

Mateusz FLIS, Politechnika Gdańska

## ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W PROCESIE TOPNIENIA MEDIUM

W artykule przedstawiono wyniki analizy numerycznej procesu topnienia materiału w dwóch modelach cieplnych. Założono, że w rozpatrywanych układach transport ciepła zachodzi wyłącznie mechanizmem przewodzenia. Obliczenia zrealizowano z wykorzystaniem metody entalpowej za pomocą programu ANSYS Fluent. Sprawdzone bilans energetyczny rozwiązania i wykazano poprawność otrzymanych wyników.

SŁOWA KLUCZOWE: numeryczne modelowanie topnienia, metoda entalpowa, transport ciepła, proces przemiany fazowej

### 1. WPROWADZENIE

Realizowana przez autora tematyka badawcza elektrycznego ogrzewania rozjazdów kolejowych związana jest z zagadnieniem topnienia śniegu w przestrzeni roboczej rozjazdu [1]. W niniejszym artykule przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych procesu topnienia śniegu w dwóch prostych układach cieplnych. Rozkłady pól temperatury w modelu jedno- i dwuwymiarowym otrzymano na drodze symulacji komputerowej w programie ANSYS Fluent.

Topnienie polega na przejściu substancji ze stanu stałego w ciekły (proces przemiany fazowej pierwszego rodzaju). Topnienie przebiega z pochłanianiem ciepła przemiany fazowej przy stałej temperaturze, jest więc zagadnieniem transportu ciepła, które charakteryzuje się silną nieliniowością [2]. W praktycznej realizacji obliczeń przemian fazowych korzysta się z metod numerycznych. Modelowanie numeryczne procesu topnienia może być zrealizowane: metodą śledzenia frontu lub metodą entalpową [3, 4]. Pierwsza z podanych metod prowadzi do bardzo złożonego procesu obliczeniowego, natomiast powszechnie stosowana jest metoda entalpowa. Metoda ta opiera się na uproszczeniu obliczeń do rozwiązania jednej, nieruchomej domeny. W podejściu tym ten sam układ równań transportu i energii opisuje obie fazy. Metoda entalpowa nie pozwala na bezpośrednie znalezienie granicy przemiany fazowej, ale polega na poszukiwaniu temperatury  $T$  i entalpii  $H$  w węzłach siatki. Granica międzyfazowa w tej metodzie wyznaczana jest na podstawie temperatury krzepnięcia  $T_s$  i temperatury topnienia  $T_1$  medium. Stan skupienia

substancji określony jest poprzez współczynnik  $\beta$  wyrażający udział cieczy w materiale i dany jest zależnością [4]:

$$\beta = \begin{cases} 0 & T < T_s \\ \frac{T - T_s}{T_l - T_s} & \text{dla } T_s < T < T_l \\ 1 & T > T_l \end{cases} \quad (1)$$

Równanie energii stosowane do obliczeń w metodzie entalpowej w programie Fluent ma postać [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H) + \nabla \cdot (\rho v H) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_T \quad (2)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość substancji [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ],  $v$  – prędkość [ $\text{m}/\text{s}$ ],  $\lambda$  – przewodność cieplna [ $\text{W}/(\text{mK})$ ],  $S_T$  – źródło ciepła [ $\text{W}/\text{m}^3$ ].

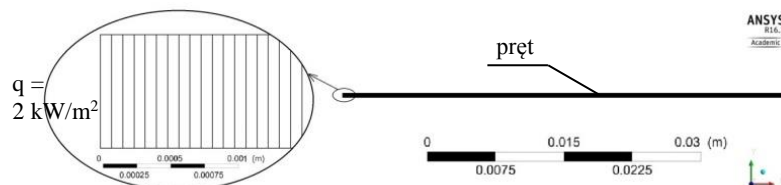
Entalpia obliczana jest według wzoru [4]:

$$H(T) = \int_{T_0}^T c_p dT + \beta L \quad (3)$$

gdzie:  $T_0$  – temperatura początkowa [K],  $T$  – temperatura końcowa [K],  $c_p$  – ciepło właściwe substancji [ $\text{J}/(\text{kgK})$ ],  $L$  – ciepło topnienia [ $\text{J}/\text{kg}$ ].

## 2. POLE TEMPERATURY W PRĘCIE W PROCESIE TOPNIENIA

Pierwszą analizę procesu topnienia przeprowadzono dla prostego modelu. Rozpatrzono jednowymiarowe zagadnienie topnienia ciała w kształcie pręta o długości 100 mm i szerokości 1 mm. Założono, że wymiana ciepła w układzie odbywa się wyłącznie mechanizmem przewodzenia. Na lewej granicy modelu zadano warunek brzegowy drugiego rodzaju,  $q = 2000 \text{ W}/\text{m}^2$ , natomiast pozostałe granice rozważanego obiektu zaizolowano termicznie. Przyjęto początkową temperaturę pręta równą  $T_0 = 268 \text{ K}$ . Dokonano podziału modelu na równomierną siatkę elementów skończonych prostokątnych o szerokości 0,1 mm, w wyniku czego otrzymano 1000 komórek elementarnych (rys. 1).



Rys. 1. Siatka elementów skończonych w analizie procesu topnienia pręta

Przyjęto, że wartości cieplnych właściwości fizycznych medium, z którego wytworzono pręt, są stałe w czasie procesu topnienia, w fazie stałej i w fazie ciekłej. Założono, że przemiana fazowa zachodzi w zakresie temperatury od temperatury krzepnięcia  $T_s$  do temperatury topnienia  $T_l$ . Dane materiałowe przyjęte do obliczeń podano w tabeli 1.

Tabela 1. Właściwości materiałowe materiału pręta

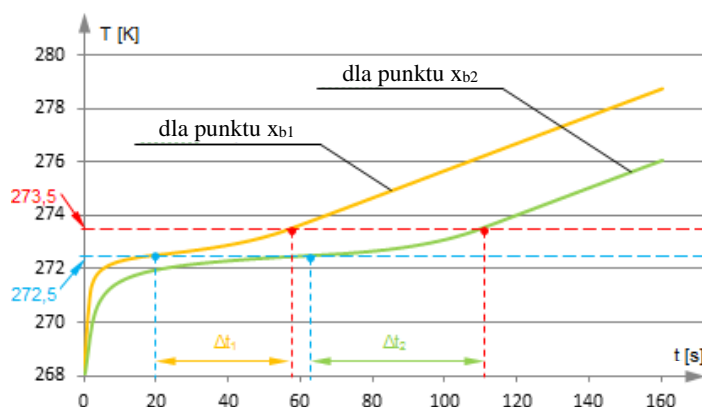
Dane materiałowe	Wartości
Gęstość $\rho$	90 kg/m <sup>3</sup>
Ciepło właściwe $c_p$	2100 J/(kgK)
Współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda$	2,2 W/(mK)
Ciepło topnienia $Q_L$	335 kJ/kg
Temperatura krzepnięcia $T_s$	272,5 K
Temperatura topnienia $T_l$	273,5 K

Wykres temperatury  $T$  w funkcji czasu  $t$  nagrzewania dla dwóch wybranych punktów w pręcie pokazano na rysunku 2. Odległość  $x_b$  od lewej granicy pręta podano w jednostkach bezwymiarowych:

$$x_b = \frac{x}{l_0} \quad (4)$$

gdzie:  $x$  – odległość od lewej granicy pręta [m];  $l_0$  – długość pręta [m].

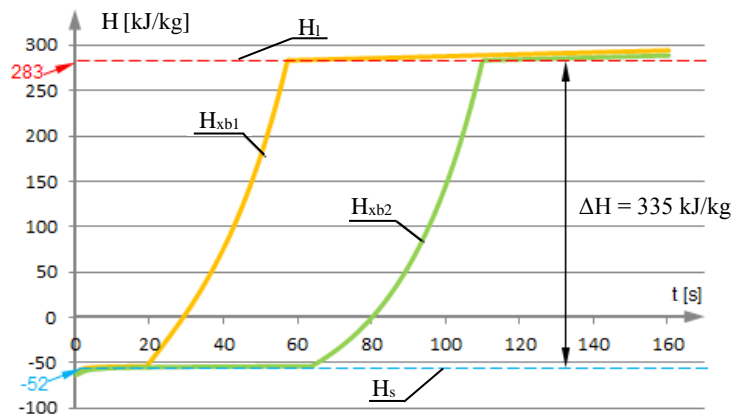
Kolorem pomarańczowym oznaczono wykres wyznaczony dla punktu położonego w odległości  $x_{b1} = 0,02$  od lewej granicy pręta, a kolorem zielonym dla punktu odległego o  $x_{b2} = 0,05$  od tej granicy.



Rys. 2. Temperatura w pręcie podczas przemiany fazowej w funkcji czasu dla punktów:  $x_{b1} = 0,02$  i  $x_{b2} = 0,05$

Na rys. 2 widać, że wraz z oddalaniem się od źródła ciepła rośnie czas trwania przemiany fazowej. W przypadku punktu odległego o  $x_{b1} = 0,02$  czas ten wynosi około  $\Delta t_1 = 38$  s, a w drugim rozważanym przypadku (punkt  $x_{b2} = 0,05$ ) jest równy  $\Delta t_2 = 47$  s, czyli jest o 24% dłuższy w porównaniu z czasem trwania przemiany fazowej w punkcie  $x_{b1}$ . Można zauważyć, że w rozpatrywanych punktach w zakresie temperatury od temperatury krzepnięcia  $T_s = 272,5$  K do temperatury topnienia  $T_1 = 273,5$  K przyrost temperatury ulega spowolnieniu, co wynika z pochłaniania przez substancję energii związanej z przemianą fazową.

Proces topnienia w wybranych powyżej dwóch punktach:  $x_{b1}$  i  $x_{b2}$  zobrazowano również za pomocą wykresu zmiany entalpii  $H$  w funkcji czasu  $t$  nagrzewania (rys. 3). Na rys. 3 zaznaczono wartość entalpii  $H_s$  dla materiału w temperaturze krzepnięcia  $T_s = 272,5$  K i wartość entalpii  $H_1$  w temperaturze topnienia  $T_1 = 273,5$  K. Wartości te wynoszą odpowiednio:  $H_s = 52$  kJ/kg,  $H_1 = 283$  kJ/kg, a ich różnica  $\Delta H = H_1 - H_s$  równa jest entalpii przemiany fazowej  $\Delta H = Q_L = 335$  kJ/kg.

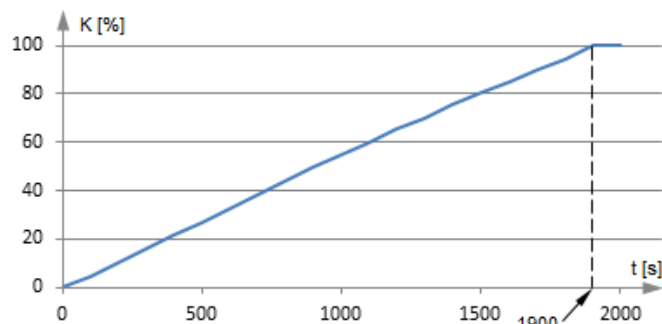


Rys. 3. Entalpia  $H_{xb1}$  i  $H_{xb2}$  w przecie podczas przemiany fazowej w funkcji czasu dla punktów odpowiednio:  $x_{b1} = 0,02$  i  $x_{b2} = 0,05$

Na rys. 4 pokazano procentowy stan wytopienia pręta w funkcji czasu nagrzewania (5). Współczynnik  $K$  w przypadku jednowymiarowym zdefiniowano następująco:

$$K = \frac{l'}{l_0} \cdot 100\% \quad (5)$$

gdzie:  $l'$  – długość stopionego pręta [m];  $l_0$  – całkowita długość pręta [m].



Rys. 4. Procentowe wytopienie pręta w funkcji czasu

Na rys. 4 widać, że procentowy stan wytopienia pręta (udział cieczy w objętości pręta) rośnie liniowo w funkcji czasu nagrzewania. Liniowy przebieg funkcji ma związek z charakterem źródła ciepła, które zamodelowano za pomocą warunku brzegowego drugiego rodzaju, tj.  $q = 2000 \text{ W/m}^2$ . Pręt ulega całkowitemu stopieniu po czasie 1900 s ciągłego grzania, po czym w układzie rozpoczyna się proces ogrzewanie medium znajdującego się wyłącznie w ciekłym stanie skupienia.

Poprawność przedstawionego rozwiązania procesu topnienia została zweryfikowana pod kątem energetycznym. Dokonano sprawdzenia bilansu cieplnego (6) w układzie po zakończeniu procesu przemiany fazowej (przedstawione obliczenia przeprowadzono dla chwili czasu  $t = 1900 \text{ s}$ ).

Energia  $E_o$  pobrana przez pręt jest równa energii  $E_d$  dostarczonej do pręta, dlatego dla rozpatrywanej chwili czasu  $t = 1900 \text{ s}$  może być obliczona jako  $E_o = P_{Qt} = 2 \cdot 1900 = 3800 \text{ J}$ , gdzie  $P_Q = 2 \text{ W}$  – wydajność źródła ciepła.

Energia  $E_Q$  pobrana przez pręt w postaci ciepła może być wyznaczona ze wzoru:

$$E_Q = c_p m \Delta T + m Q_L \quad (6)$$

gdzie:  $c_p$  – ciepło właściwe materiału [ $\text{J}/(\text{kgK})$ ],  $m$  – masa [ $\text{kg}$ ],  $\Delta T$  – przyrost temperatury w pręcie [ $\text{K}$ ],  $Q_L$  – ciepło przemiany fazowej materiału pręta [ $\text{J}$ ].

Wartość średniej temperatury w pręcie dla rozważanej chwili czasu  $t = 1900 \text{ s}$  wyznaczono numerycznie i otrzymano wartość  $T = 309,574 \text{ K}$  (zachowano dokładność do trzech miejsc po przecinku w celu dokładnego obliczenia energii cieplnej). Zmiana temperatury  $\Delta T$  w układzie w porównaniu z temperaturą początkową  $T_0 = 268 \text{ K}$  wynosi  $41,574 \text{ K}$ . W rozpatrywanej chwili czasu pręt jest całkowicie stopiony, zatem ciepło fazowe  $Q_L$  zostało pobrane przez cały pręt (do obliczeń przyjęto masę  $m$  pręta równą  $0,009 \text{ kg}$ ).

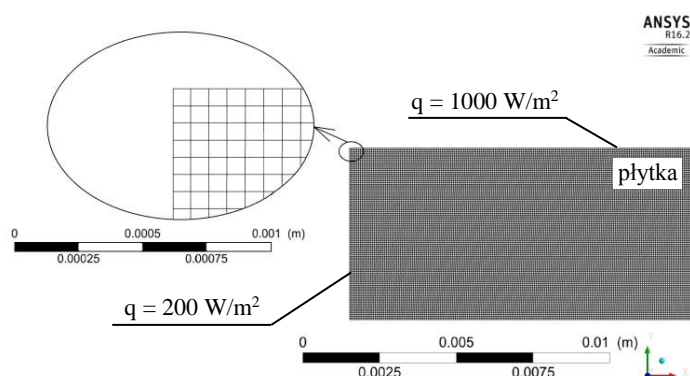
Energię zgromadzoną w pręcie w postaci ciepła  $E_Q$  obliczono ze wzoru (7):

$$E_Q = 2100 \cdot 0,009 \cdot 41,574 + 0,009 \cdot 335000 = 3800,749 \text{ J} \quad (6)$$

Różnica wartości między energią  $E_Q$  zgromadzoną w pręcie w postaci ciepła (7) i energią  $E_o$  pobraną przez układ ( $E_o = 3800 \text{ J}$ ) jest pomijalnie mała i nie ma istotnego wpływu na rozpatrywane zjawiska. Błąd bezwzględny wynosi bowiem około 0,749 J, a błąd względny obliczony w odniesieniu do wartości  $E_o$  około 0,02%.

### 3. POLE TEMPERATURY W PŁYTKCE W PROCESIE TOPNIENIA

Następną analizę przeprowadzono dla modelu 2D. Rozważono dwuwymiarowe zagadnienie topnienia materiału w płytce. Założono: temperaturę początkową  $T_0 = 268 \text{ K}$ , wymiary modelu 0,01 m na 0,02 m oraz przyjęto, że transport ciepła wynika jedynie z mechanizmu przewodzenia. Na granicach płytki zadano warunki brzegowe drugiego rodzaju: na krawędziach pionowych  $q_1 = 200 \text{ W/m}^2$  i na granicach poziomych  $q_- = 1000 \text{ W/m}^2$ .



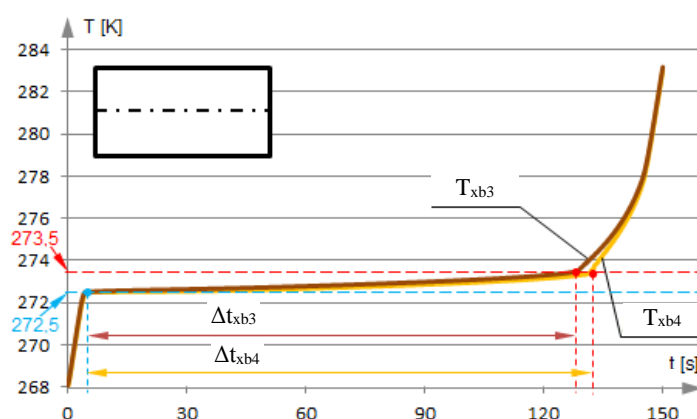
Rys. 5. Siatka elementów skończonych w analizie procesu topnienia płytki

Obliczenia numeryczne przeprowadzono z krokiem czasowym  $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ . Model podzielono równomierną siatką kwadratowych elementów skończonych o boku długości  $1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  – w wyniku dyskretyzacji utworzono  $2 \cdot 10^4$  komórek elementarnych (rys. 5). Do analizy przyjęto, że płytkę wykonano z tego samego materiału co pręt (rys. 1) – wartości właściwości materiałowych podano w tabeli 1.

Na rys. 6 zaprezentowano wykres temperatury  $T$  w funkcji czasu  $t$  dla dwóch przykładowych punktów:  $x_{b3}$  i  $x_{b4}$ . Wykres  $T_{x_{b3}}$  pokazuje zmianę temperatury w punkcie  $x_{b3}$  znajdującym się na poziomej osi symetrii płytki w odległości 0,01

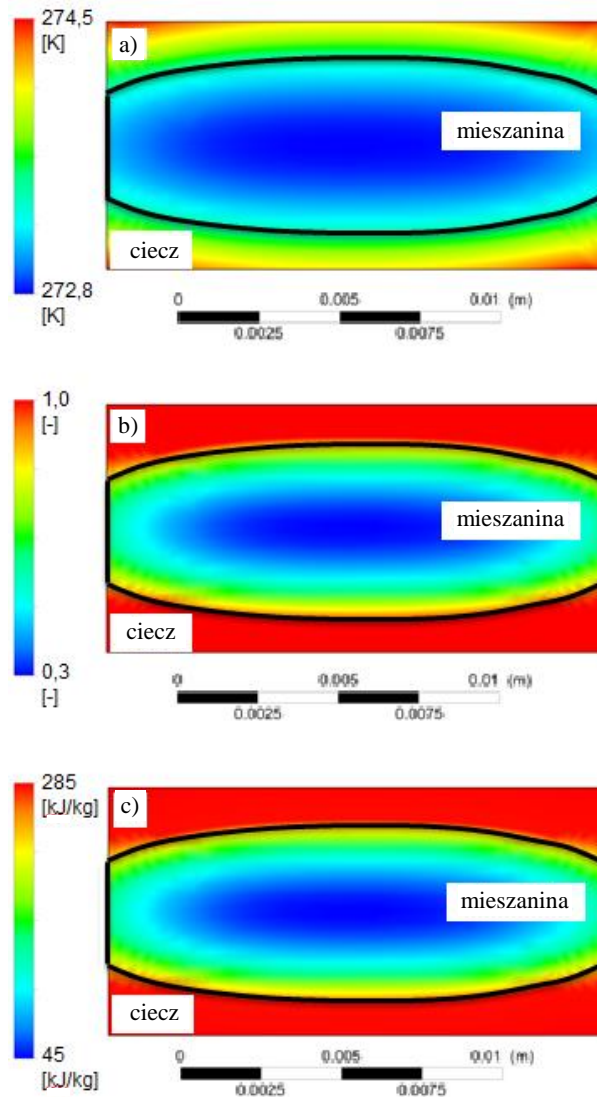


od lewej granicy płytki. Wykres  $T_{xb4}$  wykreślono dla punktu umieszczonego na poziomej osi symetrii w odległości  $x_{b2} = 0,10$  od lewej granicy płytki. Na podstawie zamieszczonych charakterystyk można wyróżnić trzy charakterystyczne etapy procesu ogrzewania, podczas którego zachodzi przemiana fazowa materiału. Ponadto można zauważyć, że dla punktu  $x_{b4}$  czas  $\Delta t_{xb4}$  pochłaniania ciepła fazowego jest o 2,5% dłuższy niż dla punktu  $x_{b3}$ . Przykład ten pokazuje, że wraz z oddalaniem się od lewej granicy płytki rośnie czas trwania przemiany fazowej.



Rys. 6. Temperatura w płytce podczas przemiany fazowej w funkcji czasu dla punktów:  $x_{b1} = 0,01$  i  $x_{b2} = 0,10$  na poziomej osi symetrii

Dla przykładowej chwili czasu  $t = 100$  s od rozpoczęcia nagrzewania zamieszczono rozkłady wybranych wielkości fizycznych: rozkład pola temperatury  $T$  (rys. 7a), rozkład udziału cieczy w materiale  $\beta$  (rys. 7b) oraz rozkład entalpii  $H$  (rys. 7c). W tej chwili czasu najniższa temperatura w płytce (rys. 7a) jest wyższa od temperatury krzepnięcia materiału  $T_s = 272,5$  K, a zawartość cieczy w materiale (rys. 4.21b) wynosi od 0,3 do 1,0 – w płytce nie występuje materiał w stałym stanie skupienia, ale wyróżnić można obszar odpowiadający cieczy oraz obszar mieszaniny ciała stałego i cieczy. Rozkład entalpii (rys. 7c) odpowiada rozkładowi przedstawionemu na rysunku 7b.



Rys. 7. Rozkład: a) temperatury  $T$ , b) udziału cieczy w materiale  $\beta$ , c) entalpii  $H$  w płytce dla chwili czasu  $t = 100$  s

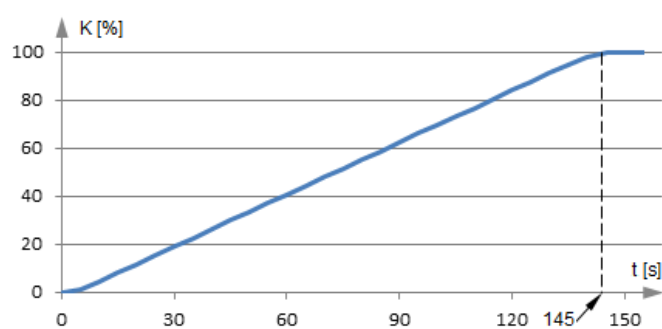
Procentowy stan wytopienia płytki (8) w funkcji czasu nagrzewania zaprezentowano na rys. 8. Parametr  $K_S$  w przypadku modelu dwuwymiarowego zdefiniowano według zależności danej wzorem:

$$K_S = \frac{S'}{S_0} \cdot 100\% \quad (8)$$



gdzie:  $S'$  – pole powierzchni obszaru płytki w ciekłym stanie skupienia [ $m^2$ ];  $S_0$  – pole powierzchni płytki [ $m^2$ ].

Na rys. 8 widać, że proces topnienia w rozważanym przypadku trwa około 145 s. Udział stopionego obszaru płytki w odniesieniu do geometrycznych rozmiarów modelu zwiększa się liniowo od zera (cała płytka w stałym stanie skupienia,  $K_S = 0\%$ ) do całkowitego stopienia materiału ( $K_S = 100\%$ ).



Rys. 8. Procentowe wytopienie płytki w funkcji czasu nagrzewania

Następnie sprawdzono bilans cieplny w płytce dla całkowicie stopionego medium – rozpatrzono energię w chwili czasu  $t = 150$  s. Bilans wyraża się zależnością  $E_o = E_Q$ , gdzie  $E_o$  - energia pobrana przez płytkę [J],  $E_Q$  – energia cieplna zgromadzona w płytce [J]. Energię  $E_o$  pobraną przez układ wyznaczono na podstawie warunków brzegowych zadanych na granicach modelu. Obliczono, że wydajność cieplna  $P_Q$  źródła wynosi 44 W, a energia  $E_o$  wyraża się wzorem  $E_o = 44t$  [J], gdzie  $t$  – czas nagrzewania [s]. Energia  $E_o$  odebrana przez płytkę równa jest  $E_o = 6600$  J. Energię  $E_Q$  obliczono korzystając z wzoru (6). W tym przypadku masa  $m$  wynosi 0,018 kg, natomiast przyrost temperatury  $\Delta T = 15,028$  K. Po podstawieniu danych otrzymano, że energia  $E_Q = 6598,058$  J.

Różnica wartości między energią  $E_Q$  i energią  $E_o$  jest pomijalna. Błąd bezwzględny jest równy 1,942 J, a błąd względny obliczony w odniesieniu do energii  $E_o$  wynosi 0,03%. Podobnie jak w przypadku analizy procesu przemiany fazowej w pręcie można założyć, że  $E_Q = E_o$ .

#### 4. WNIOSKI KOŃCOWE

W artykule omówiono wyniki analizy numerycznej procesu topnienia z wykorzystaniem programu ANSYS Fluent. Wykazano, że w rozważanym zagadnieniu cieplnym analiza MES charakteryzuje się dużą dokładnością



otrzymanych wyników. Metoda ta może być zatem zastosowana w skomplikowanym modelu topnienia śniegu w rozjeździe kolejowym.

Niewątpliwą wadą wybranej metody jest natomiast czas trwania obliczeń. W przypadku procesu topnienia w przecie czas ten wyniósł około 10 dni, a w przypadku modelu płytki około 2 dni. Czas obliczeń numerycznych układów z przemianą fazową może trwać od kilku dni do kilku miesięcy ciągłej pracy komputera PC w zależności od m.in.: poziomu skomplikowania geometrii (liczba komórek obliczeniowych) oraz złożoności modelu fizycznego (liczba rozwiązywanych równań) analizowanego przypadku [3].

## LITERATURA

- [1] Wołoszyn M., Jakubiuk K., Flis M.: Analysis of resistive and inductive heating of railway turnouts, *Przegląd Elektrotechniczny*, no. 4, Warszawa 2016.
- [2] Wiśniewski S., Wiśniewski T.: Wymiana ciepła, wyd. czwarte zmienione, WNT, Warszawa 1997.
- [3] Kowalewski T., Cybulski A., Michałek T., Kowalczyk M.: Laboratoryjne wzorce do walidacji programów odlewniczych, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 2005.
- [4] ANSYS Fluent Theory Guide, Release 15.0, November 2013, ANSYS Inc.

## NUMERICAL MODELING OF THE MELTING PROCESS USING FEM ANALYSIS

The melting of the medium is a phase change process of the first type in which a substance transfers from solid to liquid state. Melting is associated with the absorption of phase transformation heat at a constant temperature, so it is an example of the problem, which is characterized by strong non-linearity. Practical implementation of calculations of issues in the field of phase transformations uses numerical methods. Numerical modeling of the melting process can be carried out either by the front tracking method or the enthalpy method. The article presents the results of numerical analysis of the melting process in two thermal models. The calculations were carried out using the enthalpy method using the ANSYS Fluent program.

**KEYWORDS:** numerical melting modeling, enthalpy method, heat transfer, phase change process