

Władysław Koc

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

KRZYWA PRZEJŚCIOWA Z WYGŁADZONĄ KRZYWIZNĄ DLA DRÓG KOLEJOWYCH

Rękopis dostarczono: marzec 2016

Streszczenie: W pracy przedstawiono koncepcję nowej postaci krzywej przejściowej, o liniowym przebiegu krzywizny na długości i wygładzonymi rejonami skrajnymi. Może ona stanowić alternatywę dla tzw. gładkich krzywych przejściowych, o nieliniowym przebiegu krzywizny na całej długości. Została tutaj wykorzystana uniwersalna metoda identyfikacji krzywych przejściowych za pomocą równań różniczkowych. Wyznaczono ogólne równania krzywizny oraz odpowiednie równania parametryczne krzywej. Wskazano na możliwość określania współrzędnych prostokątnych za pomocą całkowania numerycznego.

Słowa kluczowe: trasa kolejowa, układ geometryczny, krzywa przejściowa

1. WPROWADZENIE

Problematyka krzywych przejściowych w drogach kołowych i kolejowych jest wciąż aktualna. Trwają poszukiwania nowych postaci krzywych [1, 3-8, 15-17, 25]. W Polsce, w odniesieniu do dróg kolejowych, zajmuje się tym zagadnieniem zespół prof. Krzysztofa Zboińskiego, uwzględniając model dynamiczny układu pojazd szynowy – tor [20 - 24].

Większość krzywych przejściowych łączy ze sobą wspólny algorytm wyznaczania krzywizny – za pomocą równań różniczkowych [9, 11, 13]. Funkcji krzywizny $k(l)$ należy poszukiwać wśród rozwiązań równania różniczkowego

$$k^{(m)}(l) = f[l, k, k', \dots, k^{(m-1)}] \quad (1)$$

z warunkami

$$\begin{cases} k^{(i)}(0^+) = 0 & \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, n_1 \\ k^{(j)}(l_k^-) = \begin{cases} \frac{1}{R} & \text{dla } j = 0 \\ 0 & \text{dla } j = 1, 2, 3, \dots, n_2 \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

gdzie:

- R – promień łuku kołowego,
 l_k – długość krzywej przejściowej.

Wykorzystywanie warunków (2) sprawia, że funkcja $k(l)$ jest klasy C^n w przedziale $l \in \langle 0, l_k \rangle$, gdzie $n = \min(n_1, n_2)$. Równanie różniczkowe (1) może być, w szczególności, równaniem różniczkowym liniowym o stałych lub zmiennych współczynnikach, jednorodnym bądź niejednorodnym. W najbardziej znanych rozwiązaniach przyjmowana jest jednokowa liczba warunków na obu końcach przedziału, tj. $n_1 = n_2$. Dla dwóch warunków, czyli $i = j = 0$, otrzymuje się krzywiznę liniową, dla większej liczby warunków krzywizna na całej długości posiada charakter nieliniowy.

Podstawową wadę klotoidy (o krzywiznie liniowej) stanowi występowanie załomów na wykresie jej krzywizny w rejonach początkowym i końcowym. Jest to niekorzystne z punktu widzenia oddziaływań dynamicznych w układzie pojazd szynowy – tor. Poprawa sytuacji powinna więc polegać na wyłagodzeniu krzywizny w tych właśnie rejonach. Tymczasem alternatywę dla krzywizny liniowej stanowią rozwiązania o jej nieliniowym przebiegu na całej długości krzywej przejściowej. I to właśnie może stanowić przyczynę niechęci, jaka występuje w stosunku do praktycznego stosowania gładkich krzywych przejściowych. Nieliniowy przebieg krzywizny na długości krzywej przejściowej nie stanowi bowiem żadnego problemu jeśli chodzi o utrzymanie położenia krzywej w płaszczyźnie poziomej. Jednocześnie jednak oznacza on konieczność zastosowania odpowiedniej nieliniowej rampy przechyłkowej. Eksploatacja toru kolejowego powoduje również jego deformacje pionowe. Zdeformowany kształt rampy przechyłkowej należy wciąż odtwarzać i niewątpliwie łatwiej to robić dążąc do przebiegu liniowego.

I może właśnie dlatego we Francji oraz w USA rejon skrajne krzywych przejściowych w postaci klotoidy są modyfikowane w celu likwidacji załomów na wykresie krzywizny i uzyskanie jej nieliniowego przebiegu. Na kolejach francuskich takie rozwiązania stosuje się nie tylko w systemie Kolei Dużych Prędkości, ale również na liniach kolei konwencjonalnych, gdzie prędkość przekracza 100 km/h [18]. Nie od rzeczy byłoby jeszcze wspomnieć, że na korzyści wynikające z liniowego przebiegu krzywizny (oraz prostoliniowych ramp przechyłkowych) wskazują również niektóre badania modelowe układu pojazd szynowy – tor [19].

W tej sytuacji wydaje się celowe opracowanie nowej krzywej przejściowej o liniowym przebiegu krzywizny na długości i wygładzonymi rejonami skrajnymi. Zostanie do tego celu wykorzystana uniwersalna metoda identyfikacji krzywych przejściowych za pomocą równań różniczkowych [10, 11, 13].

2. WYZNACZENIE OGÓLNYCH RÓWNAŃ KRZYWIZNY

Krzywa przejściowa o długości l_k , po przyjęciu współczynnika $C \leq 0,25$, zostaje podzielona na trzy strefy (rys. 1):

- rejon początkowy o długości $C \cdot l_k$ posiadający wyłagodzony wykres krzywizny,
- rejon środkowy o długości $(1 - 2C) l_k$ posiadający krzywiznę liniową,
- rejon końcowy o długości $C \cdot l_k$ posiadający krzywiznę wyłagodzoną.



Na początku krzywej przejściowej krzywizna $k(0) = 0$, natomiast na jej końcu $k(l_k) = \frac{1}{R}$.



Rys. 1. Schemat ideowy rozwiązania problemu

Jak wynika z rysunku 1, rejon środkowy ($l \in \langle Cl_k, l_k - Cl_k \rangle$), o liniowym przebiegu krzywizny, musi się charakteryzować współczynnikiem nachylenia większym niż wartość średnia na całej długości krzywej przejściowej. Przyjmujemy zatem, że $k'(l) = \frac{D}{R l_k}$, przy czym $D > 1$ (dokładne granice dla tego parametru zostaną określone na podstawie analizy rozwiązania dla rejonu początkowego krzywej). Dzięki takiemu założeniu możemy ustalić wartości krzywizny na początku i na końcu rejonu środkowego.

Rejon 1 początkowy ($l \in \langle 0, Cl_k \rangle$)

Przyjmujemy warunki brzegowe

$$\begin{cases} k(0) = 0, & k(Cl_k) = \frac{1-D(1-2C)}{2R}, \\ k'(0) = 0, & k'(Cl_k) = \frac{D}{R l_k} \end{cases}, \quad (3)$$

i równanie różniczkowe (dla rozwiązania wielomianowego)

$$k^{(4)}(l) = 0 \quad (4)$$

W wyniku rozwiązania problemu różniczkowego (3), (4) otrzymujemy następujące równanie krzywizny:

$$k(l) = \frac{3-3D(1-C)+CD}{2C^2 R l_k^2} l^2 - \frac{1-D(1-C)}{C^3 R l_k^3} l^3 \quad (5)$$

Uzyskanie poprawnego rozwiązania wymaga odpowiedniego doboru parametrów C i D . Dla przyjętego C nie wystarcza spełnienie warunku $D > 1$. Musi być bowiem spełniony warunek



$$k'(l) = \frac{3-3D(1-C)+CD}{C^2 R l_k^2} l - \frac{3-3D(1-C)}{C^3 R l_k^3} l^2 \geq 0$$

Z powyższego warunku wynika przedział wartości parametru D .

$$\frac{3(1-C)}{3-6C+4C^2} \leq D \leq \frac{3}{3-4C} \quad (6)$$

W tablicy 1 zestawiono graniczne wartości parametru D .

Tablica 1

Graniczne wartości parametru D dla różnych wartości C

C	D_{min}	D_{max}	C	D_{min}	D_{max}
0	1	1	0,13	1,14093	1,20968
0,01	1,01007	1,01351	0,14	1,15261	1,22951
0,02	1,02027	1,02740	0,15	1,16438	1,25000
0,03	1,03060	1,04167	0,16	1,17625	1,27119
0,04	1,04106	1,05634	0,17	1,18820	1,29310
0,05	1,05166	1,07143	0,18	1,20023	1,31579
0,06	1,06239	1,08696	0,19	1,21233	1,33929
0,07	1,07324	1,10294	0,20	1,22449	1,36364
0,08	1,08422	1,11940	0,21	1,23669	1,38889
0,09	1,09533	1,13636	0,22	1,24893	1,41509
0,10	1,10656	1,15385	0,23	1,26119	1,44231
0,11	1,11790	1,17187	0,24	1,27346	1,47059
0,12	1,12936	1,19048	0,25	1,28571	1,50000

Rejon 2 środkowy ($l \in \langle Cl_k, l_k - Cl_k \rangle$)

Dla odcinka środkowego obowiązują warunki

$$k(Cl_k) = \frac{1-D(1-2C)}{2R} \quad , \quad k(l_k - Cl_k) = \frac{1+D(1-2C)}{2R} \quad (7)$$

oraz równanie różniczkowe

$$k''(l) = 0 \quad (8)$$

Otrzymujemy równanie krzywizny liniowej

$$k(l) = \frac{1-D}{2R} + \frac{D}{R l_k} l \quad (9)$$

Rejon 3 końcowy ($l \in \langle l_k - Cl_k, l_k \rangle$)

Dla odcinka końcowego obowiązuje równanie różniczkowe (4) oraz następujące warunki brzegowe:

$$\begin{cases} k(l_k - Cl_k) = \frac{1+D(1-2C)}{2R} , & k(l_k) = \frac{1}{R} , \\ k'(l_k - Cl_k) = \frac{D}{R l_k} , & k'(l_k) = 0 . \end{cases} \quad (10)$$



Funkcję krzywizny opisuje równanie

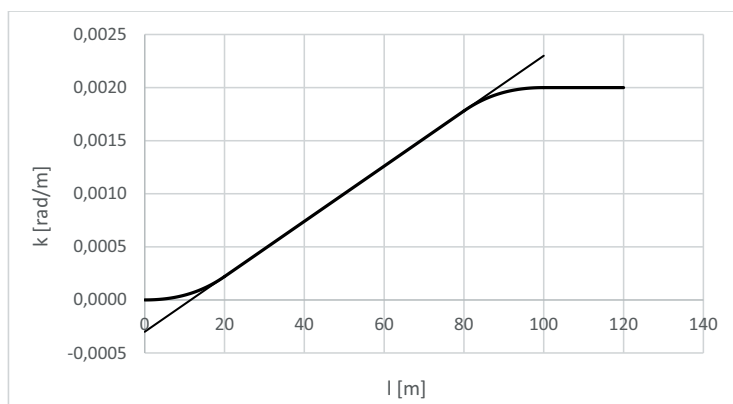
$$k(l) = a_{31} + a_{32} l + a_{33} l^2 + a_{34} l^3 \quad (11)$$

gdzie

$$a_{31} = \frac{6-9C+6C^3+15CD-12C^2D-6D}{6C^3R} \quad a_{32} = -\frac{12-12C+24CD-16C^2D-12D}{4C^3Rl_k}$$

$$a_{33} = \frac{6-3C+9CD-4C^2D-6D}{2C^3Rl_k^2} \quad a_{34} = -\frac{1+CD-D}{C^3Rl_k^3}$$

Na rysunku 2 przedstawiono przykładowe rozwiązanie problemu dla następujących danych: $R = 500$ m, $l_k = 100$ m, $C = 0,2$ i $D = 1,3$.



Rys 2. Wykres wygładzonej krzywizny dla $R = 500$ m, $l_k = 100$ m, $C = 0,2$ i $D = 1,3$

3. WYZNACZENIE RÓWNAŃ PARAMETRYCZNYCH

Równania parametryczne wygładzonej krzywej przejściowej wyznacza się z następujących wzorów:

$$x(l) = \int \cos \theta(l) dl \quad y(l) = \int \sin \theta(l) dl \quad \theta(l) = \int k(l) dl \quad (12)$$

Analityczne rozwiązanie problemu wymaga rozwinięcia funkcji podcałkowych $\cos \theta(l)$ i $\sin \theta(l)$ w szereg Maclaurina, a następnie scałkowania poszczególnych wyrazów. Do rozwinięcia funkcji w szereg wykorzystano program Maxima [14]. W dalszej części pracy zestawiono równania parametryczne uzyskane dla odpowiednich rejonów krzywej przejściowej (z pominięciem wyrazów nieistotnych).



Rejon 1 początkowy ($l \in \langle 0, Cl_k \rangle$)

$$x(l) = l \quad (13)$$

$$y(l) = \frac{A_{11}}{4} l^4 + \frac{A_{12}}{5} l^5 \quad (14)$$

gdzie:

$$A_{11} = \frac{3-3D(1-C)+CD}{6 C^2 R l_k^2} \quad , \quad A_{12} = -\frac{1-D(1-C)}{4 C^3 R l_k^3}$$

Rejon 2 (środkowy) $l \in \langle C l_k, (1-C)l_k \rangle$

$$\begin{aligned} x(l) = & x_1(Cl_k) + \cos A_{20}(l - l_{20}) + \frac{1}{24} [(-12A_{23}^2 l_{20} - 6 A_{22} A_{23}) \cos A_{20} + \\ & (8 A_{23}^3 l_{20}^3 + 12 A_{22} A_{23}^2 l_{20}^2 + 6 A_{22}^2 A_{23} l_{20} + A_{22}^3) \sin A_{20}] (l - l_{20})^4 + \frac{1}{120} [(-12 A_{23}^2 + \\ & 16 A_{23}^4 l_{20}^4 + 32 A_{22} A_{23}^3 l_{20}^3 + 24 A_{22}^2 A_{23}^2 l_{20}^2 + 8 A_{22}^3 A_{23} l_{20} + A_{22}^4) \cos A_{20} + \\ & (48 A_{23}^3 l_{20}^3 + 48 A_{22} A_{23}^2 l_{20}^2 + 12 A_{22}^2 A_{23}) \sin A_{20}] (l - l_{20})^5 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} y(l) = & y_1(Cl_k) + \sin A_{20}(l - l_{20}) + \frac{1}{2} [(2 A_{23} l_{20} + A_{22}) \cos A_{20}] (l - l_{20})^2 - \\ & \frac{1}{6} [(-2 A_{23}) \cos A_{20} + (4 A_{23}^2 l_{20}^2 + 4 A_{22} A_{23} l_{20} + A_{22}^2) \sin A_{20}] (l - l_{20})^3 \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie

 $x_1(Cl_k)$, $y_1(Cl_k)$ – z rejonu początkowego

$$l_{20} = Cl_k \quad , \quad A_{20} = A_{21} + A_{22} l_{20} + A_{23} l_{20}^2$$

$$A_{21} = \frac{3D-CD-3}{12R} Cl_k \quad , \quad A_{22} = \frac{1-D}{2R} \quad , \quad A_{23} = \frac{D}{2R l_k}$$

Rejon 3 (końcowy) $l \in \langle (1-C)l_k, l_k \rangle$

$$\begin{aligned} x(l) = & x[(1-C)l_k] + \cos A_{30}(l - l_{30}) - \frac{1}{2} [(2 A_{33} l_{30} + 3 A_{34} l_{30}^2 + 4 A_{35} l_{30}^3 + \\ & A_{32}) \sin A_{30}] (l - l_{30})^2 - \frac{1}{6} [(4 A_{33}^2 l_{30}^2 + 12 A_{33} A_{34} l_{30}^3 + 16 A_{33} A_{35} l_{30}^4 + 9 A_{34}^2 l_{30}^4 + \\ & 24 A_{34} A_{35} l_{30}^5 + 16 A_{35}^2 l_{30}^6 + 8 A_{32} A_{35} l_{30}^3 + 6 A_{32} A_{34} l_{30}^2 + 4 A_{32} A_{33} l_{30} + A_{32}^2) \cos A_{30} + \\ & (2 A_{33} + 6 A_{34} l_{30} + 12 A_{35} l_{30}^2) \sin A_{30}] (l - l_{30})^3 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y(l) = & y[(1-C)l_k] + \sin A_{30}(l - l_{30}) + \frac{1}{2} [(2 A_{33} l_{30} + 3 A_{34} l_{30}^2 + 4 A_{35} l_{30}^3 + \\ & A_{32}) \cos A_{30}] (l - l_{30})^2 - \frac{1}{6} [(-2 A_{33} - 6 A_{34} l_{30} - 12 A_{35} l_{30}^2) \cos A_{30} + (4 A_{33}^2 l_{30}^2 + \\ & 12 A_{33} A_{34} l_{30}^3 + 16 A_{33} A_{35} l_{30}^4 + 9 A_{34}^2 l_{30}^4 + 24 A_{34} A_{35} l_{30}^5 + 16 A_{35}^2 l_{30}^6 + 8 A_{32} A_{35} l_{30}^3 + \\ & 6 A_{32} A_{34} l_{30}^2 + 4 A_{32} A_{33} l_{30} + A_{32}^2) \sin A_{30}] (l - l_{30})^3 \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie

 $x_2[(1-C)l_k]$, $y_2[(1-C)l_k]$ – z rejonu środkowego

$$l_{30} = (1-C)l_k \quad , \quad A_{30} = A_{31} + A_{32} l_{30} + A_{33} l_{30}^2 + A_{34} l_{30}^3 + A_{35} l_{30}^4$$



$$A_{31} = -\frac{3-6C+6C^3+9CD-8C^2D-3D}{12C^3R}l_k, \quad A_{32} = \frac{6-9C+6C^3+15CD-12C^2D-6D}{6C^3R}$$

$$A_{33} = -\frac{12-12C+24CD-16C^2D-12D}{8C^3Rl_k}, \quad A_{34} = \frac{a_{33}}{3} = \frac{6-3C+9CD-4C^2D-6D}{6C^3Rl_k^2}$$

$$A_{35} = -\frac{1+CD-D}{4C^3Rl_k^3}$$

4. METODA CAŁKOWANIA NUMERYCZNEGO

Analityczna forma wzorów (13) – (18) jest dosyć złożona, co może nie odpowiadać wymaganiom niektórych użytkowników. Znajduje to swój wyraz m. in. w komercyjnych programach komputerowych wspomagających projektowanie układów geometrycznych toru [2, 12]. Współrzędne kartezjańskie uzyskuje się w nich za pomocą całkowania numerycznego. W tym celu należy przyjąć odpowiedni krok obliczeń d oraz podzielić krzywą przejściową na $n = \frac{l_k}{d}$ przedziałów. Kolejne współrzędne są wyznaczane z następujących wzorów:

$$x(l_p) = \frac{1}{2} d \sum_{i=1}^p |\cos \theta(l_i) - \cos \theta(l_{i-1})| \quad (19)$$

$$y(l_p) = \frac{1}{2} d \sum_{i=1}^p |\sin \theta(l_i) - \sin \theta(l_{i-1})| \quad (20)$$

gdzie $p = 1, 2, \dots, n$.

Metoda numeryczna została sprawdzona dla wielu przypadków, przy zastosowaniu kroku obliczeń 0,5 m i 1 m. Uzyskano przy tym pełną zgodność uzyskanych wyników z wynikami metody analitycznej. Niewątpliwie wiąże się to z regularnym przebiegiem funkcji $\theta(l)$. Nie oznacza to jednak, że należy zrezygnować ze stosowania metody analitycznej, która posiada charakter uniwersalny i stwarza dodatkowe możliwości interpretacyjne.

5. PREFEROWANA POSTAĆ KRZYWEJ

Stosując omawianą krzywą przejściową należy się liczyć występowaniem bardzo małych rzędnych poziomych w rejonie początkowym. Są one często wręcz niemożliwe do wykonania i w praktyce powoduje to wydłużenie odcinka prostego toru. Dlatego też długości skrajnych rejonów należy starać się ograniczyć, zwiększając jednocześnie długość rejonu środkowego, charakteryzującego się liniowym przebiegiem krzywizny. Założono, że wartość współczynnika C dla preferowanej postaci krzywej wyniesie $C = 0,05$, zaś współczynnika D (na podstawie tabeli 1) – $D = 1,06$. Otrzymujemy wówczas podane poniżej wzory na



krzywiznę oraz odpowiadające równania parametryczne dla poszczególnych rejonów krzywej przejściowej.

Rejon 1 początkowy ($l \in \langle 0, Cl_k \rangle$)

$$k(l) = \frac{32}{5Rl_k^2} l^2 + \frac{56}{Rl_k^3} l^3 \quad (21)$$

$$x(l) = l \quad (22)$$

$$y(l) = \frac{8}{15Rl_k^2} l^4 + \frac{14}{5Rl_k^3} l^5 \quad (23)$$

Rejon 2 (środkowy) $l \in \langle Cl_k, (1-C)l_k \rangle$

$$k(l) = -\frac{3}{100R} + \frac{53}{50Rl_k} l \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x(l) = & x_1(0,05 l_k) + \cos A_{20}(l - 0,05 l_k) + \frac{1}{24} \left[\left(-\frac{7314}{R^2 l_k} * 10^{-5} \right) \cos A_{20} + \right. \\ & \left. \left(\frac{12167}{R^3} * 10^{-9} \right) \sin A_{20} \right] (l - 0,05 l_k)^4 + \frac{1}{120} \left[\left(\frac{33708}{R^2 l_k^2} 10^{-4} + \frac{279841}{R^4} 10^{-12} \right) \cos A_{20} + \right. \\ & \left. \left(\frac{336444}{R^3 l_k} 10^{-8} \right) \sin A_{20} \right] (l - 0,05 l_k)^5 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y(l) = & y_1(0,05 l_k) + \sin A_{20} (l - 0,05 l_k) + \left(\frac{23}{2R} 10^{-3} \right) \cos A_{20} (l - 0,05 l_k)^2 - \\ & \frac{1}{6} \left[\left(-\frac{106}{Rl_k} 10^{-2} \right) \cos A_{20} + \left(\frac{529}{R^2} 10^{-6} \right) \sin A_{20} \right] (l - 0,05 l_k)^3 \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie $A_{20} = \frac{17}{48R} 10^{-3} l_k$

Rejon 3 (końcowy) $l \in \langle (1-C)l_k, l_k \rangle$

$$k(l) = -\frac{307}{5R} + \frac{904}{5Rl_k} l - \frac{872}{5Rl_k^2} l^2 + \frac{56}{Rl_k^3} l^3 \quad (27)$$

$$x(l) = x_2(0,95 l_k) + \cos A_{30} (l - 0,95 l_k) - \left(\frac{977}{2R} * 10^{-3} \right) \sin A_{30} (l - 0,95 l_k)^2 \quad (28)$$

$$y(l) = y_2(0,95 l_k) + \sin A_{30} (l - 0,95 l_k) + \left(\frac{977}{2R} * 10^{-3} \right) \cos A_{30} (l - 0,95 l_k)^2 \quad (29)$$

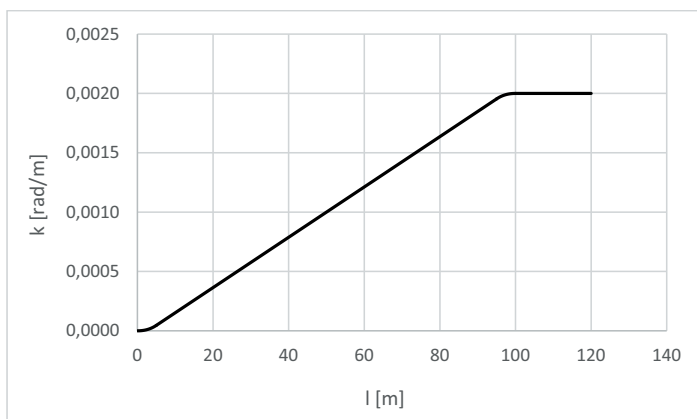
gdzie $A_{30} = \frac{13510625}{3R} * 10^{-7} l_k$

Na rysunku 3 przedstawiono wykres krzywizny dla następujących danych: $R = 500$ m, $l_k = 100$ m, $C = 0,05$ i $D = 1,06$, natomiast na rysunku 4 wykresy różnic rzędnych $\Delta y(l)$ dla krzywych przejściowych z rysunku 2 i 3 w odniesieniu do kłotoidy opisanej równaniami parametrycznymi

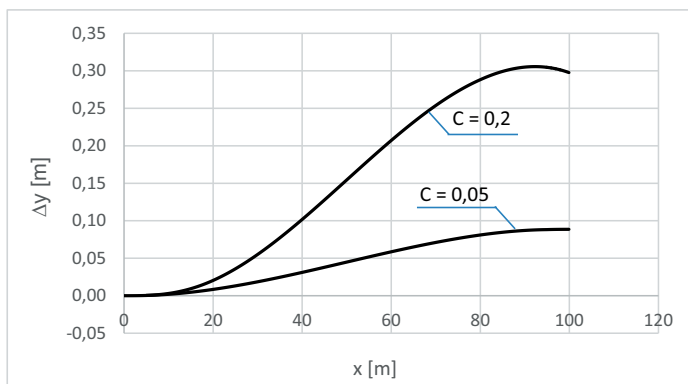


$$x(l) = l - \frac{1}{40 R^2 l_k^2} l^5 + \frac{1}{3456 R^4 l_k^4} l^9 - \frac{1}{599040 R^6 l_k^6} l^{13} + \dots \quad (30)$$

$$y(l) = \frac{1}{6 R l_k} l^3 - \frac{1}{336 R^3 l_k^3} l^7 + \frac{1}{42240 R^5 l_k^5} l^{11} - \dots \quad (31)$$



Rys 3. Wykres wygładzonej krzywizny dla $R = 500$ m, $l_k = 100$ m, $C = 0,05$ i $D = 1,06$



Rys. 4. Wykresy różnic rzędnych $\Delta y(l)$ dla krzywych przejściowych z wygładzoną krzywizną $C = 0,2$, $D = 1,3$ oraz $C = 0,05$, $D = 1,06$ w odniesieniu do klotoidy ($R = 500$ m, $l_k = 100$ m)

Jak się okazuje, rzędne krzywych przejściowych z wygładzoną krzywizną, na całej ich długości, są mniejsze niż rzędne klotoidy. Z rysunku 4 wynika, że różnice te nie są duże, zwłaszcza w przypadku krzywej $C = 0,05$. Oznacza to, że niezbędne poprzeczne przesunięcie łuku kołowego nie powinno stwarzać istotnych problemów lokalizacyjnych. Poprawa sytuacji, tj. zastąpienie klotoidy krzywą przejściową z wygładzoną krzywizną, może zostać zrealizowane w ramach standardowej regulacji osi toru.



6. PODSUMOWANIE

Podstawową wadę krzywej przejściowej w postaci klotoidy, która posiada krzywiznę liniową, stanowi występowanie załomów na wykresie jej krzywizny w rejonach początkowym i końcowym. Jest to niekorzystne z punktu widzenia oddziaływań dynamicznych w układzie pojazd szynowy – tor. Poprawa sytuacji powinna więc polegać na wyłagodzeniu krzywizny w tych właśnie rejonach. Jednocześnie korzystne będzie zachowanie liniowego charakteru krzywizny na pozostałej części krzywej, gdyż zlokalizowana tam prostoliniowa rampa przechyłkowa jest stosunkowo łatwa w bieżącym utrzymaniu.

W pracy przedstawiono koncepcję nowej krzywej przejściowej, o liniowym przebiegu krzywizny na długości i wygładzonymi rejonami skrajnymi. Do tego celu została wykorzystana własna, uniwersalna metoda identyfikacji krzywych przejściowych za pomocą równań różniczkowych. Wyznaczono ogólne równania krzywizny dla trzech rozpatrywanych rejonów, a następnie odpowiednie równania parametryczne. Wskazano na możliwość określania współrzędnych prostokątnych za pomocą całkowania numerycznego. Kierując się kryterium realizacyjnym, z uwagi na bardzo małe rzędne poziome w rejonie początkowym, przedstawiono sugestię ograniczenia długości rejonów skrajnych i dla takiego przypadku opracowano odpowiednie zależności teoretyczne.

Zastosowanie omawianej krzywej przejściowej może stanowić alternatywę dla tzw. gładkich krzywych przejściowych, o nieliniowym przebiegu krzywizny na całej długości. Można bowiem zauważyć pewną niechęć, jaka występuje w stosunku do ich praktycznego stosowania. Jak należy sądzić, wiąże się to zapewne z występowaniem na tych krzywych nieliniowej rampy przechyłkowej. W eksploatacji ulega ona pionowym deformacjom i jej kształt należy wciąż odtwarzać; niewątpliwie łatwiej to robić dążąc do utrzymania przebiegu liniowego.

Bibliografia

1. Arslan A., Tari E., Ziatdinov R., Nabiyev R., Transition curve modeling with kinematical properties: research on log-aesthetic curves, *Computer-Aided Design and Applications*, 2014, 10, 11(5), 509-517.
2. AutoCAD, <http://www.autodesk.pl>, dostęp 15.02.2016 r.
3. Baykal O., Tari E., Coskun Z., Sahin M., New transition curve joining two straight lines, *Journal of Transportation Engineering, ASCE*, 1997, 9, 123(5), 337-345.
4. Bosurgi G., D'Andrea A., A polynomial parametric curve (PPC-CURVE) for the design of horizontal geometry of highways, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2012, 4, 27(4), 303-312.
5. Cai H., Wang G., A new method in highway route design: joining circular arcs by a single C-Bezier curve with shape parameter, *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 2009, 10(4), 562-569.
6. Habib Z., Sakai M., G2 Pythagorean hodograph quintic transition between two circles with shape control, *Computer Aided Geometric Design*, 2007, 24, 252-266.
7. Habib Z., Sakai M., On PH quantic spirals joining two circles with one circle inside the other, *Computer-Aided Design*, 2007, 39, 125-132.
8. Kobryn A., New solutions for general transition curves, *Journal of Surveying Engineering, ASCE*, 2014, 2, 140(1), 12-21.
9. Koc W., *Elementy teorii projektowania układów torowych*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2004.
10. Koc W., Analytical method of modelling the geometric system of communication route, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, Article ID 679817.



11. Koc W., Identification of transition curves in vehicular roads and railways, *Logistics and Transport*, 2015, 28(4), 31-42.
12. MicroStation, <http://www.bentley.com>, dostęp 15.02.2016 r.
13. Mieloszyk E., Koc W., General dynamic method for determining transition curve equations, *Rail International – Schienen der Welt*, 1991, 22(10), 32-40.
14. Pakiet Maxima, <http://maksima.sourceforge.net>, dostęp 15.02.2016 r.
15. Tari E., Baykal O., An alternative curve in the use of high speed transportation systems, *ARI*, 1998, 10, 51(2), 126-135.
16. Tari E., Baykal O., A new transition curve with enhanced properties, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2011, 2, 32(5), 913-923.
17. Tasci L., Kuloglu N., Investigation of a new transition curve, *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, 2011, 6(1), 23-29.
18. Technical Memorandum 2.1.2 – Alignment Design Standards for High-Speed Train Operation. The California High-Speed Rail Authority, 2009.
19. Woźnica P., Kształtowanie i ocena własności dynamicznych kolejowych krzywych przejściowych z wykorzystaniem metod optymalizacji i symulacji, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 2012.
20. Woźnica P., Zboiński K., Koncepcja oceny i kształtowania kolejowych krzywych przejściowych z wykorzystaniem pełnego modelu dynamicznego pojazdu, *Przegląd Komunikacyjny*, 2009, 65(9/10), 29-35.
21. Zboiński K., Woźnica P., Optimisation of the railway transition curves' shape with use of vehicle-track dynamical model, *Archives of Transport*, 2010, 22(3), 387-407.
22. Zboiński K., Woźnica P., Formation of polynomial railway transition curves of even degrees, *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Transport*, 2014, 101, 189-202.
23. Zboiński K., Woźnica P., Badanie niegładkich kolejowych krzywych przejściowych typu wielomianowego z wykorzystaniem kryteriów zużyciowych, *Przegląd Komunikacyjny*, 2015, (70)8, 29-32.
24. Zboiński K., Woźnica P., Optymalizacja wielomianowych krzywych przejściowych z punktu widzenia wielkości zrywu, *Przegląd Komunikacyjny*, 2015, (70)9, 46-48.
25. Ziatdinov R., Family of superspirals with completely monotonic curvature given in terms of Gauss hypergeometric function, *Computer Aided Geometric Design*, 2012, 10, 29(7), 510-518.

TRANSITION CURVE WITH INTERIM SMOOTHED CURVATURE FOR RAILWAY ROADS

Summary: The concept of a new form of transition curve with a linear curvature on its length was presented in the paper. The regions of extremes were smoothed. The concept might be an alternative to the so-called smooth transition curves with a non-linear shape of the curvature along the entire length. The universal method of identifying transition curves using differential equations was used in the analysis. The general equations of the curvature and the corresponding parametric equations of the curve were determined. The numerical integration might be used to specify the rectangular coordinates.

Keywords: railway route, geometrical layout, transition curve

