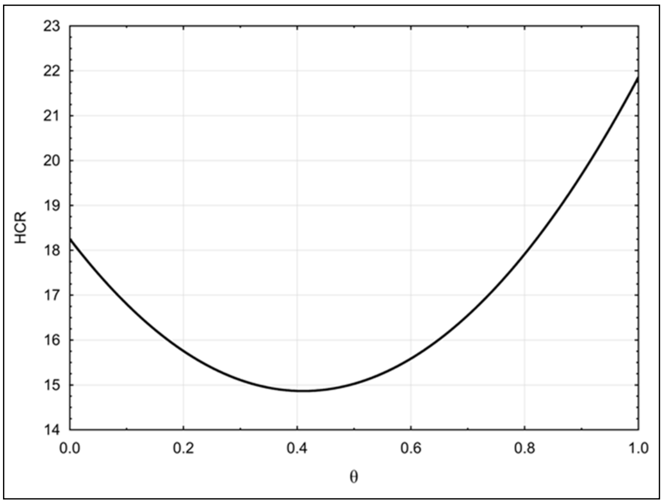
Zależność ocen nierówności i ubóstwa od wyboru parametru θ zilustrujemy na przykładzie rozkładów wydatków gospodarstw domowych według liczby osób w roku 2010. Dla 100 wartości θ z przedziału [0,1] obliczyliśmy rozkłady wydatków ekwiwalentnych (12) i oszacowaliśmy indeks Giniego (Rysunek 1), oraz frakcję ubogich HCR, dla linii ubóstwa równej połowie średniej (Rysunek 2).

Rysunek 1. Nierówności ekonomiczne jako funkcja θ



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 2. Zasięg ubóstwa jako funkcja θ



Źródło: opracowanie własne

Na Rysunku 1 widoczne jest, że wybór skali ekwiwalentności ma wpływ na ocenę nierówności. Jeśli będziemy szacować nierówności w rozkładzie wydatków ekwiwalentnych na osobę ($\theta = 1$), to otrzymamy wyższe oceny niż w wypadku rozkładu wydatków ekwiwalentnych otrzymanych z zastosowaniem pierwiastkowej skali ekwiwalentności ($\theta = 1/2$). Na pytanie o *prawdziwy* poziom nierówności w kraju, jednoznaczna odpowiedź nie jest możliwa, bo teoria nie pozwala rozstrzygnąć, jaką wartość parametru θ należy wybrać. Łatwo więc o manipulacje wynikami. Trudno jednak mówić tu o nadużyciu, ponieważ polegałoby ono na ukrywaniu (nieznanej przecież) prawdy i demonstrowaniu odmiennego obrazu nierówności.

Można powiedzieć dokładnie to samo w odniesieniu do oceny zasięgu ubóstwa. Wybór skali ekwiwalentności ma wpływ na pomiar ubóstwa. Pytanie o *prawdziwy* poziom ubóstwa również i w tym wypadku nie ma odpowiedzi.

Konstatacja o zależności ocen nierówności i ubóstwa od skali ekwiwalentności odnoszą się też do innych pragmatycznych skal ekwiwalentności

Zauważmy, że stwierdzona powyżej zależność ekwiwalentnych rozkładów wydatków od wyboru skali ekwiwalentności stanowi poważny problem w wypadku arbitralności owych skal, ponieważ przekłada się ona na arbitralność wszelkich wyników badań rozkładów ekwiwalentnych. Celowe zatem wydaje się poszukiwanie innej niż obecna podstawy teoretycznej dla skal ekwiwalentności. W niniejszej pracy proponujemy pewne rozwiązanie omawianego problemu.

STOCHASTYCZNE SKALE EKWIWALENTNOŚCI

Stochastyczna indyferencja rozkładów

Teoretyczną podstawą naszej propozycji skal ekwiwalentności stanowi kryterium indyferencji rozkładów zmiennych losowych. Owa indyferencja jest symetrycznym składnikiem relacji dominacji stochastycznej, dlatego rozważania niniejszej części rozpoczniemy od przywołania pojęcia dominacji stochastycznej.

Załóżmy, że rozkłady wydatków dwóch populacji opisują ciągłe zmienne losowe $W_1 \sim R_1(w)$ i $W_2(x) \sim R_2(w)$. Nich U_1 będzie rodziną funkcji użyteczności u von Neumana-Morgensterna takich, że $u' \geq 0$ (rosnących), gdzie znak ’ oznacza pierwszą pochodną. Niech U_2 oznacza rodzinę wszystkich funkcji użyteczności u z rodziny U_1 z dodatkowym warunkiem $u'' \leq 0$ (wklęsłych).

Postępując za ustaleniami w pracy Linton, Masuomi, Whang (2005), przytoczymy definicję dominacji stochastycznej.

Definicja 1. Rozkład W_2 dominuje stochastycznie rozkład W_1 w stopniu 1-szym (symbolicznie: $W_2 \geq_{FSD} W_1$) wtedy i tylko wtedy, gdy albo

1) $R_1(w) \geq R_2(w)$ dla wszystkich w, z nierównością ostrą dla pewnych w, albo
2) $E[u(W_1) \leq E[u(W_2)]$ dla wszystkich $u \epsilon U_1$, z nierównością ostrą dla pewnych u, gdzie $E[\cdot]$ oznacza operator nadziei matematycznej zmiennej losowej.

Definicja 2. Rozkład W_2 dominuje stochastycznie rozkład W_1 w stopniu 2-gim (symbolicznie: $W_2 \geq_{SSD} W_1$,) wtedy i tylko wtedy, gdy albo

3) $\int_0^w R_1(t)dt \geq \int_0^w R_2(t)dt$, dla wszystkich w, z nierównością ostrą dla pewnych w, albo
4) $E[u(W_1) \leq E[u(W_2)]$ dla wszystkich $u \epsilon U_2$, z nierównością ostrą dla pewnych u.

Dominację stochastyczną wyższych stopni definiuje się rekurencyjnie wprowadzając kolejne całkowania i nakładając kolejne restrykcje na klasę funkcji użyteczności [Davidson, Duclos, 2000]. Dowiedziono też, że dominacja stochastyczna w stopniu $r \geq 1$ implikuje dominację stochastyczną wszystkich wyższych stopni, jednakże ta implikacja zachodzi tylko w jedną stronę.

Indyferencję rozkładów rozumie się jako jednoczesną dominację wzajemną. Powiemy, że rozkład W_2 jest indyferentny 1-go stopnia względem rozkładu W_1 wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie W_2 dominuje stochastycznie W_1 i W_1 dominuje stochastycznie W_2, co można zapisać jako $W_2 \geq_{FSD} W_1 \wedge W_2 \leq_{FSD} W_1$.

Definicja 3. Rozkład W_2 jest indyferentny względem rozkładu W_1, w stopniu 1-szym wtedy i tylko wtedy, gdy albo

5) $R_1(w)=R_2(w)$, dla wszystkich w, albo

6) $E[u(W_1)]=E[u(W_2)]$, dla wszystkich $u \epsilon U_1$.

Definicja 4. Rozkład W_2 jest stochastycznie indyferentny w stopniu drugim względem rozkładu W_1, co zapisujemy $W_2 \geq_{SSD} W_1 \wedge W \leq_{2SSD} W_1$, wtedy i tylko wtedy, gdy albo

7) $\int_0^w R_1(t)dt = \int_0^w R_2(t)dt$, dla wszystkich w, albo

8) $E[u(W_1)=E[u(W_2)]$, dla wszystkich $u \epsilon U_2$

Indyferencję stochastyczną wyższych stopni definiuje się, wprowadzając kolejne całkowania i nakładając kolejne ograniczenia na klasę funkcji użyteczności. Łatwo można udowodnić, że indyferencja stopnia $r \geq 1$ implikuje indyferencję wszystkich wyższych stopni i *vice versa*. Ta własność odróżnia indyferencję stochastyczną od dominacji stochastycznej.

Istnieje ważny i znany związek dominacji stochastycznej z nierównościami ekonomicznymi i ekonomicznym ubóstwem [Davidson, Duclos, 2000, Davidson, 2008]. Związki te w oczywisty sposób zachodzą również dla indyferencji stochastycznej. Poniższe stwierdzenia są matematycznie równoważne;

a) $R_1(w)=R_2(w)$, dla wszystkich w.
b) Dobrobyt społeczny w rozkładach W_1 i W_2 jest taki sam, tzn. $E[u(W_1)]= E[u(W_2)]$, dla każdej funkcji użyteczności $u \in U_2$.
c) Ubóstwo w rozkładzie W_1 jest takie samo jak w rozkładzie W_2, dla każdej linii ubóstwa i dla atkinsona (1987) klasy miar ubóstwa.
d) Nierówności w rozkładach W_1 i W_2 są takie same.

Warunek 5) w definicji 3, czyli równość dystrybuant porównywanych rozkładów, jest łatwy do testowania za pomocą standardowego testu Kołmogorowa-Smirnowa (K-S). Nieodrzucenie przez ten test hipotezy zerowej o równości dystrybuant oznacza nieodrzucenie istnienia relacji indyferencji stopnia 1-go i indyferencji wszystkich wyższych stopni.

Dla skonstruowania stochastycznych skal ekwiwalentności kluczowe znaczenie ma następujące twierdzenie:
Twierdzenie 1. Niech ciągłe zmienne losowe $X_h \sim F_h(x)$ i $Y \sim G(y)$ opisują rozkład wydatków, gospodarstw domowych odpowiednio typu $h \in \boldsymbol{h}$ i rozkładu odniesienia. Załóżmy, że spełnione jest założenie ESE/IB, co oznacza, że istnieje $\Delta(\mathbf{p}, \alpha_i)$ spełniające równanie (11). Zdefiniujmy rozkład ekwiwalentny jako:

$$Z_h = X_{ih} / \Delta(\mathbf{p}, h) \sim H(z)\,. \tag{13}$$

Wówczas Z jest stochastycznie indyferentne względem Y, czyli $H(z)=G(z)$, dla każdego rzeczywistego z.
Dowód. Ponieważ z założenia ESE/IB implikuje spełnienie równania (11), to rozkład wydatków gospodarstw typu h będzie równy $X_h = Y \cdot \Delta(\mathbf{p}, h)$. Zatem

$$Y = X_h / \Delta(\mathbf{p}, h)) = Z_h \tag{14}$$

Ale równość dwóch zmiennych losowych oznacza równość ich dystrybuant, czyli $G(z) = H(z)$, dla każdego rzeczywistego z. Zatem spełniony jest warunek 5) w definicji, czyli Z_h jest stochastycznie indyferentne względem Y. QED.

Jednakże implikacja w tezie powyższego twierdzenia zachodzi tylko w jedną stronę. Równość dystrybuant nie implikuje bowiem równości zmiennych losowych, ponieważ jedna dystrybuanta może odpowiadać różnym zmiennym losowym [Billingsley, 1995, pp. 261]. To oznacza, że kryterium indyferencji jest słabsze niż założenie ESE/IB.

Proponujemy przyjąć relację indyferencji jako teoretyczna podstawę konstruowania skal ekwiwalentności. Skoro założenie ESE/IB jest za mocne do spełnienia, to możemy zaakceptować założenie słabsze.

Trudności podobnego typu napotkano w analizie szeregów czasowych przy definiowaniu stacjonarności procesu stacjonarnego. Przypomnijmy, iż proces stochastyczny X_t jest stacjonarny (w węższym sensie), jeśli dla n=1,2,… i dla dowolnych rzeczywistych $t_1,\ldots,t_n$ oraz τ zachodzi równość

$$\begin{aligned} F_{t_1 \cdots t_n}(x_1,\ldots,x_n) &= P(X_{t_1} < x_1,\ldots, X_{t_n} < x_n) = \\ &= P(X_{t_1+\tau} < x_1,\ldots, X_{t_n+\tau} < x_n) = \\ &= F_{t_1+\tau \cdots t_n+\tau}(x_1,\ldots,x_n) \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie $F(\cdot)$ jest dystrybuantą procesu [Fisz, 1969, s. 330].

Definicja stacjonarności w węższym sensie okazała się nieprzydatna w typowych analizach, w których badacz dysponuje tylko jedną realizacją (szeregiem czasowym) procesu. W takim wypadku niemożliwe jest oszacowanie dystrybuanty i testowania jej niezmienniczości przy przesuwaniu po osi czasu. Z uwagi na tę niedogodność zdecydowano się na zaakceptowanie definicji stacjonarności w szerszym sensie (lub w sensie Chinczyna). Skorzystano z twierdzenia, że jeśli proces jest stacjonarnym w węższym sensie, to nadzieja matematyczna i wariancja są stałe, a funkcja autokorelacji zależy jedynie od τ [Fisz, 1969, str. 331]. Proces stochastyczny jest stacjonarny w szerszym sensie, jeśli spełnione są warunki występujące w tezie tego twierdzenia. Ponieważ w powyższym twierdzeniu implikacja zachodzi tylko w jedną stronę, to proces stacjonarny w węższym sensie jest zawsze stacjonarny w sensie szerszym, ale nie na odwrót.

Proponujemy więc postąpić w podobny sposób. Skoro założenie ESE/IB nie jest spełnione, to skorzystajmy ze słabszego warunku, tj. indyferencji, (teza twierdzenia 1) jako podstawę budowania skal ekwiwalentności.

Definicja stochastycznych skal ekwiwalentności

Niech, jak poprzednio, zmienne losowe $X_h \sim F_h(x)$ oraz $Y \sim G(y)$ oznaczają odpowiednio rozkład wydatków gospodarstw typu *h* i rozkład wydatków gospodarstw odniesienia. Niech *s*: $R \rightarrow R$ będzie pewną ciągłą i monotoniczną funkcją, której odwrotność ma ciągłe pierwsze pochodne. Wprowadźmy zmienną losową $Z=s(X_h) \sim H(z)$.

Definicja 5. Funkcję $s(\cdot)$ będziemy nazywać *stochastyczną skalą ekwiwalentności* (SES) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość

$$H(z)=G(z) \tag{16}$$

dla każdego rzeczywistego *z*.

Zauważmy, że definicja *5* nie precyzuje konkretnej postaci funkcji *s*. Zatem każda funkcja, która przekształca rozkład wydatków gospodarstw typu *h* w rozkład *Z indyferentny* względem rozkładu *Y* gospodarstw odniesienia, może być uznana za SES. Możemy więc skorzystać z pragmatycznych skal ekwiwalentności lub konstruować nowe, jako potencjalne kandydatki na SES i testem *K-S* sprawdzać zachodzenie tożsamości (16)[9].

Kryterium indyferencji pozwala również na estymację SES, zarówno nieparametrycznych, jak i parametrycznych. Jako funkcję straty metody estymacyjnej proponujemy kryterium K-S.

Hipoteza zerowa H_0: $H(z)=G(z)$ ma postać (16). Hipoteza alternatywna będzie postaci H_a: $H(z) \neq G(z)$. Niech $\hat{H}(z)$ i $\hat{G}(z)$ będą dystrybuantami empirycznymi, odpowiednio, *H(z)* i *G(z)* oszacowanymi na podstawie dwóch niezależnych prób wielkości *n* i *l*. Gdy H_0 jest prawdziwa, to statystyka

$$U = \max_z |\hat{H}(z) - \hat{G}(z)| \sqrt{\frac{l \cdot n}{l+n}}, \text{ dla każdego z.} \tag{17}$$

ma asymptotyczny rozkład λ Kołmogorowa [Smirnow, 1939].

Dla oszacowania funkcji $s(\cdot)$przyjmiemy warunkową dystrybuantę $H(z|s)$ w miejsce *H(z)*. Proponujemy estymator *s**, który minimalizuje statystykę *U*, tzn.

$$U(\mathbf{s}^*) = \min_s \max_z |\hat{H}(z|s) - \hat{G}(z)| \sqrt{\frac{n \cdot l}{n+l}}, \text{ dla każdego } z. \tag{18}$$

Jeśli dodatkowo spełnione jest kryterium zgodności, jak w przypadku testu (17).

[9] Wstępną wersje SES przedstawiliśmy w pracy Kot (2012), rozdział IV.

Zamiast minimalizować statystykę U, możemy maksymalizować prawdopodobieństwo testowe p

$$p(\boldsymbol{s}) = P[U(\boldsymbol{s}) \geq u_{calc}(\boldsymbol{s})] \tag{19}$$

gdzie u_{calc} jest obliczoną wartością statystyki u. Estymatorem s będzie s^* obliczone z równania

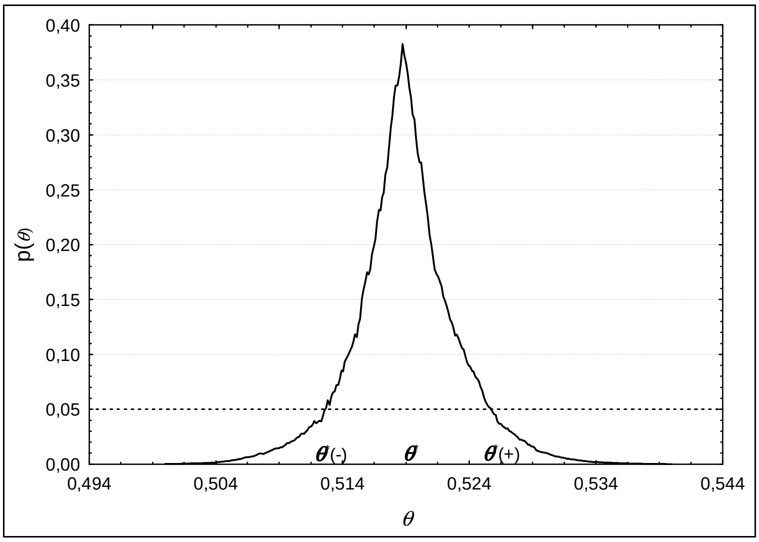
$$p(\mathbf{s^*}) = \max_{\mathbf{s}} P[U(\mathbf{s}) \geq u_{calc}(\mathbf{s})] \wedge p(s^*) > \alpha \tag{20}$$

gdzie α jest przyjętym z góry poziomem istotności.

Proponowaną metodę estymacji zilustrujemy na przykładzie szacowania parametru θ potęgowej skali ekwiwalentności (12). W tym wypadku dystrybuanta $H(z$ będzie mieszanką k rozkładów $Z_h=X_h/m_h^{\theta}\sim H_h(z)$, gdzie k jest liczbą grup gospodarstw typu h natomiast m_h jest liczbą osób w gospodarstwach typu h.

Estymator s^* znajdziemy w następujący sposób. Przedział [0,1] dzielimy na pewną liczbę punktów $\theta_1,\ldots,\theta_N$ i w każdym z nich obliczamy wartości dystrybuant $H_h(z)$,wartości dystrybuanty $H(z)$ dla mieszanki oraz $p(\theta)$. Za ocenę θ przyjmiemy maksymalną wartość p^* ze wzoru (20). Ilustruje to Rysunek 3.

Rysunek 3. Estymacja parametru θ potęgowej skali ekwiwalentności



Źródło: opracowanie własne

Na Rysunku 3 można zauważyć, że wartości $p(s)$ przecinają linię przyjętego poziomu istotności α=0.05 w dwóch punktach oznaczonych symbolami $\theta^*(-)$ i $\theta^*(+)$, wyznaczającymi przedział [0.51267, 0.52559]. Dla każdej wartości θ z tego przedziału jest brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Innymi słowy, każda funkcja (12) z parametrem θ z tego przedziału może być uznana za SES. Za ocenę punktową przyjmiemy wartość θ^*=0.51872, dla której $p(\theta)$ przyjmuje wartość maksymalną.

WNIOSKI

Zaproponowane w pracy kryterium indyferencji może stanowić nową teoretyczną podstawę konstruowania skal ekwiwalentności, pozbawionych arbitralności dotychczasowych rozwiązań. Owo kryterium jest słabsze niż dotychczasowe założenia ESE/IB testowane przez licznych badaczy i ostatecznie odrzucone. Kryterium indyferencji pozwala nie tylko na wykorzystanie wielu dotychczasowych skal pragmatycznych, ale też tworzenie nowych. Umożliwia ono też estymację skal stochastycznych w sposób znacznie łatwiejszy niż na podstawie modeli ekonometrycznych.

PODZIĘKOWANIA

Praca powstała dzięki grantowi Narodowego Centrum Nauki,
nr 2011/03/B/HS4/04962.

BIBLIOGRAFIA

Davidson R., Duclos J.-Y. (2000) Statistical inference for stochastic dominance and for the measurement of poverty and inequality. Econometrica, 68(6), p. 1435-1464.

Fisz M. (1969) Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa.

Billingsley, P., Probability and Measures, Wiley & Sons, New York,1995.

Blackorby, C., Donaldson, D. (1993) Adult-equivalence scales and the economic implementation of interpersonal comparisons of well-being. Choice and Welfare, 10**,** pp. 335-361.

Blundell, R.W., Duncan A, Pendakur K. (1998) Semiparametric estimation of consumer demand. Journal of Applied Econometrics, 13, pp. 435-461.

Blundell, R.W., Lewbel A. (1991) The information content of equivalence scales. Journal of Econometrics 150, pp. 49-68.

Buhmann, B, Rainwater, L, Schmaus, G, Smeeding, T. (1988) Equivalence scales, well-being, inequality, and poverty: Sensitivity estimates across ten countries using the Luxembourg Income Study (LIS) Database. Review of Income and Wealth, 34, pp. 115-142.

Coulter, F.A.E., Cowell, F.A., Jenkins S.P. (1992a) Differences in needs and assessment of income distributions. Bulletin of Economic Research, 44, pp. 77-124.

Coulter, F.A.E., Cowell, F.A., Jenkins S.P. (1992b) Equivalence scale relativities and the extent of inequality and poverty. Economic Journal, 102, pp. 1067-1082.

Cutler A.E., Katz L.F. (1992) Rising inequality? Changes in the distribution of income and consumption in the 1980s. Economic Review: Papers and Proceedings 82, pp. 546-551.

Davidson, R. (2008), Stochastic dominance. The New Palgrave Dictionary of Economics. Second Edition. Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume. Palgrave Macmillan.

Davidson, R, Duclos, J. (2000) Statistical inference for stochastic dominance and for the measurement of poverty and inequality. Econometrica, 68, pp. 1435-1464.

Deaton, A., Muellbauer, J. (1980) Economics and Consumer Behaviour, Cambridge Univ. Press., Cambridge.

Dickens, R, Fry V, Pashardes, P. (1993) Nonlinearities, aggregation and equivalence scales. Economic Journal, 103, pp. 359-368.

Gozalo, P. (1997) Nonparametric bootstrap analysis with implementation to demographic effects in demand functions. Journal of Econometrics, .81, pp. 357-393.

Jenkins, S.P., Cowell, F.A. (1994) Parametric equivalence scales and scale relativities. The Economic Journal, 104, pp. 891-900.

Kot, S.M. (2012) Ku stochastycznemu paradygmatowi ekonomii dobrobytu., IMPULS, Kraków.

Lewbel, A., Household equivalence scales and welfare comparisons. Journal of Public Economics, 39, 377-391, 1989.

Lewbel, A. (1997) Consumer demand systems and household equivalence scales. In Handbook of Applied Econometrics, Volume II: Microeconomics, Pesaran, M.H., Schmidt, P. (eds)., Blackwell Publishers Ltd., Oxford.

Linton, O., Maasuomi E., Whang Y.J. (2005) Consistent testing for stochastic dominance under general sampling schemes. The Review of Economic Studies, 72, pp. 735-765..

OECD (2008) Growing Unequal? Income Distribution and Poverty in OECD Countries. Paris. (www.oecd.org/els/social/inequality / www.oecd.org/els/social/inegalite).

Pashardes, P. (1995) Equivalence scales in a rank-3 demand system. Journal of Public Economics, 58**,** pp.143-158.

Pendakur, K. (1999) Estimates and tests of base-independent equivalence scales. Journal of Econometrics, 88, pp. 1-40.

Smirnov, N.W. (1939) Sur les ecarts de la courbe de distribution empirique. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris, 6, pp. 3-26.

EQUIVALENCE SCALE EXACTNESS AND STOCHASTIC INDIFFERENCE

Abstract: In this paper we prove the theorem, which links the equivalence scale exactness (ESE) assumption with the symmetric factor of the first order stochastic dominance. Namely, let *X* and *Y* be the expenditure distributions of an analysed group of households and the reference household group, respectively. Let *Z* be the *X* distribution adjusted by an equivalence scale. If the ESE assumption holds then *Z* will be the first order stochastically indifferent with *Y*. However, stochastic indifference (SI) does not imply ESE. This means that SI is a weaker assumption than ESE. We propose to calculate equivalence scales based on SI criterion when ESE is violated.

Keywords: equivalence scales, scale exactness, stochastic indifference, expenditure distribution