

KARWOWSKI Krzysztof¹
 MICHNA Michał²
 MIZAN Mirosław³
 WILK Andrzej⁴

Analiza drgań przewodu jezdnego sieci trakcyjnej w aspekcie oceny jej stanu technicznego

WSTĘP

Niezawodność i efektywność zelektryfikowanego transportu kolejowego są jednymi z najważniejszych kryteriów, decydujących o jego możliwościach dalszego rozwoju. Jednym z istotnych czynników, wpływających na rozwój trakcji elektrycznej, jest funkcjonowanie systemu odbioru prądu z sieci trakcyjnej przez poruszające się pojazdy. Brak możliwości technicznych zapewnienia redundancji zasilania pojazdów powoduje, że osiągnięcie wysokiej niezawodności funkcjonowania sieci jezdnej jest niezbędnym warunkiem jej eksploatacji, co można zapewnić przez jej diagnostykę lub monitorowanie interakcji sieci i odbieraków prądu poruszających się pojazdów [4, 10]. Zarządca infrastruktury i kolejowe firmy przewoźowe realizują przeglądy techniczne i badania diagnostyczne urządzeń zgodnie z normami i przepisami w odpowiednich cyklach czasowych. Jednakże przypadki uszkodzenia lub rozregulowania odbieraka prądu występują pomiędzy kolejnymi jego przeglądami. Skutkiem niewłaściwego stanu technicznego odbieraka prądu bywa zniszczenie samego odbieraka, a w wielu przypadkach także uszkodzenie elementów infrastruktury sieciowej. Liczba usterek sieci trakcyjnej jest niewielka względem wszystkich usterek i awarii tego systemu transportowego, ale te sporadycznie występujące awarie wprowadzają znaczące opóźnienia w ruchu pociągów [8, 12]. Wskazywane w [12] znaczne koszty awarii sieci i odbieraków obejmują również pociągi dużej prędkości (TGV, Pendolino) i nowoczesną infrastrukturę. Przeciętnie zarządca krajowej infrastruktury kolejowej rejestruje ponad 100 uszkodzeń sieci rocznie, spowodowanych przez wadliwe odbieraki prądu.

Górna sieć trakcyjna jest efektywnym sposobem zasilania kolejowych pojazdów elektrycznych o mocach 5-10 MW i prędkościach do 250 km/h w krajowym systemie prądu stałego o napięciu 3 kV. Takie parametry eksploatacyjne będą występowały na polskiej sieci kolejowej, biorąc pod uwagę rewitalizację linii i zakup nowoczesnych pojazdów [15, 16]. Dalszy rozwój dla większych mocy i prędkości możliwy jest w systemie prądu przemiennego 25 kV/50 Hz.

Intensywnie rozwijane są komputerowe narzędzia symulacyjne, zwłaszcza do analizy interakcji sieci jezdnej i odbieraków prądu [1, 2, 6, 7, 13, 14, 17]. Walidacja wyników symulacji, uzyskanych z wykorzystaniem określonego modelu dynamicznego i metody numerycznej podlega standaryzacji według PN-EN 50318 [11]. Przeprowadzenie takich symulacji wymagane jest przez Techniczną Specyfikację Interoperacyjności podsystemu „Energia” [3].

1. INTERAKCJA ODBIERAK PRĄDU – SIEĆ JEZDNA

Sieć trakcyjna składa się z sieci górnej nazywanej siecią jezdną i sieci powrotnej, którą stanowią szyny jezdne. Sieć jezdna zasilana jest z podstacji trakcyjnej za pośrednictwem kabla nazywanego zasilaczem, szyny jezdne elektrycznie połączone są z kablem powrotnym. Sieć jezdna składa się z: jednego lub dwóch przewodów jezdnych, liny nośnej, wieszaków, wysięgników, ramion odciągowych, osprzętu sieci i konstrukcji wsporczych sieci w postaci słupów lub bramek. Na rysunku 2 przedstawiono poglądowy schemat sieci trakcyjnej.

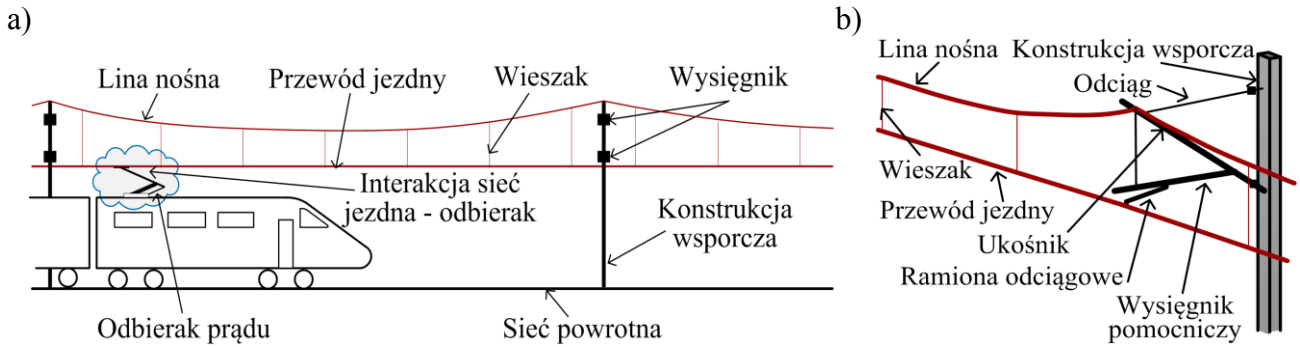
¹ Dr hab. inż. Krzysztof Karwowski, tel. 48 58 347 11 58, krzysztof.karwowski@pg.gda.pl

² Dr inż. Michał Michna, tel.: 48 58 347 29 79, michal.michna@pg.gda.pl

³ Dr inż. Mirosław Mizan, tel.: 48 58 347 15 02, miroslaw.mizan@pg.gda.pl

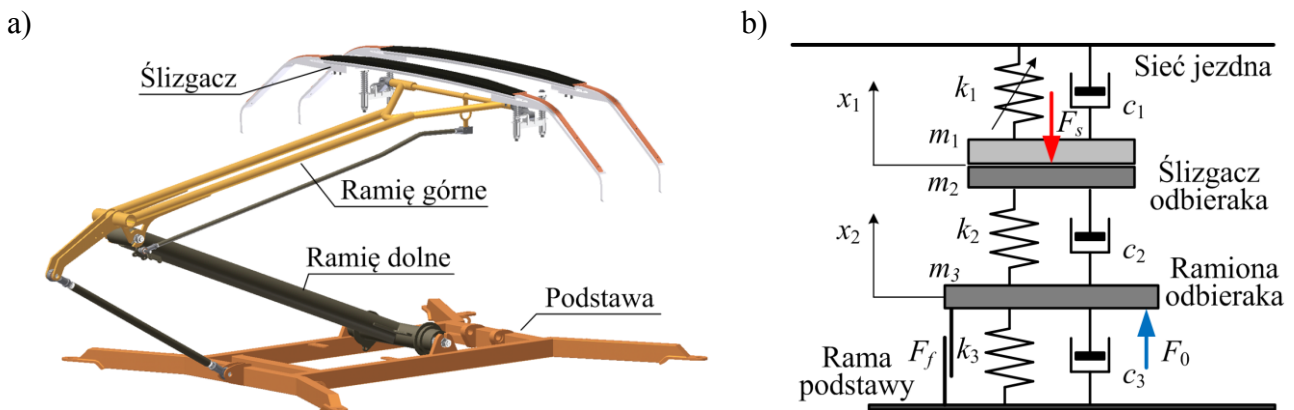
⁴ Dr hab. inż. Andrzej Wilk, tel.: 48 58 347 10 87, andrzej.wilk@pg.gda.pl;

Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Politechnika Gdańska, 80-233 Gdańsk, ul. G. Narutowicza 11/12



Rys. 1. Sieć trakcyjna: a) elementy sieci; b) konstrukcja wsporcza z wysięgnikiem podtrzymującym sieć jezdnią

Odbiór prądu z sieci jezdnej przez pojazd odbywa się za pośrednictwem nakładki stykowej odbieraka prądu. Widok odbieraka, nazywanego także pantografem, pokazano na rysunku 2a. Poglądowy model mechaniczny sieci i odbieraka, składający się z mas bezwładnych, elementów sprężystych i tłumiących, przedstawiono na rysunku 2b [1, 2, 7, 14]. Na rysunku tym wskazano działanie statycznej siły unoszącej ramiona odbieraka F_0 , siły stykowej F_s oraz wypadkowej siły tarcia suchego F_f . Zbyt mały nacisk odbieraka na sieć prowadzi do powstawania przerw stykowych i pojawienia się zjawisk łukowych, natomiast zbyt duży – do nadmiernego wypierania sieci jezdnej, a w konsekwencji do ryzyka uszkodzeń mechanicznych i nadmiernego zużycia nakładek ślizgowych [5]. Efektem oddziaływania odbieraka na sieć jezdnią jest określone uniesienie sieci w punkcie jej styku z odbierakiem [2, 7, 10, 14]. Uniesienie to zależy głównie od sztywności sieci, właściwości konstrukcyjnych i stanu technicznego odbieraka – w szczególności od siły nacisku statycznego odbieraka na sieć, a także od prędkości jazdy.



Rys. 2. Odbierak prądu: a) widok odbieraka; b) uproszczony model odbieraka i sieci

Sztywność sieci jezdnej jest zmienna wzdłuż przęsła zawieszenia i w przypadku ruchu pojazdu ze stałą prędkością pojawia się okresowe wymuszenie ruchu odbieraka i fluktuacja siły stykowej [7, 14, 17]. Wartość minimalna sztywności występuje pośrodku przęsła zawieszenia, a maksymalna w otoczeniu punktu podwieszenia. Dla danego typu sieci jezdnej, z prostych zależności można obliczyć maksymalną i minimalną wartość sztywności sieci jezdnej. Jeśli przyjmiemy ustaloną prędkość pojazdu przy danej długości rozpiętości przęsła podwieszenia sieci to, okresową zmianę sztywności sieci wyrażamy przez:

$$k_1(t) = k_o \left[1 + \alpha \cos\left(\frac{2\pi v}{L} t\right) \right] \quad k_o = \frac{1}{2}(k_{\max} + k_{\min}) \quad \alpha = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\max} + k_{\min}} \quad (1)$$

gdzie:

- v – prędkość pojazdu,
- L – rozpiętość przęsła podwieszenia,



k_o – średnia wartość sztywności sieci jezdnej,
 k_{min}, k_{max} – minimalna i maksymalna sztywność sieci jezdnej,
 α – współczynnik zmian sztywności w przęśle zawieszenia.

Dynamikę dwumasowego modelu odbieraka wraz z siecią jezdnią przy stałej prędkości jazdy i periodycznej zmianie sztywności sieci zapisano w postaci zmiennych stanu [14], jako które przyjęto przemieszczenia i prędkości ruchu ramion odbieraka i ślizgacza:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_2]^T \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1(t)+k_2}{m_1+m_2} & -\frac{c_1+c_2}{m_1+m_2} & \frac{k_2}{m_1+m_2} & \frac{c_2}{m_1+m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m_3} & \frac{c_2}{m_3} & -\frac{k_2+k_3}{m_3} & -\frac{c_1+c_2}{m_3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = [F_0 + F_a \pm F_f(t)] \quad (3)$$

m_1, m_2, m_3 – masa zastępcza sieci, ślizgacza i ramion odbieraka,
 k_1, k_2, k_3 – sztywność sieci, ślizgacza i ramion odbieraka,
 c_1, c_2, c_3 – tłumienie lepkie sieci, ślizgacza i ramion odbieraka,
 F_f – siła tarcia suchego w odbieraku,
 F_0, F_a – statyczna siła unoszenia odbieraka, zastępcza siła aerodynamiczna.

Siła stykowa F_s jest dana przez:

$$F_s = m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1(t)x_1 \quad (4)$$

Układ równań opisanych przez (2), (3) i (4) rozwiązano w środowisku MatLab/Simulink dla parametrów modelu o wartościach przedstawionych w tabeli 1

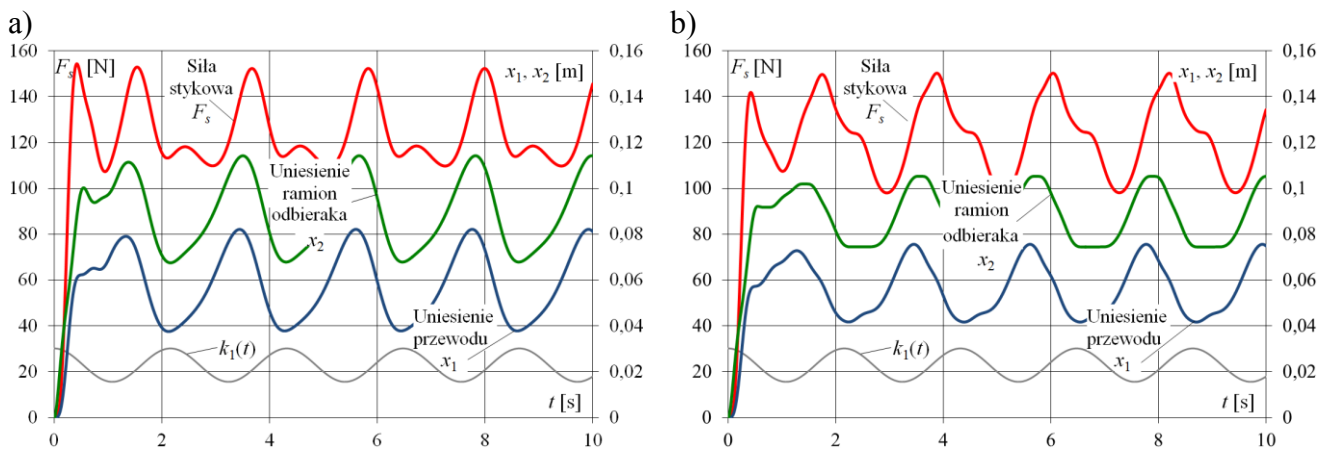
Tab. 1. Wartości parametrów modelu sieć – odbierak prądu

Symbol	Jednostka	Wartość	Opis
m_1	kg	22	Masa zastępcza odcinka sieci
m_2	kg	18	Masa ślizgacza pantografu
m_3	kg	20	Masa zastępcza ramion pantografu
k_{max}	N/m	3020	Współczynnik sztywności sieci – wartość maksymalna
k_{min}	N/m	1564	Współczynnik sztywności sieci – wartość minimalna
k_o	N/m	2292	Współczynnik sztywności sieci – wartość średnia
k_2	N/m	4000	Współczynnik sztywności ślizgacza pantografu
k_3	N/m	50	Współczynnik sztywności ramion pantografu
c_1	Ns/m	1	Współczynnik tłumienia lepkiego sieci
c_2	Ns/m	4	Współczynnik tłumienia lepkiego ślizgacza pantografu
c_3	Ns/m	200	Współczynnik tłumienia lepkiego ramion pantografu
F_0	N	110	Siła statyczna odbieraka
F_f	N	10	Siła tarcia suchego w przegubach ramion odbieraka
F_a	N	14	Siła aerodynamiczna
v	m/s	33,33	Prędkość pojazdu (120 km/h)
L	m	72	Długość przęsła sieci

Warunki początkowe układu przyjęto zerowe, co pozwoliło w sposób poglądowy zaprezentować na rysunkach szybkość zmian uniesienia w stanie przejściowym a dokładniej wyznaczyć stan quasi-

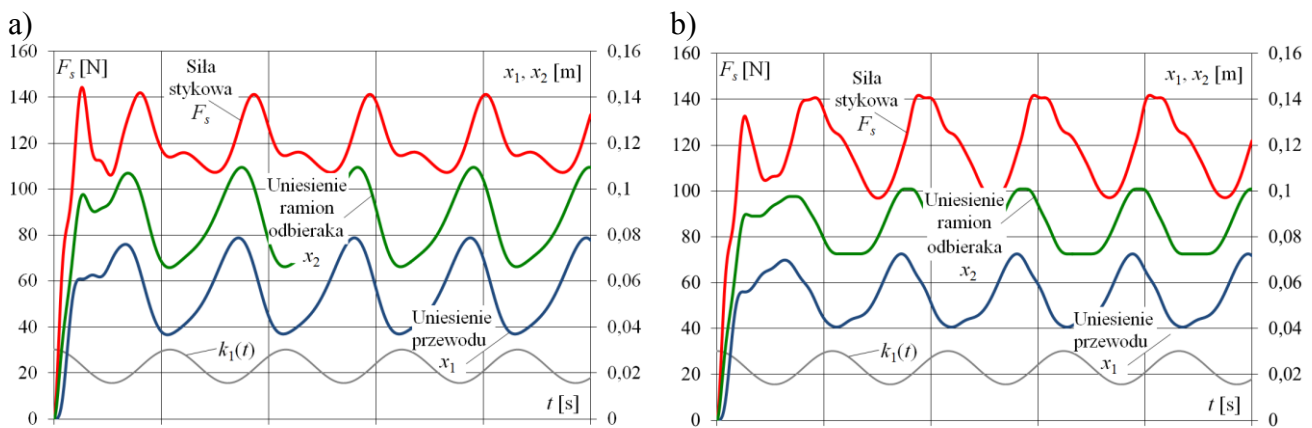
ustalony siły stykowej oraz uniesienia sieci jezdnej i ramion odbieraka. Badania symulacyjne tych parametrów i wykazanie ich zgodności z normą PN-EN 50318 jest konieczne do weryfikacji celów projektowych [11].

Na rysunku 3 przedstawiono wyniki symulacji modelu zredukowanego względem rysunku 2b – pominięto tłumienie lepkie sieci jezdnej ($c_1=0$) i sztywność ramion odbieraka ($k_3=0$) [14]. Wówczas siła stykowa zależy tylko od sztywności sieci i uniesienia przewodu jezdnej, tj. $F_s=k_1(t) \cdot x_1$. Przebieg zmian wartości współczynnika $k_1(t)$ w stukrotnie pomniejszonej skali przedstawiono także na rysunku. Przebiegi na rysunkach 3a i 3b zobrazowano – z pominięciem i uwzględnieniem tarcia suchego w przegubach odbieraka. Uwzględnienie tarcia suchego powoduje problemy z uzyskaniem zbieżności w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych, co wymaga odpowiedniego ustawienia parametrów procedury obliczeń numerycznych w programie MatLab.



Rys. 3. Przebieg siły stykowej, uniesienia sieci jezdnej i ramion odbieraka oraz sztywności sieci dla modelu zredukowanego, tj. dla $c_1=0$, $k_3=0$: a) z pominięciem tarcia suchego $F_f=0$; b) z uwzględnieniem tarcia suchego $F_f=10$ N

Dla modelu pełnego, zgodnego z rysunkiem 2b, uzyskane wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 4 dla analogicznych wielkości jak na rysunku 3. W wielu publikacjach pomijany jest wpływ tarcia suchego oraz tarcia lepkiego sieci jezdnej [7, 13, 14, 17].



Rys. 4. Przebieg siły stykowej, uniesienia sieci jezdnej i ramion odbieraka oraz sztywności sieci dla modelu pełnego: a) z pominięciem tarcia suchego $F_f=0$; b) z uwzględnieniem tarcia suchego $F_f=10$ N

Z przeprowadzonych symulacji dla różnych modeli matematycznych układu sieć jezdna – odbierak prądu oraz porównania wyników symulacji modelu zredukowanego i pełnego wynika, że:

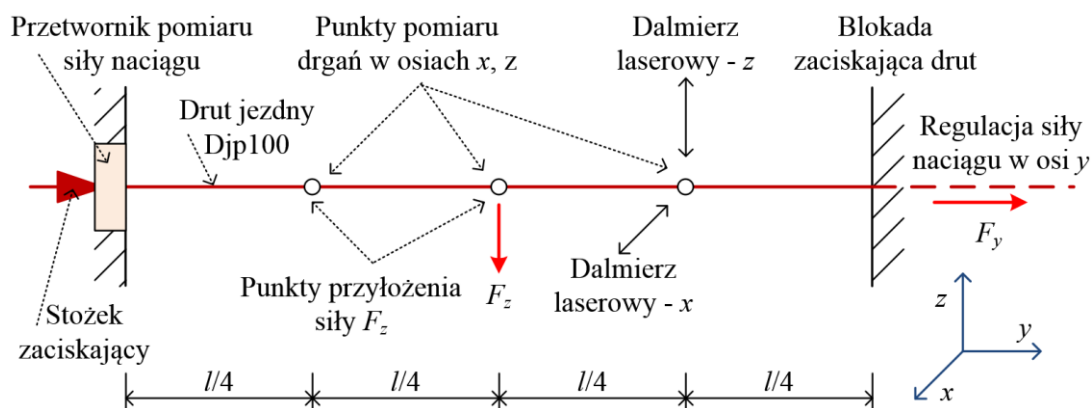
- model jednomasowy otrzymany ze zredukowania mas m_1 , m_2 i m_3 do jednej masy zastępczej jest zbyt wrażliwy na zmianę parametrów sieci i odbieraka. Model ten daje duże rozbieżności względem modeli dokładniejszych w wartościach siły stykowej i uniesieniu sieci;



- w modelu dwumasowym pominięcie siły tarcia suchego prowadzi do niedoszacowania amplitudy zmian siły stykowej, zaś amplituda uniesienia przewodów sieci jezdnej czy ramion odbieraka jest zbyt duża. Wahania siły stykowej różnią się nawet o ponad 10% wartości siły statycznej odbieraka. W praktyce eksploatacyjnej zbyt mała siła może prowadzić do utraty styku nakładki ślizgacza z przewodem jezdnym, co wpływa na degradację tych elementów wskutek występowania łuku elektrycznego, zaś zbyt duża siła powoduje szybkie zużycie nakładki stykowej ślizgacza a nawet w skrajnych przypadkach uszkodzenia mechaniczne.

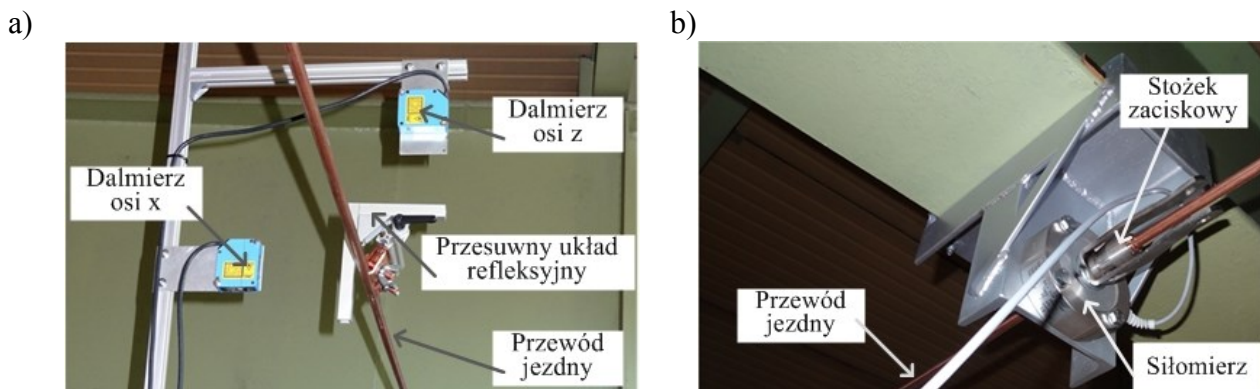
2. WYBRANE BADANIA EKSPERYMENTALNE DRGAŃ PRZEWODU JEZDNEGO

Przedstawione w poprzednim rozdziale wyniki symulacji dają ocenę siły stykowej i uniesienia przewodu jezdnego z wystarczającą dokładnością dla celów projektowych wg PN-EN 50318. Dążąc do uzyskania precyzyjniejszych wyników drgań przewodu jezdnego, które mogłyby służyć do oceny stanu technicznego sieci, zbudowano stanowisko laboratoryjne, którego ogólny schemat podano na rysunku 5. Pomiedzy dwoma punktami odległymi o $l = 12$ m naprężono fabrycznie nowy drut jezdny typu Djp100. Naciąg przewodu mierzono za pośrednictwem siłomierza tensometrycznego o zakresie do 20 kN i częstotliwości granicznej 5 kHz. W wybranych punktach, pokazanych na rysunku 5, dokonywano skokowego odciążania drutu jezdnego z zawieszanego ciężaru oraz mierzono drgania drutu w dwóch osiach (x, z) za pośrednictwem dalmierzy zbliżeniowych o dokładności ok. 0,1 mm i częstotliwości granicznej 100 Hz.



Rys. 5. Poglądowy schemat stanowiska pomiarowego

Widok zamontowanych dalmierzy laserowych i siłomierza przedstawiono na rysunku 6. Rejestracji drgań przewodu i siły naciągu dokonano za pośrednictwem oscyloskopu cyfrowego, który umożliwiał zapis cyfrowych wyników pomiarów z okresem próbkowania co 1 ms do pliku w formacie programu Excel. Przykładowe przebiegi drgań w osi pionowej i poziomej przedstawiono na rysunku 7. Ze względu na skalę czasu na rysunku tym widoczna jest obwiednia drgań.

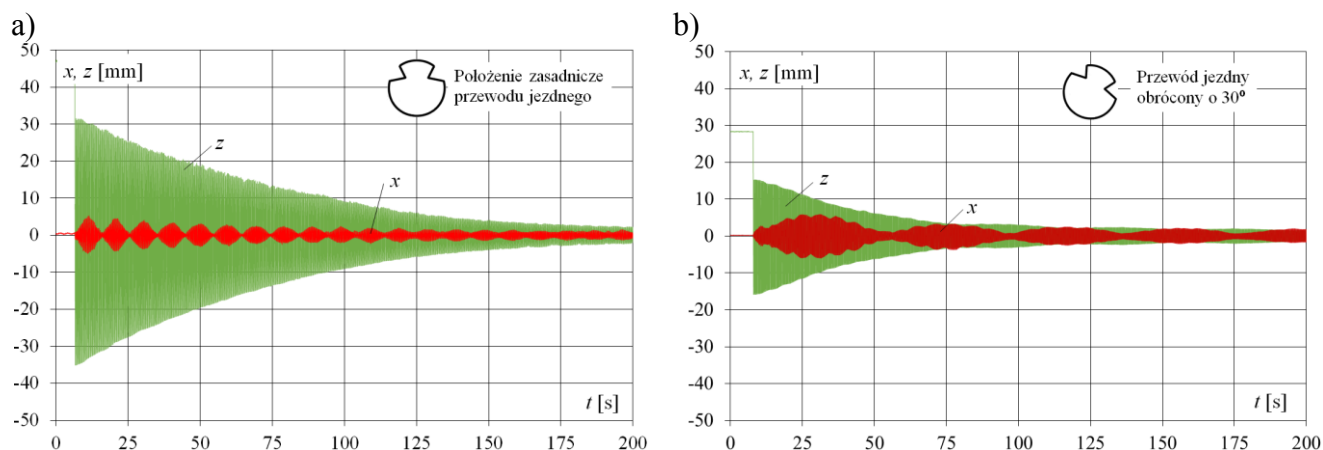


Rys. 6. Widok urządzeń pomiarowych stanowiska: a) zbliżeniowych dalmierzy laserowych; b) siłomierza tensometrycznego



Rejestracji pomiarów dokonywano dla różnych parametrów: odciążanych mas, naciągu przewodu oraz obrotu przewodu względem jego osi symetrii. Przewód trakcyjny ma profilowane rowki służące do mocowania uchwyty wieszaków, co przy jego obrocie względem osi pionowej, w której działa siła odciążająca, powoduje wystąpienie zwiększonej amplitudy drgań w osi poziomej. Szczególnie jest to widoczne na rysunku 7b dla przewodu o położeniu obróconym o 30 stopni.

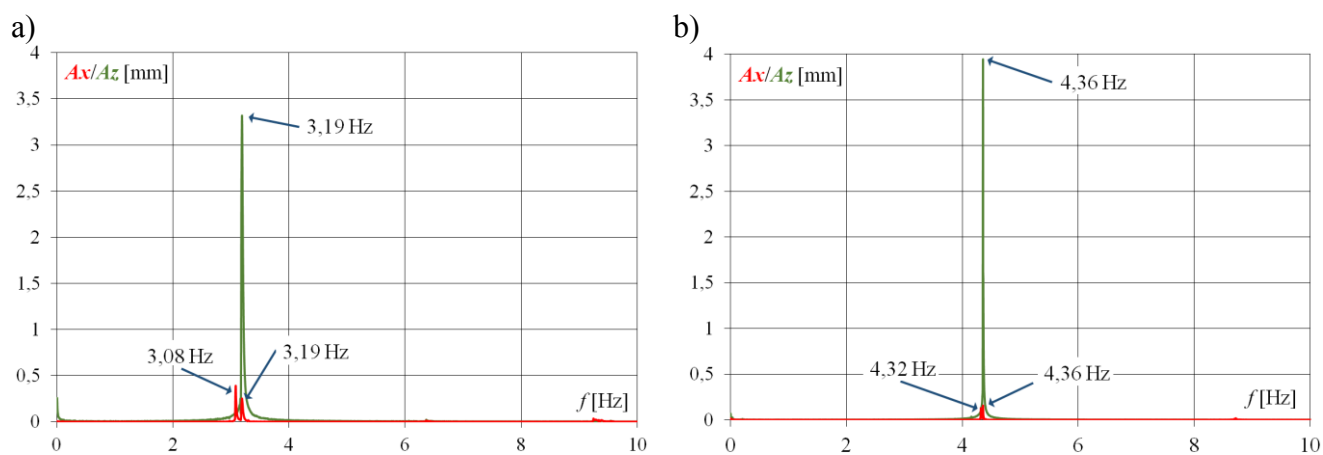
Z przeprowadzonych badań laboratoryjnych, ograniczonych do jednego przewodu trakcyjnego, można stwierdzić, że przebiegi drgań są znacznie zróżnicowane. Przy zwiększonym naciągu zmniejsza się amplituda drgań w osi pionowej. Zaś przy zamocowaniu przewodu w położeniu obróconym charakter drgań w obu osiach jest bardzo złożony – zauważalne jest wzajemne sprzężenie mechaniczne drgań w obu osiach.



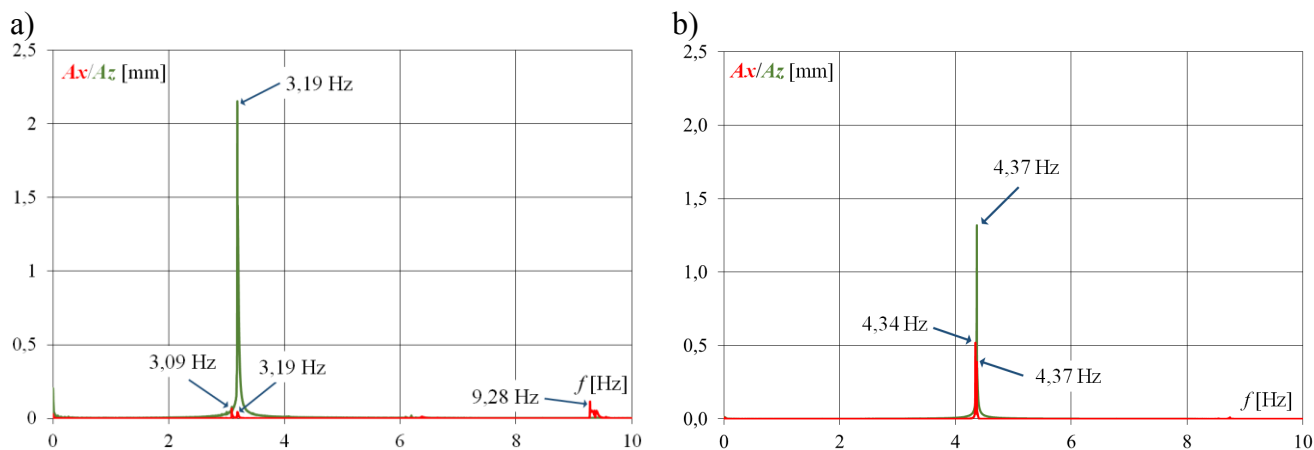
Rys. 7. Przykładowe wyniki pomiarów drgań przewodu jezdnego: a) przy naciągu 5 kN w położeniu zasadniczym; b) przy naciągu 10 kN przy położeniu obróconym

3. ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA DRGAŃ PRZEWODU JEZDNEGO

Na bazie zarejestrowanych w określonej częstotliwości próbkowania danych pomiarowych przeprowadzono dyskretną transformatę Fouriera oznaczaną skrótem DTF (ang. *Discrete Fourier Transform*). Na rysunkach 8 i 9 przedstawiono widmo sygnału drgań A_x , A_z w osi poziomej i pionowej dla różnych naciągów przewodu i dla położenia zasadniczego lub obróconego (p. rysunek 7). Naciąg przewodu o sile 5 kN jest zbyt niski, zaś naciąg 10 kN jest zbliżony do rzeczywistego w warunkach eksploatacyjnych sieci trakcyjnych. Wyraźnie widoczna jest zmiana częstotliwości drgań w osi pionowej w zależności od siły naciągu drutu jezdnego. Skręcenie przewodu wpływa na zwiększone drgania w osi poziomej. Może to stanowić przyczynek do określenia stanu technicznego sieci jezdnej za pośrednictwem czujników drgań i przetwarzania sygnałów w oparciu o szybką transformatę Fouriera FFT (ang. *Fast Fourier Transform*).



Rys. 8. Rozkład Fouriera drgań przewodu trakcyjnego w położeniu zasadniczym: a) dla naciągu 5 kN; b) dla naciągu 10 kN



Rys. 9. Rozkład Fouriera drgań przewodu trakcyjnego przy położeniu obróconym o 30° : a) dla naciągu 5 kN; b) dla naciągu 10 kN

Stwierdzono także niewielką różnicę częstotliwości drgań w obydwu osiach oraz zwiększony poziom zniekształceń dla drgań w osi poziomej przy obniżonym naciągu.

WNIOSKI

W Katedrze Inżynierii Elektrycznej Transportu Politechniki Gdańskiej podejmowane są prace naukowe i rozwojowe związane z diagnostyką i monitoringiem sieci i odbieraków pojazdów szynowych, w szczególności na linii kolejowej w warunkach eksploatacyjnych. Prowadzone są prace nad modelowaniem i komputerową symulacją współpracy sieci jezdnej z odbierakami prądu. Przeprowadzenie takich symulacji wymagane jest przez Techniczną Specyfikację Interoperacyjności podsystemu „Energia”. Opracowywane oprogramowanie będzie w przyszłości stanowić kompletny model sieci jezdnej potrzebny do diagnostyki odbieraków prądu na linii kolejowej. W zakresie monitoringu sieci jezdnej i odbieraków prądu na linii kolejowej planuje się wykorzystanie nowych urządzeń pomiarowych i algorytmów przetwarzania danych, co pozwoli na dokładniejszą ocenę stanu technicznego tych urządzeń. Sumarycznym efektem tych prac powinna być możliwość bieżącej oceny technicznej interakcji układu sieć jezdna – odbierak prądu z wykorzystaniem pomiarowych rozproszonych sieci teleinformatycznych.

Zaprezentowany w artykule model symulacyjny stanowi użyteczne narzędzie do zgrubnego wyznaczania drgań sieci jezdnej i odbieraka prądu. W celu określenia stanu technicznego sieci wymagane są dokładniejsze modele sieci i odbieraka [9, 18]. Aktualnie trwają prace nad rozwojem dokładnego oprogramowania symulującego oraz jego walidacją poprzez rozszerzone badania laboratoryjne i terenowe na sieci trakcyjnej. Poznanie charakterystycznych przebiegów drgań układu odbierak – sieć jezdna w układzie prostego stanowiska laboratoryjnego w istotny sposób pozwoli na dobór parametrów modelu sieci jezdnej.

Streszczenie

Górna sieć trakcyjna jest nadal najefektywniejszym sposobem zasilania kolejowych pojazdów elektrycznych. Sieć jezdna nie ma możliwości technicznych redundacji, co wymaga okresowej oceny stanu technicznego w celu zapewnienia prawidłowej współpracy z odbierakami prądu pojazdów. W artykule przedstawiono aspekty oceny stanu technicznego górnej sieci trakcyjnej na podstawie modelowania matematycznego i wybranych badań laboratoryjnych. Zaprezentowano dwumasowy model sieci i odbieraka prądu wskazując na jego użyteczność do oceny siły stykowej i uniesienia przewodów jezdnych. Wykonano szereg symulacji stanów dynamicznych interakcji górnej sieci trakcyjnej i odbieraka dla różnych parametrów, w szczególności zwrócono uwagę na wpływ tarcia suchego i lepkiego na przebieg drgań sieci. Dokonano laboratoryjnych pomiarów dynamiki przewodu jezdnej poddanego różnorodnym wymuszeniom dla określonych parametrów mechanicznych. Na podstawie analizy częstotliwościowej drgań przewodu wskazano na możliwości oceny stanu technicznego sieci jezdnej. Porównano wyniki symulacji z wybranymi badaniami laboratoryjnymi w celu dalszej weryfikacji założonej koncepcji modelu.

Słowa kluczowe: trakcja elektryczna, modelowanie i symulacja komputerowa, diagnostyka techniczna, pomiary drgań

Catenary wire vibration analysis in the aspect of technical state assessment

Abstract

The overhead contact line (OCL) is still the most effective way for supplying railway electric vehicles. The redundancy of the OCL is technically impossible, and therefore requires a periodic assessment of the technical state in order to ensure proper cooperation with the vehicle current collectors. The paper presents aspects of the evaluation of technical state of the OCL based on mathematical modeling and selected laboratory tests. The two-mass pantograph-catenary model was presented and it was pointed to its usefulness for the evaluation of contact force and up lift wires. A series of simulation of the dynamic interaction states of catenary and current collector for various parameters were performed, in particular the influence of dry and viscous friction on waveform of vibration was described. The laboratory measurements were made for the dynamics of the trolley wire subjected to various extortions for specific mechanical parameters. On the basis of the wire vibration frequency analysis the possibility of a technical state assessment of the OCL was indicated. Simulation results were compared with selected laboratory tests in order to further verification of the established concept model.

Keywords: electric traction, modeling and computer simulation, technical diagnostics, vibration measurements

BIBLIOGRAFIA

1. Benet J., Cuartero N., Cuartero F., Rojo T., Tendero P., Arias E., *An advanced 3D-model for the study and simulation of the pantograph catenary system*. Transportation Research Part C 36 (2013).
2. Cho Y. H., *Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper*. Journal of Sound and Vibration, vol. 315, no. 3, 2008.
3. *Commission Decision of 23 July 2012 amending Decisions 2006/679/EC and 2006/860/EC concerning technical specifications for interoperability* (notified under document C(2012) 4984) 2012/464/EU.
4. Giętkowski Z., Karwowski K., Mizan M., *Diagnostyka sieci trakcyjnej*. Wyd. PG, Gdańsk 2009.
5. Jarzbowicz L., Judek S., *3D Machine Vision System for Inspection of Contact Strips in Railway Vehicle Current Collectors*. Proc. of 2014 International Conference on Applied Electronics (AE), Pilsen, 2014.
6. Kaniewski M., *Symulacja uniesienia przewodów jezdných sieci trakcyjnej pod wpływem przejazdu wielu pantografów*. Czasopismo Techniczne, T. 108, Zesz. 13 (2011).
7. Kia S. H., Bartolini F., Mpanda-Mabwe A., Ceschi R., *Pantograph-Catenary Interaction Model Comparison*. IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, 2010.
8. Kiessling F., Puschmann R., Schmieder A., Schneider E., *Contact Lines for Electrical Railways: Planning – Design – Implementation – Maintenance*. Wiley VCH, 2009.
9. Koc W., Wilk A., *Investigations of methods to measure longitudinal forces in continuous welded rail tracks using the tamping machine*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, Vol. 223, No F1, 2009.
10. Mizan M., Karwowski K., Karkosiński D., *Monitoring odbieraków prądu w warunkach eksploatacyjnych na linii kolejowej*. Przegląd Elektrotechniczny, No. 12 (2013).
11. *PN-EN 50318 Zastosowania kolejowe – Systemy odbioru prądu – Walidacja symulacji oddziaływania dynamicznego pomiędzy pantografem a siecią jezdną górną*. PKN, Warszawa 2003.
12. Tanarro F., Fuerte V., *OHMS-real-time analysis of the pantograph-catenary interaction to reduce maintenance costs*. (RCM 2011), 5th IET Conference on, 2011.
13. Park T.-J., Han C.-S., Jang J.-H., *Dynamic sensitivity analysis for the pantograph of a high-speed rail vehicle*. Journal of Sound and Vibration 266 (2003).

14. Shin S. K., Eum K. Y., Um J. H., *Contact Force Control of Pantograph-Catenary System using Block Pulse Function*. Proceedings of the 7th World Congress on Railway Research (WCRR), held June 4-8, 2006 at the Fairmont The Queen Elizabeth in Montréal, Canada.
15. Szelağ A., *Wpływ napięcia w sieci trakcyjnej 3 kV DC na parametry energetyczno-trakcyjne zasilanych pojazdów*. Radom: Spatium. ISBN: 978-83-62805-01-3.
16. Szelağ A., Maciołek T., *A 3 kV DC electric traction system modernisation for increased speed and trains power demand - problems of analysis and synthesis*. Przegląd Elektrotechniczny, No 3a, 2013.
17. Walters S., Rachid A., Mpanda A., *On Modelling and Control of Pantograph Catenary Systems*. Proceedings Pantograph-Catenary Interaction Framework for Intelligent Control (PACIFIC) 2011.
18. Wilk A., Karwowski K., Michna M., Mizan M., Skibicki J., Kaczmarek P., *Modelowanie matematyczne górnej sieci trakcyjnej dla potrzeb diagnostyki odbieraków prądu*. XVI Ogólnopolska Konferencja Naukowa Trakcji Elektrycznej: SEMTRAK 2014, Wyd. PiT Kraków, 2014.

