

dr inż. Marcin Abramski<sup>1)\*</sup>  
mgr inż. Maciej Klecha<sup>1)</sup>

# Weryfikacja obliczeń numerycznych czteroprzęsłowego ciągłego wiaduktu kablobetonowego metodą analityczną

*Analytical verification of numerical calculations of four-span continuous viaduct made of post-tensioned concrete*

DOI: 10.15199/33.2016.04.

**Streszczenie.** W artykule poddano analizie obliczeniowej czteroprzęsłowy wiadukt kablobetonowy zaprojektowany w schemacie statycznym belki ciągłej, zrealizowany przed kilku laty nad autostradą A1. Porównano wyniki obwiednich naprężeń normalnych w przekroju betonowym dźwigara, zarówno rozciągających, jak i ściskających, uzyskanych za pomocą obliczeń analitycznych oraz numerycznych. Do obliczeń komputerowych wykorzystano dwa modele: belkowy oraz powłokowy, oba stworzone w programie SOFiSTiK. Porównując wyniki omawianych metod, uzyskano dużą zgodność. Wykazano, że prosty model belkowy w niedostatecznie dokładny sposób oblicza obwiednie naprężeń normalnych w betonie dźwigara. Dodatkowo wyznaczono wartości momentów wzbudzonych (od sprężenia) w konstrukcji przy użyciu dwóch metod: numerycznej i klasycznej metody sił. Wyniki momentów wzbudzonych uzyskane obiema metodami były niemal identyczne.

**Słowa kluczowe:** sprężona belka ciągła, most kablobetonowy, model numeryczny, momenty wzbudzone, metoda sił.

**Abstract.** In the paper a computational analysis of four-span continuous post-tensioned concrete viaduct is presented. The viaduct was built a few years ago over the motorway A1. Normal stresses envelopes in concrete girder cross-section were computed in two kinds of analysis: numerical and traditional. In the latter analysis determining of the induced bending moments was based on the classical force method. The numerical analysis was made in two variants: with the use of beam finite elements only and with the use of quadrilateral shell finite elements. The both numerical models were made with the use of SOFiSTiK software. All the used analysis approaches gave consistent results, though the results obtained from the beam numerical model were not exact enough. The induced bending moments obtained from the classical force method were almost identical with the induced moments obtained from the shell numerical model.

**Keywords:** prestressed continuous beam, post-tensioned concrete bridge, numerical model, induced moment, force method.

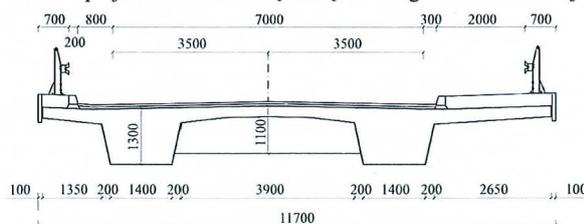
W projektowaniu obiektów mostowych powszechnie używa się programów komputerowych wykorzystujących Metodę Elementów Skończonych (MES), która niemal wyparła stosowane niegdyś analityczne metody projektowania. MES wymaga od projektanta nie tylko umiejętności technicznych, ale także doświadczenia i wiedzy inżynierskiej, aby właściwie interpretować wyniki obliczeń numerycznych. Niedostateczne doświadczenie oraz zbyt duża ufność w prawidłowość wyników uzyskanych za pomocą obliczeń komputerowych może prowadzić do błędów projektowych. Niebezpieczeństwo takie istnieje w projektowaniu konstrukcji niestandardowych, w przypadku których intuicja inżynierska może zawodzić. Należą do nich wszelkie statycznie niewyznaczalne konstrukcje sprężone, ponieważ powstają w nich wzbudzone siły wewnętrzne. Możliwość analitycznego oszacowania wpływu sił wzbudzonych może stanowić cenną pomoc dla projektanta w ocenie wiarygodności wyników uzyskanych z obliczeń MES.

Lgdowej

<sup>1)</sup> Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii i Środowiska  
<sup>\*)</sup> Autor do korespondencji; e-mail: mabram@pg.gda.pl

## Opis analizowanego wiaduktu

Analizowany wiadukt drogowy WD-206, zrealizowany w 2009 r. w ramach budowy autostrady A1, znajduje się w ciągu drogi powiatowej nr 2123E. Wiadukt ma schemat statyczny belki ciągłej o rozpiętości teoretycznej: 21 + 28 + 28 + 21 m. Przekrój poprzeczny szerokości całkowitej 11,70 m zaprojektowano jako dwudźwigarowy, o wysokości ustroju 1,30 m i zmiennej grubości płyty pomostowej 0,25 ÷ 0,35 m (rysunek 1) [7]. Obydwa dźwigary betonowe sprężono siedmioma kablami 19 L 15,7 o sile naciągu 3,44 MN w każdym kablu. Obiekt zaprojektowano na klasę obciążeń B wg PN-85/S-10030 [5].



Rys. 1. Przekrój poprzeczny wiaduktu WD-206 [7]

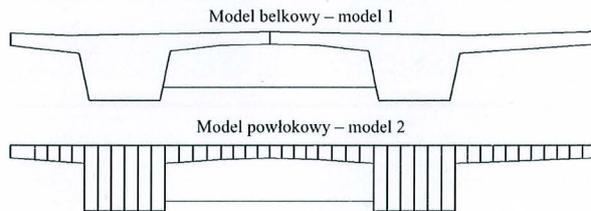
Fig. 1. Cross-section of the viaduct WD-206

Do budowy ustroju nośnego przęsła wiaduktu zastosowano: beton B50 wg normy PN-91/S-10042 [6], stal sprężającą o wytrzymałości charakterystycznej 1860 MPa i stal zbrojeniową klasy A-IIIN.

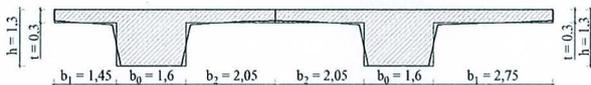
**Modele obliczeniowe**

Wykonano dwa modele (rysunek 2): belkowy oraz powłokowy [2, 3]. Decydując się na opracowanie najprostszego przestrzennego modelu numerycznego, jakim jest **model belkowy** (rysunek 2) uznaliśmy, że w przypadku obiektu krzyżującego się z przeszkodą pod kątem 90° prostota modelu nie powinna wpłynąć negatywnie na dokładność wyników. W modelu belkowym wydzielono w formie rusztu dwa dźwigary: lewy oraz prawy, połączone ze sobą za pomocą nieważkich belek (przyjęty w programie ciężar własny belek łączących to 0 kN/m³). W przekrojach podporowych zastosowano belkę o przekroju prostokątnym odwzorowującą poprzecznice z rzeczywistego obiektu. Zgodnie z projektem w każdym dźwigarze wymodelowano siedem kabli sprężających.

Drugim wykonanym modelem numerycznym wiaduktu był **model powłokowy** (rysunek 2). W programie SOFiSTiK zastosowano elementy czterowzłowe typu „QUAD” o sześciu stopniach swobody w każdym węźle. W modelu uproszczono geometrię przekroju poprzecznego przez uśrednienie skosów dźwigarów (rysunek 3).



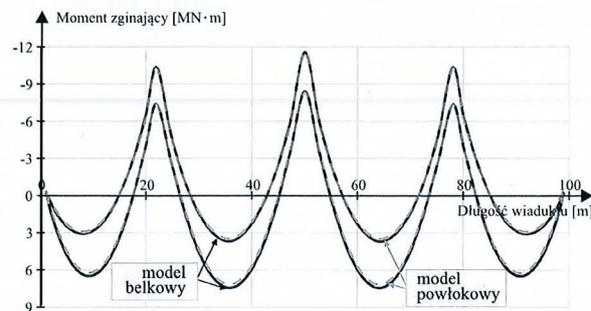
Rys. 2. Modele numeryczne: podział na elementy skończone  
Fig. 2. Numerical models: division onto finite elements



Rys. 3. Zastosowane uproszczenie przekroju poprzecznego  
Fig. 3. Simplification of cross-section used in computations

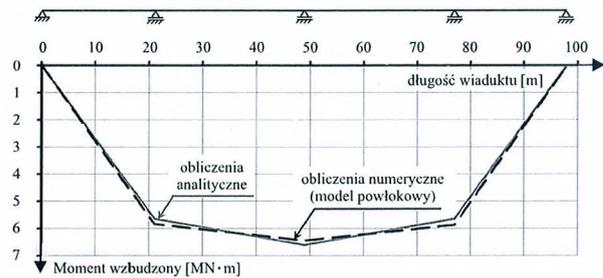
Wynikowe obwiednie momentów zginających uzyskane z obu modeli porównano i przedstawiono na rysunku 4. Różnice są znikome. Obwiednie nie zawierają w ogóle żadnych wpływów sprężenia.

Za podstawę **obliczeń analitycznych** przyjęto wynikowe obwiednie momentów zginających uzyskane z modelu powłokowego (rysunek 4). Obliczenia prowadzono w dwóch etapach. Najpierw obliczono momenty zginające wzbudzone sprężeniem wiaduktu, wyko-



Rys. 4. Porównanie uzyskanych z obliczeń numerycznych obwiedni momentów zginających w stadium użytkowym wiaduktu  
Fig. 4. Comparison of bending moment envelopes in the exploitation stage of viaduct, obtained from numerical computations

zystując metodę sił. Dawniej stosowano ją do obliczania wzbudzonych sił wewnętrznych w statycznie niewyznaczalnych ustrojach sprężonych [4]. Współcześnie używa się do tego celu komercyjnych programów komputerowych i metodę elementów skończonych. Metoda sił nadal może być z powodzeniem stosowana do weryfikacji wyników obliczeń numerycznych. Przykład zastosowania metody sił do obliczenia dwuprzęsłowego mostu kablobetonowego zaprezentowano w [1]. Jak wykazano, wsparcie się arkuszem kalkulacyjnym w zastosowaniu metody sił znakomicie skraca czas obliczeń, a jednocześnie umożliwia analizowanie tras kabli o zupełnie dowolnym kształcie, niekoniecznie parabolicznym czy kołowym. Na rysunku 5 porównano wyniki analitycznych obliczeń momentów wzbudzonych (metodą sił) z wynikami obliczeń numerycznych (model powłokowy). Różnice wyników z obu metod są nieznaczne.



Rys. 5. Porównanie momentów wzbudzonych uzyskanych metodą analityczną i numeryczną

Fig. 5. Comparison of bending moments induced by prestressing, obtained with the use of classical force method and numerical model

W drugim etapie obliczeń analitycznych uzyskane wartości momentów wzbudzonych posłużyły, wraz z momentami z obwiedni (rysunek 4) i wpływami (ściskającymi oraz giętnymi) siły sprężającej do wyznaczenia obwiedni naprężeń we włóknaach górnych i dolnych przekroju dźwigara na całej jego długości. Zastosowano wzór Magnela:

$$\sigma_{gm,dln} = \frac{P_m}{A_c} \pm \frac{P_m z_{cp} \pm M_{max,min} \pm M_{wzb}}{W_{gm,dln}} \quad (1)$$

gdzie:

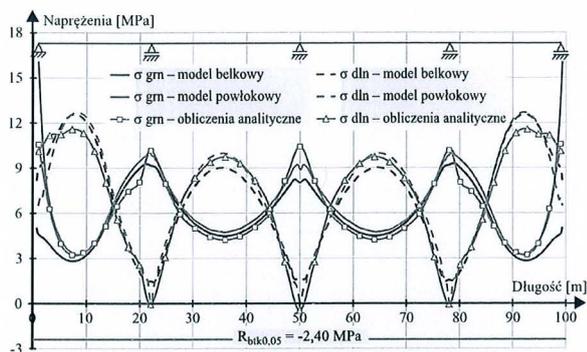
- $\sigma_{gm,dln}$  – naprężenia górne lub dolne w przekroju betonowym dźwigara sprężonego;
- $P_m$  – wypadkowa siła sprężająca działająca na dźwigar betonowy;
- $A_c$  – pole przekroju betonowego dźwigara sprężonego efektywne w przenoszeniu siły sprężającej;
- $z_{cp}$  – mimośród działania wypadkowej siły sprężającej;
- $M_{max,min}$  – momenty zginające z obwiedni momentów od obciążenia konstrukcji ciężarem własnym i obciążen ruchomych (rysunek 4);
- $M_{wzb}$  – momenty zginające wzbudzone (rysunek 5);
- $W_{gm,dln}$  – wskaźniki wytrzymałości przekroju obliczone względem górnych i dolnych włókien dźwigara, wyznaczone z uwzględnieniem szerokości współpracującej płyty pomostu.

Przyjęto następujące znaki naprężeń normalnych: „-” dla rozciągania i „+” dla ściskania.

**Analiza naprężeń**

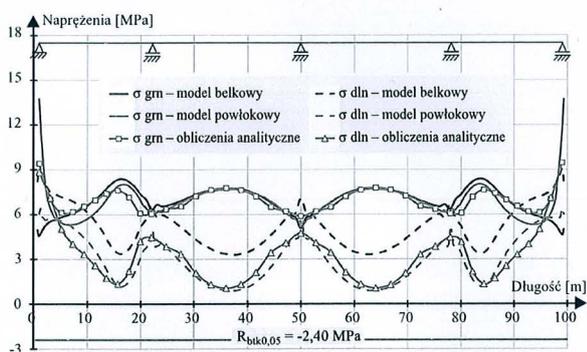
Na rysunku 6 przedstawiono wykresy charakterystycznych naprężeń normalnych, górnych i dolnych, w betonie prawego dźwigara (wg rysunku 1), otrzymane w stadium początkowym pracy wiaduktu (tylko ciężar własny konstrukcji i sprężenie). Analogiczną obwiednię w stadium użytkowym pracy konstrukcji przedstawiono na rysunku 7. Niewielkie wartości naprężeń ściskających w stosunku do obliczeniowej wytrzymałości betonu  $R_{bt} = 28,8$  MPa wynikają z zasad projektowania konstrukcji sprężonych wg [6]. Zgodnie z nimi z wartością  $R_{bt}$  porównuje się naprężenia  $\sigma_{max,obl}$  tj. mak-

wzbr jest przyjętą na str. 3, w kol. lewej, w wierszu 9. od dołu



Rys. 6. Wykresy naprężeń normalnych w stadium początkowym pracy konstrukcji

Fig. 6. Diagrams of normal stresses under structure dead load only



Rys. 7. Obwiednie naprężeń normalnych w stadium użytkowym, dla obwiedni momentów  $M_{max}$

Fig. 7. Envelopes of normal stresses in the exploitation stage for the moment envelope  $M_{max}$

symalne obliczeniowe naprężenia w skrajnych włóknach przekroju, zaś z wartością charakterystyczną wytrzymałości betonu na rozciąganie  $R_{btk,0.05} = -2,40$  MPa, naprężenia  $\sigma_{min, char}$  tj. minimalne naprężenie charakterystyczne. W prezentowanej analizie ograniczono się do podania jedynie wartości charakterystycznych naprężeń, w związku z czym w wynikach naprężeń ściskających uzyskano bardzo duże zapasy.

**Stadium początkowe.** Wyniki naprężeń dla stadium początkowego w przypadku wszystkich analizowanych metod są zbliżone do siebie w strefach przęsłowych. W strefach podpór pośrednich wyniki modelu belkowego odbiegają od wyników pozostałych dwóch metod obliczeniowych. Model belkowy daje wyniki zbyt optymistyczne, co jest spowodowane prawdopodobnie nieuwzględnieniem efektu szerokości współpracującej płyty pomostowej. Największe różnice wyników obserwuje się w strefach podpór skrajnych, tj. zakotwień. Za najdokładniejsze wyniki należy uznać te otrzymane metodą analityczną. Przyczyną tych rozbieżności są różnice pola przekroju betonu efektywnego na działanie siły sprężającej  $P_m$  (wzór (1)). Zgodnie z normą [6] w strefie zakotwienia powinno to być pole trapezowego środka, z pominięciem całego przekroju płyty pomostowej. Taki właśnie przekrój przyjęto w obliczeniach analitycznych. W wariantcie belkowym obliczeń numerycznych przekrojem czynnym na działanie siły sprężającej jest cały przekrój dźwigara łącznie z płytą pomostową (rysunek 2), co prowadzi do niebezpiecznego zaniżenia naprężeń ściskających. Z kolei w modelu powłokowym mamy do czynienia z sytuacją odwrotną: siła sprężająca przyłożona jest w strefach zakotwień do wąskich elementów po-

włokowych, co prowadzi do nierealnego zawyżenia naprężeń ściskających. W celu właściwego oszacowania naprężeń normalnych w tych strefach metodą numeryczną można zastosować model bryłowy wycinka konstrukcji. W tej sytuacji jednak obliczenia analityczne wydają się być prostszą, a więc rozsądniejszą alternatywą.

**Stadium użytkowe.** Z obwiedni naprężeń na rysunku 7 wynika duża zgodność wyników trzech metod obliczeniowych. Jedynie obwiednie naprężeń dolnych uzyskane z modelu belkowego wykazują znaczną różnicę w stosunku do swoich odpowiedników z modelu powłokowego i z obliczeń analitycznych. Różnice, o wartości ok. 2 MPa, zachodzą na całej długości analizowanego wiaduktu. Nie udało się nam ustalić przyczyny zaistniałej rozbieżności. Różnice wartości naprężeń w strefach zakotwień mają identyczną naturę jak w stadium początkowym.

**Wnioski**

W artykule przeanalizowano dwa modele numeryczne odwzorowujące konstrukcję, a uzyskane wyniki zweryfikowano metodą analityczną. Model numeryczny wykonany z belkowych elementów skończonych okazał się niedostatecznie dokładny. Zastrzeżenia budzą wyniki ekstremalnych naprężeń w przekroju betonowym dźwigara zarówno w stadium początkowym pracy konstrukcji (jedynie w strefach przypodporowych), jak również w jej stadium użytkowym (na całej długości obiektu). Model wykonany przy użyciu powłokowych elementów skończonych prawidłowo odwzorował rozkład naprężeń w konstrukcji. Wyniki obwiedni naprężeń uzyskane z obliczeń analitycznych z zastosowaniem klasycznej metody sił pokrywają się z wynikami modelu powłokowego.

Bezskrytyczne posługiwanie się oprogramowaniem opartym na metodzie elementów skończonych może prowadzić do błędów w projektowaniu kablobetonowych ustrojów ciągłych. Proste modele belkowe, nieuwzględniające efektu szerokości współpracującej płyty pomostowej, mogą powodować niedoszacowanie naprężeń normalnych w strefach podporowych.

Zagadnienie momentów wzbudzonych powstających w konstrukcji od sprężenia może i powinno budzić obawy projektanta, czy oprogramowanie, którym dysponuje, prawidłowo prezentuje wyniki naprężeń normalnych w przekroju betonowym. W programie SOFiSTiK, którym się posługiwaliśmy, wyniki momentów wzbudzonych nie są prezentowane w sposób przejrzysty. Pomocna może być metoda analityczna wyznaczania momentów wzbudzonych, którą zaprezentowano.

**Literatura**

[1] Abramski Marcin, Bartosz Wasilewski. 2016. „O obliczaniu kablobetonowych ciągłych dźwigarów mostowych”. *Inżynieria i Budownictwo* 72 (01): 20 – 23.  
 [2] Instrukcja programu SOFiSTiK 2014. SOFiSTiK AG, Oberschleissheim, Niemcy.  
 [3] Klecha Maciej. Studium projektu czteropiętrowego ciągłego wiaduktu kablobetonowego o rozpiętościach 21 + 28 + 28 + 21 m. Praca dyplomowa magisterska. Politechnika Gdańska, 10-2015.  
 [4] Leonhardt Fritz. *Spannbeton für die Praxis*. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1955.  
 [5] PN-85/S-10030. Obiekty mostowe. Obciążenia.  
 [6] PN-91/S-10042. Obiekty mostowe. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Projektowanie.  
 [7] Projekt wykonawczy wiaduktu WD-206 nad autostradą A1 (odcinek od km 230 + 817 do km 295 + 800 – Zadanie II). Branża mostowa. Mosty Katowice Sp. z o. o., 08-2009.  
 [8] Skarżewski Jacek, Witold Wołowicki, Krzysztof Sturzbecher. *Mosty sprężone – przewodnik do ćwiczeń projektowych*. Skrypt Politechniki Poznańskiej, Poznań 1982.

Przyjęto do druku: 22.12.2015 r.

Akceptuję.  
 11.04.2016  
 Marcin Abramski