STUDIA OECONOMICA POSNANIENSIA 2015, vol. 3, no. 11

DOI: 10.18559/SOEP.2015.11.10

Karolina Tura

Politechnika Gdańska, Wydział Zarządzania i Ekonomii, Katedra Nauk Ekonomicznych, Zakład Statystyki
ktura@zie.pg.gda.pl

APROKSYMACJE DE VYLDERA PRAWDOPODOBIEŃSTWA RUINY DLA MODELU Z CZASEM CIĄGŁYM W NIESKOŃCZONYM HORYZONCIE CZASOWYM

I believe, ruin theory is a subject for 21st century mathematics,
with many open problems waiting to be solve.
C. Constantinescu, University of Lousanne

Streszczenie: Artykuł przedstawia przegląd badań oraz ewolucję aproksymacji De Vyldera. Metoda ta polega na zastąpieniu procesu ryzyka poprzez inny proces ryzyka z wykładniczym rozkładem szkód tak, aby momenty pierwszych trzech rzędów przyrostu dla obu procesów były jednakowe. Idea tego oszacowania została wykorzystana w aproksymacji 4-gamma De Vyldera, w której zastosowano zastąpienie procesu ryzyka procesem ryzyka z rozkładem gamma szkód, tak że cztery pierwsze momenty są jednakowe.

Słowa kluczowe: teoria ruiny, prawdopodobieństwo ruiny, aproksymacja De Vyldera.

JEL: C13, G22, G33.

DE VYLDER APPROXIMATIONS OF RUIN PROBABILITY FOR THE MODEL WITH CONTINUOUS TIME IN THE INFINITE HORIZON

Abstract: The article presents review of the research and the evolution of the De Vylder approximation. This method is based on the replacement of the risk process by another risk process with exponentially distributed claims such that the first three moments coincide. This idea was used also in the 4-gamma De Vylder approximation based on the replacement of the risk process by another risk process with gamma distributed claims such that the first four moments coincide.

Keywords: ruin theory, ruin probability, De Vylder approximation.

Wstęp

Teoria ruiny stanowi narzędzie badania procesu opisującego nadwyżkę finansową zakładu ubezpieczeniowego w długim okresie. Jest to proces długookresowy i dynamiczny, w którym uwaga jest skoncentrowana na zmianach w czasie środków finansowych, którymi dysponuje zakład ubezpieczeniowy. Analizie jest poddawany proces gromadzenia bądź przejadania środków finansowych i aktywów. Pozwala ona na analizę możliwości dywersyfikacji ryzyka działalności ubezpieczeniowej w czasie. W tym przypadku dywersyfikacja określa kompensację strat poniesionych w jednych latach nadwyżką finansową osiąganą w innych [Otto 2008, s. 214–215] .

Artykuł dotyczy metod wyznaczania prawdopodobieństwa ruiny, w szczególności aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w modelu ciągłym dla nieskończonego horyzontu czasowego. Celem artykułu jest przedstawienie, porównanie oraz przegląd aproksymacji typu De Vyldera.

Artykuł został podzielony na pięć części. W pierwszej z nich zawarto wprowadzenie do szacowania prawdopodobieństwa ruiny w modelu ciągłym w nieskończonym okresie. Kolejne dwie prezentują aproksymację De Vyldera oraz 4gamma De Vyldera. W ostatniej części przedstawiono przegląd badań empirycznych oraz porównanie powyższych aproksymacji.

1. Aproksymacje prawdopodobieństwa ruiny dla modelu z czasem ciągłym w nieskończonym horyzoncie czasowym

Modelowy opis procesu nadwyżki finansowej ubezpieczyciela w czasie ciągłym jest zdefiniowany jako

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

gdzie:

$t \geq 0,$

$u \geq 0$ – nadwyżka początkowa, czyli stan środków w momencie 0,

$\{U(t), t \geq 0\}$ – proces ryzyka generowany poprzez proces liczby wypłat, intensywność składki oraz kapitał początkowy,

c – suma składki otrzymanej za jednostkowy okres, przy czym zakłada się, że tempo napływu składki w czasie jest stałe,

ct – osiągnięty dochód ze składki do chwili,

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ – łączna wartość odszkodowań za szkody zaistniałe w okresie (0, *t*],

gdzie:

$N(t)$ – liczba szkód zaistniałych w tym okresie,

$\{N(t), t \geq 0\}$ – proces liczby wypłat,

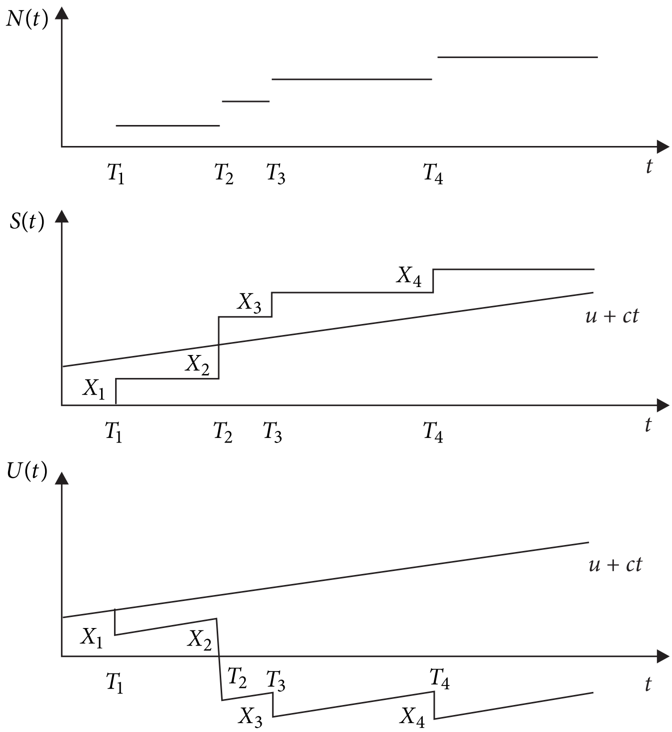
$0 = T_0 < T_1 < T_2 ...$ – momenty zgłoszenia wypłaty generowane poprzez proces liczby wypłat,

$X_1, X_2, X_3, ...$ – niezależne wielkości wypłaty o jednakowych rozkładach.

Ponadto $\{N(t), t \geq 0\}$ oraz $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ są niezależne. Oznacza to, że parametry procesu *N*(*t*) są w ogólności zależne od liczby ryzyk ubezpieczanych na jednostkę czasu i zakłada się, że proces pojawiania się szkód w czasie jest niezależny od wielkości szkód, a poszczególne szkody posiadają takie same rozkłady prawdopodobieństwa. Należy zauważyć, iż cechą procesu *S*(*t*) jest podwójna losowość, wysokość szkód X_i oraz liczba szkód *N*(*t*) są zmiennymi losowymi [Ostasiewicz 2000, s.157]. Na rysunku zaprezentowano procesy generowane przez *N*(*t*) w modelu ciągłym.

Ruina ubezpieczyciela następuje, gdy *U*(*t*)*<0*, czyli stan kapitału jest mniejszy od zera. Moment *T*, w którym nastąpi ruina ubezpieczyciela, jest nazywany momentem ruiny i określamy jako $T := \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$. Moment ten jest pierwszym z momentów czasu, w którym nadwyżka zakładu ubezpieczeniowego staje się ujemna [Otto 2008, s. 215–219].

Modele procesu nadwyżki ubezpieczyciela są różne i zależą od takich czynników, jak rozkład zmiennych losowych opisujących liczbę szkód,



Procesy generowane przez $N(t)$ w modelu ciągłym

Źródło: [Ostasiewicz 2000, s. 157]

wielkość szkód, a także od tego, w jaki sposób jest mierzony czas. Stąd też prawdopodobieństwo ruiny mierzone jest na różne sposoby. Prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym definiuje się, jako:

$$\psi(u,t) := P(T < t),$$

natomiast w nieskończonym jako:

$$\psi(u) := \lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = P(T < \infty)$$

lub

$$\psi(u) := P[U(t) < 0, \text{ dla } 0 < t < \infty].$$

W zależności od tego, czy kontrola stanu rezerw w modelu dokonywana jest w każdym momencie, czy składki i wypłaty odszkodowań pojawiają się dowolnie, a kontrola wielkości środków przeprowadzana jest jedynie w wyznaczonych momentach, modele prawdopodobieństwa ruiny dzielimy na modele z czasem ciągłym oraz na modele z czasem dyskretnym [Kowalczyk, Poprawska i Ronka-Chmielowiec 2006, s. 64]. W dalszej części artykułu uwaga zostanie skupiona na prawdopodobieństwie ruiny w modelu z czasem ciągłym z nieskończonym horyzontem czasowym, tj. $T = \{t : 0 \le t \le \infty\}$.

Rozróżnia się trzy główne sposoby wyznaczania prawdopodobieństwa ruiny z czasem ciągłym w nieskończonym horyzoncie czasowym: metody analityczne, aproksymacje prawdopodobieństwa ruiny oraz metody symulacyjne (symulacje przebiegu ryzyka) [Otto 2008, s. 265]. W wyznaczaniu prawdopodobieństwa ruiny niezwykle istotną rolę pełni współczynnik dopasowania *R* lub inaczej współczynnik dostosowawczy (*adjustment coefficient*). Współczynnik ten znalazł swoje zastosowanie dla rozkładów lekkoogonowych[1] do analitycznego wyznaczania prawdopodobieństwa ruiny, a także do wykonania prostych jego oszacowań. Współczynnik dopasowania *R stricte* dla modelu klasycznego z poissonowskim procesem pojawiania się szkód określony został jako dodatnie rozwiązanie równania:

$$1+(1+\theta)\mu R = M_X(R), \quad R < \gamma \ \text{(o ile } R \text{ istnieje)}, \gamma = \sup_r M_X(r),$$

gdzie:

M_X – funkcja tworząca momenty,

μ – pierwszy moment zwykły,

$\theta > 0$ – względny narzut na bezpieczeństwo,

$\lim\limits_{c\to\lambda m} R = 0$ i $\lim\limits_{c\to\infty} R = \gamma$, gdzie λ stanowi parametr procesu Poissona.

Wówczas, jeżeli istnieje dodatnie rozwiązanie równania:

$$\int_0^\infty e^{Rx}[1-F_X(x)]dx = \frac{c}{\lambda},$$

[1] Rozkład $\overline{F}_X(x)$ jest rozkładem o lekkim ogonie, jeżeli istnieją dodatnie stałe *a* i *b* takie, że dla każdego $x \ge 0$ zachodzi: $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \le ae^{-bx}$. Rozkłady, które nie mają lekkich ogonów, nazywamy rozkładami o ciężkich ogonach.

Tabela 1. Analityczne wyniki dotyczące prawdopodobieństwa ruiny

Rozkład szkód		Podstawowe charakterystyki rozkładu	Wzór na prawdopodobieństwo ruiny
Rozkład wykładniczy	gęstość	$\beta > 0$ $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ $x \geq 0$	$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{\frac{-\theta\beta u}{1+\theta}}$
	funkcja tworząca momenty	$M_X(z) = \frac{\beta}{\beta - z}$	
	wartość oczekiwana	$EX = \frac{1}{\beta}$	
Rozkład gamma	gęstość	$\alpha > 0; \beta > 0$ $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ $x \geq 0$	$\psi(u) = \frac{\theta(1 - R/\alpha)e^{-\beta Ru/\alpha}}{1+(1+\theta)R-(1+\theta)(1-R/\alpha)} + \frac{\alpha\theta\sin(\alpha\pi)}{\pi} \cdot I$ $I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-(x+1)\beta u} dx}{[x^\alpha(1+\alpha(1+\theta)(x+1)-\cos(\alpha\pi)]^2 + \sin^2(\alpha\pi)}$
	funkcja tworząca momenty	$M_X(z) = (\frac{\beta}{\beta - z})^\alpha$ $z < \beta$	
	wartość oczekiwana	$EX = \frac{\alpha}{\beta}$	

Rozwiązanie dla mieszaniny dwóch rozkładów wykładniczych	$\psi(u)=\frac{1}{(1+\theta)(r_2-r_1)}*$ $*\{(\rho-r_1)\exp(-r_1 u)+(r_2-\rho)\exp(-r_2 u)\}$ $r_1=\frac{\rho+\theta(\beta_1+\beta_2)-[\{\rho+\theta(\beta_1+\beta_2)\}^2-4\beta_1\beta_2\theta(1+\theta)]^{1/2}}{2(1+\theta)}$ $r_1=\frac{\rho+\theta(\beta_1+\beta_2)+[\{\rho+\theta(\beta_1+\beta_2)\}^2-4\beta_1\beta_2\theta(1+\theta)]^{1/2}}{2(1+\theta)}$ $\rho=\beta_1(1-p)+\beta_2 p, \quad p=\frac{a_1\beta_1^{-1}}{a_1\beta_1^{-1}+a_2\beta_2^{-1}}$

Źródło: Na podstawie: [Krzyśko 2004; Miśta 2002; Niemiro 1999; Burnecki i Weron 2007].

Tabela 2. Wybrane typy aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym czasie dla rozkładów lekkoogonowych

Aproksymacja	Autor i rok publikacji	Typ aproksymacji	Opis
Lundberga	F. Lundberg 1926	aproksymacja bezpośrednio samej funkcji prawdopodobieństwa ruiny	wymaga istnienia skończonych trzech pierwszych momentów; ogólne zastosowanie
Cramera-Lundberga	H. Cramer 1930		ogólne zastosowanie
Zerowa			metoda naiwna
Wykładnicza	F.E. De Vylder 1996		wymaga istnienia skończonych trzech pierwszych momentów
Beekmana-Bowersa	J. Beekman 1969	polega na szacowaniu warunkowego rozkładu całkowitej maksymalnej straty L za pomocą rozkładu gamma i na zastąpieniu prawdopodobieństwa warunkowego rozkładu straty rozkładem gamma poprzez dopasowanie dwóch pierwszych momentów	wykorzystanie w modelu klasycznym; wymaga istnienia momentu trzeciego rzędu i dodatniego narzutu bezpieczeństwa; gdy moment czwartego rzędu dąży do nieskończoności, jest ona obarczona bardzo dużym błędem
Renyi	A. Renyi 1957	uproszczona wersja aproksymacji Beekmana-Bowersa – polega na szacowaniu warunkowego rozkładu całkowitej maksymalnej straty L za pomocą rozkładu wykładniczego i na zastąpieniu prawdopodobieństwa warunkowego rozkładu straty rozkładem wykładniczym poprzez dopasowanie tylko pierwszego momentu	wymaga istnienia skończonych dwóch pierwszych momentów
De Vyldera	F.E. De Vylder 1978	aproksymacja przyrostu procesu nadwyżki – polega na zastąpieniu rzeczywistego procesu nadwyżki procesem klasycznym o wykładniczym rozkładzie szkód takim, że momenty pierwszych trzech rzędów przyrostu dla obu procesów są identyczne	wymaga istnienia skończonych trzech pierwszych momentów

Źródło: [Asmussen 2000; De Vylder 1996; Miśta 2002; Grandell 2000; Jakubowski i Stencel 2010; Kaas i in. 2010].

to prawdopodobieństwo ruiny w klasycznym modelu z czasem ciągłym dla $R > 0$ określa się jako [Otto 2008, s. 228]:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} | T < \infty)}, \quad u \geq 0.$$

Gdy rozkład wielkości szkód jest wykładniczy lub stanowi mieszankę rozkładów wykładniczych, to istnieją proste analityczne wyniki dla prawdopodobieństwa ruiny ruiny w nieskończonym czasie. Zamieszczona w mianowniku wzoru na prawdopodobieństwo ruiny warunkowa wartość oczekiwana jest dość trudna, a niekiedy niemożliwa do wyliczenia, stąd też często stosuje się oszacowania. Równania różnicowo-całkowe pozwalają na wyliczenie dokładnego prawdopodobieństwa ruiny przy wykorzystaniu w tym celu transformaty Laplace'a. Jednak rachunki te bywają bardzo często trudne i żmudne. W tabeli 1 przedstawiono analityczne wyniki dotyczące prawdopodobieństwa ruiny dla szkód o rozkładzie wykładniczym oraz rozkładzie gamma. Przedstawione wzory stanowią podstawę opisanych w następnej części aproksymacji De Vyldera. Szacowanie prawdopodobieństwa ruiny można przeprowadzić za pośrednictwem aproksymacji rozkładu wartości pojedynczej szkody, aproksymacji bezpośrednio samej funkcji prawdopodobieństwa ruiny lub aproksymacji przyrostu procesu nadwyżki w ciągu roku [Otto 2008, s. 265]. W tabeli 1 przedstawiono analityczne wyniki dotyczące prawdopodobieństwa ruiny. Wybrane typy aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym czasie dla rozkładów lekkoogonowych zaprezentowano w tabeli 2.

W dalszej części pracy uwaga zostanie skupiona na metodach szacowania przyrostu procesu nadwyżki.

2. Aproksymacja De Vyldera

Aproksymację De Vyldera można zastosować prawie dla każdego procesu o przyrostach niezależnych o jednakowym rozkładzie, jeżeli tylko proces nadwyżki charakteryzuje się dodatnim dryfem oraz jeśli rozkład łącznej wartości szkód jest prawoskośny [Otto 2008, s. 269]. Metoda de Vyldera polega na zastąpieniu procesu $\{U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\}$ innym procesem ryzyka z wykładniczym rozkładem szkód $\{U'(t)\}$ tak, aby momenty pierwszych trzech rzędów przyrostu dla obu procesów $\{U(t)\}$ i $\{U'(t)\}$ były jednakowe

[Grandell 2000, s. 157]. Jest oczywiste, że proces $\{U'(t)\}$ jest wybrany w taki sposób, aby prawdopodobieństwo ruiny $\psi'(u)$ było łatwiejsze do wyznaczenia niż $\psi(u)$. W opisywanej metodzie aproksymacji jest wykorzystywany wzór na dokładne prawdopodobieństwo ruiny w przypadku wykładniczego rozkładu szkód, $\psi(u)=\frac{\lambda}{c\beta}e^{-(\beta-\frac{\lambda}{c})u}$, lub inaczej $\psi(u)=\frac{1}{1+\theta}e^{\frac{-\theta\beta u}{1+\theta}}$ [Grandell 2000, s. 157].

Gdy rozkłady szkód są wykładnicze (z parametrem β), funkcja prawdopodobieństwa ruiny jest łatwa do wyznaczenia za pomocą określonego wzoru. Niech $\mu^{(k)}$ będzie k-tym momentem rozkładu wartości szkody.

Wyliczmy zatem:

$$E\big(U(t)-u\big)=(c-\lambda\mu)t,\;\; S(t)=u+ct-U(t),$$
$$Var\big(U(t)\big)=Var\big(S(t)\big)=\lambda\mu^{(2)}t,$$
$$E\Big((U(t)-E(U(t)))^3\Big)=-E\Big((S(t)-E(S(t)))^3\Big)=-\lambda\mu^{(3)}t.$$

Należy dalej rozwiązać układ trzech równań, w którym wielkości (oznaczone poniżej kreską) charakteryzujące proces $\{U'(t)\}$ są analogiczne do wielkości charakteryzujących proces $\{U(t)\}$:

$$(c-\lambda\mu)t=\left(\overline{c}-\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\beta}}\right)t,$$
$$\lambda\mu^{(2)}t=\frac{2\overline{\lambda}}{\left(\overline{\beta}\right)^2}t,$$
$$\lambda\mu^{(3)}t=\frac{6\overline{\lambda}}{\left(\overline{\beta}\right)^3}t.$$

Z rozwiązania tego układu otrzymujemy

$$\overline{\beta}=\frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}},\quad \overline{\lambda}=\frac{\lambda\mu^{(2)}\overline{\beta}^2}{2}=\frac{9\left(\mu^{(2)}\right)^3}{2\left(\mu^{(3)}\right)^2}\lambda,$$

$$\overline{c}=c-\lambda\mu+\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\beta}}=\beta-\lambda\mu+\frac{3\left(\mu^{(2)}\right)^2}{2\mu^{(3)}}\lambda.$$

Stąd też, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo ruiny z wykładniczym rozkładem szkód, uzyskujemy $\psi(u)=\frac{\lambda}{c\beta}e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)u}$ lub inaczej $\psi(u)=\frac{1}{1+\theta}e^{\frac{-\theta\beta u}{1+\theta}}$ [Asmussen 2000, s. 79–80].

3. Aproksymacja 4-gamma De Vyldera

Idea zastąpienia procesu ryzyka innym, dla którego znane jest dokładne prawdopodobieństwo ruiny, została także wykorzystana w analogicznej do aproksymacji De Vyldera metodzie aproksymacji, *4-moment de Vylder approximation*. Metoda ta polega na zastąpieniu procesu ryzyka $\{U(t)\}$ poprzez inny proces ryzyka $\{U'(t)\}$ z rozkładem szkód gamma, tak aby momenty pierwszych czterech rzędów przyrostów dla obu procesów $\{U(t)\}$ i $\{U'(t)\}$ były identyczne. W przeciwieństwie do metody De Vyldera, w opisywanej aproksymacji jest wykorzystywany wzór na dokładne prawdopodobieństwo ruiny, gdy szkody mają rozkład gamma. Proces ryzyka, w którym szkody mają rozkład gamma, jest zdeterminowany poprzez cztery parametry $(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \bar{\mu}, \bar{\mu}^{(2)})$. Stąd też uzyskujemy:

$$
\begin{aligned}
&ES(t)=-\theta\lambda\mu t,\\
&ES(t)^2=\lambda\mu^{(2)}t+(\theta\lambda\mu t)^2,\\
&ES(t)^3=\lambda\mu^{(3)}t-3(\lambda\mu^{(2)}t)(\theta\lambda\mu t)-(\theta\lambda\mu t)^2,\\
&ES(t)^4=\lambda\mu^{(4)}t-4(\lambda\mu^{(3)}t)(\theta\lambda\mu t)+3(\lambda\mu^{(2)}t)^2+6(\lambda\mu^{(2)}t)(\theta\lambda\mu t)^2+(\theta\lambda\mu t)^4
\end{aligned}
$$

oraz w przypadku rozkładu gamma mamy:

$$
\begin{aligned}
\bar{\mu}^{(3)}&=\frac{\bar{\mu}^{(2)}}{\bar{\mu}}(2\bar{\mu}^{(2)}-\bar{\mu}^2),\\
\bar{\mu}^{(4)}&=\frac{\bar{\mu}^{(2)}}{\mu^2}(2\bar{\mu}^{(2)}-\bar{\mu}^2)(3\bar{\mu}^{(2)}-2\bar{\mu}^2).
\end{aligned}
$$

Parametry $(\bar{\lambda},\bar{\theta},\bar{\mu},\bar{\mu}^{(2)})$ muszą spełniać układ równań:

$$\theta\lambda\mu = \overline{\theta}\overline{\lambda}\overline{\mu},$$
$$\lambda\mu^{(2)} = \overline{\lambda}\overline{\mu}^{(2)},$$
$$\lambda\mu^{(3)} = \overline{\lambda}\,\frac{\overline{\mu}^{(2)}}{\overline{\mu}^{2}}(2\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^{2}),$$
$$\lambda\mu^{(4)} = \overline{\lambda}\,\frac{\overline{\mu}^{(2)}}{\overline{\mu}^{2}}(2\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^{2})(3\overline{\mu}^{(2)} - 2\overline{\mu}^{2}).$$

Stąd też jego rozwiązaniem jest:

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda(\mu^{(3)})^2(\mu^{(2)})^3}{\left(\mu^{(2)}\mu^{(4)}\text{-}2(\mu^{(3)})^2\right)\left(2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\right)},$$
$$\overline{\theta} = \frac{\theta\mu\left(2(\mu^{(3)})^2 - \mu^{(2)}\mu^{(4)}\right)}{\left(\mu^{(2)}\mu^{(3)}\right)^2},$$
$$\overline{\mu} = \frac{3(\mu^{(3)})^2 - 2\mu^{(2)}\mu^{(4)}}{\mu^2\mu^3},$$
$$\overline{\mu}^{(2)} = \frac{\left(\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2(2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\right)}{\left(\mu^{(2)}\mu^{(3)}\right)^2}.$$

Zatem, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo ruiny z rozkładem szkód gamma, uzyskujemy aproksymację [Burnecki, Miśta i Weron 2005]:

$$\psi(u) = \frac{\overline{\theta}(1 - R/\overline{\alpha})e^{-\overline{\beta}Ru/\overline{\alpha}}}{1 + (1+\overline{\theta})R - (1+\overline{\theta})(1 - R/\overline{\alpha})} + \frac{\overline{\alpha}\overline{\theta}\sin(\overline{\alpha}\pi)}{\pi}\cdot I,$$

gdzie:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\overline{\alpha}} e^{-(x+1)\overline{\beta}u}dx}{[x^{\overline{\alpha}}(1 + \overline{\alpha}(1+\overline{\theta})(x+1) - \cos(\overline{\alpha}\pi))]^2 + \sin^2(\overline{\alpha}\pi)},$$

oraz

$$\overline{\alpha} = \overline{\mu}^2 / (\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^2), \quad \overline{\beta} = \overline{\mu} / (\overline{\mu}^{(2)} - \overline{\mu}^2).$$

Oczywistą wadą *4-moment de Vylder approximation* jest konieczność istnienia czterech pierwszych momentów.

4. Przegląd badań oraz porównanie aproksymacji

Pierwsze oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny w modelu ciągłym o nieskończonym horyzoncie oparte na zastąpieniu procesu ryzyka innym, łatwiejszym do wyliczenia wyprowadził De Vylder w 1978 r. Jego dowód numeryczny oparty na danych empirycznych przeprowadził w 1990 r. J. Grandell [Asmussen 2000, s. 80]. Metody aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny poprzez dopasowywanie poszczególnych momentów pierwszych rzędów są bardzo proste w konstrukcji, ale i dają zadziwiająco dobre rezultaty. J. Grandell w artykule z 2000 r. [Grandell 2000] przedstawia, że spośród prostych aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w modelu ciągłym w nieskończonym horyzoncie najlepsze oszacowanie uzyskuje się poprzez zastosowanie właśnie metody De Vyldera. Oczywiście w swoich rozważaniach nie uwzględnia on aproksymacji De Vylder 4-gamma. Metodę De Vyldera porównuje on z aproksymacją Cramera-Lundberga, Lundberga, Wykładniczą, Dyfuzyjną, Beekmana-Bowersa oraz formułą PollaczkaKinschina. W tabeli 3 zaprezentowano podsumowanie jego wyliczeń z punktu widzenia wybranych prostych oszacowań. Krzyżykiem określono oszacowanie, które, w ogólności, dawało najlepsze wyniki. Natomiast szarym kolorem zaznaczono aproksymacje, które nie dawały zadowalających rezultatów. Aproksymacja de Vyldera okazała się najefektywniejsza w przypadku rozkładu szkód gamma oraz mieszaniny rozkładów wykładniczych. Dla rozkładu lognormalnego (wybranego tutaj jako przykład rozkładu cieżkoogonowego) żadna z aproksymacji się nie sprawdziła.

Tabela 3. Podsumowanie wyliczeń Grandalla z 2000 roku z punktu widzenia prostych oszacowań

Aproksymacja	Typ rozkładu szkód		
	rozkład Gamma	mieszanka rozkładów wykładniczych	rozkład lognormalny
Lundberga			
Cramera-Lundberga			
Beekmana-Bowersa		×	
De Vyldera	×	×	

Źródło: Na podstawie: [Grandell 2000].

P. Miśta [2002] porównał proste aproksymacje prawdopodobieństwa ruiny, m.in. wykładniczą, Cramera, Beekmana-Bowersa, De Vyldera oraz

Lundberga. Oszacowania porównywał z metodą dokładną w przypadku rozkładu wykładniczego oraz z metodą najlepszą w przypadku pozostałych rozkładów. W tabeli 4 zaprezentowano możliwości wykorzystania powyższych oszacowań w wybranych rozkładach szkód. Widać w niej wyraźnie, że największe możliwości zastosowań mają aproksymacje De Vyldera oraz Beekamana-Bowersa.

Tabela 4. Możliwości wykorzystania powyższych oszacowań dla wybranych rozkładów szkód

Rozkład szkód		Aproksymacja				
		wykładnicza	Beekmana-Bowersa	Cramera	De Vyldera	Lundberga
Rozkład lekkoogonowy	wykładniczy	+	+	+	+	+
	Gamma	–	+	+	+	+
	Weibull	–	+	–	+	–
Rozkład ciężkoogonowy	lognormalny	–	+	–	+	+
	Loggamma	–	$\beta > 3$	–	$\beta > 3$	–
	Burr	–	$\alpha\tau > 3$	–	$\alpha\tau > 3$	–
	Pareto	–	$\alpha > 3$	–	$\alpha > 3$	–

Źródło: Na podstawie: [Miśta 2002, s. 64].

Tabela 5. Porównanie podstawowych cech aproksymacji De Vyldera oraz 4-gamma De Vyldera

Cecha	Aproksymacja	
	De Vylder	4-gamma De Vylder
Idea	aproksymacja przyrostu procesu nadwyżki polega na zastąpieniu rzeczywistego procesu nadwyżki procesem klasycznym o wykładniczym rozkładzie szkód, takim że momenty pierwszych trzech rzędów przyrostu dla obu procesów są identyczne	aproksymacja przyrostu procesu nadwyżki polega na zastąpieniu rzeczywistego procesu nadwyżki procesem klasycznym o rozkładzie szkód gamma, takim że momenty pierwszych czterech rzędów przyrostu dla obu procesów są identyczne
Ograniczenia	konieczność istnienia trzech pierwszych momentów	konieczność istnienia czterech pierwszych momentów
Dokładne wyniki	dla wykładniczego rozkładu szkód	dla wykładniczego i gamma rozkładu szkód

Źródło: Na podstawie: [Grandell 2000; Burnecki, Miśta i Weron 2005].

W Raporcie z badań przeprowadzonych w *Hugo Steinhaus Centre for Stochastic Methods* z 2005 roku K. Burnecki, P. Miśta oraz A. Weron [2005] zaproponowali rozwinięcie metody De Vyldera, czyli przedstawioną powyżej aproksymację 4-gamma. Jej autorzy przeprowadzili porównanie wybranych dwóch oszacowań, korzystając z mieszaniny dwóch rozkładów wykładniczych oraz lognormalnego rozkładu szkód. W przypadku rozkładu lognormalnego wykorzystali regułę Polaczka-Kinschina do wyznaczenia prawdopodobieństwa ruiny. Ich analiza dowiodła, że aproksymacja 4-gamma przynosi lepsze rezultaty aniżeli jej pierwotna wersja (aproksymacja De Vyldera). W tabeli 5 zawarto porównanie podstawowych cech aproksymacji De Vyldera oraz 4-gamma De Vyldera.

Zakończenie

Porównanie metody De Vyldera z innymi prostymi aproksymacjami przeprowadzono już wielokrotnie, m.in. w pracach J. Grandella czy S. Asmussena. Zdecydowaną zaletą tej metody jest uzyskanie konsensusu na gruncie jej prostoty oraz efektywności. To połączenie sprawia, że oszacowanie De Vyldera, mimo że po raz pierwszy było wprowadzone już w 1978 r., wciąż cieszy się powodzeniem. Idea tej metody jest cały czas rozszerzana. Przykładem jest aproksymacja 4-gamma De Vyldera z 2005 r. Ponadto stanowi ona trzon dalszych prac badawczych. Oryginalna metoda De Vyldera dotyczyła przybliżenia prawdopodobieństwa ostatecznej ruiny w klasycznym modelu ryzyka. W artykule z 2009 r. D. Dickson oraz K.S. Wong [2009] także pokazują, że jej idea może zostać z powodzeniem rozszerzona na aproksymację kolejnych momentów oraz rozkładu czasu do ruiny.

Matematyka ubezpieczeniowa jest dziedziną, która niezwykle szybko się rozwija, a jej siłę napędową stanowi możliwość jej wykorzystania w szeroko pojmowanej ekonomii bądź *stricte w* aktuariacie. Należy podkreślić ogromny wpływ, jaki teoria ruiny może mieć nie tylko na uczestników rynku ubezpieczeniowego, ale i na przyszły rozwój samej myśli matematycznej.

Bibliografia

Asmussen, S., 2000, *Ruin Probabilities*, Word Scientific, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, Sweden.

Burnecki, K., Miśta, P., Weron, A., 2005, *A New De Vylder Type Approximation of the Ruin Probability in Infinite Time*, Research Report HSC/03/5, Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods and Wrocław University of Technology, Wrocław.

Burnecki, K., Miśta, P., Weron, A., 2005, *What Is the Best Approximation of Ruin Probability in Infinite Time?*, Applicationes Mathematicae, no. 32.

Burnecki, K., Weron, A., 2007, *Numeryczne aproksymacje prawdopodobieństwa ruiny*, Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka, Centrum Metod Stochastycznych im. Hugona Steinhausa, Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska, 21–23 maja, Wrocław.

De Vylder, F.E., 1978, *A Practical Solution to the Problem of Ultimate Ruin Probability*, Scandinavian Actuarial Journal.

De Vylder, F.E. , 1996, *Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction*, Editions de l'Université de Bruxelles and Swiss Association of Actuaries.

Dickson, D., Wong, K.S., 2009, De *Vylder Approximations to the Moments and Distribution of the Time to Ruin*, Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne.

Grandell, J., 1990, *Aspects of Risk Theory*, Springer, New York.

Grandell, J., 2000, *Simple Approximations of Ruin Probability*, Insurance Math. Econom.

Jakubowski, J., Stencel R., 2010, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M., 2010, *Modern Actuarial Risk Theory. Using R.*, Springer, New York.

Kowalczyk, P., Poprawska, E., Ronka-Chmielowiec, W., 2006, *Ubezpieczenia. Metody aktuarialne*, PWN, Warszawa.

Krzyśko, M., 2004, *Statystyka matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Miśta, P., 2002, *Komputerowe metody szacowania prawdopodobieństwa ruiny i jego kontrola za pomocą optymalizacji polisy reasekuracyjnej*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Warszawa.

Miśta, P., 2006, *Analytical and Numerical Approach to Corporate Operational Risk Modeling*, Rozprawa doktorska, Institute of Mathematics and Informatics, Wrocław University of Technology, Wrocław

Niemiro, W., 1999, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Szkoła Nauk Ścisłych**,** Warszawa.

Ostasiewicz, S., 2000, *Modelowanie statystyczne. Modele aktuarialne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.

Ostasiewicz, S., 2003, *Elementy aktuariatu*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.

Ostasiewicz, S., Ronka-Chmielowiec, W., 1994, *Metody statystyki ubezpieczeniowej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław.

Otto, W., 2008, *Matematyka w ubezpieczeniach. Ubezpieczenia majątkowe. Część I. Teoria ryzyka*, WNT, Warszawa.