

# Analityczna metoda projektowania łuków odwrotnych

## Analytical design method of reverse curves



**Władysław Koc**

Prof. dr hab. inż.

Politechnika Gdańska, Katedra  
Transportu Szynowego i Mostów

kocwl@pg.gda.pl

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono nową metodę projektowania rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej, dostosowaną do techniki Mobilnych Pomiarów Satelitarnych. Metoda ta może się okazać szczególnie przydatna wówczas, gdy obydwu prostych kierunków trasy nie można połączyć w sposób elementarny, stosując łuk kołowy z krzywymi przejściowymi; dotyczy to również zastosowania łuku koszowego. Jedynym rozwiązaniem staje się wówczas wprowadzenie do układu geometrycznego dwóch łuków kołowych o przeciwnych znakach krzywizny, czyli zastosowanie łuku odwrotnego. Rozwiązanie problemu projektowego wykorzystuje zapis matematyczny i polega na wyznaczeniu uniwersalnych równań opisujących całość układu geometrycznego. Odbyna się to sekwencyjnie, obejmując kolejne fragmenty tegoż układu. Zaprezentowana metoda została zilustrowana odpowiednim przykładem obliczeniowym.

**Słowa kluczowe:** Układ geometryczny toru; Projektowanie; Wspomaganie komputerowe

**Abstract:** The paper deals with a new approach relating to the design of the region of railway track direction alteration adapted to Mobile Satellite Measurements technique. The method may be particularly useful in situations when both the straights of the route directions cannot be connected in an elementary way using a circular arc with transition curves; this also refers to the application of a compound curve. Thus the only solution becomes the application of two circular arcs of opposite curvature signs to the geometric system, i.e. the use of an inverse curve. The solution of the design problem takes advantage of a mathematical notation and concentrates on the determination of universal equations describing the entire geometric system. This is a sequential operation involving successive parts of the system. The presented method has been illustrated by appropriate calculation examples.

**Keywords:** Track geometrical layout; Designing; Computer Aided Design

Inspiracją do podjęcia poruszanego zagadnienia stanowiło niewątpliwie pojawienie się nowej technologii – zastosowanie w projektowaniu i eksploatacji torów kolejowych pomiarów satelitarnych GPS. Globalny system pozycjonowania GPS [2,15-17] pozwala na wyznaczanie współrzędnych punktów w jednolitym, trójwymiarowym systemie odniesienia WGS 84, którego początek znajduje się w centrum masy Ziemi. Wyznaczone na drodze pomiarów GPS współrzędne elipsoidalne są przekształcane poprzez odwzorowanie Gaussa-Krügera w celu uzyskania współrzędnych płaskich prostokątnych [17]. Współrzędne te tworzą w Polsce tzw. układ PL-2000, stanowiący jeden z elementów państwowego systemu odnie-

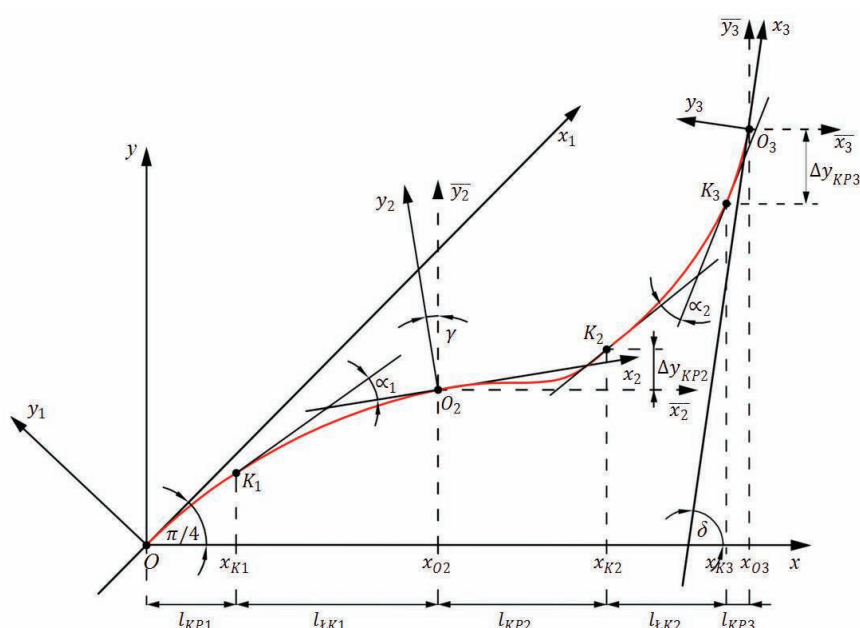
sień przestrzennych.

Możliwość uzyskania odpowiedniej efektywności pomiaru w torze kolejowym daje opracowana przez zespół naukowy Politechniki Gdańskiej i Akademii Marynarki Wojennej / Akademii Morskiej w Gdyni technika Mobilnych Pomiarów Satelitarnych [8-10], polegająca na objeździe badanego odcinka trasy z antenami zainstalowanymi na poruszającym się pojeździe szynowym.

Mobilne Pomiarów Satelitarnych umożliwiają wyznaczenie współrzędnych istniejącej trasy kolejowej w kartezjańskim układzie [9,11,12]. W takiej sytuacji staje się sprawą oczywistą, że w tymże układzie powinny być wyznaczone również współrzędne nowo projektowanej osi toru, służące

do wytyczenia trasy w terenie. Użytkowana bardzo duża precyzja wyznaczania współrzędnych w płaszczyźnie poziomej (z błędem na poziomie kilku milimetrów) skłania do opracowania nowych metod projektowania układów geometrycznych toru [4-6] oraz nowych programów komputerowego wspomaganie takich projektów [7], dostosowanych do techniki pomiarów satelitarnych.

Projektowanie układów geometrycznych dróg szynowych odbywa się najczęściej w odniesieniu do stanu istniejącego; jest to zatem projektowanie regulacji osi toru. W przypadku rejonu zmiany kierunku trasy polega ono na takim skorygowaniu promienia łuku kołowego oraz rodzaju i długości krzywych przejściowych,



1. Rozpatrywany układ geometryczny w lokalnym układzie współrzędnych

aby nowy układ geometryczny był jak najkorzystniejszy z punktu widzenia kinematyki ruchu pojazdów szynowych oraz kosztów utrzymania toru. Jednocześnie położenie toru w płaszczyźnie poziomej nie powinno odbiegać zbytnio od położenia istniejącego.

Kluczową sprawą staje się przy tym określenie wartości parametrów geometrycznych, które zagwarantują spełnienie tych warunków. Wyznaczenie tych parametrów wymaga rozpatrzenia wielu wariantów projektowych i dokonania wyboru wariantu najkorzystniejszego. Do generowania wariantów potrzebna jest nowa metoda obliczania współrzędnych, dostosowana do techniki pomiarów satelitarnych. Dopiero po uzyskaniu, w wyniku tej procedury, właściwych wartości parametrów geometrycznych można wykorzystać w sposób racjonalny któryś z komercyjnych programów komputerowych wspomagających projektowanie.

W pewnych sytuacjach do połączenia ze sobą kierunków głównych trasy nie można zastosować modelowego układu: krzywa przejściowa – łuk kołowy – krzywa przejściowa [5], ani też rozwiązać problem przez zastosowanie łuku koszowego [4]. Pozostaje wówczas wprowadzenie do układu geometrycznego dwóch łuków odwrotnych. Łuki odwrotne mogą również stanowić korzystne

rozwiązanie w przypadku konieczności ominięcia przeszkody terenowej. Opis procedury projektowania łuków odwrotnych stanowi przedmiot niniejszej pracy. Pozwala ona na bezpośrednie rozwiązanie problemu w przypadku łączenia ze sobą kierunków głównych nie będących równoległymi. W przypadku łączenia torów równoległych wymagane jest numeryczne skorygowanie uzyskanego rozwiązania. Przedstawiona koncepcja sposobu projektowania rejonu zmiany kierunku trasy prowadzi – podobnie jak w innych opracowanych metodach – do uzyskania rozwiązania analitycznego, z zastosowaniem odpowiednich formuł matematycznych, a więc najbardziej przyjaznego w praktycznym stosowaniu.

## Założenia ogólne

Dysponujemy równaniami kierunków głównych trasy w układzie PL-2000:

$$\begin{aligned} \text{Prosta 1} & \quad X_1 = A_1 + B_1 Y \\ \text{Prosta 2} & \quad X_2 = A_2 + B_2 Y \end{aligned}$$

Proste te mają wartości współczynnika nachylenia  $B_1$  i  $B_2$  bardzo do siebie zbliżone i przecinają się w oddalonym punkcie (mogą być też do siebie równoległe). Taka sytuacja uzasadnia połączenie obu prostych łukami odwrotnymi. Uzasadnieniem dla połączenia łukami odwrotnymi może być

także chęć utrzymania toru w granicach nasypu [1].

Właściwe projektowanie odbywać się będzie w odpowiednim lokalnym układzie współrzędnych  $x, y$  (LWU) – rys. 1. Układ ten powstaje w wyniku przesunięcia początku nowego układu do punktu  $O (Y_0, X_0)$  na Prostej 1 oraz dokonania obrotu całości o kąt  $\beta$ . Kwestią podstawową staje się przy tym uzyskanie odpowiednich nachyleń Prostej 1 i 2 w układzie LWU.

Zakładamy, że w układzie  $x, y$  Prosta 1 będzie przechodzić przez początek tegoż układu z kątem nachylenia równym  $\pi/4$ . Przyjęcie takiego nachylenia gwarantuje operowanie dodatnimi wartościami wyznaczanych rzędnych poziomych oraz zapewnia możliwość matematycznego zapisywania łuków kołowych w postaci funkcji jawnej  $y(x)$ . Ponieważ Prosta 2 ma zbliżone nachylenie do nachylenia Prostej 1, na pewno mieścić się ono będzie w przedziale  $(0, \pi/2)$ , bliżej środka tego przedziału (tj. nachylenia Prostej 1) niż jego granic. Wartość kąta obrotu  $\beta$  wyznacza się z następującego wzoru:

$$\beta = \varphi_1 - \pi/4 \quad (1)$$

przy czym  $\varphi_1 = \text{atan} B_1$  dla  $B_1 > 0$  oraz  $\varphi_1 = \text{atan} B_1 + \pi$  dla  $B_1 < 0$ . Uzyskanie z powyższego wzoru wartości dodatniej kąta  $\beta$  oznacza obrót układu w lewo, natomiast dla wartości ujemnej – obrót układu w prawo.

Po przyjęciu współrzędnych punktu  $O (Y_0, X_0)$  na Prostej 1 i wyznaczeniu kąta obrotu  $\beta$  dokonujemy transformacji Prostej 1 i 2 do lokalnego układu współrzędnych  $x, y$ . Cały rozpatrywany układ geometryczny w układzie LWU został przedstawiony na rys. 1.

Położenie dowolnego punktu trasy w układzie lokalnym  $x, y$  możemy wyznaczyć za pomocą wzorów [14]:

$$x = (Y - Y_0) \cos \beta + (X - X_0) \sin \beta \quad (2)$$

$$y = (Y - Y_0) \sin \beta + (X - X_0) \cos \beta \quad (3)$$

Kąt  $\delta$ , określający nachylenie Prostej 2 do osi  $x$  w układzie LWU, wyznacza się ze wzoru

$$\delta = \varphi_2 - \beta \quad (4)$$

przy czym  $\varphi_2 = \text{atan} B_2$  dla  $B_2 > 0$  oraz  $\varphi_2 = \text{atan} B_2 + \pi$  dla  $B_2 < 0$ .

**Dobór parametrów projektowanego układu geometrycznego**

Projektowany układ geometryczny, łączący *Prostą 1* z *Prostą 2* w lokalnym układzie współrzędnych  $x, y$ , tworzą następujące elementy składowe (rys. 1):

- pierwsza krzywa przejściowa (KP1), określonego rodzaju, o długości  $l_1$ ,
- pierwszy łuk kołowy (ŁK1) o promieniu  $R_1$  i długości  $l_{ŁK1}$ ,
- druga krzywa przejściowa (KP2), określonego rodzaju, o długości  $l_2$ ,
- drugi łuk kołowy (ŁK2) o promieniu  $R_2$  i nieokreślonej długości  $l_{ŁK2}$ ,
- trzecia krzywa przejściowa (KP3), określonego rodzaju, o długości  $l_3$ .

Wartości  $l_1, R_1, l_2, R_2$  i  $l_3$  wynikają z analizy prędkości przeprowadzonej dla projektowanego układu, wartość  $l_{ŁK1}$  jest w zasadzie dowolna, natomiast  $l_{ŁK2}$  stanowi wartość wynikową, zamykająca cały układ. Należy jednak zdawać sobie sprawę z tego, że postawione zadanie udaje się rozwiązać jedynie przy odpowiedniej konfiguracji wymienionych parametrów. Kluczowa jest w tym wszystkim charakterystyka występującej krzywizny. Krzywa KP1 i łuk ŁK1 mają krzywiznę ujemną, natomiast łuk ŁK2 i krzywa KP3 – krzywiznę dodatnią. Powoduje to, że na krzywej KP1 i łuku ŁK1 kąt nachylenia stycznej do osi  $x$  w *LUW* maleje, zaś na łuku ŁK2 i krzywej KP3 rośnie i nie zależy to od wzajemnej lokalizacji *Prostych 1* i *2* (rys. 1). Jedyнным elementem, na której występuje zróżnicowanie znaku krzywizny, jest krzywa KP2.

**Krzywa przejściowa KP1**

Rzędne krzywej przejściowej KP1 wyznaczamy w pomocniczym układzie współrzędnych  $x_1, y_1$  (*PUW1*) – rys. 1. Tok postępowania jest następujący:

- określamy rodzaj krzywej przejściowej,
- przyjmujemy długość krzywej  $l_1$  (mierzoną po samej krzywej) oraz promień  $R_1$  przylegającego łuku kołowego ŁK1,
- otrzymujemy równania parametryczne:  $x_1(l), y_1(l), l \in <0, l_1>$ .

Ponieważ dla typowych krzywych przejściowych łączących prostą z łukiem kołowym (gdzie krzywiznę wyznacza jednakowa liczba warunków brzegowych [3])  $|\Theta(l_1)| = l_1 / (2 R_1)$  [rad], wartość stycznej na końcu krzywej przejściowej KP1 jest określona wzorem  $y_1'(l_1) = -\tan(l_1 / 2 R_1)$ .

Następny etap stanowi transformacja krzywej KP1 do lokalnego układu współrzędnych  $x, y$  (rys. 1). Odbywa się to przez obrót osi układu *PUW1* w prawo o kąt  $\pi/4$ . Otrzymujemy następujące równania parametryczne:

$$x(l) = x_1(l) \cos \pi/4 - y_1(l) \sin \pi/4 \quad (5)$$

$$y(l) = x_1(l) \sin \pi/4 + y_1(l) \cos \pi/4, \quad l \in <0, l_1> \quad (6)$$

Wstawiając do równań (5) i (6) wartość końcową parametru  $l$  (tj.  $l = l_1$ ), otrzymujemy współrzędne końca krzywej KP1 (tj. punktu  $K_1$ ):  $x_{K1} = l_{KP1}$  i  $y_{K1}$ . Wartość stycznej  $s_{K1}$  w punkcie  $K_1$  wynosi

$$s_{K1} = \tan(-l_1 / 2 R_1 + \pi/4) \quad (7)$$

**Łuk kołowy ŁK1**

Schemat obrazujący położenie łuku kołowego ŁK1 pokazano na rys. 2. Przyjmujemy długość łuku kołowego  $l_{R1}$  (mierzoną po samym łuku). Wyznaczamy współrzędne punktu  $S_1(x_{S1}, y_{S1})$  – środka łuku ŁK1.

$$x_{S1} = x_{K1} + (s_{K1} / \sqrt{1 + s_{K1}^2}) R_1 \quad (8)$$

$$y_{S1} = y_{K1} - (1 / \sqrt{1 + s_{K1}^2}) R_1 \quad (9)$$

Równanie łuku kołowego ŁK1 jest następujące:

$$y(x)_{ŁK1} = y_{S1} + [R_1^2 - (x_{S1} - x)^2]^{(1/2)}, \quad x \in <x_{K1}, x_{O2}> \quad (10)$$

Kąt zwrotu stycznych łuku ŁK1 wynosi

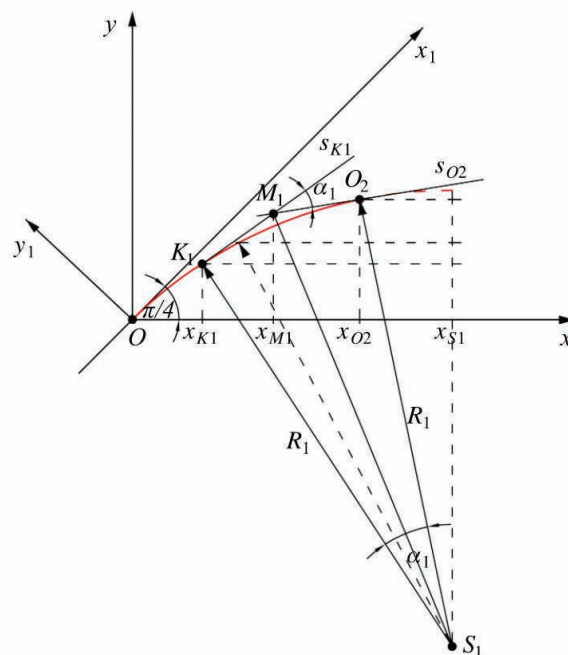
$$\alpha_1 = l_{R1} / R_1 \quad (11)$$

a nachylenie  $s_{O2}$  stycznej do łuku ŁK1 na jego końcu, tj. w punkcie  $O_2$

$$s_{O2} = \tan(\text{atan } s_{K1} - \alpha_1) \quad (12)$$

Żeby określić współrzędne punktu  $O_2$  – końca łuku kołowego ŁK1, należy najpierw wyznaczyć współrzędne punktu  $M_1$  (rys. 2); otrzymuje się ostatecznie

$$x_{O2} = x_{K1} + \tan \alpha_1 / 2 (1 / \sqrt{1 + s_{K1}^2} + 1 / \sqrt{1 + s_{O2}^2}) R_1 \quad (13)$$



2. Schemat obrazujący położenie łuku kołowego ŁK1

$$y_{O_2} = y_{K_1} + \tan \alpha_1 / 2 (s_{K_1} / \sqrt{1 + s_{K_1}^2} + s_{O_2} / \sqrt{1 + s_{O_2}^2}) R_1 \quad (14)$$

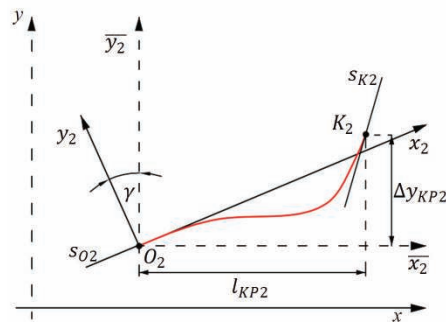
## Krzywa przejściowa KP2

Schemat obrazujący położenie krzywej przejściowej KP2 pokazano na rys. 3. Rzędne krzywej przejściowej KP2 wyznaczamy w pomocniczym układzie współrzędnych  $x_1, y_1$  (PUW2). Krzywa przejściowa KP2 łączy ze sobą łuki odwrotne o promieniach  $R_1$  i  $R_2$ . Tok postępowania jest następujący:

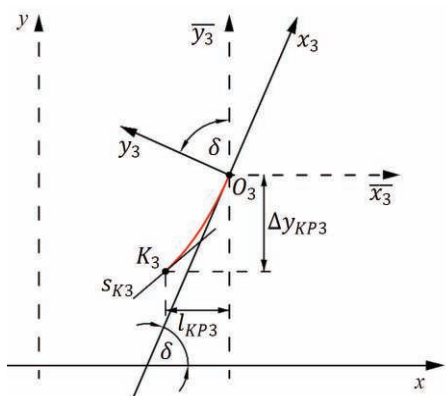
- zakładamy liniowy lub nieliniowy przebieg krzywizny,
- przyjmujemy długość krzywej  $l_2$  (mierzoną po samej krzywej) oraz promień  $R_2$  przylegającego łuku kołowego ŁK2,
- wyznaczamy równania parametryczne:  $x_2(l), y_2(l), l \in <0, l_2>$ .

Przykładowe rozwiązania, dla liniowego i nieliniowego rozkładu krzywizny na długości krzywej, zostały przedstawione w pracy [3].

Następnym etapem jest transformacja krzywej KP2 do pomocniczego układu współrzędnych  $\bar{x}_2, \bar{y}_2$  (PUW2), co pokazano na rys. 3. Położenie tego układu określa kąt  $\gamma = \text{atan } s_{O_2}$ . Jeżeli nachylenie  $s_{O_2} = \tan(\text{atan } s_{K_1} - \alpha_1) > 0$ ,



3. Schemat obrazujący położenie krzywej przejściowej KP2



4. Schemat obrazujący położenie krzywej przejściowej KP3

wówczas należy dokonać obrotu układu PUW2 w prawo, natomiast jeżeli nachylenie  $s_{O_2} > 0$ , należy dokonać obrotu układu PUW2 w lewo. Ponieważ kąt  $\gamma = |\text{atan } s_{O_2}| \in <0, \pi/2>$ , otrzymujemy

$$x = x_{O_2} + \bar{x}_2(l) = x_{O_2} + x_2(l) \cos \gamma \pm y_2(l) \sin \gamma \quad (15)$$

$$y = y_{O_2} + \bar{y}_2(l) = y_{O_2} \pm x_2(l) \sin \gamma + y_2(l) \cos \gamma, \quad l \in <0, l_2> \quad (16)$$

Ze wzorów (15) i (16) można wyznaczyć wartości  $l_{KP2}$  oraz  $\Delta y_{KP2}$  (rys. 3), a następnie współrzędne punktu  $K_2$ . Uwzględniając kąt nachylenia stycznej  $\Theta(l_2)$  na końcu krzywej w układzie PUW2 otrzymujemy wartość stycznej  $s_{K_2}$  w punkcie  $K_2$  w układzie PUW2.

$$s_{K_2} = \tan[\Theta(l_2) \pm \gamma] \quad (17)$$

## Krzywa przejściowa KP3

Żeby można było określić nieznaną w tej fazie położenie końca łuku ŁK2, należy zająć się najpierw krzywą przejściową KP3. Pozwoli to wyznaczyć kluczową z punktu widzenia łuku ŁK2 wartość stycznej  $s_{K_3}$  na jego końcu. Schemat obrazujący położenie krzywej przejściowej KP3 w pomocniczym układzie współrzędnych  $x_3, y_3$  (PUW3) pokazano na rys. 4.

Tok postępowania jest następujący:

- określamy rodzaj krzywej przejściowej,
- przyjmujemy długość krzywej  $l_3$  (mierzoną po samej krzywej),
- otrzymujemy równania parametryczne:  $x_3(l), y_3(l), l \in <-l_3, 0>$ .

Następny etap stanowi transformacja krzywej przejściowej KP3 do pomocniczego układu współrzędnych  $\bar{x}_3, \bar{y}_3$  (którego osie są równoległe do lokalnego układu współrzędnych  $x, y$ ). Przejście to otrzymujemy przez obrót układu PUW3 w prawo o kąt  $\delta$ . Równania parametryczne krzywej KP3 w układzie PUW3 są następujące:

$$\bar{x}_3(l) = x_3(l) \cos \delta - y_3(l) \sin \delta \quad (18)$$

$$\bar{y}_3(l) = x_3(l) \sin \delta + y_3(l) \cos \delta, \quad l \in <-l_3, 0> \quad (19)$$

Wstawiając do równań (18) i (19) wartość końcową parametru  $l$  (tj.  $l = -l_3$ ), otrzymujemy wartości  $l_{KP3}$  oraz  $\Delta y_{KP3}$ . Wartość stycznej  $s_{K_3}$  w punkcie  $K_3$  w układzie PUW3, (oraz w LUW) wynosi

$$s_{K_3} = \tan(-l_3/2 R_2 + \delta) \quad (20)$$

Zapisanie równań krzywej KP3 w lokalnym układzie współrzędnych wymaga wyznaczenia położenia punktu  $O_3(x_{O_3}, y_{O_3})$ .

## Łuk kołowy ŁK2

Schemat obrazujący położenie łuku kołowego ŁK2 pokazano na rys. 5. W tej fazie procedury projektowej znane są, oprócz wartości promienia  $R_2$ , współrzędne punktu początkowego oraz wartości stycznej na początku  $s_{K_2}$  i końcu  $s_{K_3}$  łuku ŁK2 (położenie końca łuku, czyli współrzędne punktu końcowego  $K_3(x_{K_3}, y_{K_3})$  jest nieznaną). Wyznaczamy najpierw współrzędne punktu  $S_2(x_{S_2}, y_{S_2})$  – środka łuku ŁK2.

$$x_{S_2} = x_{K_2} - (s_{K_2} / \sqrt{1 + s_{K_2}^2}) R_2 \quad (21)$$

$$y_{S_2} = y_{K_2} + (1 / \sqrt{1 + s_{K_2}^2}) R_2 \quad (22)$$

Równanie łuku kołowego ŁK2 jest następujące:

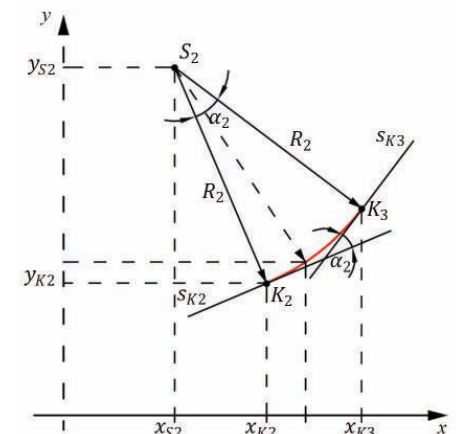
$$y(x)_{\text{ŁK2}} = y_{S_2} + [R_2^2 - (x - x_{S_2})^2]^{(1/2)}, \quad x \in <x_{K_2}, x_{K_3}> \quad (23)$$

Z warunku

$y(x_{K_3})'_{\text{ŁK2}} = -(x_{K_3} - x_{S_2}) / [R_2^2 - (x_{K_3} - x_{S_2})^2]^{(1/2)} = s_{K_3}$  możemy wyznaczyć  $x_{K_3}$ , a następnie  $y_{K_3}$ .

$$x_{K_3} = x_{S_2} + (s_{K_3} / \sqrt{1 + s_{K_3}^2}) R_2 \quad (24)$$

$$y_{K_3} = y_{S_2} - (1 / \sqrt{1 + s_{K_3}^2}) R_2 \quad (25)$$



5. Schemat obrazujący położenie łuku kołowego ŁK2

Długość rzutu łuku ŁK2 na oś x wynosi

$$l_{\text{ŁK2}} = x_{K3} - x_{K2} \quad (26)$$

a kąt zwrotu stycznych

$$\alpha_2 = |\text{atan } s_{K3} - \text{atan } s_{K2}| \quad (27)$$

Wynika stąd bezpośrednio długość łuku kołowego ŁK2 (mierzona po łuku)

$$l_{R2} = \alpha_2 R_2 \quad (28)$$

Znajomość położenia punktu  $K_3 (x_{K3}, y_{K3})$  umożliwia określenie współrzędnych punktu końcowego  $O_3 (x_{O3}, y_{O3})$  – rys. 4.

$$x_{O3} = x_{K3} + l_{KP3} \quad (29)$$

$$y_{O3} = y_{K3} + \Delta y_{KP2} \quad (30)$$

oraz równań parametrycznych krzywej przejściowej KP3:

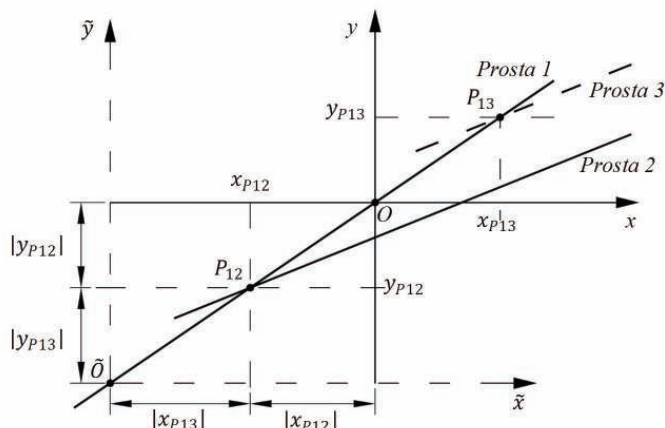
$$\begin{aligned} x(l) &= x_{O3} + \bar{x}_3(l) = \\ &= x_{O3} + x_3(l) \cos \delta - y_3(l) \sin \delta \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} y(l) &= y_{O3} + \bar{y}_3(l) = \\ &= x_{O2} + x_3(l) \sin \delta + y_3(l) \cos \delta \end{aligned} \quad (32)$$

### Wyznaczenie właściwego położenia początku lokalnego układu współrzędnych

Aby można było przenieść zaprojektowany układ geometryczny z układu LUW do układu 2000, należy skorygować położenie jego punktu początkowego na Prostej 1. W ogólnym przypadku bowiem punkt  $O_3 (x_{O3}, y_{O3})$ , wyznaczający koniec układu, nie będzie leżał na Prostej 2, lecz na równoległej do niej Prostej 3 o równaniu  $y_{(3)} = a_3 + b_2 x$  (rys. 6).

Jak już wcześniej wspomniano, prezentowana metoda pozwala na bezpośrednie rozwiązanie problemu w przypadku łączenia ze sobą kierunków nierównoległych. Możliwe jest wówczas określenie skorygowanych współrzędnych początku układu LUW. W tym celu należy wyznaczyć współrzędne punktów przecięcia Prostej 1 z Prostej 2 i z Prostej 3. Prosta 1 przecina



6. Idea sposobu skorygowania współrzędnych początku układu LUW

się z Prostej 2 w punkcie  $P_{12}$

$$x_{P12} = a_2 / (1 - b_2) = y_{P12} \quad (33)$$

a z Prostej 2 w punkcie  $P_{13}$

$$x_{P13} = (y_{O3} - b_2 x_{O3}) / (1 - b_2) = y_{P13} \quad (34)$$

Naszym zadaniem jest takie przesunięcie początku układu LUW (punktu O) wzdłuż Prostej 1 do nowego położenia w punkcie  $\tilde{O}$ , że w układzie  $\tilde{x}, \tilde{y}$  uzyska się  $\tilde{x}_{P12} = x_{P13}$  i oczywiście  $\tilde{y}_{P12} = y_{P13}$  (rys. 6).

Prowadzi to do następującego wzoru ogólnego:

$$x_O = y_O = x_{P12} - x_{P13} \quad (35)$$

Skorygowany początek lokalnego układu współrzędnych w układzie 2000 ma współrzędne:

$$Y_O = Y_O + x_O \cos \beta - y_O \sin \beta \quad (36)$$

$$X_O = X_O + x_O \sin \beta + y_O \cos \beta \quad (37)$$

Przeniesienie zaprojektowanego układu geometrycznego z układu LUW do układu 2000 odbywa się z wykorzystaniem następujących zależności [14]:

$$Y = Y_O + x \cos \beta - y \sin \beta \quad (38)$$

$$X = X_O + x \sin \beta + y \cos \beta \quad (39)$$

W przypadku łączenia ze sobą kierunków równoległych wymagane jest skorygowanie uzyskanego rozwiązania poprzez numeryczne wy-

znaczenie parametrów geometrycznych odpowiadających występującej odległości między osiami torów.

### Przykład obliczeniowy

Możliwości stwarzane przez prezentowaną metodę projektowania obrazuje przykład obliczeniowy, w którym dokonano połączenia dwóch kierunków trasy o zbliżonych współczynnikach nachylenia w układzie współrzędnych PL-2000. Podstawowym przyjętym założeniem było uzyskanie prędkości jazdy pociągów  $v = 90 \text{ km/h}$ .

Prosta 1

$$X_1 = 27878029,36485 - 3,365805196 Y$$

$$\phi_1 = 1,859595714 \text{ rad}$$

$$\beta = 1,074197551 \text{ rad}$$

Prosta 2

$$X_2 = 35851110,27727 - 4,592528563 Y$$

$$\phi_2 = 1,785194693 \text{ rad}$$

Założony punkt początkowy

$$Y_O = 6498745,04911 \text{ m}$$

$$X_O = 6004519,50986 \text{ m}$$

Dane projektowe

$v = 90 \text{ km/h}$

$l_1 = 90 \text{ m}$  klotoida

$R_1 = 500 \text{ m}$   $l_{R1} = 150 \text{ m}$ ,  $h_1 = 100 \text{ mm}$

$l_2 = 160 \text{ m}$  krzywizna liniowa

$R_2 = 600 \text{ m}$  ( $l_{R2} = 170,359 \text{ m}$ ),  $h_2 = 70 \text{ mm}$

$l_3 = 70 \text{ m}$  klotoida

gdzie:  $h_1, h_2$  – wartości przechyłki na łukach, odpowiednio, ŁK1 i ŁK2.

Korekta położenia początku układu LUW

$$Y_O = 6,499053,754 \text{ m}$$

$$X_O = 6003480,469 \text{ m}$$

Prosta 1  $y_{(1)} = x$

Prosta 2  $y_{(2)} = -257,909 + 0,86126 x$

Praktyczna przydatność przedstawionego rozwiązania (rys. 7) nie może budzić żadnych wątpliwości. Z punktu widzenia samej metodyki obliczeń pewne problemy stwarza łączenie ze sobą prostych równoległych, gdyż nie można wówczas w sposób bezpośredni dokonać skorygowania położenia lokalnego układu współrzędnych. Komputerowy charakter obliczeń z wykorzystaniem przedstawionego algorytmu pozwala jednak łatwo rozwiązać tę kwestię.

Warto również zauważyć, że podczas projektowania trzeba się czasami liczyć z koniecznością ominięcia jakiejś przeszkody terenowej i łuki odwrotne mogą wówczas stanowić alternatywę nawet dla tak elementarnego problemu geometrycznego, jakim jest łączenie ze sobą dwóch prostych za pomocą łuku kołowego.

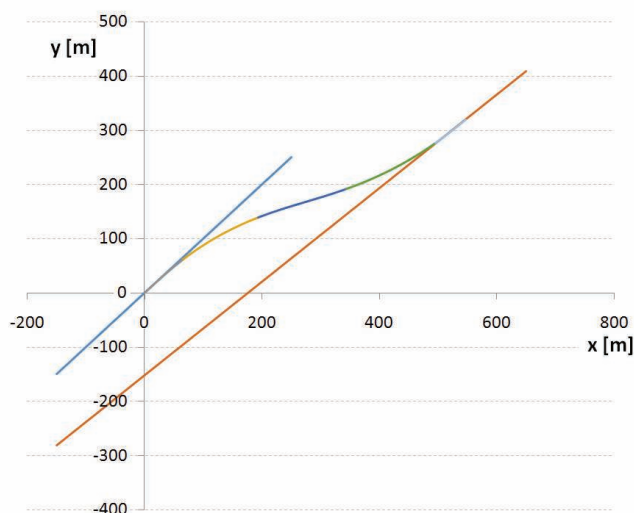
## Podsumowanie

Zastosowanie techniki Mobilnych Pomiarów Satelitarnych, z antenami zainstalowanymi na poruszającym się pojeździe szynowym, umożliwia odtworzenie położenia osi torów w bezwzględny układzie odniesienia. Stwarza to zupełnie nowe możliwości w zakresie kształtowania geometrycznego torów kolejowych. W zaistniałej sytuacji pojawia się konieczność dostosowania algorytmów projektowych do nowych możliwości technicznych.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono kolejną (po opisanych w pracach [4-6]) metodę projektowania rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej, dostosowaną do techniki Mobilnych Pomiarów Satelitarnych. Metoda ta może się okazać szczególnie przydatna wówczas, gdy obydwu prostych kierunków trasy nie można połączyć w sposób elementarny, stosując łuk kołowy z krzywymi przejściowymi. Taka sytuacja występuje wówczas, kiedy łączone ze sobą proste mają wartości współczynnika nachylenia bardzo do siebie zbliżone i

Tab. 1. Charakterystyka zasadniczych punktów układu geometrycznego

Punkt	Odcięta x [m]	Rzędna y [m]	Nachylenie stycznej s
0	0	0	1,000
K1	65,496	61,680	0,834
O2	193,254	139,202	0,417
K2	344,580	191,579	0,386
K3	492,704	274,569	0,764
O3	546,613	319,204	0,861



7. Wizualizacja zaprojektowanego układu geometrycznego

przecinają się w oddalonym punkcie (mogą być też do siebie równoległe). Jedynym rozwiązaniem staje się wówczas wprowadzenie do układu geometrycznego dwóch łuków kołowych o przeciwnych znakach krzywizny, czyli zastosowanie łuku odwrotnego.

Przedstawiona koncepcja sposobu projektowania rejonu zmiany kierunku trasy prowadzi do uzyskania rozwiązania analitycznego, z zastosowaniem odpowiednich formuł matematycznych, a więc najbardziej przyjaznego w praktycznym stosowaniu. Procedura projektowania ma charakter uniwersalny i stwarza możliwość dowolnego przyjmowania długości i promieni łuków kołowych oraz zróżnicowania rodzaju i długości stosowanych krzywych przejściowych. ◀

## Materiały źródłowe

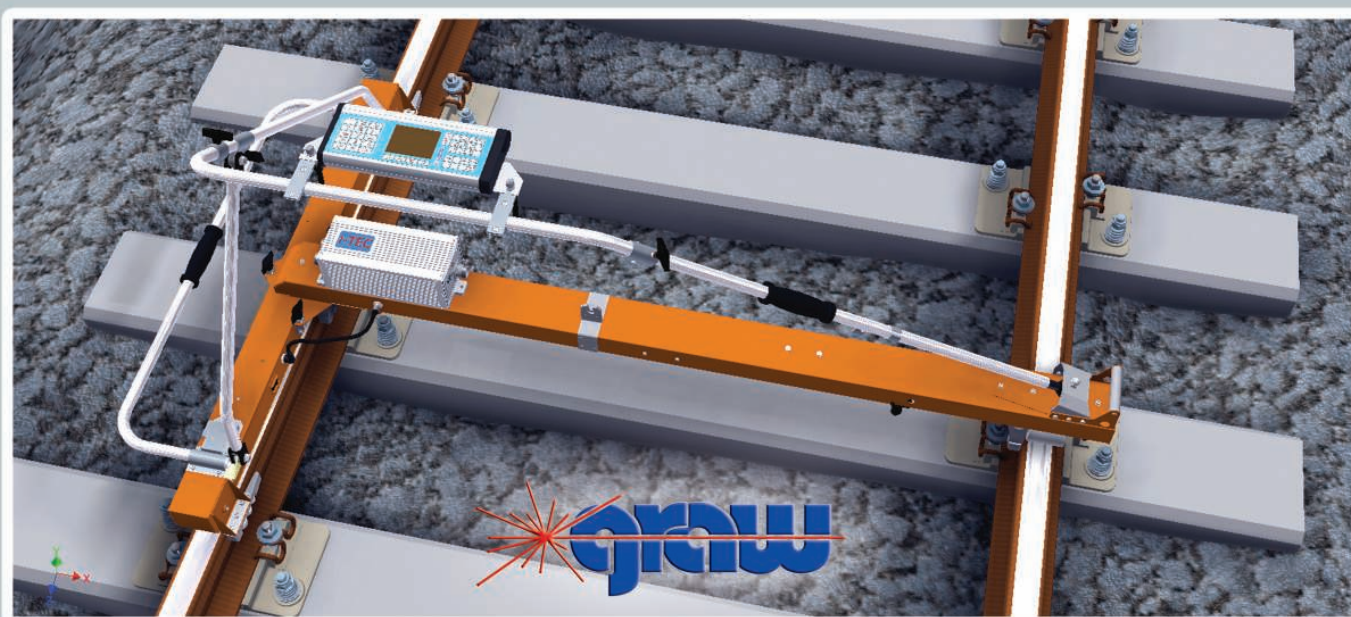
- [1] Bałuch H. Optymalizacja układów geometrycznych toru. WKŁ, Warszawa 1983.
- [2] Bosy J., Graszka W., Leonczyk M. ASG-EUPOS – A multifunctional precise satellite positioning system in Poland. European Journal of Navigation 2007, 5 (4), 2-6.
- [3] Koc W. Analytical method of modelling the geometric system of communication route. Mathematical Problems in Engineering 2014, Article ID 679817.
- [4] Koc W. Design of compound curves adapted to the satellite measurements. The Archives of Transport 2015, 34 (2), 37-49.
- [5] Koc W. Design of rail-track geometric systems by satellite measurement. Journal of Transportation Engineering 2012, 138 (1), January 1, 114-122.
- [6] Koc W. Projektowanie rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej w zapisie matematycznym. Przegląd Komunikacyjny 2012, 67 (7-8), 96-101.

- [7] Koc W., Chrostowski P. Computer-aided design of railroad horizontal arc areas in adapting to satellite measurements. *Journal of Transportation Engineering* 2014, 140 (3), 04013017-1 ÷ 04013017-8.
- [8] Koc W., Specht C. Application of the Polish active GNSS geodetic network for surveying and design of the railroad. *First International Conference on Road and Rail Infrastructure – CETRA 2010*, Opatija, Croatia, 17-18 May 2010.
- [9] Koc W., Specht C. Selected problems of determining the course of railway routes by use of GPS network solution. *Archives of Transport* 2011, 23 (3), 303-320.
- [10] Koc W., Specht C. Wyniki pomiarów satelitarnych toru kolejowego. *Technika Transportu Szynowego* 2009, 15 (7-8), 58-64.
- [11] Koc W., Specht C., Chrostowski P. Finding deformation of the straight rail track by GNSS measurements. *Annual of Navigation* 2012, 19 (1), 91-104.
- [12] Koc W., Specht C., Chrostowski P. The application effects of continuous satellite measurements of railway lines." *Conference Papers of 12th International Conference & Exhibition RAILWAY ENGINEERING-2013*, Railway Operation Section, London, United Kingdom, 10-11 July 2013.
- [13] Koc W., Specht C., Chrostowski P., Palikowska K. The accuracy assessment of determining the axis of railway track basing on the satellite surveying. *Archives of Transport* 2012, 34 (3), 307-320.
- [14] Korn G.A., Korn T.M. *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*. PWN, Warszawa 1983.
- [15] Parkinson. B. W., Spilker J. J. *Global Positioning System: theory and applications*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington 1996.
- [16] Seeber G. *Satellite geodesy: foundations, methods and applications*. Walter de Gruyter Verlag, Berlin – New York 1993.
- [17] Specht C. *System GPS*. Wydawnictwo BERNARDINUM, Pelplin 2007.
- [18] Specht C., Nowak A., Koc W., Jurkowska A. Application of the Polish Active Geodetic Network for railway track determination. *Transport Systems and Processes – Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*, CRC Press – Taylor & Francis Group, London 2011, 77-81.

REKLAMA

## TOROMIERZ INERCYJNY iTEC

### Dokładny pomiar strzałek



[www.graw.com](http://www.graw.com)