

## Zastosowanie metody PEM do oceny osiadania warstwy gruntu obciążonej cyklicznie

Prof. dr hab. inż. Jarosław Przewłócki – Politechnika Gdańska, Wydział Architektury

Dr hab. inż. Waldemar Świdziński, prof IBW PAN – Instytutu Budownictwa Wodnego PAN w Gdańsku

Dr hab. inż. Jarosław Górski, prof PG – Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

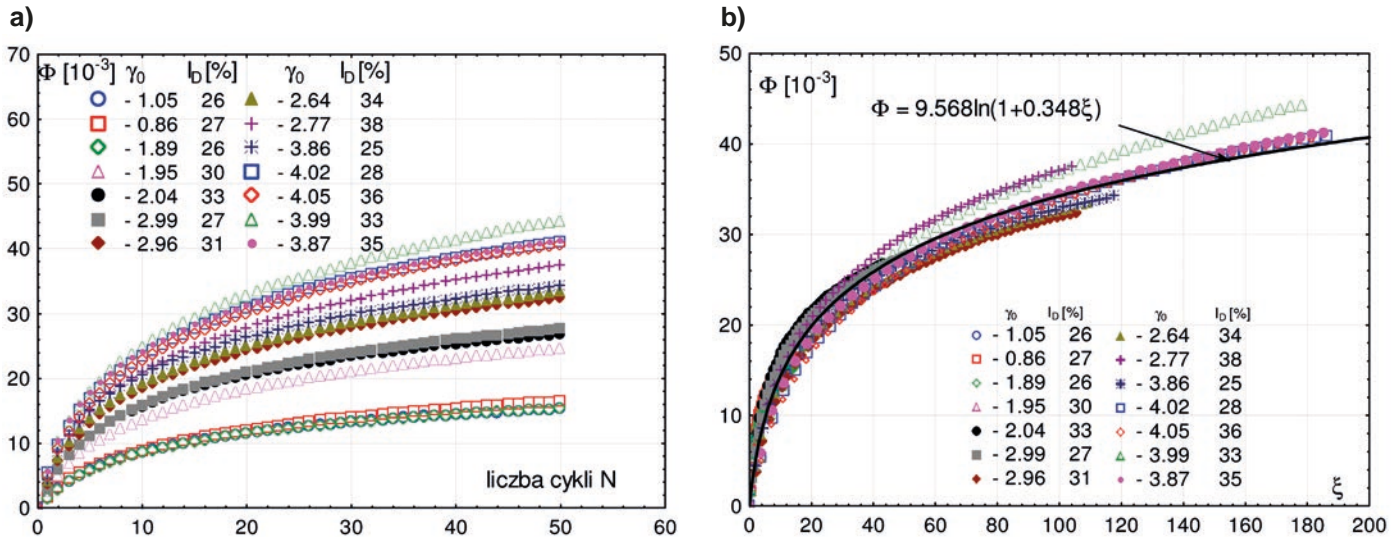
Zachowanie się gruntów niespoistych poddanych cyklicznemu ścinaniu było i wciąż jest przedmiotem szeregu badań eksperymentalnych. Znacznie trudniej jest znaleźć teoretyczne rozwiązania tego problemu. Jednym z ważniejszych i najbardziej zaawansowanych jest tzw. teoria zagęszczenia [11]. Uproszczoną jej wersję, zwaną modelem uśrednionym przy wykorzystaniu amplitud, pozwalającą na jej bezpośrednie inżynierskie zastosowanie, zaproponował A. Sawicki [12]. Teorię zagęszczenia sformułowano przy podejściu deterministycznym, bez uwzględnienia losowości zarówno stałych materiałowych modelu, jak też czynnika sprawczego w postaci obciążeń cyklicznych.

Ze względu na naturalną zmienność i zwykle niedostateczne rozpoznanie podłoża gruntowego jest uzasadnione jego rozpatrywanie jako ośrodka losowego. Szereg niepewności dotyczy też obciążenia, a także metody obliczeniowej. Uwzględnienie poszczególnych niepewności w analizie obliczeniowej jest możliwe przy podejściu probabilistycznym. Oprócz istniejących deterministycznych miar bezpieczeństwa, wprowadza się tu dodatkowe miary, biorące pod uwagę niepełną informację, np. prawdopodobieństwo awarii czy wskaźnik niezawodności. Nie zastępują one istniejących miar, lecz występują dodatkowo, zwiększając wiedzę inżyniera o charakterze badanego zjawiska. Wykorzystując rachunek prawdopodobieństwa oraz teorię niezawodności, analizę prowadzi się za pomocą pojedynczych zmiennych lub pól losowych.

Najdokładniejsze rozwiązanie zagadnienia w ujęciu losowym uzyskuje się przy wykorzystaniu metod symulacyjnych Monte Carlo oraz stochastycznej metody elementów skończonych w różnych wariantach [2, 3, 7, 8]. W większości praktycznych zagadnień stochastycznej mechaniki gruntów nieznane są jednak rozkłady prawdopodobieństwa bazowych zmiennych

losowych, a jedynie ich wartości średnie oraz macierz kowariancji. Wartość oczekiwaną, wariancję czy momenty wyższego rzędu dowolnej funkcji losowej można wyznaczać w sposób uproszczony różnymi metodami [9]. Prostym i skutecznym narzędziem analizy jest w takich przypadkach metoda FOSM (ang. *First Order Second Moment*). W metodzie tej funkcja losowa jest aproksymowana hiperpłaszczyzną, z reguły w otoczeniu wartości średnich poszczególnych zmiennych losowych. Jeżeli wpływ członów nieliniowych tej funkcji jest bardzo znaczący, dokładność metody może być niewystarczająca. Dlatego rozwinięła się metoda drugiego rzędu, tzw. SOSM (ang. *Second Order Second Moment*), często też wykorzystywana do oszacowania błędu popełnionego przy stosowaniu metody pierwszego rzędu. W metodzie tej funkcję losową aproksymuje się w punkcie obliczeniowym hiperpowierzchnią drugiego stopnia. W ramach teorii niezawodności są stosowane odpowiednio metody FORM (ang. *First Order Reliability Method*) i SORM (ang. *Second Order Reliability Method*).

Efektywne rozwiązanie można uzyskać wykorzystując metodę estymacji rozkładem dyskretnym (PEM – *Point Estimate Method*). Metodę tę zaproponował Rosenblueth [10] i w istocie polega ona na zastosowaniu kwadratury Gaussa do wyznaczenia momentów funkcji losowej; nie wymaga specjalnej wiedzy z probabilistyki. W celu poprawy efektywności obliczeniowej, w przypadku występowania większej liczby zmiennych losowych, powstało kilka modyfikacji tej metody [4, 5]. W światowej literaturze metoda PEM znalazła szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach zwłaszcza w geotechnice [1]. Niestety, niewiele prac poświęcono tej metodzie w literaturze krajowej [9].



Rys. 1. Zagęszczenie gruntu niespoistego poddanego cyklicznemu prostemu ścinaniu przy różnych wartościach amplitudy odkształcenia postaciowego (a), uniwersalna krzywa zagęszczenia (b)

W artykule metodę PEM zastosowano do oceny osiadania warstwy niespoistego gruntu poddanej obciążeniu cyklicznemu. Model zagęszczenia uzupełniono opisem probabilistycznym, uwzględniającym losowe parametry materiałowe oraz losowy charakter cyklicznego obciążenia. Rozpatrując różne kombinacje zmiennych losowych, w każdym z analizowanych przypadków wyznaczono wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe osiadania gruntu.

Chociaż problem dotyczy osiadania cyklicznie obciążonej warstwy gruntu, przedstawione podejście może mieć również znaczenie przy ocenie pracy fundamentów poddanych obciążeniom wywołanym trzęsieniem ziemi.

### MODEL ZAGĘSZCZENIA PRZY WYKORZYSTANIU AMPLITUD

Modelem zaproponowanym przez A. Sawickiego [12] opisuje się zagęszczanie suchego gruntu niespoistego wskutek cyklicznego ścinania w postaci:

$$\frac{d\Phi}{dN} = C_1 J \exp(-C_2 \Phi) \quad (1)$$

gdzie:

- $\Phi = (n - n_0)/n_0$  – funkcja zagęszczenia związana z odkształceniem objętościowym,
- $n$  i  $n_0$  – aktualna i początkowa porowatość,
- $C_1, C_2$  – wyznaczone eksperymentalnie stałe materiałowe charakteryzujące zagęszczalność danego gruntu niespoistego,
- $J$  – drugi niezmiennik dewiatora amplitudy odkształcenia cyklicznego,
- $N$  – liczba cykli obciążenia.

Związek pomiędzy dewiatorem tensora amplitudy naprężenia  $S$  i odkształcenia cyklicznego  $Y$  jest drugim równaniem konstytutywnym modelu:

$$S = GY \quad (2)$$

gdzie:

- $G = G_0 \sqrt{p'}$  – uogólniony moduł ścinania,
- $G_0$  – współczynnik charakteryzujący sprężystą reakcję gruntu,
- $p'$  – średnie naprężenie efektywne.

Średnie naprężenie efektywne w jednorodnej warstwie gruntu jest równe:

$$p' = \frac{1}{3} (1 + 2K_0) H (1 - Z) \quad (3)$$

gdzie:

- $K_0$  – współczynnik parcia spoczynkowego gruntu,
- $H$  i  $Z$  – zmienne określające wymiary warstwy (rys. 2).

Analizę osiadania przeprowadzono dla podłoża gruntowego z regionu Zatoki Izmit (80 km na wschód od Istanbulu) w Turcji. W 1999 roku miało tam miejsce silne trzęsienie ziemi. Na podstawie krzywej uziarnienia rozpatrywany grunt zakwalifikowano jako piasek ze żwirem. Na rys. 1 przedstawiono wyniki 14 badań cyklicznego ścinania wykonanych w aparacie prostego ścinania przy różnych wartościach amplitudy odkształceń postaciowych  $\gamma_0$  [13].

Wyniki każdej z grup odpowiadających zbliżonej amplitudzie odkształcenia postaciowego można aproksymować za pomocą funkcji logarytmicznej o postaci:

$$\Phi = D_1 \ln(1 + D_2 N) \quad (4)$$

gdzie:

- $D_1$  i  $D_2$  – współczynniki, które można wyznaczyć np. metodą najmniejszych kwadratów, dopasowując postać funkcji (4) do wyników badań pokazanych na rys. 1a.

W warunkach prostego ścinania i stałej wartości amplitudy odkształcenia postaciowego  $\gamma_0$ , drugi niezmiennik amplitudy odkształceń przyjmuje uproszczoną formę:

$$J = \frac{1}{4} \gamma_0^2 \quad (5)$$

Krzywą zagęszczenia można aproksymować za pomocą funkcji:

$$\Phi = D_1 \ln(1 + D_2 \xi) \quad (6)$$

gdzie nowa zmienna  $\xi$  dana jest wzorem:

$$\xi = JN = \frac{1}{4} \gamma_0^2 N \quad (7)$$

Zależności między  $D_1$ ,  $D_2$  i stałymi  $C_1$ ,  $C_2$  występującymi w (1) są następujące:

$$C_1 = \frac{1}{D_2}, \quad C_2 = D_1 D_2 \quad (8)$$

Na rys. 1b pokazano wyniki z rys. 1a przedstawione w nowym układzie  $\Phi - \xi$ .

Moduł ścinania  $G$  wyznaczono z pętli histerezy obciążenie – odciążenie przy danej amplitudzie dewiatora naprężenia w badaniu trójosiowego ściskania. Badania cyklicznego obciążenia i odciążenia powtórzone przy różnych poziomach średniego naprężenia efektywnego. Otrzymano moduł odkształcenia postaciowego w funkcji średniego naprężenia efektywnego  $G = G_0 \sqrt{p'}$ .

## CHARAKTERYSTYKI STATYSTYCZNE PARAMETRÓW GRUNTU

Stałe materiałowe  $D_1$  i  $D_2$  charakteryzujące zagęszczalność gruntu uzyskano na podstawie analizy regresji wyników badań laboratoryjnych. Są one estymatorami, czyli mogą być traktowane jako zmienne losowe. Ich charakterystyki statystyczne, tj. wartości średnie ( $m$ ), odchylenia standardowe ( $\sigma$ ) oraz wzajemną korelację ( $r$ ) wyznaczono, wykorzystując program *Statistica*. Otrzymano następujące wartości:

$$m_{D_1} = 9,568; \quad \sigma_{D_1} = 1,164;$$

$$m_{D_2} = 0,348; \quad \sigma_{D_2} = 0,129; \quad r_{D_1 D_2} = -0,968$$

Należy zauważyć, że wartości stałych  $D_1$  i  $D_2$  otrzymano zakładając, że zmienna  $\xi$  jest wyrażona, stosując mnożnik  $10^{-6}$ , a funkcja zagęszczania  $\Phi$  – stosując mnożnik  $10^{-3}$  oraz, że stałe te mają inną interpretację niż współczynniki z równania (4).

W podobny sposób uzyskano dane dotyczące współczynnika  $G_0$ :

$$m_{G_0} = 0,518 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_{G_0} = 0,036 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

Wartość średnią i odchylenie standardowe porowatości gruntu wyznaczono na podstawie badań laboratoryjnych, otrzymując:

$$m_{n_0} = 0,409; \quad \sigma_{n_0} = 0,01$$

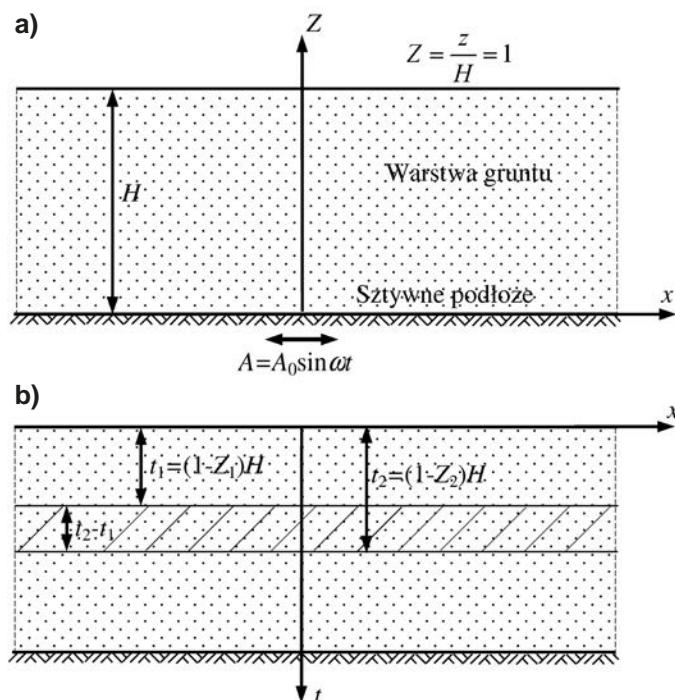
Analiza fizycznych związków pomiędzy  $n_0$  i  $G_0$  pozwoliła na określenie korelacji pomiędzy nimi jako ujemnej a pomiędzy  $n_0$  i  $D_1$  jako dodatniej. Liczba dostępnych danych nie pozwala na wyznaczenie pozostałych korelacji wzajemnych. A priori przyjęto:

$$r_{D_1 G_0} = -0,5; \quad r_{D_1 n_0} = 0,5;$$

$$r_{n_0 G_0} = -0,5; \quad r_{D_2 G_0} = 0,5; \quad r_{D_2 n_0} = -0,5$$

## PROBLEM BRZEGOWY – ROZWIĄZANIE DETERMINISTYCZNE

Rozważana jest niespoista warstwa gruntu o miąższości  $H$  i gęstości  $\rho_0$  [kg/m<sup>3</sup>] spoczywająca na sztywnym podłożu (rys. 2a). Warstwa jest poddana poziomemu cyklicznemu obciążeniu  $A = A_0 \sin \omega t$  przyłożonemu do sztywnego podłoża, które odzwierciedla warunki wywołane trzęsieniem ziemi ( $A_0$  – am-



Rys. 2. Warstwa gruntu na sztywnym podłożu  
a) globalny układ współrzędnych, b) układ współrzędnych przyjęty do analizy

plituda przyspieszenia,  $\omega$  – częstość kołowa obciążenia cyklicznego). Uzasadniona jest jednowymiarowa analiza zagadnienia płaskiego.

Równania ruchu warstwy gruntu poddanej obciążeniu cyklicznemu można zapisać w postaci [12]:

$$\frac{d^2 S}{dZ^2} = a \frac{S}{\sqrt{1-Z^2}} \quad (9)$$

gdzie

$$a = \frac{\rho \omega^2 H^2}{G_0 \sqrt{\frac{1}{3}(1+2K_0)} \rho_0 g H} \quad (10)$$

W rozpatrywanym zagadnieniu warunki brzegowe są następujące:

$$S(Z=1) = 0,$$

$$S'(Z=0) = -H \rho A_0 = b \quad (11)$$

Rozwiązanie równania (9) z warunkami brzegowymi (11) pozwala na wyznaczenie rozkładu amplitudy naprężenia  $S$  w analizowanej warstwie gruntu, a następnie wykorzystując wzory (2) rozkładu amplitudy odkształcenia  $\gamma_0$ . Wreszcie, na podstawie zależności (6) można określić względną zmianę porowatości  $\Phi$  oraz osiadanie warstwy.

Dokładne rozwiązanie problemu zaproponowano w pracy [6]. Autorzy przedstawili amplitudy naprężenia i odkształcenia, wykorzystując funkcje Bessela, w sposób następujący:

$$S(Z) = \frac{b(1-Z)J_{2/3} \left[ (4\sqrt{a}/3)(1-Z)^{3/4} \right]}{\sqrt{a}J_{5/3}(4\sqrt{a}/3) - J_{2/3}(4\sqrt{a}/3)} \quad (12)$$

$$\gamma_0(Z) = \frac{S(Z)}{G_0 \sqrt{\frac{1}{3}(1+2K_0)} \rho_0 g H (1-Z)} \quad (13)$$

gdzie  $J_\nu$  jest funkcją Bessela, którą można przedstawić w postaci szeregu:

$$J_\nu(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2k} \quad (14)$$

Osiadanie warstwy o grubości  $t_2 - t_1$  (rys. 2b) otrzymuje się, całkując zmiany porowatości wywołane obciążeniem cyklicznym:

$$s = \frac{n_0}{1 - n_0} H \int_{z_1}^{z_2} \Phi dZ \quad (15)$$

Całkowite osiadanie można wyznaczyć, sumując osiadania wszystkich  $k$  warstw o grubości  $h_i$ :

$$s = n_0 \sum_{i=1}^k \Phi_i h_i \quad (16)$$

## METODA ESTYMACJI ROZKŁADEM DYSKRETNYM

W zaproponowanej przez Rosenbluetha metodzie [10], zwanej PEM, ciągłą zmienną losową zastępuje się dyskretną zmienną losową, opisaną  $N$  impulsami, czyli wagami (rys. 3).

Biorąc pod uwagę warunek, że suma prawdopodobieństw musi być równa jedności, uzyskuje się punkty dyskretyzacji i przyporządkowane im wagi. W przypadku zerowej skośności, czyli rozkładu symetrycznego, są one określone następującymi wzorami:

$$x_- = m_x - \sigma_x, \quad x_+ = m_x + \sigma_x, \quad P_- = \frac{1}{2}, \quad P_+ = \frac{1}{2} \quad (17)$$

gdzie:

$m_x$  – wartość średnia,

$\sigma_x$  – odchylenie standardowe.

W przypadku funkcji  $k$ -zmiennych losowych:

$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (18)$$

wartości funkcji  $y(\dots)$  oblicza się dla wszystkich możliwych kombinacji punktów dyskretyzacji. Wartość oczekiwaną i wariancję funkcji wyznacza się z następujących zależności:

$$m_y \approx \sum_{j=1}^{2^k} P^j y_j$$

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{j=1}^{2^k} P^j y_j^2 - m_y^2 \quad (19)$$

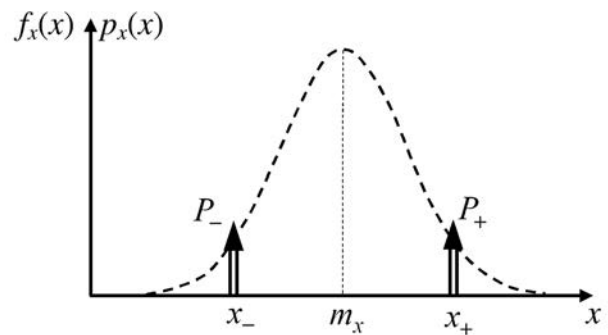
gdzie:

$$P_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} = \frac{1}{2^n} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (s_i)(s_j) r_{x_i, x_j} \right] \quad (20)$$

$$s_i = \begin{cases} -1 & \text{dla } x_{i-} = m_{x_i} - \sigma_{x_i} \\ +1 & \text{dla } x_{i+} = m_{x_i} + \sigma_{x_i} \end{cases} \quad (21)$$

$r_{x_i, x_j}$  – korelacja wzajemna pomiędzy zmiennymi losowymi  $X_i$  i  $X_j$ .

Warto zauważyć, że istotną zaletą tej metody jest to, że do probabilistycznej analizy nie jest konieczna znajomość funkcji gęstości prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych losowych. Podobnie jak w metodzie FOSM, wystarczy jedynie znać ich pierwsze dwa momenty, tj. wartości oczekiwane i odchylenia standardowe. Poza tym, w przeciwieństwie do metod symulacyjnych, obliczenia wykonywane w sposób deterministyczny powtarza się praktycznie tylko kilka lub kilkanaście razy ( $2^n$ ).



Rys. 3. Rozkłady masy prawdopodobieństwa

## PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Analizowany jest grunt niespoisty spoczywający na sztywnym podłożu (rys. 2). Obliczenia wykonano przy następujących danych:  $H = 10$  m;  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>;  $T = 0,5$  s;  $K_0 = 0,344$ ;  $A_0 = 0,2g$ ;  $N = 100$ . Jako losowe przyjęto parametry materiałowe  $D_1$ ,  $D_2$ , współczynnik sprężystej reakcji gruntu  $G_0$ , porowatość początkową  $n_0$  oraz amplitudę obciążenia cyklicznego  $A_0$ . Parametry amplitudy obciążenia cyklicznego określono następująco:  $m_{A_0} = 1,962$  m/s<sup>2</sup>;  $\sigma_{A_0} = 0,1962$  m/s<sup>2</sup>, przy czym dodatkowo badano wpływ odchylenia standardowego amplitudy  $\sigma_{A_0}$  na charakterystyki statystyczne osiadania.

W pierwszej kolejności obliczono osiadanie w sposób deterministyczny, uzyskując wartość  $s = 0,038$  m. Następnie, obliczenia wykonano do kilku zestawów zmiennych losowych. W każdym przypadku uwzględniono silną korelację pomiędzy parametrami materiałowymi  $D_1$  i  $D_2$ :  $r_{D_1, D_2} = -0,962$ . Wyniki obliczeń za pomocą PEM przy różnej liczbie zmiennych losowych zestawiono w tabl. 1.

Tabl. 1. Wyniki obliczeń metodą PEM przy różnej liczbie zmiennych losowych

Lp.	Zmienna losowa	$N$	Wartość średnia osiadania $m_s$ [m]	Odchylenie standardowe osiadania $s_s$ [m]
1	$D_1, D_2$	2	0,0439	0,0059
2	$D_1, D_2, G_0$	3	0,0443	0,0067
3	$D_1, D_2, G_0, n_0$	4	0,0444	0,0073
4	$D_1, D_2, G_0, n_0, A_0$	5	0,0443	0,0092

Ze względu na to, że zmienne losowe  $D_1$  i  $D_2$  są silnie skorelowane, można uwzględnić tylko jedną z nich, a drugą wyznaczyć z zależności:

$$D_2 = \frac{e^{\Phi/D_1} - 1}{\xi} \quad (22)$$

W ten sposób liczbę zmiennych z początkowych pięciu, ograniczono do czterech zmiennych losowych:  $D_1$ ,  $G_0$ ,  $n_0$ ,  $A_0$ . Korzystając z metody PEM, obliczenia w tym przypadku wykonano 16 razy. Przykładowe wyniki przedstawiono w tabl. 2.

Na rys. 4a i 4b pokazano wpływ zmiany współczynnika zmienności amplitudy wymuszenia cyklicznego odpowiednio na wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe osiadania. O ile

ta pierwsza ze wzrostem zmienności amplitudy nieznacznie maleje, to odchylenie standardowe osiadania znacznie rośnie.

Na podstawie uzyskanych wyników można zauważyć, że decydujący wpływ na charakterystyki statystyczne osiadania mają parametry modelu zagęszczenia oraz amplituda obciążenia.

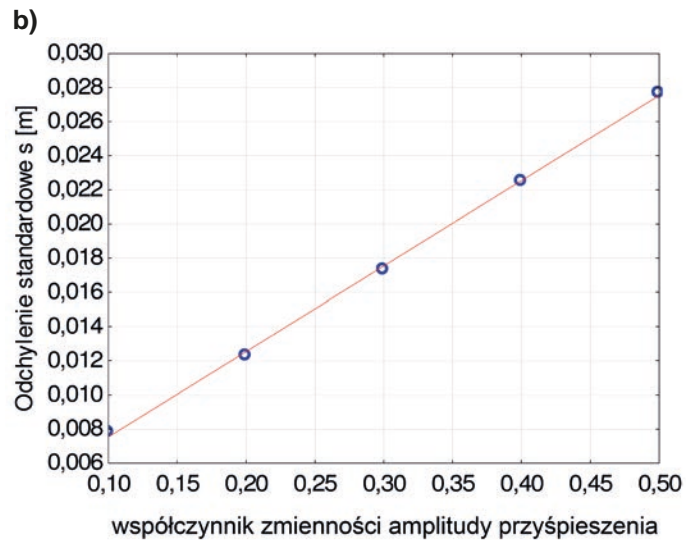
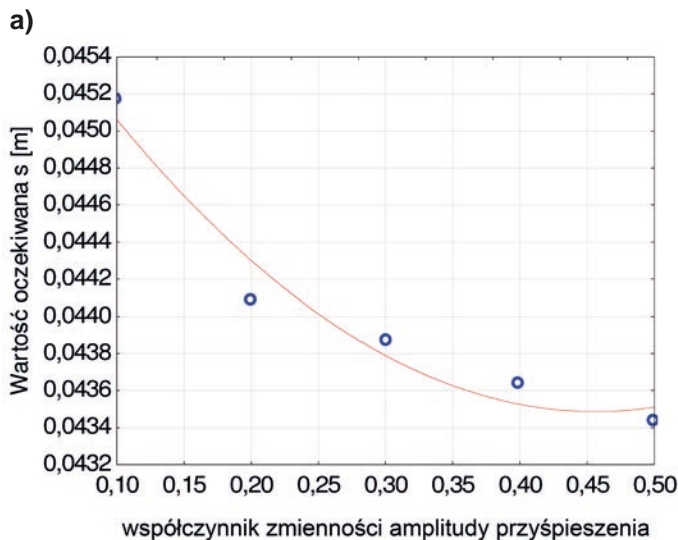
Biorąc pod uwagę pełną korelację między  $D_1$  i  $D_2$ , zagadnienie można zredukować do dwóch zmiennych losowych  $D_1$  i  $A_0$ . W takim przypadku obliczenia wystarczy wykonać tylko cztery razy. Uzyskane wyniki do rozpatrywanego przykładu zestawiono w tabl. 3.

Tabl. 2. Wyniki obliczeń metodą PEM przy czterech zmiennych losowych

Lp.	$x_1 = D_1$	$x_2 = G_0 \cdot 10^8$	$x_3 = n_0$	$x_4 = A_0$	$y = s$	$P(x_{i,j})$	$yp(x_{i,j})$	$y^2p(x_{i,j})$
1	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0459	0,03125	0,00143	6,54691E-05
2	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4+} = 2,158$	0,0574	0,03125	0,00179	0,000102959
3	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0497	0,03125	0,00155	7,72531E-05
4	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4+} = 2,158$	0,0624	0,03125	0,00195	0,000121491
5	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0386	0,15625	0,00603	0,000232826
6	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4+} = 2,158$	0,0492	0,15625	0,00768	0,000377532
7	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0420	0,03125	0,00131	5,49464E-05
8	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4+} = 2,158$	0,0534	0,03125	0,00169	8,90969E-05
9	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0353	0,03125	0,00110	3,90012E-05
10	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4+} = 2,158$	0,0463	0,03125	0,00145	6,69397E-05
11	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0384	0,15625	0,00510	0,000230105
12	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2-} = 0,482$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4+} = 2,158$	0,0503	0,15625	0,00786	0,000394942
13	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0289	0,03125	0,00090	2,60812E-05
14	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3-} = 0,399$	$x_{4+} = 2,158$	0,0385	0,03125	0,00166	8,80551E-05
15	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4-} = 1,7658$	0,0314	0,03125	0,00098	3,07755E-05
16	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2+} = 0,554$	$x_{3+} = 0,419$	$x_{4+} = 2,158$	0,0418	0,03125	0,00180	0,000103904
$\sigma_s^2 = 0,002017 - (0,044215069)^2 = 0,000055727 \text{ m}^2$ , $\sigma_s = 0,007465097 \text{ m}$							$m_s = \Sigma \approx 0,04422$	$\Sigma \approx 0,002017$

Tabl. 3. Wyniki obliczeń metodą PEM przy dwóch zmiennych losowych

	$x_1 = D_1$	$x_2 = A_0$	$y = s$	$p(x_{i,j})$	$yp(x_{i,j})$	$y^2p(x_{i,j})$
1	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2-} = 1,766$	0,0435	0,25	0,01089	0,000474
2	$x_{1-} = 8,404$	$x_{2+} = 2,158$	0,0551	0,25	0,01376	0,000758
3	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2-} = 1,766$	0,0330	0,25	0,00826	0,000273
4	$x_{1+} = 10,732$	$x_{2+} = 2,158$	0,0437	0,25	0,01092	0,000477
$\sigma_s^2 = 0,001982 - (0,043828)^2 = 0,0000606 \text{ m}^2$ $\sigma_s = 0,00782 \text{ m}$					$m_s = \Sigma \approx 0,04383$	$\Sigma \approx 0,001982$



Rys. 4. Wpływ współczynnika zmienności amplitudy obciążenia cyklicznego  $v_{\delta}$  na: a) wartość oczekiwaną, b) odchylenie standardowe osiadania

## WNIOSKI

Metoda estymacji punktowej jest racjonalnym narzędziem probabilistycznej analizy problemów geotechnicznych – obliczenia wykonywano przy małej liczbie próbek. Wykazano silną ujemną korelację pomiędzy parametrami materiałowymi  $D_1$  i  $D_2$  umożliwiającą redukcję liczby zmiennych losowych. Obliczenia wykazały niewielki wpływ zmiany parametrów losowych na wartość średnią osiadania gruntu. Parametry materiałowe  $D_1$  i  $D_2$  mają znaczny wpływ na odchylenie standardowe osiadania gruntu. Równie istotny jest wpływ odchylenia standardowego amplitudy obciążenia. Odchylenie standardowe rośnie wraz ze wzrostem zmienności amplitudy obciążenia  $A_0$ . Możliwa jest uproszczona analiza zagadnienia poprzez uwzględnienie tylko zmienności jednej stałej materiałowej oraz amplitudy obciążenia. W takim przypadku, korzystając z metody PEM, obliczenia wykonuje się cztery razy.

Przedstawione probabilistyczne podejście można także zastosować w analizie innych zagadnień w warunkach oddziaływań cyklicznych, a zwłaszcza oceny zachowania się fundamentów poddanych obciążeniu od trzęsienia ziemi.

## LITERATURA

1. Baecher G. B., Christian, J. T.: Reliability and statistics in geotechnical engineering. Chichester: John Wiley & Sons, 2003.

2. Brząkała, W., Puła, W.: A probabilistic analysis of foundation settlements. *Computers and Geotechnics*. Vol. 18 (4), 1996, 291-309.
3. Górski J.: Non-linear models of structures with random geometric and material imperfections. Simulation-based approach. Wyd. PG, 2006.
4. Harr, M. E.: Probabilistic estimates for multivariate analyses. *Appl. Math. Modelling.*, 13 (5), 1989, 313-318.
5. Hong, H. P.: An efficient point estimate method for probabilistic analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 59 (3), 1998, 261-267.
6. Przewłócki J., Knabe W.: Settlement of a soil stratum subjected to an earthquake. *Int. Jnl. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 19, 1995, 813-821.
7. Przewłócki J., Reduction of dimensions in random, elastic soil medium, *International Journal of Solids and Structures*, 36 (34), 1999, 5233-5254.
8. Przewłócki J., Górski J.: Stochastic FEM analysis of strip foundation. *TASK Quarterly*, Vol. 3, No. 2, 1999, 171-186.
9. Przewłócki J.: Problemy stochastycznej mechaniki gruntów – ocena niezawodności. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2006.
10. Rosenblueth, E.: Point estimates for probability moments. *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, 72 (10), 1975, 3812-3814.
11. Sawicki A., Morland W.: Dynamic shear response of a granular column. *Proc. US Eng. Found. Conf. Henniker. NH.* 1986, 3-30.
12. Sawicki A.: An engineering model for compaction of sand under cyclic loading. *Engineering Transactions*, 35, 4, 1987, 677-693.
13. Sawicki, A.: Modelling earthquake-induced phenomena in the Izmit Bay coastal area, in: Th. Triantafyllidis (ed.): *Cyclic Behaviour of Soils and Liquefaction Phenomena*, Balkema, Leiden/London/New York/Philadelphia/Singapore 2004, 431-440.