

Jerzy Czesław Ossowski

## ZASTOSOWANIE TRENDÓW PRZEŁĄCZNIKOWYCH W ANALIZIE PŁAC REALNYCH W POLSCE

**Słowa kluczowe:** płaca realna, wzrost płac, stopa wzrostu płac, liniowy trend przełącznikowy, wykładniczy trend przełącznikowy.

## APPLICATION OF THE SWITCHING TRENDS IN ANALYSIS OF THE REAL WAGES IN POLAND

**Keywords:** real wage, wages growth, rate of the wages growth, linear switching trend, exponential switching trend.

### Wstęp

Rozważmy informacje zawarte w tablicy 1, dotyczące przeciętnych miesięcznych płac nominalnych ( $WN$ ) i realnych ( $W$ ) w Polsce w latach 1995–2015.

Tablica 1. Wynagrodzenia nominalne ( $WN$ ), indeks poziomu cen ( $ICK$ ), wynagrodzenia realne w cenach roku 1995 ( $W_{95}$ ) oraz roku 2015 ( $W_{15}$  i roczne przyrosty płac realnych ( $dW$ ) oraz stopy wzrostu płac realnych ( $rW\%$ ) w Polsce w latach 1995–2015.

ROK	$WN$	$ICK$	$W_{95}$	$W_{15}$	$dW_{15}$	$rW\%$
1995	849,8	1,0000	849,8	2194,8	63,3	2,97
1996	1075,4	1,1991	896,9	2316,2	121,5	5,53
1997	1310,9	1,3777	951,5	2457,4	141,1	6,09
1998	1516,2	1,5403	984,4	2542,2	84,9	3,45
1999	1697,1	1,6527	1026,9	2652,0	109,7	4,32
2000	1893,7	1,8197	1040,7	2687,8	35,8	1,35
2001	2045,1	1,9197	1065,3	2751,3	63,5	2,36
2002	2133,2	1,9562	1090,5	2816,3	65,0	2,36
2003	2185,6	1,9724	1108,1	2861,7	45,4	1,61
2004	2273,4	2,0414	1113,6	2876,1	14,4	0,50
2005	2360,6	2,0845	1132,5	2924,7	48,6	1,69

ROK	<i>WN</i>	<i>ICK</i>	<i>W</i> <sub>95</sub>	<i>W</i> <sub>15</sub>	<i>dW</i> <sub>15</sub>	<i>rW</i> %
2006	2475,9	2,1054	1176,0	3037,0	112,4	3,84
2007	2672,6	2,1580	1238,4	3198,4	161,4	5,31
2008	2942,2	2,2487	1308,4	3379,1	180,7	5,65
2009	3101,7	2,3274	1332,7	3441,8	62,7	1,86
2010	3224,1	2,3879	1350,2	3487,0	45,1	1,31
2011	3403,5	2,4906	1366,5	3529,2	42,2	1,21
2012	3530,5	2,5828	1366,9	3530,2	1,0	0,03
2013	3659,1	2,6061	1404,2	3626,4	96,2	2,72
2014	3777,8	2,6061	1449,6	3743,7	117,33	3,24
2015	3900,0	2,5826	1510,1	3900,0	156,3	4,17

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Analizując informacje zawarte w tabeli 1 zauważmy, że płace te w ujęciu nominalnym wzrosły z poziomu 849,80 złotych w roku 1995 do poziomu 3900,00 złotych w roku 2015. Oznacza to, iż płace nominalne na przestrzeni rozpatrywanych lat wzrosły o około 358,9%. Z drugiej strony w tym samym przedziale czasowym indeks poziomu cen dóbr konsumpcyjnych (*ICK*) wzrósł z poziomu 1,00 w roku 1995 do poziomu 2,5826 w roku 2015. Wskazuje to, iż z pewnym przybliżeniem siła nabywcza 1000 zł z roku 1995 była równoważna sile nabywczej 2583 zł z roku 2015. Jednocześnie oznacza to, że poziom cen dóbr konsumpcyjnych na przestrzeni rozważanych lat wzrósł o 158,3%. Z uwagi na wyższą dynamikę przyrostu płac nominalnych od dynamiki przyrostu poziomu cen możemy uznać, iż generalnie płace realne na przestrzeni analizowanych lat wzrosły.

Pogłębiona analiza zmian płac wymaga wyrażenia ich w cenach stałych z wyróżnionego roku.

Celem wyrażenia płac realnych w cenach roku 1995 należy podzielić elementy kolumny *WN* w tabeli 1 przez elementy kolumny *ICK*, co w ujęciu formalnym zapiszemy następująco:

$$W_{95} : W_t^{1995} = \frac{WN_t}{ICK_t} [zł] \quad (1)$$

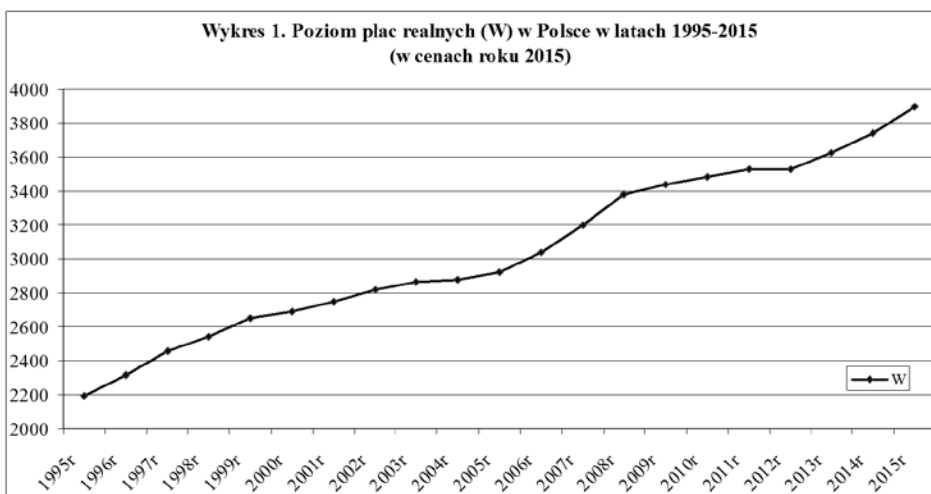
Analizując elementy kolumny *W*<sub>95</sub> - wyliczone według powyższego wzoru - stwierdzamy, iż urealnione płace w cenach roku 1995 wzrosły z poziomu



849,80 zł w roku 1995 do 1510,10 zł w roku 2015. Jednak urealnione w ten sposób płace odnoszą się do historycznego poziomu cen z przed ponad 20 lat. Z pozycji dzisiejszego obserwatora, niepamiętającego siły nabywczej pieniądza w roku 1995, właściwsze wydaje się wyrażenie płac realnych w cenach roku aktualnego, w tym wypadku roku 2015. Dlatego, też celem wyrażenia płac realnych w cenach roku 2015 należy elementy kolumny  $W_{95}$  przemnożyć przez poziom cen z roku 2015, czyli przez 2,5826, co w zapisie formalnym przedstawia się następująco:

$$W_{15} : W_t^{2015} = \frac{WN_t}{ICK_t / ICK_{2015}} = \frac{WN_t}{ICK_t} \cdot 2,5826 \text{ [zł]} \quad (2)$$

Analizując elementy kolumny  $W_{15}$ , wyliczone według powyższego wzoru, stwierdzamy iż urealnione płace w cenach roku 2015 w roku 1995 wynosiły 2194,8 zł. Oczywiście płace realne w roku 2015 wyrażone w cenach tego samego roku są równe płacy nominalnej z tegoż roku. Dla lepszego zobrazowania kształtowania się płac realnych w analizowanych latach rozważmy ich obraz graficzny przedstawiony na wykresie 1.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie informacji zawartych w Tabelcy 1.

Z analizy wykresu wynika, iż płace realne wykazywały zmienne tendencje wzrostu w dających się wyodrębnić podokresach. Powinno to rzutować na zmianę rocznych przyrostów płac realnych oraz ich rocznych stóp wzrostu. W tym kontekście postawić możemy następujące pytania:

- w jakim stopniu zmienne tendencje zmian płac realnych rzutowały na ich roczne przyrosty oraz ich roczne stopy wzrostu zmienne?
- czy można wyróżnić podokresy o zbliżonych przyrostach i stopach wzrostu płac realnych?

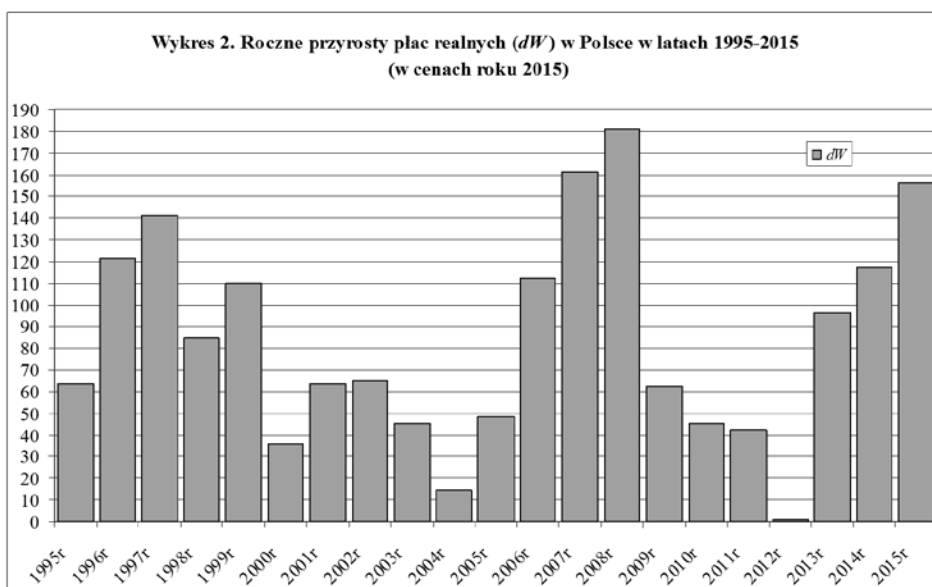


## 1. Roczne przyrosty i stopy wzrostu płac realnych w Polsce w latach 1995-2015<sup>1</sup>

Na wstępie umówmy się, że w dalszej części artykułu odwoływać się będziemy do płac realnych wyrażonych w cenach roku 2015, co oznacza, iż  $W=W_{15}$ . W warunkach przyjętej umowy roczny przyrost (wzrost) płac realnych ( $dW$ ) w zapisie formalnym przedstawia się następująco:

$$dW : \Delta W_t = W_t - W_{t-1} \text{ [zł]} \quad (3)$$

Wyliczone według powyższej formuły roczne przyrosty płac realnych przedstawiono w tabelicy 1, w kolumnie oznaczonej jako  $dW$ . Dla lepszego zobrazowania wyliczone przyrosty te przedstawiono na wykresie 2.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie informacji zawarty w Tabelicy 1.

Analizując informacje zawarte w tabelicy 1 oraz na wykresie 2 stwierdzamy, iż stosunkowo wyraźnie daje się wyodrębnić następujące podokresy o zbliżonych rocznych przyrostach płac:

- I. lata 1996-1999,
- II. lata 2000-2005,
- III. lata 2006-2008,
- IV. lata 2009-2012,
- V. lata 2013-2015.

<sup>1</sup> Patrz: Józwiak J., Podgórski J.: *Statystyka od podstaw*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2001, s. 489-496, Sobczak M.: *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, s. 276-278.



Wstępnie możemy uznać, że średnio najwyższe przyrosty płac realnych daje się zaobserwować w trzecim podokresie, obejmującym lata poprzedzającym światowy kryzys gospodarczy. Na tle przyrostów płac realnych warto rozważyć ich dynamikę. W tym celu obliczamy ich roczną stopę wzrostu ( $rW$ ) według następującej formuły:

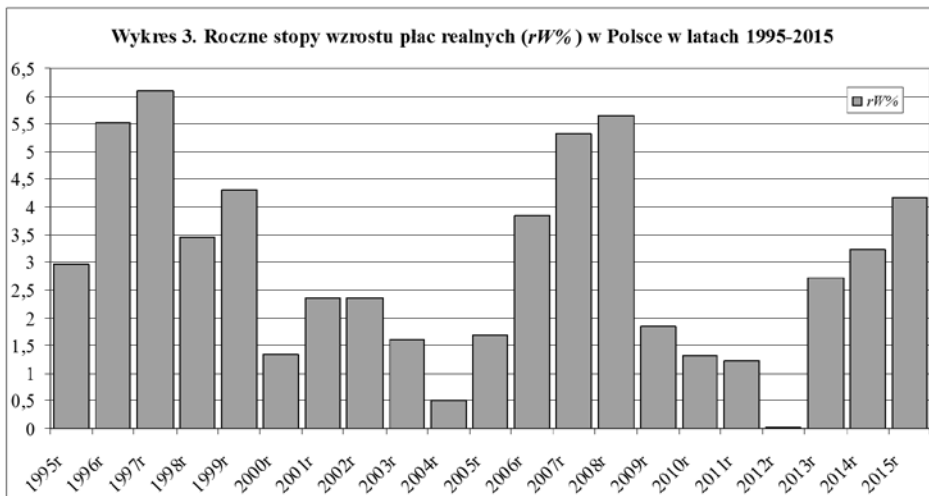
$$rW\% : rW_t\% = \frac{\Delta W_t}{W_{t-1}} \cdot 100 \quad (4)$$

Oceńmy wyliczone według powyższej formuły roczne stopy płac realnych przedstawiono w tablicy 1. Ich obraz graficzny ujęto na wykresie 3.

Analizując informacje zawarte w tablicy 1 oraz na wykresie 3 stwierdzamy, iż stosunkowo wyraźnie daje się wyodrębnić następujące podokresy o zbliżonych rocznych stopach wzrostu płac realnych:

- I. lata 1996–1999,
- II. lata 2000–2005,
- III. lata 2006–2008,
- IV. lata 2009–2012,
- V. lata 2013–2015.

Porównując wykresy 2 i 3 można stwierdzić, że podokresy dotyczące przyrostu płac realnych pokrywają się z podokresami dotyczącymi ich stóp wzrostu. Obecnie jednak należałoby uznać, że średnio najwyższe stopy wzrosty płac realnych daje się zaobserwować w pierwszym podokresie, obejmującym lata 1996-1999 i nie pokrywa się z podokresem o najwyższych przyrostach płac realnych z lat 2006–2008.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie informacji zawartych w Tablicy 1.

W kontekście wyodrębnionych – ze względu na podobieństwo przyrostów płac realnych oraz ich stóp wzrostu – podokresów warto zastanowić się nad rozwiązaniami modelowymi pozwalającymi oszacować z jednej strony średnie przyrosty płac realnych oraz z drugiej strony określającymi ich średnie stopy wzrostu w wyróżnionych podokresach.

## 2. Liniowy model trendu przełącznikowego płac realnych w Polsce w latach 1995-2015

W ujęciu klasycznym liniowy model trendu płac realnych zapiszemy w następujący sposób:

$$W(t, \varepsilon_t): W_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t \quad (5)$$

gdzie:

$t = (0), 1, 2, 3, \dots, n$  – numer obserwacji (roku), ( $t=0$  – nieobserwowany okres inicjujący),

$W_t$  – płaca realna w okresie (roku)  $t$ ,

$\beta_0, \beta_1$  – parametry strukturalne modelu (nielosowe),

$\varepsilon_t$  – składnik zakłócający modelu o charakterze losowym.

W powyższym modelu wyodrębniamy trend ( $TrW_t$ ), który z uwagi na nielosowy charakter parametrów strukturalnych modelu ( $\beta_0, \beta_1$ ) oraz zmiennej czasowej ( $t$ ), uznany może być za trend deterministyczny, co zapiszemy następująco:

$$TrW_t = W(t): \tilde{W}_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t \quad (6)$$

Zauważmy, że w okresie ( $t-1$ ) funkcję trendu deterministycznego zdefiniujemy następująco:

$$TrW_{t-1} = W(t-1): \tilde{W}_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 \cdot (t-1) \quad (7)$$

Obecnie odejmując od funkcji (6) funkcję postaci (7) otrzymujemy roczny przyrost trendu deterministycznego:

$$dTrW_t: \Delta \tilde{W}_t = \beta_1 \quad (8)$$

Na podstawie powyższego powiemy, że przeciętny roczny przyrost płac realnych wynosi  $\beta_1$  złotych, jako że parametr ten jest współczynnikiem kierunkowym trendu. Z kolei parametr  $\beta_0$  wyznacza hipotetyczny poziom trendu płacy realnej ( $\tilde{W}_0$ ) w okresie inicjującym, tzn. gdy  $t=0$ . Z przeprowadzonych wcześniej analiz wynika, iż w pięciu wyodrębnionych podokresach zmieniają się

w sposób zasadniczy przyrosty płac realnych. Oznacza to, że w okresach tych zmieniają się zarówno parametry kierunkowe funkcji trendu jak i parametry wartości inicjujących przebieg tego trendu.<sup>2</sup> Uwzględniając wcześniej sformułowane wnioski zaproponować możemy następujący liniowy model trendu przełącznikowego kształtowania się płac realnych:

$$W(t, X_{t=j}, \varepsilon_t): W_t = \beta_0 + \beta_{00}X_{00} + \beta_{06}X_{06} + \beta_{09}X_{09} + \beta_{13}X_{13} + (\beta_1 + \beta_{1,00}X_{00} + \beta_{1,06}X_{06} + \beta_{1,09}X_{09} + \beta_{1,13}X_{13}) \cdot t + \varepsilon_t \quad (9)$$

gdzie:

$t=1,2,\dots,21$  zmienna czasowa dla lat 1995–2015,

$$X_{00} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995–1999} \\ 1 & \text{w latach 2000–2015} \end{cases}$$

$$X_{06} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995–2005} \\ 1 & \text{w latach 2006–2015} \end{cases}$$

$$X_{09} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995–2008} \\ 1 & \text{w latach 2009–2015} \end{cases}$$

$$X_{13} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995–2012} \\ 1 & \text{w latach 2013–2015} \end{cases}$$

W powyższym modelu wyodrębniamy następującą funkcję trendu przełącznikowego:

$$TrW_t = W(t, X_{t=j}): \tilde{W}_t = \beta_0 + \beta_{00}X_{00} + \beta_{06}X_{06} + \beta_{09}X_{09} + \beta_{13}X_{13} + (\beta_1 + \beta_{1,00}X_{00} + \beta_{1,06}X_{06} + \beta_{1,09}X_{09} + \beta_{1,13}X_{13}) \cdot t \quad (10)$$

Na podstawie funkcji trendu przełącznikowego w następujący sposób określimy roczne przyrosty płac realnych ( $dTrW_t$ ) w wyodrębnionych podokresach:

– Podokres I dla lat 1995–1999:  $dTrW_t^I : \Delta \tilde{W}_t^I = \beta_1 \quad (11.1)$

<sup>2</sup> Na temat wykorzystania zmiennych zero-jedynkowych do opisanie zmian w czasie wyrazu wolnego oraz zmian współczynników kierunkowych literatura ekonometryczna jest stosunkowo bogata. Jednak bardzo interesujące uwagi na temat postępowania przy konstruowaniu modelu ekonometrycznego, sposobu prezentacji i interpretacji wyników oszacowań oraz testowaniu stabilności tego typu modeli znajdziemy w pozycji: Maddala G., S.: *Introduction to Econometrics*, John Wiley & Sons LTD, New York 2001, s. 302–316.



- Podokres II dla lat 2000–2005:

$$dTrW_t^{II} : \Delta \tilde{W}_t^{II} = \beta_1 + \beta_{1,00} \quad (11.2)$$

- Podokres III dla lat 2006–2008:

$$dTrW_t^{III} : \Delta \tilde{W}_t^{III} = \beta_1 + \beta_{1,00} + \beta_{1,06} \quad (11.3)$$

- Podokres IV dla lat 2009–2012:

$$dTrW_t^{IV} : \Delta \tilde{W}_t^{IV} = \beta_1 + \beta_{1,00} + \beta_{1,06} + \beta_{1,09} \quad (11.4)$$

- Podokres V dla lat 2012-2015:

$$dTrW_t^V : \Delta \tilde{W}_t^V = \beta_1 + \beta_{1,00} + \beta_{1,06} + \beta_{1,09} + \beta_{1,13} \quad (11.5)$$

Celem oszacowania modelu (9) dokonujemy jego transformacji do następującej postaci:

$$W_t = \beta_0 + \beta_{00}X_{00} + \beta_{06}X_{06} + \beta_{09}X_{09} + \beta_{13}X_{13} + \\ + \beta_1 \cdot t + \beta_{1,00}(X_{00} \cdot t) + \beta_{1,06}(X_{06} \cdot t) + \beta_{1,09}(X_{09} \cdot t) + \beta_{1,13}(X_{13} \cdot t) + \varepsilon_t \quad (12)$$

Na podstawie danych statystycznych zawartych w tablicy 1 oszacowano parametry strukturalne modelu (12) stosując metodę najmniejszych kwadratów (MNK). Wyniki oszacowań przedstawiają się następująco (patrz: **Dodatek A**):

$$\hat{W}_t = 2090,4 + 339,6 \cdot X_{00} - 1448,7 \cdot X_{06} + 2008,5 \cdot X_{09} - 1969,1 \cdot X_{13} + \\ \begin{matrix} (121,2) & (8,89) & (-9,33) & (10,34) & (-7,5) \\ + 114,0 \cdot t - 68,2 \cdot (X_{00} \cdot t) + 125,2 \cdot (X_{06} \cdot t) - 140,3 \cdot (X_{09} \cdot t) + 106,1 \cdot (X_{13} \cdot t) \\ (21,93) & (-10,46) & (10,2) & (-10,2) & (7,71) \end{matrix} \\ R^2 = 0,9994; \quad S_e = 16,45; \quad DW = 2,1076 \quad (13)$$

Pod ocenami parametrów zamieszczono wartości statystyki  $t$ -Studenta. Warto zauważyć, że wartość krytyczna statystyki  $t_{\alpha=0,05}=2,306$  dla  $[n-(k+1)]=11$  liczby stopni swobody. Z uwagi na fakt, iż w każdym przypadku  $t_{ij} > t_{\alpha=0,05}=2,306$  powiemy, że poddane szacowaniu parametry w sensie statystycznym istotnie różnią się od zera. Uwzględniając ponadto wyliczoną statystykę  $DW$ , wykluczającą występowanie dodatniej autokorelacji składników losowych, mamy silne podstawy, aby uznać poprawność doboru opóźnień w zbiorze zmiennych zero-jedynkowych. Tym samym zaproponowaną postać trendu przełącznikowego uznać możemy za wiarygodną. Ponadto na podstawie współczynnika determinacji ( $R^2$ ) stwierdzamy, że udział zmienności teoretycznej płacy realnej – określonej przez model – w zmienności empirycznej płacy realnej wynosi 99,94%. Ponadto na podstawie odchylenia standardowego reszt ( $S_e$ )



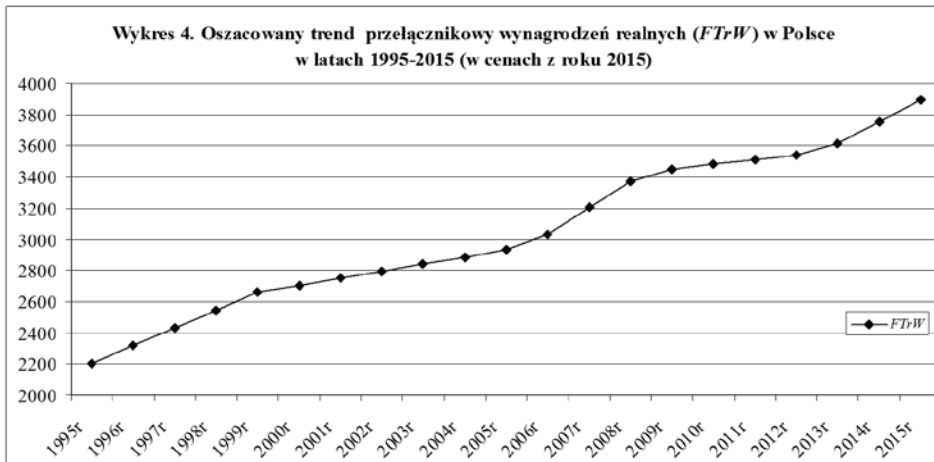


powiemy, że wartości rzeczywiste płac realnych wyrażonych w cenach roku 2015 odchylają się od wartości teoretycznych przeciętnie o 16,54 złote.

Dla celów analitycznych powyżej przedstawiony model wygodnie jest zapisać w następującej formie:

$$FTrW_t : \hat{W}_t = 2090,4 + 339,6X_{00} - 1448,7X_{06} + 2008,5X_{09} - 1969,1X_{13} + \\ + (114,0 - 68,2X_{00} + 125,2X_{06} - 140,3X_{09} + 106,1X_{13}) \cdot t \quad (14)$$

Warto zauważyć, że wartości teoretyczne płac realnych ( $\hat{W}_t$ ) faktycznie wyznaczają oszacowanie funkcji trendu przełącznikowego ( $FTrW_t$ ), czyli są dopasowaniem wartości (ang. *fitted values*) trendu przełącznikowego do danych rzeczywistych. Zostało to zaznaczone w zapisach (13) i (14) oszacowanej postaci modelu. Obraz graficzny oszacowanego trendu przełącznikowego przedstawiono na wykresie 4.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie oszacowanego modelu (14).

Obecnie, na podstawie wyrażenia (14) – wykorzystując zdefiniowania zmiennych zero-jedynkowych i jednocześnie zgodnie ze zdefiniowaniami rocznych przyrostów płac realnych, sformułowanymi w (11.1)–(11.5) – przedstawić możemy oszacowania liniowych modeli trendów wraz z ocenami rocznych przyrostów płac dla następujących podokresów:

– Podokres I: lata 1995-1999:

$$FTrW_t^I : \hat{W}_t^I = 2090,4 + 114,0 \cdot t \Rightarrow \Delta \hat{W}_I = 114,0 \quad (15.1)$$

– Podokres II: lata 2000-2005:

$$FTrW_t^{II} : \hat{W}_t^{II} = 2430,0 + 45,8 \cdot t \Rightarrow \Delta \hat{W}_{II} = 45,8 \quad (15.2)$$



- Podokres III: lata 2006-2008:

$$FTrW_t^{III} : \hat{W}_t^{III} = 981,3 + 171,0 \cdot t \Rightarrow \Delta \hat{W}_{III} = 171,0 \quad (15.3)$$

- Podokres IV: lata 2009-2012:

$$FTrW_t^{IV} : \hat{W}_t^{IV} = 2989,8 + 30,7 \cdot t \Rightarrow \Delta \hat{W}_{IV} = 30,7 \quad (15.4)$$

- Podokres V: lata 2013-2015 :

$$FTrW_t^V : \hat{W}_t^V = 1020,7 + 190,8 \cdot t \Rightarrow \Delta \hat{W}_t = 190,8 \quad (15.5)$$

Na podstawie powyżej przedstawionych oszacowań liniowego modelu trendu przełącznikowego płac realnych powiemy, że przeciętny roczny przyrost miesięcznych płac realnych wyrażonych w cenach roku 2015 wynosił odpowiednio:

- I. 114,00 zł w latach 1995–1999,
- II. 45,80 zł w latach 2000–2005,
- III. 171,00 zł w latach 2006–2008,
- IV. 30,70 zł w latach 2009–2012,
- V. 190,80 zł w latach 2013–2015.

### 3. Wykładniczy model trendu przełącznikowego płac realnych w Polsce w latach 1995–2015

Celem określenia dynamiki wzrostu oraz oszacowania przeciętnej stopy wzrostu płac realnych wygodnie jest posłużyć się wykładniczym modelem trendu. W ujęciu klasycznym model tej klasy zapiszemy w następujący sposób<sup>3</sup>:

$$W(t, \varepsilon_t) : W_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t) \quad (16)$$

gdzie:

$t = (0), 1, 2, 3, \dots, n$  – numer obserwacji (roku), ( $t=0$  – nieobserwowany okres inicjujący),

<sup>3</sup> Rozpatrywany model wykładniczy trendu należy do modeli klasy logarytmiczno-liniowych. Udowadnia się, że w przypadku gdy składnik losowy ( $\varepsilon_t$ ) w rozważanym tutaj modelu trendu ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej zero (tzn.  $E\varepsilon_t=0$ ) to zmienna objaśniana ( $W_t$ ) ma rozkład logarytmiczno-normalny. W rezultacie tego funkcja trendu wykładniczego ( $TrW_t$ ) przebiega na poziomie warunkowej mediany zmiennej objaśnianej, wyznaczając jednocześnie warunkowe średnie geometryczne zmiennej objaśnianej. (por.: Ossowski J. Cz.: *Modele klasy logarytmiczno-liniowej w analizie efektywności procesu produkcji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1989, s. 12–30, Ossowski J. Cz.: *Model multiplikatywny a średnia geometryczna – wybrane problemy*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Nr 394, Prace Katedry Ekonometrii i Statystyki Nr 15, Metody ilościowe w ekonomii, cz.1, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2005, s. 195–221.



- $W_t$  – płaca realna w okresie (roku)  $t$ ,  
 $\beta_0, \beta_1$  – parametry strukturalne modelu (nielosowe),  
 $\varepsilon_t$  – składnik zakłócający modelu o charakterze losowym.

W powyższym modelu wyodrębniamy trend ( $TrW_t$ ), który z uwagi na nielosowy charakter parametrów strukturalnych modelu ( $\beta_0, \beta_1$ ) oraz zmiennej czasowej ( $t$ ), uznany może być za trend deterministyczny, co zapiszemy następująco:

$$TrW_t = W(t): \tilde{W}_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 \cdot t) \quad (17)$$

Zauważmy, że w okresie  $(t-1)$  funkcję wykładniczego trendu deterministycznego zdefiniujemy następująco:

$$TrW_{t-1} = W(t-1): \tilde{W}_{t-1} = \exp[\beta_0 + \beta_1 \cdot (t-1)] \quad (18)$$

Obecnie dzieląc funkcję trendu (17) przez funkcję postaci (18) otrzymujemy roczny indeks trendu deterministycznego:

$$ITrW_t: I\tilde{W}_t = \frac{\tilde{W}_t}{\tilde{W}_{t-1}} = \exp \beta_1 \quad (19)$$

W świetle powyższego warto zauważyć, że:

$$\Delta \tilde{W}_t = \tilde{W}_t - \tilde{W}_{t-1} \Rightarrow \tilde{W}_t = \Delta \tilde{W}_t + \tilde{W}_{t-1} \quad (20)$$

Wprowadzając wyrażenie (20) do (19) otrzymujemy:

$$ITrW_t: I\tilde{W}_t = \frac{\Delta \tilde{W}_t + \tilde{W}_{t-1}}{\tilde{W}_{t-1}} = \exp \beta_1 \Rightarrow I\tilde{W}_t = \frac{\Delta \tilde{W}_t}{\tilde{W}_{t-1}} + 1 = \exp \beta_1 \quad (21)$$

Z powyższego wynika, że na podstawie wykładniczego modelu trendu roczną stopę wzrostu płac realnych zdefiniujemy następująco:

$$rTrW_t \% : r\tilde{W}_t \% = \frac{\Delta \tilde{W}_t}{\tilde{W}_{t-1}} \cdot 100 = (\exp \beta_1 - 1) \cdot 100 \cong \beta_1 \cdot 100 \quad (22)$$

Na podstawie (22) powiemy, że roczna stopa wzrostu płac realnych wynosi  $(\exp \beta_1 - 1) \cdot 100\%$ , co oznacza, że parametr  $\beta_1$  w modelu wykładniczym wyznacza roczną dynamikę spadku lub wzrostu zmiennej opisywanej przez ten model. Z kolei parametr  $\beta_0$  (tzn.  $\exp \beta_0$ ) wyznacza hipotetyczny poziom trendu



płacy realnej ( $\tilde{W}_0$ ) w okresie inicjującym, tzn. gdy  $t=0$ . Z przeprowadzonych wcześniej analiz wynika, iż w pięciu wyodrębnionych podokresach w sposób zasadniczy zmieniają się stopy wzrostu płac realnych. Oznacza to, że w okresach tych zmieniają się zarówno parametry określające dynamikę zmian trendu jak i parametry wyznaczające wartości inicjujących przebieg tego trendu. Uwzględniając wcześniej sformułowane wnioski zaproponować możemy następujący wykładniczy model trendu przełącznikowego kształtowania się płac realnych:

$$W(t, X_{t=j}, \varepsilon_t): W_t = \exp[\beta_0 + \beta_{00}X_{00} + \beta_{06}X_{06} + \beta_{09}X_{09} + \beta_{13}X_{13} + (\beta_1 + \beta_{1,00}X_{00} + \beta_{1,06}X_{06} + \beta_{1,09}X_{09} + \beta_{1,13}X_{13}) \cdot t + \varepsilon_t] \quad (23)$$

gdzie:

$t=1,2,\dots,21$  zmienna czasowa dla lat 1995-2015,

$$X_{00} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995 – 1999} \\ 1 & \text{w latach 2000 – 2015} \end{cases}$$

$$X_{06} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995 – 2005} \\ 1 & \text{w latach 2006 – 2015} \end{cases}$$

$$X_{09} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995 – 2008} \\ 1 & \text{w latach 2009 – 2015} \end{cases}$$

$$X_{13} = \begin{cases} 0 & \text{w latach 1995 – 2012} \\ 1 & \text{w latach 2013 – 2015} \end{cases}$$

W powyższym modelu wyodrębniamy następującą funkcję wykładniczego trendu przełącznikowego:

$$TrW_t = W(t, X_{t=j}): \tilde{W}_t = \exp[\beta_0 + \beta_{00}X_{00} + \beta_{06}X_{06} + \beta_{09}X_{09} + \beta_{13}X_{13} + (\beta_1 + \beta_{1,00}X_{00} + \beta_{1,06}X_{06} + \beta_{1,09}X_{09} + \beta_{1,13}X_{13}) \cdot t] \quad (24)$$

Na podstawie funkcji trendu przełącznikowego w następujący sposób określimy roczne stopy wzrostu płac realnych ( $rTrW_t\%$ ) w wyodrębnionych podokresach:

– Podokres I dla lat 1995–1999:  $r\tilde{W}_t^I \% = [\exp \beta_1 - 1] \cdot 100 \quad (25.1)$



- Podokres II dla lat 2000–2005:

$$r\tilde{W}_t^{II} = [\exp(\beta_1 + \beta_{1,00}) - 1] \cdot 100 \quad (25.2)$$

- Podokres III dla lat 2006–2008:

$$r\tilde{W}_t^{III} = [\exp(\beta_1 + \beta_{1,00} + \beta_{1,06}) - 1] \cdot 100 \quad (25.3)$$

- Podokres IV dla lat 2009–2012:

$$r\tilde{W}_t^{IV} = [\exp(\beta_1 + \beta_{1,00} + \beta_{1,06} + \beta_{1,09}) - 1] \cdot 100 \quad (25.4)$$

- Podokres V dla lat 2012–2015:

$$r\tilde{W}_t^V = [\exp(\beta_1 + \beta_{1,00} + \beta_{1,06} + \beta_{1,09} + \beta_{1,13}) - 1] \cdot 100 \quad (25.5)$$

Celem oszacowania modelu (9) dokonujemy jego transformacji do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \ln W_t = & \beta_0 + \beta_{00} X_{00} + \beta_{06} X_{06} + \beta_{09} X_{09} + \beta_{13} X_{13} + \\ & + \beta_1 \cdot t + \beta_{1,00} (X_{00} \cdot t) + \beta_{1,06} (X_{06} \cdot t) + \beta_{1,09} (X_{09} \cdot t) + \beta_{1,13} (X_{13} \cdot t) + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (26)$$

Na podstawie danych statystycznych zawartych w tablicy 1 oszacowano parametry strukturalne modelu (26) stosując metodę najmniejszych kwadratów (MNK). Wyniki oszacowań przedstawiają się następująco (patrz: **Dodatek B**):

$$\begin{aligned} \ln \hat{W}_t = & 7,653 + 0,152 \cdot X_{00} - 0,428 \cdot X_{06} + 0,637 \cdot X_{09} - 0,511 \cdot X_{13} + \\ & \begin{matrix} (1115,9) & (10,02) & (-6,92) & (8,24) & (-4,89) \end{matrix} \\ & + 0,0472 \cdot t - 0,0308 \cdot (X_{00} \cdot t) + 0,037 \cdot (X_{06} \cdot t) - 0,0446 \cdot (X_{09} \cdot t) + 0,02756 \cdot (X_{13} \cdot t) \\ & \begin{matrix} (22,8) & (-11,89) & (7,59) & (-8,14) & (5,04) \end{matrix} \\ & R^2 = 0,9991; \quad S_e = 0,0065; \quad DW = 1,7404 \end{aligned} \quad (27)$$

Pod ocenami parametrów zamieszczono wartości statystyki  $t$ -Studenta. Warto zauważyć, że wartość krytyczna statystyki  $t_{\alpha=0,05}=2,306$  dla  $[n-(k+1)]=11$  liczby stopni swobody. Z uwagi na fakt, iż w każdym przypadku  $t_{ij} > t_{\alpha=0,05}=2,306$  powiemy, że poddane szacowaniu parametry w sensie statystycznym istotnie różnią się od zera. Z tych też względów mamy silne podstawy, aby uznać poprawność doboru opóźnień w zbiorze zmiennych zero-jedynkowych. Tym samym zaproponowaną postać trendu przełącznikowego uznać możemy za w miarę wiarygodną. Ponadto na podstawie współczynnika determinacji ( $R^2$ ) stwierdzamy, że udział zmienności teoretycznej płacy realnej – określonej przez model – w zmienności empirycznej płacy realnej wynosi 99,91%. Ponadto na podstawie odchylenia standardowego reszt ( $S_e$ ), odnoszącego się do modelu wykładniczego, powiemy, że przeciętny udział wartości rzeczywistych płac realnych w poziomie płac teoretycznych wyznaczonych przez model waha



się w przedziale od 99,35% do 100,65%. Wskazuje to jednocześnie, że przeciętny udział reszt modelu postaci zdelogarytmowanej w poziomie wartości teoretycznych tej postaci wynosi około 0,65%.<sup>4</sup> Z drugiej strony wyliczona statystyka  $DW$  wskazuje na niemożliwość występowanie ujemnej autokorelacji składników losowych. Osłabia to wnioski formułowane na podstawie rozpatrywanego modelu.

Dla celów analitycznych powyżej przedstawiony model wygodnie jest zapisać w następującej formie:

$$FTrW_t : \hat{W}_t = \exp[7,653 + 0,152X_{00} - 0,428X_{06} + 0,637X_{09} - 0,511X_{13} + (0,0472 - 0,0308X_{00} + 0,037X_{06} - 0,0446X_{09} + 0,0276X_{13}) \cdot t] \quad (28)$$

Obecnie, na podstawie wyrażenia (28) – wykorzystując zdefiniowania zmiennych zero-jedynkowych i jednocześnie zgodnie ze zdefiniowaniami rocznych stóp wzrostu płac realnych, sformułowanymi w (25.1)–(25.5) – przedstawić możemy oszacowania wykładniczych modeli trendów wraz z ocenami rocznych stóp wzrostu płac dla następujących podokresów:

- Podokres I: lata 1995–1999:

$$\hat{W}_t^I = e^{7,65+0,0472 \cdot t} \Rightarrow r\hat{W}_I \% = (e^{0,0472} - 1) \cdot 100 = 4,83\% \quad (29.1)$$

- Podokres II: lata 2000–2005:

$$\hat{W}_t^{II} = e^{7,81+0,0163 \cdot t} \Rightarrow r\hat{W}_{II} \% = (e^{0,0163} - 1) \cdot 100 = 1,64\% \quad (29.2)$$

- Podokres III: lata 2006–2008:

$$\hat{W}_t^{III} = e^{7,53+0,0534 \cdot t} \Rightarrow r\hat{W}_{III} \% = (e^{0,0534} - 1) \cdot 100 = 5,49\% \quad (29.3)$$

- Podokres IV: lata 2009–2012:

$$\hat{W}_t^{IV} = e^{8,17+0,0088 \cdot t} \Rightarrow r\hat{W}_{IV} \% = (e^{0,0088} - 1) \cdot 100 = 0,88\% \quad (29.4)$$

- Podokres V: lata 2013–2015:

$$\hat{W}_t^V = e^{7,66+0,0364 \cdot t} \Rightarrow r\hat{W}_V \% = (e^{0,0364} - 1) \cdot 100 = 3,71\% \quad (29.5)$$

<sup>4</sup> Problemy interpretacji odchylenia standardowego reszt modeli wykładniczych zaliczanych do modeli klasy logarytmiczno-liniowej przedstawiono w pracach: Ossowski J. Cz.: *Własności interpretacyjne składnika losowego w modelach multiplikatywnych*, Przegląd Statystyczny, nr 2, 1988. s. 131–142., Ossowski J. Cz.: *Modele klasy logarytmiczno-liniowej w analizie efektywności procesu produkcji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1989, s. 31–36., Ossowski J. Cz.: *Model multiplikatywny a średnia geometryczna – wybrane problemy*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Nr 394, Prace Katedry Ekonometrii i Statystyki Nr 15, Metody ilościowe w ekonomii, cz.1, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2005, s.195–221.



Na podstawie powyżej przedstawionych oszacowań wykładniczego modelu trendu przełącznikowego płac realnych powiemy, że przeciętna roczna stopa wzrostu miesięcznych płac realnych wynosiła odpowiednio:

- I. 4,83% w latach 1995–1999,
- II. 1,64% w latach 2000–2005,
- III. 5,49% w latach 2006–2008,
- IV. 0,88% w latach 2009–2012,
- V. 3,71% w latach 2013–2015.

## Zakończenie

Z przeprowadzonej w artykule analizy płac realnych na podstawie materiału źródłowego oraz liniowych i wykładniczych przełącznikowych modeli ich trendu wynika, iż:

- We wszystkich analizowanych latach od 1995 do 2015 roku płace realne wykazywały wzrost mierzony ich rocznymi przyrostami oraz rocznymi stopami wzrostu.
- Wykazany wzrost płac realnych był okresowo nierównomierny zarówno w zakresie jego rocznych przyrostów jak i rocznych stóp wzrostu.
- Najmniejszy wzrost płac realnych pod względem absolutnym i względnym zaobserwowano w podokresie II poprzedzającym przystąpienie Polski do Unii Europejskiej a obejmującym lata 2000–2005 oraz w podokresie IV, obejmującym lata 2009–2012, czyli lata światowego kryzysu gospodarczego.
- Kolejność podokresów o największych przyrostach płac realnych nie pokrywa się z kolejnością podokresów o największych stopach wzrostu płac realnych.
- Stosując trendy przełącznikowe wykazano, że największy roczny przyrost miesięcznych płac realnych – wynoszący około 190,80 zł – zaobserwowano w podokresie V obejmującym lata 2013–2015; przeciętna roczna stopa wzrostu płac realnych wynosiła wówczas 3,71%.
- Stosując trendy przełącznikowe wykazano, że największą przeciętną roczną stopę wzrostu – wynoszącą 5,49% - zaobserwowano w podokresie III obejmującym lata 2006–2008; przeciętny roczny przyrost wynosił wówczas 171,00 zł i był niższy od przyrostu z lat 2013–2015 o około 20 zł.



## DODATEK A

Stylizowany wydruk oszacowań modelu liniowego trendu przełącznikowego płac realnych (12):

$$W_t = \beta_0 + \beta_{00}X_{00} + \beta_{06}X_{06} + \beta_{09}X_{09} + \beta_{13}X_{13} + \\ + \beta_1 \cdot t + \beta_{1,00}(X_{00} \cdot t) + \beta_{1,06}(X_{06} \cdot t) + \beta_{1,09}(X_{09} \cdot t) + \beta_{1,13}(X_{13} \cdot t) + \varepsilon_t$$

Zmienne modelu trendu płac w zapisie MICROFIT:

W: X0, X00, X06, X09, X13, T, X00T, X06T, X09T, X13T

```
*****
Dependent variable is W
21 observations used for estimation from 1995 to 2015
*****
Regressor      Coefficient      Standard Error      T-Ratio[Prob]
X0              2090.4           17.2500             121.1829[.000]
X00             339.5490         38.2031              8.8880[.000]
X06            -1448.7           155.2751            -9.3296[.000]
X09             2008.5           194.2819            10.3383[.000]
X13            -1969.1           262.6587            -7.4969[.000]
T              114.0362          5.2011              21.9255[.000]
X00T           -68.1924           6.5199             -10.4591[.000]
X06T           125.1971           12.2766             10.1981[.000]
X09T          -140.3007           13.7608            -10.1957[.000]
X13T           106.0586           13.7608              7.7073[.000]
*****
R-Squared              .99939      R-Bar-Squared              .99889
S.E. of Regression    16.4473      F-stat.  F( 9, 11)      1996.9[.000]
DW-statistic              2.1076
*****
```





## DODATEK B

Stylizowany wydruk oszacowań wykładniczego modelu trendu przełącznikowego płac realnych o postaci (27):

$$\ln W_t = \beta_0 + \beta_{00}X_{00} + \beta_{06}X_{06} + \beta_{09}X_{09} + \beta_{13}X_{13} + \beta_1 \cdot t + \beta_{1,00}(X_{00} \cdot t) + \beta_{1,06}(X_{06} \cdot t) + \beta_{1,09}(X_{09} \cdot t) + \beta_{1,13}(X_{13} \cdot t) + \varepsilon_t$$

Zmienne modelu trendu płac w zapisie MICROFIT:

LW: X0, X00, X06, X09, X13, T, X00T, X06T, X09T, X13T

```
*****
Dependent variable is LW
21 observations used for estimation from 1995 to 2015
*****
Regressor      Coefficient      Standard Error      T-Ratio[Prob]
X0              7.6530           .0068579            1115.9[.000]
X00             .15218           .015188             10.0195[.000]
X06            -.42746           .061731             -6.9245[.000]
X09             .63654           .077239             8.2412[.000]
X13            -.51075           .10442              -4.8911[.000]
T               .047154          .0020677            22.8044[.000]
X00T           -.030825          .0025921            -11.8920[.000]
X06T           .037038          .0048807             7.5886[.000]
X09T           -.044556          .0054707            -8.1443[.000]
X13T           .027557          .0054707             5.0371[.000]
*****
R-Squared              .99913      R-Bar-Squared              .99842
S.E. of Regression .0065388      F-stat.  F( 9, 11)      1406.7[.000]
DW-statistic              1.7404
*****
```



## Bibliografia

1. Józwiak J., Podgórski J.: *Statystyka od podstaw*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2001
2. Maddala G.,S.: *Introduction to Econometrics*, John Wiley & Sons LTD, New York 2001.
3. Ossowski J. Cz.: *Własności interpretacyjne składnika losowego w modelach multiplikatywnych*, Przegląd Statystyczny, nr 2, 1988. s. 131–142.
4. Ossowski J. Cz.: *Modele klasy logarytmiczno-liniowej w analizie efektywności procesu produkcji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1989
5. Ossowski J. Cz.: *Model multiplikatywny a średnia geometryczna - wybrane problemy*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego Nr 394, Prace Katedry Ekonometrii i Statystyki Nr 15, Metody ilościowe w ekonomii, cz.1, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2005, s. 195–221
6. Ossowski J. Cz.: *Modelowanie poziomu płac w mikro i makroskali, Teoria i rzeczywistość gospodarcza Polski*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2013
7. Sobczak M.: *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995
8. GUS Warszawa – strona domowa
9. *Roczniki statystyczne GUS*, GUS, Warszawa, lata:1995–2014
10. *Biuletyny statystyczne GUS*, GUS, Warszawa, lata: 1995–2015

## Streszczenie

W początkowej części artykułu zostały przedstawione i omówione informacje o poziomie miesięcznych nominalnych płac ( $WN$ ) oraz indeksie cen dóbr konsumpcyjnych ( $ICK$ ) w gospodarce polskiej w latach 1995–2015. Następnie opisano poziomy realnych płac ( $W$ ) wyrażone w cenach roku 2015. Na bazie tych informacji przedstawiono i przedyskutowano zagadnienia dotyczące rocznych przyrostów płac realnych oraz ich rocznych stóp wzrostu. Prezentacja ta pozwoliła wydzielić podokresy, w których roczne przyrosty płac realnych wykazywały podobieństwo. Ten typ analizy powtórzono przy wydzieleniu podokresów o zbliżonych rocznych stopach wzrostu płac realnych. W następnej części artykułu skonstruowano i oszacowano liniowy model trendu przełącznikowego służący opisowi kształtowania się poziomu płac realnych. W modelu tym, biorąc pod uwagę wyodrębnione podokresy, zastosowano zmienne zero-jedynkowe. W oparciu o oszacowany liniowy model trendu przełącznikowego przedstawiono i przeanalizowano przeciętne przyrosty płac realnych dla wyodrębnionych podokresów. W konkluzji stwierdzono, że najniższy przeciętny przyrost płac realnych zaobserwowano w podokresie 2000–2005, obejmują-



cym lata poprzedzające przystąpienie Polski do Unii Europejskiej. Z drugiej strony najwyższy przeciętny przyrost płac realnych zaobserwowano w podokresie 2013–2015, obejmującym lata po światowym kryzysie gospodarczym. W ostatniej części artykułu skonstruowano i oszacowano wykładniczy model trendu przełącznikowego celem opisu dynamiki wzrostu płac realnych. W modelu tym – podobnie jak wcześniej – biorąc pod uwagę informacje o wyodrębnionych podokresach zastosowano zmienne zero-jedynkowe. W konkluzji stwierdzono, że najniższą przeciętną stopę wzrostu płac realnych (1,64%) zaobserwowano w podokresie 2000–2005, obejmującym lata poprzedzające przystąpienie Polski do Unii Europejskiej. Z drugiej strony najwyższą stopę wzrostu płac realnych (5,49%) zaobserwowano w podokresie 2006–2008, obejmującym lata po przystąpieniu Polski do Unii Europejskiej a będące jednocześnie okresem poprzedzającym lata światowego kryzysu gospodarczego. Warto zaznaczyć, że w podokresie 2013–2015, obejmującym lata po światowym kryzysie gospodarczym, przeciętna roczna stopa wzrostu płac realnych wynosiła około 3,71%.

### Summary

In the beginning part of the article the level of monthly nominal wages ( $WN$ ) and the consumer price index ( $CPI$ ) in Polish Economy in the period 1995–2015 were presented and discussed. Next the level of real wages ( $W$ ) in the prices from 2015 year were describing. On the basis of this information the yearly wages growth and yearly rate of the wages growth were presented and discussed. Those presentation allows to separate the sub-periods in which the yearly wage growth were similar to each other. This type of analysis for the separation of the similar sub-periods was repeated for the yearly rate of wages growth. In the next part of the article the linear switching trend model for describing the level of the real wages was constructed and estimated. In this model, taking account the information about the separated sub-periods, the dummy-variables were using. On the basis of this estimated model the average wages growth for the separated sub-periods were presented and analyzed. In conclusion it was stated that the lowest growth real wages was observed in the sub-period 2000–2005, which contains the time before of accession Poland to the European Union. On the over side the highest growth real wages was observed in the sub-period 2013–2015, which contains the time after the world economic crises. In the last part of the article the exponential switching trend model for describing the dynamic of real wages was constructed and estimated. In this model like earlier, taking account the information about the separated sub-periods, the dummy-variables were using. In conclusion it was stated that the lowest rate of wages growth (1,64%) was observed in the sub-period 2000–2005, which contains the time before of accession Poland to the European Union. On the over side the highest rate real wages growth (5,49%) was observed in the sub-period 2006–2008, which contains the time after of accession Poland to the European Union and simultaneously the time before the world economic



crises. It is worth to add that in sub-period 2013–2015, after the world economic crises the rate real wages growth was equal about to 3,71%.

#### **Informacja o autorze**

dr hab. Jerzy Czesław Ossowski  
Katedra Nauk Ekonomicznych  
Wydział Zarządzania i Ekonomii  
Politechnika Gdańska  
joss@zie.pg.gda.pl