Krótka historia paradoksu petersburskiego i jego wczesnych rozwiązań

Jakub Golik

Politechnika Gdańska

Początki teorii prawdopodobieństwa sięgają siedemnastego wieku, kiedy to we Francji hazard oraz gry losowe cieszyły się dużą popularnością, w szczególności wśród arystokracji. Pewien francuski pisarz, Antoine Gombaud, znany równiez jako Chavalier de Mere, miał znaczący wpływ na rozwój teorii prawdopodobieństwa. Poprosił on dwóch najbardziej znanych matematyków jego czasów tj. Pascala oraz Fermata o matematyczną pomoc przy grach hazardowych. Jego prośba zaowocowała późniejszą korespondencją pomiędzy dwoma wybitnymi matematykami dotyczącą problematyki gier. Co jest szczególnie interesujące, wyrażenie „prawdopodobieństwo” nigdy nie pojawiło się w ich korespondencji. Główną radą, jaką Pascal i Fermat dali Gombaud, było użycie wartości oczekiwanej wygranych. Była to bardzo ważna sugestia, ponieważ dała ona początek przekonaniu, że podejmowanie racjonalnych decyzji w warunkach ryzyka powinno opierać się właśnie na wartości oczekiwanej.

Korespondencja Pascala z Fermatem przyczyniła się do powstania późniejszych publikacji dotyczących prawdopodobieństwa. Christian Huygens odwiedzając Paryż w 1655 roku dowiedział się o niej i po powrocie do Holandii napisał bardzo ważny traktat o prawdopodobieństwie, który został później przetłumaczony na łacinę. Wersja łacińska została bardzo dobrze przyjęta przez matematyków tamtego okresu i została dalej przetłumaczona na wiele innych języków. Praca Huygensa była przez prawie pół wieku jedyną szeroko dostepną pracą dotyczącą prawdopodobieństwa.

6.1 Zakład Pascala i geneza pojęcia „nieskończonego zysku"

Blaise Pascal po swoim drugim duchowym nawróceniu w listopadzie 1654 zaprzestał badań w dziedzinie matematyki oraz fizyki i skupił się na rozważaniach teologicznych oraz filozoficznych. Sformułował on w tamtym czasie niezwykle ciekawy i prowokujący argument mający potwierdzać istnienie Boga. W dzisiejszych czasach nazywany jest on zakładem Pascala i jest jednym z najbardziej znanych zagadnień teologii filozoficznej.

Zakład Pascala bazuje na założeniu, że albo ktoś wierzy w Boga albo nie wierzy, bez możliwości pośredniej. W związku z tym można na ten zakład spojrzeć jak na loterię prostą z dwoma „wyborami" oraz dwoma „przypadkami" o nieznanych prawdopodobieństwach. Niech E będzie przypadkiem reprezentującym istnienie Boga i p prawdopodobieństwem wystąpienia przypadku E (zakład Pascala przyjmuje, że p jest dodatnie - może być infinitezymalne, ale musi być różne od zera). Wtedy, niech nE oznacza przypadek nieistnienia Boga. Dwa wybory oznaczone są następująco: B - wierzyć; oraz nB - nie wierzyć. Poniższa tabela podsumowuje zakład wraz z jego potencjalnymi „użytecznościami" (w kontekście rezultatów i korzyści z nimi związanych), gdzie u_1, u_2, u_3 i u_4 oznaczają użyteczności dla każdego z czterech możliwych rezultatów.

Tabela 6.1: Zakład Pascala

	E	nE
B	∞	u_1
nB	u_2	u_3

Pascal argumentował, że jeżeli człowiek zaakceptuje istnienie

Boga i w niego uwierzy, może spodziewać się życia wiecznego. W związku z tym oczekiwana użyteczność takiego przypadku jest nieskończona. Z drugiej jednak strony, jeżeli człowiek odrzuci istnienie Boga i ostatecznie okaże się być w błędzie, wtedy traci szansę na życie wieczne. Bez względu na rozważany przypadek, można załozyć, że każdy poziom użyteczności u_1, u_2 i u_3, poza przypadkiem istnienia Boga i wiary w niego, jest skończony. Na podstawie powyższych założeń, można łatwo wyznaczyć oczekiwane użyteczności dwóch wyborów: B - wiary w Boga; oraz nB – braku wiary.

$$E(B) = p \times \infty + (1 - p) \times u_1 = \infty$$

$$E(nB) = p \times u_2 + (1 - p) \times u_3 = u_4$$

Pomimo, że wartości numeryczne poziomów użyteczności u_1, u_2, u_3 i u_4 są nieznane i niemożliwe do obliczenia, pewne jest, że są skończone. W związku z tym:

$$u_4 \ll \infty \Leftrightarrow E(nB) \ll E(B)$$

Bazując tylko na obliczonych wartościach oczekiwanych, każdy racjonalny człowiek powienien wierzyć w Boga.

Pomimo, że zakład jest przede wszystkim zagadnieniem rozważanym przez filozofów i teologów, a nie matematyków, wskazuje on możliwość otrzymania nieskończonego zysku w grze losowej, co stanowi główne zagadnienie paradoksu petersburskiego.

6.2 Pięć problemów Nicolasa Bernoulliego

Paradoks petersburski został stworzony przez Nicolasa Bernoulliego (1687 - 1759), jednakże w innej formie niż ta znana dzisiaj. Nicolas był bratankiem znanego Jakuba Bernoulliego (1655 - 1705), twórcy traktatu o teorii prawdopodobieństwa uważanego za krok milowy w tej dziedzinie. Pierwsza wersja paradoksu pojawiła się w liście Nicolasa do francuskiego matematyka Pierre'a de Montmort'a (1678 - 1719). Bernoulli, który od dłuższego czasu korespondował z de Montmort'em, wysłał mu w liście z dnia 9 września 1713 pięć problemów matematycznych, które później ukazały się w drugiej edycji znanej książki de Montmorta dotyczacej gier hazardowych.

Dwa ostatnie problemy (czwarty i piąty) są istotne z punktu widzenia paradoksu petersburskiego.

Czwarty problem

Gracz A obiecuje dać graczowi B koronę (monetę), jeżeli ten: wyrzuci sześć oczek zwyczajną kostką do gry w pierwszym rzucie, dwie korony, jeżeli wyrzuci szóstkę w drugim rzucie, trzy korony, jeżeli wyrzuci w trzecim rzucie, cztery, jeżeli w czwartym itd. Szukamy oczekiwań gracza B.

Rozwiązanie tego problemu można łatwo uzyskać za pomocą wartości oczekiwanej.

$$\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6$$

Piąty problem

Analogicznie do poprzedniego problemu, rozważamy sytuację, gdy gracz A obieca dać graczowi B ilość koron określoną przez następujące ciągi:

a) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ albo

b) $1, 3, 9, 27, \ldots$ albo

c) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ albo

d) $1, 8, 27, 64, \ldots$

zamiast 1, 2, 3, 4, 5, ... jak poprzednio.

Powyższe ciągi mogą być przedstawione analogicznie do czwartego problemu tj.

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad a_n = 2^{n-1} & \Longrightarrow & \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
\text{(b)} \quad a_n = 3^{n-1} & \Longrightarrow & \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
\text{(c)} \quad a_n = n^2 & \Longrightarrow & \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
\text{(d)} \quad a_n = n^3 & \Longrightarrow & \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n^3\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}
\end{array}$$

Rozwiązanie piątego problemu nie jest takie proste, ponieważ w przypadku (a) oraz (b) wartość oczekiwana nie istnieje (a przynajmniej nie jest skończona), jako że odpowiednie szeregi są rozbieżne. Z drugiej strony, szeregi z podpunktów (c) oraz (d) są zbieżne, możemy zatem obliczyć wartość oczekiwaną.

P. R. de Montmort nie zainteresował się problemami otrzymanymi od Bernoulliego i w odpowiedzi swierdził, że mogą one być rozwiązane poprzez zastosowanie metody sumowania szeregów opracowanej przez zmarłego wujka Nicolasa - Jakuba Bernoulliego. Dnia 20 lutego 1714 Nicolas wysłał kolejny list zawierający jego rozwiązania problemów. Dla czwartego problemu poprawnie zsumował zbieżny szereg otrzymując sumę równą 6. Jednakże, gdy próbował on zastosować tę metodę do pierwszego przypadku z piątego problemu, otrzymał wynik równy $-\frac{1}{4}$ w efekcie sumując szereg rozbieżny. Uznał to za sprzeczność, co poskutkowało błędnymi próbami rozwiązania problemu.

Pomimo nieskutecznych prób rozwiązania tej sprzeczności, wnioski wysnute przez Nicolasa były istotne z punktu widzenia dalszych rozważań nad problemem. Argumentował on, że uczciwa wartość oczekiwania nie musi być sumą składowych oczekiwań, ponieważ niektóre przypadki z bardzo małym prawdopodobieństwem powinny zostac odrzucone i traktowane jako zero. Niemniej jednak, trzeba zdać sobie sprawę, że nieważne jak mało znaczące może wydawać się prawdopodobieństwo pewnych zdarzeń, wygrana z nimi związana może znacząco wpływać na końcowy wynik oczekiwań. Bernoulli i wielu jego następców uznawało paradoks za swoistą rozbieżność pomiędzy powszechnie akceptowanym użyciem wartości oczekiwanej do oceny gier losowych, a właściwym (życiowym) oczekiwaniem zwrotu w takich grach. W ostatniej odpowiedzi do Nicolasa, de Montmort zaakceptował jego rozumowanie, jednakże skłaniał się bardziej ku słuszności wartości oczekiwanej. Niemniej jednak, zasugerował w dyplomatyczny sposób, że jedyną kompetentną osobą do dalszych badań nad tym problemem jest właśnie sam Nicolas. Pomimo dalszych prób zainteresowania de Montmort'a tematem, nie wniósł on już nic znaczącego do rozważań przed swoją śmiercią w 1719.

Rozważmy teraz problem przedstawiony de Montmort'owi. Niech poszukiwana wartość oczekiwana będzie wyrażona poprzez użycie rozbieżnego nieskończonego szeregu skończonych oczekiwań:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)a(n) \tag{6.1}$$

Powyższe wyrażenie jest skonstruowane w taki sposób, że: $p(n)$ oznacza prawdopodobieństwo wygranej w n-tej próbie; $a(n)$ oznacza wygraną kwotę; przy czym $\{a(n)\}$ jest rosnącym ciągiem, a $\{p(n)\}$ malejącym.

Nicolas Bernoulli zasugerował zamianę ciągu $\{p(n)\}$ na inny ciąg $\{\bar{p}(n)\}$, taki, że nowo stworzony szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}(n)a(n)$$

będzie zbieżny. Pomysł polegał na zastąpieniu bardzo małych prawdopodobieństw w ciągu $\{\bar{p}(n)\}$ zerem. Innymi słowy, polegało to na „ucięciu ogona" ciągu $\{p(n)\}$ dla n większych niż jakaś wartość m.

6.3 Wkład Gabriela Cramera

Forma, w jakiej znamy paradoks dzisiaj, została stworzona przez szwajcarskiego matematyka Gabriela Cramera, który miał największy wpływ na rozwój paradoksu petersburskiego w jego wczesnym etapie. W liście do Nicolasa Bernoulliego z 21 maja 1728 zasugerował on alternatywne rozwiązanie problemu opisanego równaniem 6.1. W przeciwieństwie do tego co zasugerował Nicolas, Cramer zaproponował analogiczne rozwiazanie polegające na zastąpieniu ciągu $\{a(n)\}$ innym ciągiem $\{\bar{a}(n)\}$, takim, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)\bar{a}(n) \tag{6.2}$$

będzie zbieżny. Jednakże, jednym z najważniejszych elementów listu było uproszczenie piątego problemu Nicolasa. Cramer zasugerował zastąpienie sześciennej kostki do gry dwustronną (zwyczajną/uczciwą) monetą oraz zamianę ról Gracza A oraz Gracza B. W rezultacie, jeżeli Gracz A wyrzuci pierwszą reszkę za n-tym razem, wyrzuciwszy wcześniej pod rząd $n-1$ orłów, dostanie on 2^{n-1} koron (monet) od Gracza B, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$. Łatwo zauważyć, że oczekiwania Gracza A mogą zostać formalnie wyrażone przy pomocy szeregu 6.1.

Dzięki uproszczeniu Cramera możemy teraz sformułować współczesną wersję paradoksu petersburskiego opublikowaną później przez Daniela Bernoulliego:

Piotr rzuca monetą tak długo, aż wypadnie reszka. Zgadza się dać Pawłowi jednego dukata, jeżeli sam wyrzuci reszkę w pierwszym rzucie, dwa dukaty, jeżeli wyrzuci w drugim, cztery, jeżeli w trzecim, osiem, jeżeli w czwartym i tak dalej, w taki sposób, że z każdym następnym rzutem liczba wypłacanych dukatów jest podwajana. Załóżmy, że chcemy okreslić wartość oczekiwań Pawła.

Cramer uznał za paradoks fakt, że według obliczeń Gracz A powinien zapłacić Graczowi B nieskończoną sumę pieniędzy aby wziąć udział w grze. Argumentował, iż jest to absurd, ponieważ żaden rozsądny człowiek nie zapłaciłby więcej niż 20 koron by wziąć udział w grze. Jego dalsze rozumowanie jest często cytowane w literaturze dotyczącej tego zagadnienia:

„Jaka jest przyczyna rozbieżności pomiędzy matematycznymi obliczeniami a zwyczajną oceną? Spowodowane jest to tym, że matematycy wartościują pieniądze w stosunku do ich ilości, a rozsądni ludzie wartościują je w stosunku do pożytku jaki mogą z nich uzyskać."

Podobne rozumowanie przedstawił Daniel Bernoulli w kontekście wyżej zacytowanej wersji paradoksu.

„...Pomimo, że standardowe obliczenia wskazują, że wartość oczekiwań Pawła jest nieskończenie wielka, musimy przyznać, że każdy w miarę rozsądny człowiek z wielką przyjemnością zapłaciłby za taką szansę dwadzieścia dukatów."

Inną uwagę, jednakże trochę ostrą, sforumował przyjaciel i korespondent Cramera - francuski naturalista G. L. L. Buffon (1707-1788).

„Skąpiec jest jak matematyk - obydwoje oceniają wartość pieniędzy po ich numerycznej ilości."

Cramer kontynuował swoje rozważania nad problemem wskazując na fakt, że to, co powoduje nieskończoną wartość oczekiwaną, to możliwość wygrania niewyobrażalnej kwoty pieniędzy, jeżeli gracz nie wyrzuci reszki do bardzo późnej próby np. do setnego lub tysięcznego rzutu. Co więcej, Cramer uważał, że dla rozsądnego człowieka nie powinno być warte mniej lub nieść za sobą mniej przyjemności, gdyby możliwa wygrana była ograniczona do 10 lub 20 milionów koron. Bazując na swoim założeniu, postanowił on policzyć oczekiwania zgodnie z szeregiem 6.2 dla ograniczonej ilości koron do $2^{24} = 16777216$. W związku z powyższym, suma szeregu 6.2 (który jest teraz skończony) jest oczywiście skończona i równa 13. Cramer nazwał swój wynik „moralną wartością bogactwa", co współcześni ekonomiści nazwaliby użytecznością pieniądza.

Gabriel Cramer uznał osiągnięty wynik za zbyt wysoki i próbował go zmniejszyć poprzez wprowadzenie alternatywnego założenia. Zasugerował, że 100 milionów przynosi więcej przyjemności niż 10 milionów, ale na pewno nie 10 razy więcej. W związku z tym zasugerował, że moralna wartość bogactwa powinna zostać wyrażona poprzez pierwiastek kwadratowy wartości oczekiwanej.

6.4 Pochodzenie nazwy paradoksu i okoliczności jego pierwszej publikacji

Gdy Nicolas Bernoulli otrzymał od Gabriela Cramera uproszczoną wersję swojego problemu, postanowił przedstawić ją swojemu kuzynowi Danielowi Bernoulliemu, który był w tym czasie profesorem matematyki na uniwersytecie w Petersburgu. Dnia 27 października 1728 Nicolas wysłał swojemu kuzynowi czwarty i piąty problem w uproszczonej wersji Cramera. Z początku Daniel Bernoulli nie był nimi zainteresowany i uznał je za bardzo proste, choć trochę paradoksalne. W odpowiedzi do Nicolasa napisał, że prawdopodobieństwo, iż gra potrwa dłużej niż 20 lub 30 rzutów, jest niezmiernie małe. Nicolas odrzucił argumentację swojego kuzyna, co skłoniło Daniela do ponownego zastanowienia się nad problemami. Później Daniel Bernoulli wysłał do Nicolasa *memoir*, w którym rzucił nowe światło na problem. Zasugerował on, że początkowe bogactwo gracza również powinno być wzięte pod uwagę przy wyznaczaniu jego oczekiwań. W związku z sugestią Daniela, Nicolas uznał, że połączenie jego sugestii wraz z sugestią Gabriela Cramera może przyczynić się do dokładniejszego sposobu odrzucania małych prawdopodobieństw.

Paradoks petersburski zawdzięcza swoją nazwę miejscu jego pierwszej oficjalnej publikacji. Poza wzmianką o korespondencji z Nicolasem Bernoullim z 1713 w książce de Montmort'a, wszystko wskazuje na to, że problem nie został opublikowany przed rokiem 1738. W 1731 Daniel Bernoulli wysłał swój *memoir* do publikacji w czasopiśmie *Commentarii* Akademii Petersburskiej, który został oficjalnie opublikowany dopiero siedem lat później w 1738.

Daniel w swoim *memoir* wprowadził bardzo ważną hipotezę, która stanowi podstawę teorii marginalnej użyteczności szereko stosowanej we współczesnej ekonomii. Zasugerował, że aby określić wartość ryzyka dla konkretnej osoby, nie wystarczy zastosować wartości oczekiwanej. Co więcej, stwierdził, że w rzeczywistości możliwość wygrania danej sumy pieniędzy nie jest równie istotna dla różnych osób, ale jest raczej względna w stosunku do obecnego poziomu ich bogactwa (majątku). W związku z powyższym zdefiniował następującą hipotezę:

„Teraz jest wielce prawdopodobne, że jakikolwiek przyrost bogactwa, nieważne jak bardzo nieznaczący, będzie zawsze skutkował wzrostem użyteczności, która jest odwrotnie proporcjonalna do dóbr już posiadanych."

Powyższą hipotezę można zapisać w języku matematycznym za pomocą następującej pochodnej:

$$dy = k\frac{dx}{x}$$

gdzie dy oznacza przyrost użyteczności dla danej osoby, x oznacza jej obecne bogactwo oraz dx otrzymanie dodatkowej sumy pieniędzy, nastomiast $k > 0$ jest subiektywnym czynnikiem proporcjonalności ustalonym dla danej osoby. Aby wyznaczyć y musimy scałkować powyższy wzór w nastepujący sposób:

$$y = k\int_a^x \frac{dx}{x} = k\ln\frac{x}{a} \tag{6.3}$$

gdzie a (wymagamy, by $a > 0$) oznacza początkowe bogactwo.
Następnie, niech a będzie oznaczać początkowe bogactwo osoby, która gra w grę w której kwota a_n może być wygrana z prawdopodobieństwem p_n dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Jego war-

tość oczekiwana jest prosta do otrzymania i równa: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n$. Jednakże, według hipotezy Bernoulliego, którą nazwał „średnią użytecznością”, jest ona równa:

$$k \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln \left[\frac{(a + a_n)}{a} \right]$$

pod warunkiem zbieżności szeregu.
„Średnia użyteczność” Bernoulliego została później nazwana „moralnym oczekiwaniem” przez Pierre'a Simon'a de Laplace'a (1749-1827).

Teoria Daniela została odrzucona przez Nicolasa, który upierał się, że stawka gry losowej musi być wyznaczona obiektywnie. Ponadto zauważył, iż gdyby teoria Daniela została wprowadzona do gry, każdy gracz musiałby zapłacić Piotrowi inną stawkę by wziąć w niej udział, podczas gdy potencjalne ryzyko Piotra pozostałoby takie samo.

6.5 Super-paradoks petersburski Mengera

Rozwiązanie Cramera-Bernoulliego nie przeszło próby czasu. Zostało ono obalone przez Carla Mengera (1840-1921) - austriackiego ekonomistę, który skonstruował kontrprzykład nazwany później przez innego ekonomistę Paula Anthony'ego Samuelson'a (1915-2009) super-paradoksem petersburskim. Menger pokazał, że zastosowanie „wystarczająco wklęsłego” przekształcenia wygranych jest zaledwie warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym by rozwiązać paradoks.

Pomysł Mengera polegał na zastąpieniu wypłaty $a(n) = 2^n$ przez $\hat{a}(n) = e^{2^n}$, która po zastosowaniu wklęsłego przekształcenia Bernoulliego $ln(\cdot)$ do $\hat{a}(n)$ przywracała paradoks. To samo mogło zostać zrobione w przypadku rozwiązania Cramera poprzez zastapienie $a(n) = 2^n$ wyrażeniem $\hat{a}(n) = (2^n)^2$. W ten sposób, stosując przekształcenie Cramera z użyciem pierwiastka kwadratowego $\sqrt{\hat{a}(n)}$, paradoks znów powraca. W ogólności, kontrprzykłady Mengera pokazują, że dla każdej rosnącej i nieograniczonej funkcji użyteczności, można znaleźć takie rosnące przekształcenie, że przekształcone wygrane zbiegają szybciej do nieskończoności niż prawdopodobieństwa zbiegają do zera. Carl Menger był pierwszą osobą, która sformułowała i udowodniła warunek konieczny i wystarczający na uniknięcie wystąpienia paradoksu petersburskiego. Głównym wkładem Mengera do rozwiązania paradoksu petersburskiego było pokazanie, że warunkiem koniecznym jest ograniczoność funkcji użyteczności. Inymi słowy pokazał, że gra typu paradoks petersburski ma skończone rozwiązanie tylko wtedy, gdy funkcja użyteczności (wygranych) jest ograniczona. Wyżej wspomniany Paul Samuelson nazwał wkład Mengera „skokiem kwantowym" w analizie paradoksu petersburskiego.

Zadziwiający jest fakt, że paradoks petersburski musiał czekać tak długo na sformułowanie przez Mengera warunków koniecznych i wystarczających na jego uniknięcie. Według Christiana Seidl'a (Seidl, 2013) było to spowodowane pojmowaniem użyteczności i jej rozwojem na przestrzeni kilku wieków. Wielu naukowców tamtych czasów uważało użyteczność za coś *„zauważalnego, niezmiennego i interpersonalnie porównywalnego"* (Dutka, 1988). Dopiero w 1906 po raz pierwszy włoski ekonomista Vilfredo Pareto stwierdził, że użyteczność jest nieporównywalna interpersonalnie.

Bibliografia

[1] Dutka, J. (1988). *On the St. Petersburg paradox.* Archive for History of Exact Sciences, 39(1), 13-39

[2] Seidl, C. (2013). *The St. Petersburg Paradox at 300.* J Risk Uncertain, 46, 247-264

[3] Tabarrok, A. (2000). *BELIEVE IN PASCAL'S WAGER? HAVE I GOT A DEAL FOR YOU!.* Theory and Decision 48, 123-128