

# Metoda Hendersona w ocenie dokładności geodezyjnego pomiaru osiadania słupów wielonawowej hali przemysłowej

Prof. dr hab. inż. Waldemar Kamiński<sup>1,2</sup>, dr hab. inż. Zygmunt Kurałowicz<sup>2</sup>, prof. nadzw. PG,  
mgr inż. Mariusz Chmielecki<sup>2</sup>, inż. Karol Rudziński<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Uniwersytet Warmińsko Mazurski w Olsztynie, Wydział Geodezji, Inżynierii Przestrzennej i Budownictwa

<sup>2</sup>Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Geodezyjne pomiary przemieszczeń są wykonywane na bardzo wielu budowanych i eksploatowanych obiektach inżynierskich. W przypadku budowli zlokalizowanych na terenach o zróżnicowanym podłożu gruntowym narażonych na nierównomierne osiadanie, okresowe geodezyjne pomiary kontrolne są niezbędne. W złożonych warunkach geotechnicznych posadawia się, w celu ograniczenia osiadań, obiekty budowlane, między innymi na palach lub płytach. Ponieważ hale przemysłowe są wyposażone w suwnice o różnej nośności, zatem konstrukcja hali i jej wyposażenie muszą mieć zagwarantowane bezpieczne warunki eksploatacji. Z tego powodu elementy nośne hal wymagają przeprowadzania cyklicznych geodezyjnych obserwacji przemieszczeń konstrukcji, w tym, między innymi, kontroli podlega osiadanie fundamentów i słupów w celu zapobieżenia awarii suwnic lub katastrofie budowlanej. Szczególnie wrażliwe obiekty podlegają monitoringowi przemieszczeń – pomiarom ciągłym w długim czasie. Jednocześnie, wszystkie wyniki obserwacji geodezyjnych muszą być wiarygodne i spełniać obowiązujące dokładności pomiarów. Na niepewność wyników pomiarów ma wpływ kilka czynników, do których należy zaliczyć między innymi: stabilność przyjętych punktów odniesienia (reperów), klasę sprzętu geodezyjnego, przyjętą metodę pomiaru, stabilizację punktów kontrolowanych na budowli i ich stabilność, warunki wykonywania cyklicznych pomiarów oraz doświadczenie obserwatora i zespołu pomiarowego. Celem artykułu jest przedstawienie praktycznego zastosowania wybranej metody teoretycznej w analizie wyników pomiarów geodezyjnych przemieszczeń konstrukcji hali przemysłowej.

Do oceny wiarygodności i dokładności wyników geodezyjnego pomiaru przemieszczeń może być stosowana między

innymi metoda Hendersona [2], polegająca na wyznaczaniu lokalnych współczynników wariancji. Metodę tę zastosowano w analizie dokładności wyników pomiarów osiadania słupów stalowej hali przemysłowej o konstrukcji szkieletowej, wykonywanych metodą niwelacji precyzyjnej od ponad 30 lat. W ocenie dokładności obserwacji geodezyjnych wykorzystano wyniki serii pomiarów wykonanych w 2015 roku [9].

Lokalne współczynniki wariancji urealniają wartości błędów średnich pomiaru, a tym samym i ocenę dokładności wyników wyrównania reprezentowaną macierzami kowariancji, na przykład wektora parametrów. Uzyskane z obliczeń estymowane wysokości (rzędne) i ich błędy średnie mogą być wykorzystane jako pomiar aktualny w wyznaczaniu przemieszczeń pionowych słupów oraz w dalszych szczegółowych analizach osiadania hali i deformacji konstrukcji.

## CHARAKTERYSTYKA OBIEKTU BADAŃ

Obiektem badań empirycznych są hale przedsiębiorstwa Mostostal Gdańsk SA zlokalizowane w gdańskiej dzielnicy Letnica. Hale są częścią kompleksu obiektów przemysłowych eksploatowanych ponad 40 lat. Konstrukcję nośną hal stanowią ramy dwuprzegubowe, złożone z pełnościennych słupów utwierdzonych w fundamentach oraz z kratowych rygli (wiązarów dachowych) połączonych przegubowo ze słupami. Rozstaw ram w hali wynosi 12 m plus jedna rama w rozstawie 6 m. W całym obiekcie zastosowano dwa rodzaje słupów głównych oraz jeden rodzaj wiązara dachowego. Wzdłuż kalenicy jest usytuowany świetlik o rozpiętości 6 m. Wysokość hali liczona

do kalenicy świetlika jest stała i wynosi 18,85 m. Słupy hali są oparte na stopach fundamentowych – posadowionych na palach Franki o średnicy 0,519 m i długości 18,20 m. Hala jest wyposażona w suwnicę pomostową oraz jedną suwnicę jednohakową o udźwigu 50 kN i jedną suwnicę dwuhakową o udźwigu 125/32 kN.

W rejonie lokalizacji hali podłoże jest pochodzenia deltowego, zwierciadło wody gruntowej znajduje się na głębokości od 0,30 do 0,90 m poniżej powierzchni terenu, a w podłożu zalegają następujące warstwy gruntów:

- do głębokości około 2,00 m – warstwa nasypu niekontrolowanego – NN (głównie cegła, żużel, piasek),
- od głębokości około 2,00 m do 6,00 m – piasek średni ( $P_s$ ) i drobny ( $P_d$ ) przewarstwiony gruntami pochodzenia organicznego (torfy i namuły – T/Nm) w stanie średniozagęszczonym ( $I_D = 0,3$ ),
- poniżej głębokości 6,00 m – mocniejsza warstwa z piasku grubego ( $P_r$ ) w stanie średniozagęszczonym ( $I_D = 0,5$ ).

Podłoże poniżej nasypu charakteryzuje się znaczną ściśliwością i nie nadaje się do posadowienia bezpośredniego. Usytuowane obiekty są narażone tym samym na istotne i nierównomierne osiadanie.

### PRZEBIEG POMIARÓW

Do pomiaru używano precyzyjnego automatycznego niwelatora Ni 007 firmy Carl Zeiss oraz kompletu łąt inwarowych. Podstawowe parametry techniczne wykorzystanego sprzętu to:

- błąd średni podwójnej niwelacji: 0,5 mm/1 km,
- najkrótsza odległość ogniskowania: 2,2 m,
- podział koła poziomego: 400 gradów,
- średnica obiektywu: 40 mm,
- powiększenie lunety:  $31,5 \times$ ,
- podział kontrolny łąty: 0,5 cm,
- szerokość kreski na inwarze łąty: 1,6 mm.

Dokładność wyznaczania rzędnych określono błędem średnim  $m_H = 0,2 \div 0,3$  mm. Ciąg niwelacji precyzyjnej nawiązano do reperów znajdujących się w ścianie jednego z sąsiednich budynków, oddalonego około 100 m od hal.

Podczas wykonywania pomiarów geodezyjnych, ze względu na utrudnione warunki (układ hal, dostęp do słupów, na których znajdują się repery, i tym podobne), korzystano z reperów roboczych znajdujących się w bezpośrednim sąsiedztwie hal. Pomiar osiadania słupów wykonywano z około 30 stanowisk niwelatora.

Uzyskane z pomiaru obserwacje geodezyjne wyrównano metodą najmniejszych kwadratów – sposobem parametrycznym z wykorzystaniem lokalnych współczynników wariancji. Otrzymane z obliczeń estymowane wysokości i ich błędy średnie mogą być wykorzystane w dalszych szczegółowych badaniach obiektu budowlanego, w tym także, jako pomiar aktualny w wyznaczaniu przemieszczeń pionowych.

Do oceny dokładności wyników wyrównania jest wykorzystywana między innymi estymowana macierz kowariancji wektora parametrów  $C_{\hat{x}} = m_0^2 Q_{\hat{x}}$

gdzie:

$Q_{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1}$  – macierz kofaktorów (przybliżeń wariancji),

$A$  – macierz znanych współczynników,

$P = Q_L^{-1}$  – macierz wag.

Macierz kofaktorów wyników obserwacji przedstawia postać  $Q_L = \text{Diag}(m_{\Delta h1}^2, m_{\Delta h2}^2, \dots, m_{\Delta hn}^2)$

gdzie:

$m_{\Delta hi}$  – błąd średni obserwowanego przewyższenia,

$i = 1, 2, \dots, n$  – liczba obserwacji.

W obliczeniach jest wykorzystywana macierz wag  $P = \text{Diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Wagi pomiaru są obliczane najczęściej jako  $p_i = 1/m_{\Delta hi}^2$ . Macierz wag  $P$  uwzględnia się między innymi w wyznaczaniu macierzy kowariancji  $C_{\hat{x}}$ . Szczególną rolę w wyznaczeniu estymatora macierzy  $C_{\hat{x}}$  odgrywa współczynnik  $m_0^2$ . Przy prawidłowo dobranych, do określania wag, błędach średnich  $m_{\Delta hi}$ , współczynnik wariancji  $m_0^2$  po wyrównaniu powinien być równy 1 ( $m_0^2 = 1$ ). Jeżeli  $m_0^2 < 1$  oznacza to, że przyjęte do obliczeń błędy średnie są zawyżone. Natomiast, gdy  $m_0^2 > 1$  wartości błędów średnich są zaniżone. Ponieważ wyniki pomiaru i obliczeń mogą być wykorzystywane do wyznaczania między innymi przemieszczeń pionowych konstrukcji, istotnym zagadnieniem jest określenie dokładności uzyskanych estymatorów parametrów. W celu realnej oceny dokładności wyników pomiaru, a tym samym głównie wyznaczenia estymatora macierzy kowariancji parametrów, można wykorzystać estymatory lokalnych współczynników wariancji  $\hat{\sigma}_{0i}^2 = m_{0i}^2$ ,

gdzie:

$l = 1, \dots, r$  – liczba jednorodnych grup w zbiorze wszystkich obserwacji [3, 17, 18, 19, 20].

Lokalne współczynniki wariancji są wyznaczane dla określonych wcześniej grup zbiorów obserwacji. Do estymacji lokalnych współczynników wariancji można wykorzystać metodę największej wiarygodności [4, 7, 8, 10, 21], można także zastosować formułę bayesowską [5, 6, 7, 11, 12, 13]. Rezultatem obliczeń są estymatory „a posteriori” lokalnych współczynników wariancji. Wyznaczając wartość oczekiwaną formuły Bayesa, uzyskamy bayesowskie lokalne współczynniki wariancji [6, 7, 11, 13]. Inną grupę stanowią estymatory, których wyznaczenie nie wymaga przyjęcia jakichkolwiek rozkładów prawdopodobieństw. Są to metoda MINQUE [14, 15, 16] i metoda Hendersona adaptowana na potrzeby rachunku wyrównawczego przez Wiśniewskiego [17, 18, 19]). Do celów niniejszej pracy wykorzystano zmodyfikowaną metodę Hendersona (MH) [1, 17]. W celu realizacji MH cały zbiór obserwacji podzielono na trzy jednorodne grupy. Kryterium podziału wynikało z właściwości fizycznych badanego obiektu. Pierwszy zbiór obserwacji jest umiejscowiony pod częściowo zadaszoną konstrukcją. Drugi zbiór to pomiary wykonane w zamkniętym pomieszczeniu hali produkcyjnej. Natomiast trzeci to wyniki pomiaru uzyskane w sąsiedniej hali produkcyjnej. Wpływ na wyniki obserwacji w wyróżnionych zbiorach miała między innymi praca suwnic w halach i spowodowane tą pracą drgania obiektu, wibracje i tym podobne, oraz zróżnicowane warunki gruntowe. Wyróż-

nienie trzech jednorodnych zbiorów obserwacji spowodowało, że obliczenia MH realizowano także dla trzech lokalnych współczynników wariancji  $\hat{\sigma}_{01}^2 = m_{01}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{02}^2 = m_{02}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{03}^2 = m_{03}^2$ .

W obliczeniach przyjęto następujący układ równań poprawek:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L} \quad (1)$$

gdzie:

$\hat{\mathbf{v}}$  – wektor estymatorów poprawek do wyników obserwacji,

$\hat{\mathbf{X}}$  – wektor parametrów modelu,

$\mathbf{L}$  – wektor wyrazów wolnych.

Procedura iteracyjna wyznaczania lokalnych współczynników wariancji zmodyfikowaną MH przebiega następująco:

$$\hat{\mathbf{X}}^{(\tau)} = (\mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_L^{(\tau-1)})^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_L^{(\tau-1)}) \mathbf{L}$$

$$\mathbf{v}_i^{(\tau)} = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{X}}^{(\tau)} - \mathbf{L}_i \quad (2a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(\tau)} = (\mathbf{F}^{(\tau)})^{-1} \mathbf{g}^{(\tau)}$$

$$\mathbf{Q}_L^{(\tau)} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \mathbf{Q}_{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{02}^2 \mathbf{Q}_{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_{03}^2 \mathbf{Q}_{L_3} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

$\tau = 1, 2, \dots$  liczba iteracji

Obliczenia należy zakończyć, gdy wektor  $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \approx [1, 1, 1]^T$  (w granicach dokładności obliczeń numerycznych).

W zależności (2) przyjęto macierz współczynników

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_2 & f_{2,1} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_3 \end{bmatrix}$$

gdzie:

dla  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $f_i = (\bar{n}_i - 2\bar{a}_i + \bar{b}_i)$ ;

$\bar{n}_i$  – liczba obserwacji w grupie,

$\bar{a}_i = tr(\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_X)$ ,  $\bar{b}_i = tr(\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_X \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_X)$ ,

$f_{i,j} = f_{j,i} = tr(\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_X \mathbf{Q}_j \mathbf{Q}_X)$ ,

$\mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q}_{L_i}^{-1} \mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j^T \mathbf{Q}_{L_j}^{-1} \mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{Q}_X = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{L_i}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$

( $tr$  – ślad macierzy).

Przez  $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = [\hat{\sigma}_{01}^2, \hat{\sigma}_{02}^2, \hat{\sigma}_{03}^2]^T$  – oznaczono wektor estymatorów lokalnych współczynników wariancji. Wektor  $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]^T$ , przy czym  $g_i = \hat{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{Q}_{L_i}^{-1} \hat{\mathbf{v}}_i$ .

## WYNIKI WYRÓWNANIA

Sieć reperów kontrolowanych badanego obiektu wyznaczonych metodą niwelacji precyzyjnej zaprezentowano na rys. 1. Do analizy otrzymanych wyników pomiarów wyróżniono trzy jednorodne zbiory obserwacji.

Zbiór 1 – przewyższenia  $\Delta h_1, \dots, \Delta h_3$  (rys. 1, notacja 1).

Zbiór 2 – przewyższenia  $\Delta h_4, \dots, \Delta h_8$  (rys. 1, notacja 2).

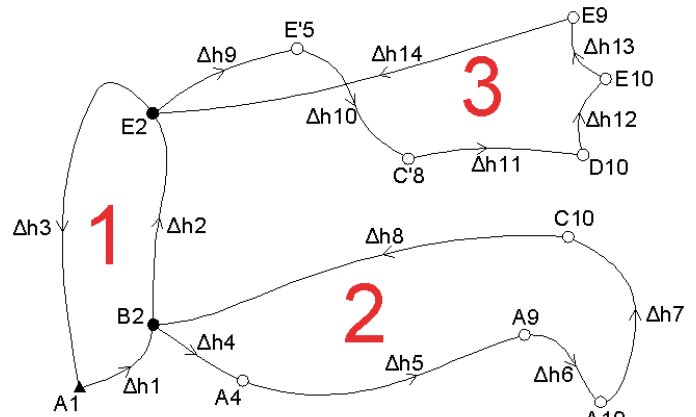
Zbiór 3 – przewyższenia  $\Delta h_9, \dots, \Delta h_{14}$  (rys. 1, notacja 3).

Na rys.1 przyjęto następujące oznaczenia:

A1 – reper referencyjny,

A9, B2, C10, D10, E9 – repery kontrolowane,

$\Delta h_1, \dots, \Delta h_{14}$  – pomierzone przewyższenia.



Rys. 1. Rozmieszczenie reperów kontrolowanych [22]

Tabl. 1. Zestawienie wartości błędów średnich

Błędy średnie a priori [mm]	Błędy średnie po wyrównaniu MH [mm]
$m_{\Delta h_1} = 0,14$	$m_{\Delta h_1} = 0,04$
$m_{\Delta h_2} = 0,20$	$m_{\Delta h_2} = 0,05$
$m_{\Delta h_3} = 0,37$	$m_{\Delta h_3} = 0,09$
$m_{\Delta h_4} = 0,20$	$m_{\Delta h_4} = 0,06$
$m_{\Delta h_5} = 0,20$	$m_{\Delta h_5} = 0,06$
$m_{\Delta h_6} = 0,14$	$m_{\Delta h_6} = 0,04$
$m_{\Delta h_7} = 0,14$	$m_{\Delta h_7} = 0,04$
$m_{\Delta h_8} = 0,31$	$m_{\Delta h_8} = 0,09$
$m_{\Delta h_9} = 0,20$	$m_{\Delta h_9} = 0,09$
$m_{\Delta h_{10}} = 0,14$	$m_{\Delta h_{10}} = 0,06$
$m_{\Delta h_{11}} = 0,14$	$m_{\Delta h_{11}} = 0,06$
$m_{\Delta h_{12}} = 0,14$	$m_{\Delta h_{12}} = 0,06$
$m_{\Delta h_{13}} = 0,14$	$m_{\Delta h_{13}} = 0,06$
$m_{\Delta h_{14}} = 0,28$	$m_{\Delta h_{14}} = 0,12$

W tabl. 1 zestawiono wartości błędów średnich pomiaru przyjętych do wyrównania w MNK (a priori) oraz błędy średnie pomiaru uzyskane po wyrównaniu MH.

Po wyrównaniu MH uzyskano globalny współczynnik  $m_0^2 = 0,998$  oraz lokalne współczynniki o następujących wartościach:  $m_{01}^2 = 0,993$ ,  $m_{02}^2 = 1,002$ ,  $m_{03}^2 = 0,997$ . Natomiast po wyrównaniu tradycyjną metodą NK globalny współczynnik  $m_0^2 = 0,112$ .

## PODSUMOWANIE

Z przeprowadzonych pomiarów praktycznych i ich analizy wynika, że pomiary osiadania słupów stalowych były wykonane z wysoką dokładnością. Zastosowanie w opracowaniu lokalnych współczynników wariancji urealniło wartości błędów średnich wykorzystanych następnie do obliczeń wag obserwacji.

Przedstawiona metoda opracowania wyników obserwacji uwzględniająca lokalne współczynniki wariancji będzie nadal wykorzystywana w teoretyczno-empirycznych analizach przemieszczeń kompleksu hal.

Należy dodać, że w kolejnej sesji pomiarowej będą wykorzystane dwa instrumenty. Jeden to wspomniany niwelator precyzyjny Ni007. Zapewni on uzyskanie porównywalnych z innymi sesjami pomiarowymi wyników obserwacji. Natomiast drugi to niwelator cyfrowy DNA003. Po wykonaniu pomiarów będzie możliwa wnikliwa analiza statystyczna uzyskanych wyników pomiaru, jak również otrzymanych rzędnych reperów kontrolowanych.

Szczególnie interesujące będzie jednak zastosowanie (w miejscach, gdzie pozwoli na to lokalizacja reperów kontrolowanych) niwelacji satelitarnej. Ponieważ tego rodzaju pomiary są również planowane na obiekcie badań.

#### LITERATURA

1. Gnot S.: Kwadratowa estymacja komponentów wariancyjnych w modelach liniowych. *Matematyka Stosowana*, t. XXVII, 1986, 97-147.
2. Henderson C. R.: Estimation of Variance and Covariance Components. *Biometrics*, Vol. 9, 1953, 226-252.
3. Kamiński W., Nowel K.: Local variance factors in deformation analysis of non homogenous monitoring networks. *Survey Review*, Vol. 45, 2013, 44-50.
4. Koch K. R.: Maximum likelihood estimate of variance components. *Bulletin Geodesique*, vol. 60, Nr 4, 1986, 329-338.
5. Koch K. R.: Bayesian inference for variance components. *Manuscripta Geodaetica*, vol. 12, Nr 4, 1987, 309-313.
6. Koch K. R.: Bayesian statistics for variance components with informative and noninformative priors. *Manuscripta Geodaetica*, vol. 13, Nr 6, 370-373, 1988.
7. Koch K. R.: Bayesian inference with geodetic applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
8. Kubik K.: The estimation of the weights of measured quantities within the method of least squares. *Bulletin Geodesique*, No 95, 1970, 21-40.
9. Kurałowicz Z., Chmielecki M., Rudziński K.: Opracowanie wyników pomiaru przemieszczeń pionowych i odchyłeń od pionu słupów w halach „Mostostalu Gdańsk, S.A.” Gdańsk, 2015 (Maszynopis PG).
10. Ou Z.: Estimation of variance and covariance components. *Bulletin Geodesique*, vol. 63, Nr 2, 1989, 139-148.
11. Ou Z.: Approximative Bayes estimation for variance components. *Manuscripta Geodaetica*, vol. 16, Nr 3, 1991, 168-172.
12. Ou Z.: Bayesian inference for variance factor with maximum entropy prior. *Manuscripta Geodaetica*, vol. 18, Nr 5, 1993, 242-248.
13. Ou Z., Koch K. R.: Analytical expressions for Bayes estimates of variance components. *Manuscripta Geodaetica*, vol. 19, Nr 5, 1994, 284-293.
14. Rao C. R.: Estimation of variance and covariance components – MINQUE Theory. *J. Mult. Analysis*, 1, 1971.
15. Rao C. R.: *Modele liniowe statystyki matematycznej*. PWN, Warszawa, 1982.
16. Sjöberg L. E.: Unbiased estimation of variance-covariance components in condition adjustment with unknowns – a MINQUE approach. *ZfV* (9), 1983, 382-387.
17. Wiśniewski Z.: Estimation of local variance coefficients in adjustment of geodetic networks. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*, Nr 2, 1989, 165-180.
18. Wiśniewski Z.: Estymacja lokalnych współczynników wariancji ( $m_0^2$ ) po wyrównaniu sieci kątowno-liniowych. *Geodezja i Kartografia*, t. XXXIX (15), 1990, 16-37.
19. Wiśniewski Z.: Lokalne współczynniki wariancji i ich estymacja po wyrównaniu sieci geodezyjnych. *Geodezja i Kartografia*, t. XXXIX (95), 1990, 96-107.
20. Wiśniewski, Z.: Problem wagowania w niejednorodnych sieciach geodezyjnych. – *Materiały VII Sesji Naukowo-Technicznej na temat „Aktualne problemy naukowe i techniczne prac geodezyjnych”*. AGH Kraków, OPGK Gdańsk, ART. Olsztyn, Korbiewów 3-5 X, 1991, 41-53.
21. Yu Z.: A universal formula of maximum likelihood estimation of variance-covariance components. *Journal of Geodesy*, vol. 70, 1996, 233-240.
22. Ziółkowska P.: Zastosowanie lokalnych współczynników wariancji w analizie dokładności sieci niwelacji precyzyjnej założonej w hali przemysłowej o konstrukcji szkieletowej. Praca dyplomowa Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej, 2016.