

PROJEKTOWANIE FILTRÓW KSZTAŁTUJĄCYCH I ODBIORCZYCH METODĄ DMF

SHAPING AND RECEIVING FILTER DESIGN WITH DMF METHOD

Streszczenie: W pracy rozpatrzono projektowanie filtrów kształtujących typu podniesiony kosinus i spierwiastkowany podniesiony kosinus metodą rozproszonej maksymalnej płaskości (*Distributed Maximal Flatness - DMF*). Dla tej metody przedstawiono obserwacje wpływu parametrów projektowanych filtrów na właściwości projektowanych filtrów. Przykładowe filtry zastosowano do generacji i demodulacji sygnałów z modulacją QPSK transmitowanych w obecności zakłóceń.

Abstract: The paper discusses the design of the raised cosine filter and the square root raised cosine with the Distributed Maximal Flatness (DMF) method. The observations of the influence of filter parameters on the properties of the designed filters are presented. Additionally, sample filters were used to generate and demodulate QPSK modulated signals transmitted in the presence of interference.

Słowa kluczowe: interferencje międzysymbolowe, filtry cyfrowe, filtry Nyquista, metoda rozproszonej maksymalnej płaskości,

Keywords: distributed maximal flatness, inter-symbol interferences, Nyquist filters, matched filtering.

1. WSTĘP

Współczesne systemy telekomunikacyjne to sieci masowej obsługi o wysokiej pojemności. Stale narastające zapotrzebowanie na świadczenie różnorodnych usług multimedialnych oraz magazynowanie, przetwarzanie i przesyłanie dużych ilości danych wymaga rozwijania coraz bardziej wydajnych metod cyfrowego przetwarzania sygnałów, w szczególności w odniesieniu do cyfrowej transmisji sygnałów. Użyteczne i ograniczone pasmo częstotliwości jest współdzielone przez wielu użytkowników. Naturalne jest więc dążenie, aby filtry stosowane do realizacji transmisji wykazywały zdolność do kształtowania widma nadawanego sygnału, tak aby minimalizować wymagane do transmisji pasmo częstotliwości. Odpowiednie ukształtowanie nadawanych impulsów może mieć również wpływ na redukcję wpływu zjawiska interferencji międzysymbolowych na jakość transmisji. Sygnał nadawany do kanału powinien zatem zajmować jak najwęższe pasmo oraz wykazywać odporność na wpływ interferencji międzysymbolowych. Można to osiągnąć stosując do kształtowania nadawanych impulsów tzw. filtry Nyquista o charakterystyce typu podniesiony kosinus (RC – *raised cosine*) [3].

2. METODA DMF

Projektowanie filtrów cyfrowych typu FIR jest próbą aproksymacji charakterystyki prototypowego filtru idealnego za pomocą charakterystyki filtru cyfrowego opisanego skończonym zbiorem współczynników jego odpowiedzi impulsowej. Ponieważ taka charakterystyka zawsze w pewnym stopniu odbiega od charakterystyk filtrów idealnych, proces aproksymacji jest związany z błędem rozumianym jako różnica wyniku aproksymacji (charakterystyki zaprojektowanego filtru cyfrowego $H_N(\omega)$) i pierwotnego wzorca (charakterystyki filtru idealnego $H_{ideal}(\omega)$), którą można wyrazić za pomocą zespolonej funkcji błędu aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej [5]:

$$E(\omega) = H_N(\omega) - H_{ideal}(\omega) \quad (1)$$

Powyższą charakterystykę błędu można przekształcić do, wygodniejszej w analizie, zero-fazowej postaci $\hat{E}(\omega) = E(\omega)e^{j\omega\tau_N}$, w której usunięto opóźnienie transportowe, gdzie N to długość odpowiedzi impulsowej projektowanego filtru.

Rozpatrywana w tej pracy metoda rozproszonej maksymalnej płaskości (DMF) jest próbą świadomej dystrybucji błędu aproksymacji. Jest ona uogólnieniem metody MF (*Maximal Flatness*) ([4],[5]), która zakłada, że funkcja błędu aproksymacji $\hat{E}(\omega)$ oraz jej pochodne $\hat{E}^{(i)}(\omega)$ rzędu $i = 1, 2, \dots, N - 1$ przyjmują wartość 0 dla $\omega_0 = 0$:

$$\begin{cases} \hat{E}(\omega_0) = \hat{H}_N(\omega_0) - \hat{H}_{ideal}(\omega_0) = 0 \\ \hat{E}^{(i)}(\omega_0) = \hat{H}_N^{(i)}(\omega_0) - \hat{H}_{ideal}^{(i)}(\omega_0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

dla $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Z kolei w metodzie DMF zamienia się powyższe N warunków dla $\omega_0 = 0$, na warunki zerowania się pochodnych $\hat{E}^{(i)}(\omega)$ dla k różnych pulsacji ([1],[2]):

$$\begin{cases} \hat{E}^{(i)}(\omega_1) = 0, \quad i = 0, 1 \dots I_1 \\ \hat{E}^{(i)}(\omega_2) = 0, \quad i = 0, 1 \dots I_2 \\ \vdots \\ \hat{E}^{(i)}(\omega_k) = 0, \quad i = 0, 1 \dots I_k \end{cases} \quad (3)$$

Ponieważ poszukujemy N współczynników odpowiedzi impulsowej, zakładamy:

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_K = N \quad (4)$$

Dodatkowo w praktyce, o ile to możliwe, od współczynników filtrów cyfrowych wymaga się, aby były one liczbami rzeczywistymi. Co przekłada się na warunek na parzystą symetrię hermitowską charakterystyki częstotliwościowej filtru:

$$H(-\omega) = \text{conj}(H(\omega)) \quad (5)$$

Uwzględniając to, układ równań (3) można przekształcić do następującej postaci [1]:

$$\hat{E}^{(i)}(\omega_k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} (n - \tau_N)^i \cos \omega_k (n - \tau_N) h[n] = \\ \quad = (-1)^{\frac{i}{2}} \text{Re} \left(\hat{H}_{ideal}^{(i)}(\omega_k) \right) \\ \sum_{n=0}^{N-1} (n - \tau_N)^i \sin \omega_k (n - \tau_N) h[n] = \\ \quad = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \text{Im} \left(\hat{H}_{ideal}^{(i)}(\omega_k) \right) \end{cases} \quad (6)$$

dla $i = 0, 2, 4 \dots$ oraz

$$\hat{E}^{(i)}(\omega_k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} (n - \tau_N)^i \cos \omega_k (n - \tau_N) h[n] = \\ \quad = (-1)^{\frac{i}{2}} \text{Im} \left(\hat{H}_{ideal}^{(i)}(\omega_k) \right) \\ \sum_{n=0}^{N-1} (n - \tau_N)^i \sin \omega_k (n - \tau_N) h[n] = \\ \quad = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \text{Re} \left(\hat{H}_{ideal}^{(i)}(\omega_k) \right) \end{cases} \quad (7)$$

dla $i = 1, 3, 5 \dots$

3. PROJEKTOWANIE FILTRÓW KSZTAŁTUJĄCYCH I ODBIORCZYCH METODĄ DMF

Metoda DMF dla projektowania filtrów Nyquista, została zaimplementowana w środowisku Matlab w postaci iteracyjnego algorytmu, który do obliczeń wykorzystuje: charakterystykę częstotliwościową projektowanego filtru $H(\omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$, wyrażoną jako transformata DFT zbioru współczynników filtru $h[n]$; charakterystykę częstotliwościową idealnego filtru prototypowego $H_{ideal}(\omega)$; zespoloną funkcję błędu aproksymacji zerofazowej charakterystyki częstotliwościowej

$$\hat{E}(\omega) = |(H(\omega) - H_{ideal}(\omega))e^{j2\pi\omega\tau_N}| \quad (8)$$

oraz zbiór częstotliwości $\{\omega_k\}$, dla których wymuszamy zerowanie się pochodnych błędu aproksymacji. Dodatkowym założeniem jest możliwość sterowania wagami funkcji błędu w różnych pasmach filtru. W tym celu wprowadzono liniową, odcinkami stałą, funkcję wag $W(\omega)$ o wartościach zadawanych dla pasm: przepustowego, przejściowego i zaporowego.

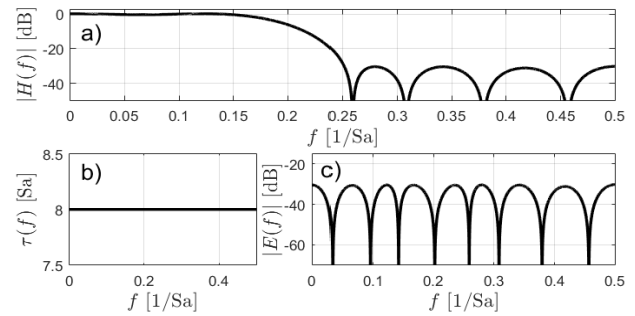
W każdej iteracji algorytmu projektowania, na podstawie przebiegu funkcji błędu $\hat{E}(\omega)$, wyznaczany jest nowy zbiór pulsacji $\{\omega_k\}$, będący podstawą do wykonania kolejnej iteracji. Zadaniem algorytmu jest rozłożenie pulsacji $\{\omega_k\}$ na osi częstotliwości, tak aby wartości ekstremów funkcji błędu $\hat{E}(\omega)$ w przedziałach wyznaczonych kolejnymi pulsacjami ω_k były jak najbardziej zbliżone do zakładanej wartości ważonej funkcji błędu dla danego przedziału. Manipulacja szerokością przedziałów $\Delta_k = \omega_k - \omega_{k-1}$ ma wpływ na wartość maksimum błędu w poszczególnych przedziałach. Aby zmniejszyć wartość maksimum należy zmniejszyć szerokość przedziału Δ_k , natomiast poszerzenie tego prze-

działu skutkuje zwiększeniem jego wartości. Tak więc w przypadku decyzji o kontynuowaniu pracy algorytmu, nowy zbiór $\{\omega_k\}$ jest obliczony w oparciu o zasadę: jeżeli $E(\omega_{\max}) < W(\omega_{\max})$ zmniejsz przedział Δ_k , jeżeli $E(\omega_{\max}) > W(\omega_{\max})$ zwiększ ten przedział. Manipulacja szerokością przedziałów Δ_k przebiega w oparciu o wartość maksimum ważonej funkcji błędu w tym przedziale: $\{e_k\} = \max_{\omega \in [\omega_{k-1}, \omega_k]} (W(\omega)E(\omega))$, przy czym w obliczeniach wykorzystuje się unormowane wartości, a nowy zbiór punktów dokładnej aproksymacji $\{\omega'_k\}$ jest obliczany w oparciu o formułę:

$$\omega'_k = \sum_{i=1}^k \Delta_i (1 - \hat{e}_i^\alpha / \beta) \quad (9)$$

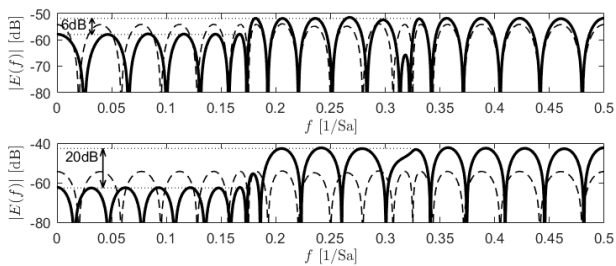
w której parametry α i β pozwalają sterować szybkością zbieżności algorytmu (kosztem dokładności wyników i ryzykiem utraty jego stabilności).

Na rys. 1 przedstawiono charakterystyki oraz funkcję błędu aproksymacji przykładowego filtru Nyquista o charakterystyce typu podniesiony cosinus, zaprojektowanego metodą DMF. Filtr został zaprojektowany dla $N = 16$, $\alpha = 0,3$ i opóźnienia ułamkowego $d = 0,5$. Zauważmy, że opóźnienie transportowe filtru o odpowiedzi impulsowej długości $N = 16$ wynosi $\tau_N = 7,5$, stąd opóźnienie całkowite filtru $\tau_d = \tau_N + d = 8$.



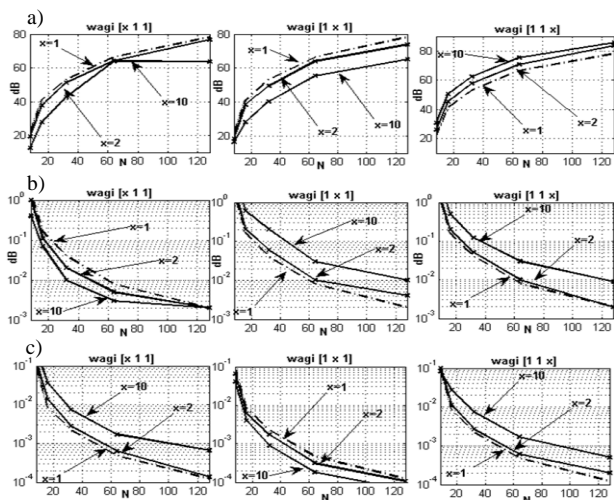
Rys. 1. Filtr Nyquista typu podniesiony cosinus zaprojektowany metodą DMF: (a) charakterystyka amplitudowa; (b) opóźnienie grupowe; (c) moduł błędu aproksymacji

Jak wspomniano wcześniej, algorytm implementujący metodę DMF pozwala na zdefiniowanie wektora wag funkcji błędu aproksymacji $\mathbf{w} = [x \ y \ z]$, kolejno dla pasma przepustowego, przejściowego i zaporowego. Wektor \mathbf{w} pozwala na manipulację rozkładem błędu aproksymacji w funkcji częstotliwości. Na rys. 2 zilustrowano przebieg błędu aproksymacji filtrów zaprojektowanych z ważoną funkcją błędu (na pierwszym wykresie dla $\mathbf{w} = [2 \ 1 \ 1]$, a na drugim dla $\mathbf{w} = [10 \ 1 \ 1]$). Przyjęto unormowaną częstotliwość odcięcia filtru prototypowego $f_x = 0,25$ oraz współczynnik wygasania pasma $\alpha = 0,3$. Na obu wykresach linią przerywaną wykreślono równomierny rozkład błędu uzyskany dla wektora wag $\mathbf{w} = [1 \ 1 \ 1]$. Różnica pomiędzy maksimum funkcji błędu aproksymacji w paśmie przepustowym a maksimum funkcji błędu w pozostałej części pasma to 6 dB dla $\mathbf{w} = [2 \ 1 \ 1]$ i 20 dB dla $\mathbf{w} = [10 \ 1 \ 1]$. Wyraźnie widoczna jest wprost proporcjonalna zależność pomiędzy zadany wektorem wag a rozkładem błędu aproksymacji w funkcji częstotliwości. Niezależnie od wybranych wag, wartość średnia błędu aproksymacji w całym paśmie aproksymacji pozostaje niezmienna.



Rys. 2. Błąd aproksymacji charakterystyki amplitudowej dla aproksymacji z ważoną funkcją błędu dla wag: $w = [2 \ 1 \ 1]$ (u góry) i $w = [10 \ 1 \ 1]$ (na dole)

Manipulacja wektorem wag pozwala na dopasowanie parametrów jakościowych filtru wymaganych dla konkretnego zastosowania, przy zachowaniu stałych wartości parametrów projektowanego filtru. Zwiększając wagę dla pasma przepustowego, zmniejszamy zafalowanie charakterystyki w tym paśmie. Z kolei podniesienie wagi w paśmie przejściowym skutkuje dokładniejszym odwzorowaniem zbocza charakterystyki amplitudowej. Jednocześnie zwiększenie tłumienia w paśmie zaporowym można uzyskać zwiększając wagę dla tego pasma. Należy pamiętać, że polepszenie jakości aproksymacji w danej części charakterystyki filtru skutkuje jej pogorszeniem w pozostałej części. Na rys. 3 zilustrowano wyniki pomiarów: tłumienia w paśmie zaporowym $A[N]$, wartości międzyszczytowej zafalowań w paśmie przepustowym $P[N]$ oraz maksymalnego błędu odwzorowania zbocza charakterystyki filtru idealnego w paśmie przejściowym $T[N]$, dla różnych wektorów wag funkcji błędu aproksymacji. Pomiarów dokonano dla filtru RC o $N = 32$ i $\alpha = 0,3$.

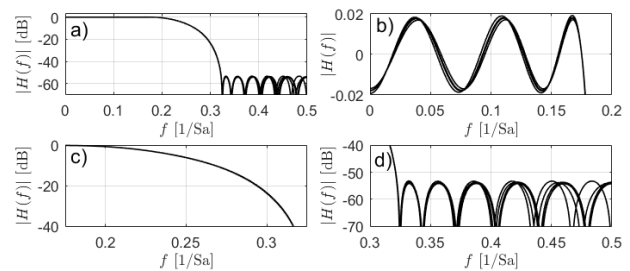


Rys. 3. Parametry $A[N]$ (a), $P[N]$ (b) oraz $T[N]$ projektowanych filtrów (c) w funkcji ich długości N dla różnych wag w paśmie (od lewej) przepustowym, przejściowym i zaporowym

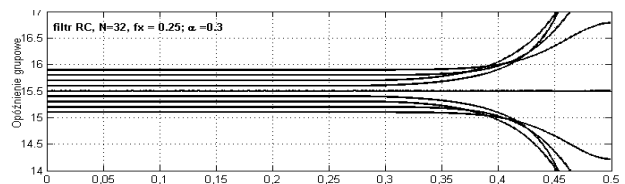
Zauważmy, że dla wektora $w = [x \ 1 \ 1]$ wraz ze wzrostem x maleje międzyszczytowa wartość zafalowań charakterystyki w paśmie przepustowym $P[N]$, przy jednoczesnym wzroście błędu odwzorowania zbocza charakterystyki amplitudowej w paśmie przejściowym $T[N]$. Widoczny jest również spadek otrzymywanego tłumienia w paśmie zaporowym $A[N]$. Analogicznie dla $w = [1 \ x \ 1]$ poprawie ulega jakość aproksymacji w paśmie przejściowym - kosztem zwiększenia zafalowań w paśmie przepustowym i zmniejszenia tłumienia.

Większe tłumienie można natomiast uzyskać dla $w = [1 \ 1 \ x]$, dla $x > 1$. Opisane powyżej zależności są nieliniowe, co wynika z nieliniowej zależności charakterystyki amplitudowej od funkcji błędu aproksymacji.

Zauważmy, że algorytm pozwala projektować filtry Nyquista z dowolną wartością ułamkowego opóźnienia grupowego. Na rys. 4-5 zilustrowano opóźnienie grupowe oraz charakterystyki amplitudowe filtru RC o długości $N = 32$ i $\alpha = 0,3$, o opóźnieniu transportowym $\tau_N = 15,5$, projektowanego dla kilku wartości opóźnienia ułamkowego d w przedziale $-0,4$ do $0,4$.



Rys. 4. Charakterystyki amplitudowe filtrów RC ($N=32$, $\alpha=0,3$) o opóźnieniach ułamkowych d w przedziale $-0,4:0,4$. Całość (a) oraz powiększone fragmenty z pasma przepustowego (b), przejściowego (c) i zaporowego (d)



Rys. 5. Opóźnienia grupowe filtrów RC z rys. 4

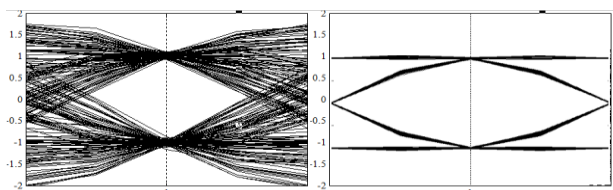
Filtry z rys. 4-5 zostały zaprojektowane dla częstotliwości odcięcia prototypowego filtru dolnoprzepustowego $f_x = 0,25$. Opóźnienie grupowe zachowuje w przybliżeniu stałą wartość w paśmie przepustowym oraz w części pasma przejściowego poniżej częstotliwości f_x . W paśmie zaporowym opóźnienie grupowe wyraźnie odbiega od zakładanych wartości. Wynika to z nieciągłości idealnej charakterystyki fazowej na częstotliwości zawinięcia ($f = 0,5$) wynikająca z opóźnienia ułamkowego różnego od 0 [5]. Na rys. 4 zilustrowano otrzymaną charakterystykę amplitudową, jak widać, przebieg opóźnienia ułamkowego projektowanego filtru nie ma istotnego wpływu na jakość aproksymacji charakterystyki amplitudowej.

4. PRZYKŁAD UŻYCIA PROJEKTOWANYCH FILTRÓW

Filtry typu spierwiastkowy podniesiony kosinus znajdują zastosowanie w transmisji danych [3], stąd poza badaniem charakterystyk tego typu filtrów projektowany metodą DMF zbadano zmodulowane sygnały wygenerowane z ich zastosowaniem. Filtry te użyto jako filtry kształtujące w modulatorze sygnałów QPSK oraz jako filtry odbiorcze (filtry dopasowane) w ich demodulatorze. Zbadany został wpływ zniekształceń występujących w kanale na właściwości zdemodulowanego sygnału. Na rys. 6 zilustrowano wykresy oczkowe składowej rzeczywistej sygnałów uzyskanych na wyjściu demodulatora oraz odebrane symbole. Wykres po lewej stronie od-

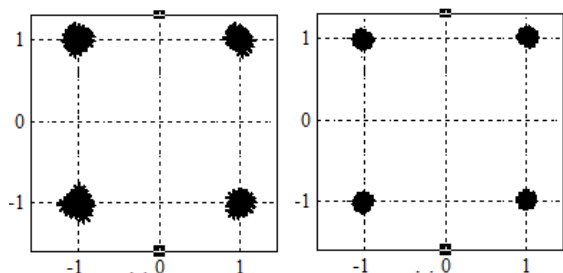
powiada impulsom ukształtowanym przez kaskadę dwóch filtrów SRRC (*square root raised cosine*), składających się razem na filtr RC, o parametrach projektowych: współczynnik wygasania pasma $\alpha = 0,1$ oraz $0,9$, $N = 65$ i $f_x = 0,25$. Transmisję zasymulowano dla SNR w kanale równego 50 dB . Pozwoliło to na zwiększenie wagi funkcji błędu w paśmie przepustowym i przejściowym filtru kosztem obniżenia tłumienia w paśmie zaporowym. Dla filtru o $\alpha = 0,1$ zastosowano wektor wag $\mathbf{w} = [2\ 2\ 1]$, natomiast dla filtru o $\alpha = 0,9$, z uwagi na jego szersze pasmo przejściowe, $\mathbf{w} = [1\ 5\ 1]$. Proces aproksymacji charakterystyki amplitudowej przebiegał w oparciu o zespoloną funkcję błędu aproksymacji zerowego rzędu co sprowadza układ równań (3) do postaci:

$$\hat{E}(\omega_k) = 0 \text{ dla } k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (10)$$

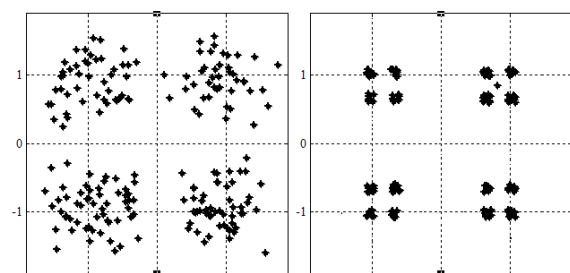


Rys. 6. Wykresy oczkowe sygnałów z modulacją QPSK ukształtowanych przez filtr SRRC o $\alpha = 0,1$ (po lewej) oraz $\alpha = 0,9$ (po prawej).

Na wykresach po lewej (rys. 6 i 7) stronie widoczne są silne interferencje międzysymbolowe, które nie wpływają jednak na poprawność transmisji przy założeniu dokładnego odtwarzania chwil symbolowych.



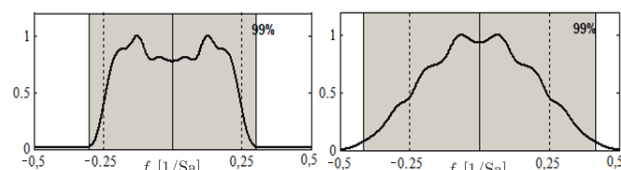
Rys. 7. Zdemodulowane symbole dla sygnałów z modulacją QPSK ukształtowanych filtrem SRRC o $\alpha = 0,1$ (po lewej) oraz $\alpha = 0,9$ (po prawej).



Rys. 8. Zdemodulowane symbole dla błędnej synchronizacji symbolowej dla filtrów SRRC o $\alpha = 0,1$ (po lewej) oraz $\alpha = 0,9$ (po prawej).

Wpływ interferencji międzysymbolowych dla sygnałów ukształtowanych przez filtr SRRC zaprojektowany z parametrem $\alpha = 0,1$ zaczyna wyraźnie wpływać na jakość odbioru w warunkach błędu odtwarzania chwil próbkowania sygnału w przypadku błędu odtwarzania chwil próbkowania na poziomie 20% odstępu symbolowego (rys. 8). Pomimo wysokiego poziomu SNR w

kanale skupiska konstelacji po lewej stronie rys. 8 są wyraźnie rozmyte. Jest to efekt silnych interferencji międzysymbolowych. Natomiast sygnał ukształtowany przy pomocy filtru SRRC o $\alpha = 0,9$ wykazuje większą odporność na błędy odtwarzania chwil symbolowych. Dzieje się tak ponieważ filtr SRRC został zaprojektowany, tak aby w całym przedziale próbkowania wpływ na wielkość interferencji międzysymbolowych miał tylko symbol sąsiedni. Takie rozwiązanie niesie za sobą jednak koszt w postaci znacznego poszerzenia pasma wymaganego do transmisji sygnału (rys. 9). Transmisja sygnału ukształtowanego z wykorzystaniem filtru SRRC zaprojektowanego z parametrem $\alpha = 0,9$ wymaga zarezerwowania znacznie szerszego pasma niż transmisja z wykorzystaniem sygnałów ukształtowanych przez filtr o $\alpha = 0,1$, przy założeniu tej samej szybkości symbolowej.



Rys. 9. Widmo gęstości mocy sygnałów QPSK dla użycia filtrów SRRC o $\alpha = 0,1$ (po lewej) oraz $\alpha = 0,9$ (po prawej); szarym kolorem zaznaczono pasmo zawierające 99% energii sygnału

5. PODSUMOWANIE

W pracy krótko przedstawiono metodę DMF, którą zastosowano do projektowania filtrów kształtujących typu spierwiastkowany podniesiony kosinus. Rozproszenie warunków na maksymalną płaskość w całym przedziale częstotliwości pozwala na skuteczne projektowanie tych filtrów z uwzględnieniem zachowania kształtu ich charakterystyki częstotliwościowej w paśmie przejściowym. Wyniki projektowania zademonstrowano na przykładzie modulacji i demodulacji sygnałów z modulacją QPSK.

LITERATURA

- [1] Blok Marek. 2013. „FIR Filter Design Using Distributed Maximal Flatness Method”. *Journal of Electronics and Telecommunication*, 59 (1): 59–66.
- [2] Blok Marek, Rojewski Mirosław, Matyjas Arkadiusz. 2006. „Projektowanie filtrów ułamkowo-opóźniających metodą nierównomiernego próbkowania w dziedzinie częstotliwości”. Zeszyty Naukowe Wydziału ETI Politechniki Gdańskiej. *Technologie Informacyjne*, 9: 159–168.
- [3] Harris Fredric J., Rice Michael. 2001. “Multirate digital filters for symbol timing synchronization in software defined radios”. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 19(12): 2346–2357.
- [4] Hermanowicz Ewa. 1992. “Explicit formulas for weighting coefficients of maximally flat tunable FIR delayers”. *Electronics Letters*, 28(20): 1936–1937.
- [5] Laakso Timo I., Välimäki Vesa, Karjalainen Matti, Laine Unto K.. 1996. “Splitting the unit delay – tools for fractional delay filter design,” *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(1), 30–60.

