Marek Blok
Katedra Sieci Teleinformacyjnych
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska
Gdańsk, ul. G. Narutowicza 11/12
Marek.Blok@eti.pg.edu.pl

Gdańsk, 20-22 czerwca 2018

INTERPOLATOR WYKORZYSTUJĄCY FILTR Z MASKOWANIEM CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWEJ

INTERPOLATOR BASED ON FREQUENCY RESPONSE MASKING FILTER

Streszczenie**: Interpolator o dużej krotności wymaga stosowania dolnoprzepustowych filtrów cyfrowych o bardzo wąskim paśmie przejściowym. Przekłada się to na dużą złożoność obliczeniową i problemy z projektowaniem filtrów interpolacyjnych. W pracy zaproponowano użycie metody FRM rozbijającej filtr o wąskim paśmie przejściowym na grupę filtrów o obniżonych wymaganiach, co zmniejsza liczbę niezerowych współczynników. W rezultacie użycie tego rozwiązania pozwala na obniżenie złożoności obliczeniowej interpolatora.**

Abstract**: The interpolation with high resampling ratio requires low-pass digital filters with very narrow transition band which results in high computational complexity and makes filter design problematic. Therefore in this work we propose to use the FRM method, which breaks the filter with a narrow transition band into a group of filters with reduced design requirements, which decreases the number of non-zero coefficients. As a result, using the FRM filter reduces the computational complexity of the interpolator.**

Słowa kluczowe: **Interpolator, projektowanie filtrów interpolacyjnych, filtr FRM.**

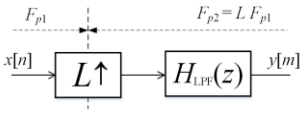
Keywords: **Interpolator, interpolation filter design, FRM filter.**

1. WSTĘP

Efektywna numerycznie realizacja modulacji sygnałów telekomunikacyjnych wymaga stosowania interpolacji pozwalającej na wykonywanie przetwarzania na najmniejszej wymaganej na danym etapie szybkości próbkowania. Realizacja interpolacji sygnału cyfrowego o dużej krotności wymaga stosowania cyfrowych filtrów dolnoprzepustowych o bardzo wąskim paśmie. Wiąże się to z dużą długością odpowiedzi impulsowej tych filtrów, a co za tym idzie – dużą złożonością obliczeniową samego algorytmu interpolacji. Jedną z technik projektowania filtrów cyfrowych o bardzo wąskim paśmie jest metoda maskowania charakterystyki częstotliwościowej (*Frequency Response Masking* - FRM) [2], rozbijająca problem projektowania takiego filtru na projektowanie kilku filtrów o obniżonych wymaganiach projektowych. W rezultacie ogólna liczba niezerowych współczynników ulega zmniejszeniu, a więc obniżona zostaje również złożoność obliczeniowa jego implementacji. W pracy rozpatrzono zagadnienie projektowania filtrów FRM na potrzeby projektowania filtru interpolacyjnego L-krotnego interpolatora i zaproponowano nową strukturę interpolatora wykorzystującą filtr FRM. Omówiono projektowanie filtru FRM i pokazano, że jego użycie pozwala na obniżenie złożoności obliczeniowej realizacji interpolatora w porównaniu do realizacji polifazowej wykorzystującej filtr interpolacyjny projektowany bezpośrednio.

2. Klasyczny interpolator L-krotny

Rys. 1 przestawia klasyczny interpolator L-krotny. Składa się on z układu L-krotnie zwiększającego szybkość próbkowania ($L\uparrow$) poprzez wstawianie pomiędzy każde dwie kolejne próbki wejściowe $L-1$ próbek zerowych (*up-sampler*) oraz następującego po nim dolnoprzepustowego $1/L$ pasmowego filtru $H_{LPF}(z)$.



Rys. 1. Klasyczny interpolator L-krotny

Zaletą tego rozwiązania jest jego prostota, jednak gdy wymagana jest wysoka jakość konwersji szybkości próbkowania filtr interpolacyjny cechuje bardzo długa odpowiedź impulsowa. Dodatkowo filtr interpolacyjny pracuje tu z wysoką wyjściową szybkością próbkowania F_{p2}, L-krotnie wyższą od wejściowej szybkości próbkowania, co oznacza bardzo dużą złożoność obliczeniową bezpośredniej realizacji takiego rozwiązania. Zauważmy jednak, że tylko co L-ta próbka sygnału wejściowego filtru jest niezerowa. Wykonywanie obliczeń dla tych próbek można pominąć wykorzystując polifazową strukturę interpolatora ([4], [5]) o złożoności obliczeniowej L-krotnie mniejszej od złożoności struktury klasycznej. Liczba mnożeń i dodawań tej struktury przypadająca na każdą próbkę wejściową interpolatora jest równa liczbie próbek odpowiedzi impulsowej filtru interpolacyjnego.

Rozpatrzmy projekt interpolatora L-krotnego o bardzo wysokich wymaganiach dla $L = 16$. Załóżmy, że filtr interpolacyjny, którego jakość przekłada się bezpośrednio na jakość interpolatora spełnia następujące wy-

magania: zafalowanie w paśmie przepustowym $\pm 0{,}1$ dB, tłumienie w paśmie zaporowym 100 dB i częstotliwość graniczna pasma zaporowego $F_{p1}/2 = 24$ kHz, co pozwala na pełne wyeliminowanie replik widmowych powstających w wyniku zwiększania szybkości próbkowania w *up-samplerze*.

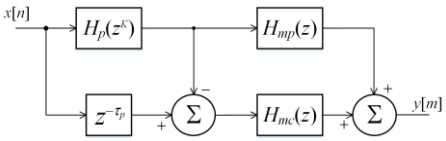
Jeżeli przyjąć, że częstotliwość górna pasma przepustowego filtru wynosi $F_{max} = 20$ kHz, to nasze założenia spełni filtr interpolacyjny o długości $N_{LPF} = 757$, który można bezproblemowo zaprojektować uzyskując algorytm o złożoności obliczeniowej wynoszącej 757 mnożeń i dodawań na każdą próbkę wejściową. Jeżeli jednak znacząco zwiększyć wymagania jakościowe przyjmując $F_{max} = 23{,}9$ kHz, to szacowana długość odpowiedzi impulsowej filtru interpolacyjnego N_{LPF} wynosi aż 30211, co poza olbrzymią złożonością obliczeniową, stwarza problem z zaprojektowaniem takiego filtru. Przykładowo, metoda `firpm` z Matlaba nie radzi sobie z jego zaprojektowaniem. Sprostanie takim wymaganiom projektowym wymaga zatem rozwiązania dwóch problemów: konieczne jest obniżenie złożoności obliczeniowej realizacji interpolatora oraz znalezienie metody pozwalającej na skuteczne zaprojektowanie filtru interpolacyjnego.

3. Filtr FRM i jego struktura

Ciekawym rozwiązaniem problemu projektowania filtrów o bardzo wąskich pasmach przejściowych jest metoda FRM [2]. Filtr FRM (rys. 2) do ukształtowania zbocza docelowego filtru wykorzystuje dolnoprzepustowy filtr prototypowy o K-krotnie szerszym paśmie przejściowym, gdzie K jest liczbą całkowitą dobraną przez projektanta. Aby uzyskać K-krotne zwężenie pasma przejściowego wszystkie opóźniacze w strukturze filtru prototypowego o transmitancji $H_p(z)$ zastępuje się opóźniaczami o K próbek. Uzyskany w ten sposób filtr kształtujący o transmitancji $H_p(z^K)$ cechuje taka sama złożoność obliczeniowa, ale jego charakterystyka częstotliwościowa jest K-krotnym powtórzeniem K-krotnie zwężonej charakterystyki filtru prototypowego. Wystarczy teraz za filtrem kształtującym umieścić filtr maskujący $H_{mp}(z)$ eliminujący niepożądane repliki z charakterystyki filtru kształtującego. W podstawowym wariancie, gdy pozostawiana jest podstawowa replika zawężonej charakterystyki filtru prototypowego metoda FRM upraszcza się do metody I-FIR (*Interpolated FIR*) [3], gdzie wynikowa transmitancja

$$H_{IFIR} = H_p(z^{-K})H_{mp}(z) \tag{1}$$

Z kolei, jeżeli pozostawiać więcej niż jedną replikę zawężonej charakterystyki filtru prototypowego, to uzyskanie docelowego filtru dolnoprzepustowego wymaga „załatania" luk pomiędzy tymi replikami. Problem ten rozwiązuje się dodając w strukturze FRM drugą gałąź (rys. 2), w której drugi filtr maskujący $H_{mc}(z)$ eliminuje niepożądane repliki z charakterystyki filtru komplementarnego do filtru kształtującego. Takie rozwiązanie, kosztem jednego tylko dodawania realizuje filtr, który idealnie uzupełnia luki w charakterystyce filtru kształtującego. Uzyskujemy w ten sposób filtr o transmitancji



Rys. 2. Struktura filtru FRM

$$H_{FRM}(z) = H_p(z^{-K})H_{mp}(z) + \\ + \left(z_p^{-\tau_p} - H_p(z^{-K})\right) H_{mc}(z) \tag{2}$$

gdzie τ_p jest opóźnieniem filtru kształtującego $H_p(z^K)$.

K-krotne poszerzenie pasma przejściowego filtru prototypowego, znacząco zmniejsza długość odpowiedzi impulsowej. Również, przy odpowiednio dobranym K szerokość pasm przejściowych filtrów maskujących jest większa od pasma przejściowego docelowego filtru. Obniża to złożoność projektowania filtrów składowych oraz zmniejsza sumaryczną liczbę niezerowych współczynników struktury, co wiąże się z obniżeniem złożoności obliczeniowej realizacji takiego filtru.

3.1. Specyfikacje filtrów składowych

Podstawowym problemem w projektowaniu filtru FRM jest określenie położenia pasma przejściowego filtru prototypowego. Musi być ono tak dobrane, żeby jedno z pasm przejściowych filtru kształtującego albo filtru do niego komplementarnego pokrywało się z zakładanym pasmem przejściowym projektowanego filtru interpolacyjnego. Przyjmijmy, że pasmo przejściowe filtru prototypowego jest ulokowane w przedziale $(f_{p,p}, f_{s,p})$. W wyniku kompresji i replikacji charakterystyki częstotliwościowej pasma przejściowe o opadających zboczach dla filtru kształtującego $H_p(z^K)$ lokują się w przedziałach (f_p, f_s), gdzie

$$f_p = (i + f_{p,p})/K \text{ oraz } f_s = (i + f_{s,p})/K \tag{3}$$

dla $i = 0,1,2, \ldots$ ($i = 0$ dla wariantu I-FIR) oraz w przedziałach (f_p', f_s') dla filtru do niego komplementarnego

$$f_p' = (i - f_{p,p})/K \text{ oraz } f_s' = (i - f_{s,p})/K \tag{4}$$

dla $i = 1,2, \ldots$. Zatem, jeżeli pasmo przejściowe projektowanego filtru ma być kształtowane na podstawie jednego z pasm przejściowych filtru kształtującego, częstotliwości graniczne filtru prototypowego należy dobierać następująco

$$f_{p,p} = Kf_p - i \text{ oraz } f_{s,p} = Kf_s - i \tag{5}$$

Z kolei, gdy pasmo przejściowe ma być kształtowane w oparciu o pasmo przejściowe filtru komplementarnego

$$f_{p,p} = i - Kf_p \text{ oraz } f_{s,p} = i - Kf_s \tag{6}$$

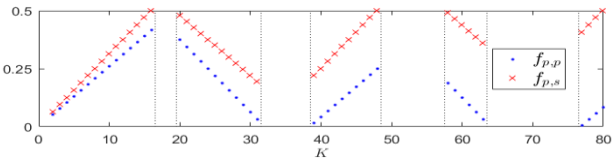
W obydwu przypadkach parametry K oraz i należy dobierać, tak aby spełniona była zależność

$$f_{p,p} < f_{s,p} \in (0{,}0.5) \tag{7}$$

Na rys. 3 wykreślono częstotliwości graniczne filtru prototypowego dla specyfikacji podanej w p. 2 i $F_{max} = 20$ kHz. Przyjęto $f_p = F_{max}/(L \cdot F_{p1})$ oraz $f_s = 0.5/L$. Kolejne zakresy K odpowiadające kolejnym wartościom i są przedzielone wartościami parametru K, dla których realizacja filtru FRM nie jest możliwa. Przy-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

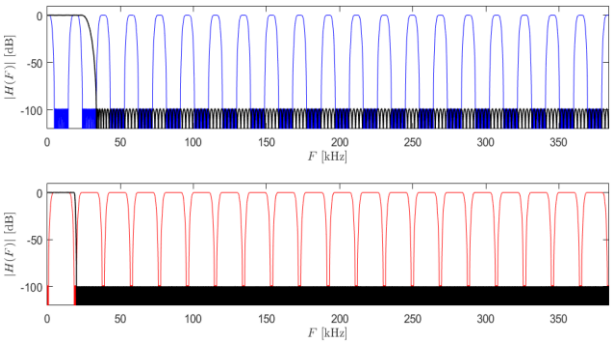
kładowo, dla $K = 10$ $i = 0$, a dla $K = 24$ lub 48 $i = 1$, przy czym dla $K = 10$ i 48 zbocze charakterystyki filtru wydobywane jest z filtru kształtującego, a dla $K = 24$ z filtru do niego komplementarnego.



Rys. 3. Częstotliwości graniczne pasma przejściowego filtru prototypowego dla różnych wartości parametru$K$

Poza doborem częstotliwości granicznych przy projektowaniu filtru konieczne jest określenie zakładanego zafalowania w paśmie przepustowym i zaporowym. Wykorzystanie filtru komplementarnego do filtru kształtującego w filtrze FRM nie wnosi dodatkowych kosztów, ale jednocześnie wymusza założenie takiego samego zafalowania charakterystyki w paśmie przepustowym jak w paśmie zaporowym, bo w filtrze komplementarnym zafalowanie z pasma przepustowego filtru kształtującego przekłada się na zafalowanie w paśmie zaporowym filtru komplementarnego. Jednocześnie zwykle zafalowanie wymagane w paśmie przepustowym filtru interpolacyjnego jest niższe od wymaganego zafalowania w paśmie zaporowym, stąd ograniczenie to przekłada się na zwiększenie wymagań filtru kształtującego i wydłużenie jego odpowiedzi impulsowej. Z drugiej strony, przy założonym wymaganym maksymalnym zafalowaniu w paśmie przepustowym wypadkowego filtru interpolacyjnego ograniczenie takie pozwala na przeniesienie całego zakresu dopuszczalnego zafalowania w paśmie przepustowym na zafalowanie w paśmie przepustowym filtrów eliminujących repliki.

Wyjątkiem od takiego podejścia jest przypadek dla $i = 0$, czyli wariant I-FIR [3], w którym nie ma zastosowania filtry komplementarny. W takim przypadku zafalowanie w paśmie przepustowym filtru prototypowego można dobierać niezależnie od zakładanego tłumienia w paśmie zaporowym. Pozwala to na poluzowanie specyfikacji filtru prototypowego, kosztem filtru maskującego.



Rys. 4. Charakterystyki amplitudowe filtru kształtującego i maskującego dla (u góry) filtru prototypowego oraz (na dole) filtru komplementarnego dla $K = 40$

Na rys. 4 pokazano charakterystyki filtru kształtującego i filtru do niego komplementarnego, uzyskanych z filtru prototypowego zaprojektowanego dla przyjętej wcześniej specyfikacji oraz $K = 40$. Przy takim wyborze parametru K zbocze projektowanego filtru interpolacyjnego formowane jest w ramach drugiego pasma przepustowego filtru kształtującego (rys. 4). Stąd filtr maskujący dla filtru kształtującego $H_{mp}(z)$ musi przenieść dwa pierwsze pasma przepustowe filtru kształtującego $H_p(z^{-K})$ eliminując kolejne, a filtr maskujący dla filtru komplementarnego $H_{mc}(z)$ musi przenieść tylko pierwsze pasmo filtru komplementarnego do filtru kształtującego, które to pasmo ma wypełnić lukę pomiędzy pasmami przepustowymi filtru kształtującego.

Dla wydobycia zbocza projektowanego filtru z filtru kształtującego (przypadek z rys. 4) otrzymujemy następujące częstotliwości graniczne pasma przejściowego filtru maskującego $H_{mp}(z)$

$$f_{p,mp} = \frac{0.5}{L} \text{ oraz } f_{s,mp} = \frac{2i+1}{K} - \frac{F_{max}}{LF_{p1}} \tag{8}$$

co odpowiada zakresowi od końca zachowywanego zbocza (tu 24 kHz) do początku kolejnej repliki. Parametr i przyjmuje wartość ustaloną na etapie ustalania specyfikacji filtru prototypowego (5). Z kolei dla filtru $H_{mc}(z)$ otrzymujemy

$$f_{p,mc} = \frac{2i}{K} - \frac{F_{max}}{LF_{p1}} \text{ oraz } f_{s,mc} = \frac{F_{max}}{LF_{p1}} \tag{9}$$

co odpowiada zakresowi od końca zbocza zachowywanej repliki z charakterystyki filtru komplementarnego do filtru kształtującego, do początku kolejnej repliki (tu 20 kHz), który pokrywa się z początkiem zachowywanego zbocza.

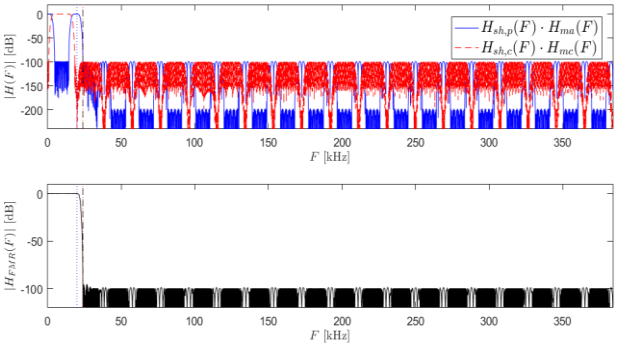
Analogicznie, dla wydobycia zbocza projektowanego filtru z filtru komplementarnego do filtru kształtującego, granice pasma przejściowego filtru maskującego $H_{mp}(z)$ określają zależności

$$f_{p,mp} = \frac{2i-1}{K} - \frac{F_{max}}{LF_{p1}} \text{ oraz } f_{s,mp} = \frac{F_{max}}{LF_{p1}} \tag{10}$$

co odpowiada zakresowi od końca zbocza zachowywanej repliki z charakterystyki filtru kształtującego do początku kolejnej repliki, który pokrywa się z początkiem zachowywanego zbocza. Z kolei dla filtru $H_{mc}(z)$ mamy

$$f_{p,mc} = \frac{0.5}{L} \text{ oraz } f_{s,mc} = \frac{2i}{K} - \frac{0.5}{L} \tag{11}$$

o odpowiada zakresowy od końca zachowywanego zbocza do początku kolejnej repliki. I tym razem parametr i przyjmuje wartość ustaloną na etapie określania specyfikacji filtru prototypowego (6).



Rys. 5. Charakterystyki amplitudowe dla górnego i dolnego toru filtru FRM (u góry) oraz wypadkowa charakterystyka filtru FRM (na dole) dla $K = 40$

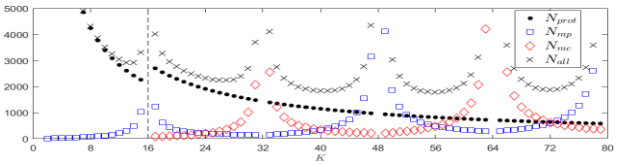
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Charakterystyki filtrów maskujących dla rozpatrywanego przykładu pokazano na rys. 4 wraz z charakterystykami filtru kształtującego i filtru do niego komplementarnego. Z kolei na rys. 5 pokazano efekty końcowe, czyli charakterystyki z wyjścia górnego i dolnego toru przetwarzania struktury filtru FRM oraz zbiorczą charakterystykę zaprojektowanego filtru FRM. Jak widać użycie toru z filtrem komplementarnym pozwoliło na uzupełnienie luk w charakterystyce, która ostatecznie ukształtowała się w formie poszukiwanego dolnoprzepustowego filtru interpolacyjnego.

4. INTERPOLATOR Z FILTREM FRM

Zastosowanie filtru FRM (lub I-FIR) w interpolatorze ma na celu obniżenie jego złożoności obliczeniowej, co można powiązać z liczbą niezerowych współczynników filtru interpolacyjnego. Przykładowo, dla $F_{max} =$ 20kHz najkorzystniejsze jest $K = 8$ (wariant I-FIR), dla którego $N_{all} = 165$, co jest liczbą znacząco mniejszą od liczby współczynników dla bezpośredniego projektu filtru, ale aby taka realizacja mogła być konkurencyjna względem struktury polifazowej konieczne jest odpowiednie przetworzenie struktury interpolatora wykorzystującego filtr I-FIR [1].

W powyższym przypadku zastosowanie filtru FRM mija się z celem, bo chociaż zwiększanie K zmniejsza liczbę współczynników filtru prototypowego, to jednocześnie gęstsze ulokowane replik w charakterystyce filtru kształtującego skutkuje dużym wzrostem długości filtrów maskujących. Korzyści ze zastosowania filtru FRM ujawniają się dopiero, gdy konieczne jest zastosowanie filtru interpolacyjnego o znacznie węższym paśmie przejściowym. Na rys. 6 pokazano jak, dla założonej w p. 2 specyfikacji, od parametru K zależna jest liczba współczynników filtru prototypowego N_{prot}, filtrów maskujących (N_{mp} i N_{mc}) oraz ogólna liczba niezerowych współczynników N_{all} dla $F_{max} =$ 23,9kHz. Tym razem najmniejszą liczbę współczynników $N_{all} = 1773$ można uzyskać dla $K = 56$. Jest, to nie tylko około 17-krotnie mniej niż szacowanie dla projektu bezpośredniego, ale równocześnie, wymagane długości pozwalają na zaprojektowanie filtrów składowych filtru FRM, co nie jest możliwe w podejściu bezpośrednim.

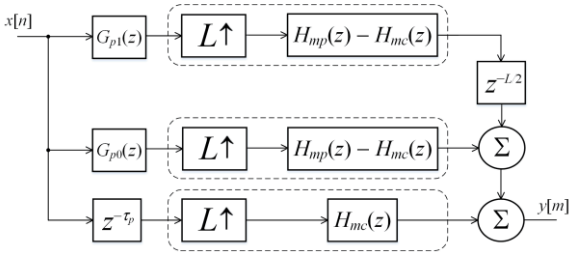


Rys. 6. Ogólna liczba współczynników filtru FRM i jego filtrów składowych w funkcji K dla $F_{max} =$ 23,9kHz

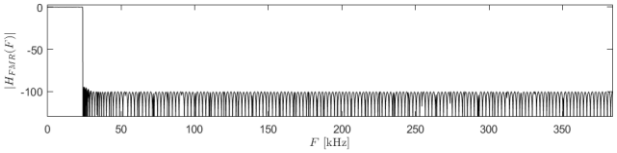
Jednak pełne wykorzystanie możliwości obniżenia złożoności obliczeniowej interpolatora wykorzystującego filtry FRM wymaga odpowiedniego przekształcenia struktury takiego interpolatora. Na rys. 7 pokazano przekształconą strukturę uzyskaną dla założenia, że krotność interpolacji L jest parzysta, a $K = k\frac{L}{2}$, gdzie k jest liczbą nieparzystą. Filtry polifazowe $G_{pi}(z)$ uzyskujemy poprzez dekompozycję filtru $H_{prot}(z^{2K/L})$, którego odpowiedź impulsowa zawiera w sobie $2K/L - 1$ próbek zerowych pomiędzy każdymi dwiema próbkami niezerowymi. Uwzględniając możliwość polifazowej implementacji filtrów maskujących uzyskujemy złożoność obliczeniową wynoszącą zaledwie

$$\Theta = N_{prot} + N_{mc} + 2 \cdot \max(N_{mc}, N_{mp}) \qquad (12)$$

mnożeń i dodawań na próbkę wejściową. Przy naszych założeniach wielkość ta jest najmniejsza dla $K = 40$ i wynosi 2308 przy $N_{all} = 1969$. Jest to około 13-krotnie mniej w stosunku to struktury polifazowej, oczywiście, gdyby udało się zaprojektować filtr interpolacyjny bezpośrednio. Zbiorczą charakterystykę filtru FRM zaprojektowanego przy tych założeniach przedstawia rys. 8.



Rys. 7. Schemat interpolatora bazującego na filtrze FRM



Rys. 8. Charakterystyka amplitudowa filtru FRM

5. PODSUMOWANIE

W pracy przybliżono zagadnienie projektowania filtrów interpolacyjnych w oparciu o metodę FRM. Pokazano, że stosowanie takiego rozwiązania ma sens tylko dla bardzo wąskiego pasma przejściowego filtru interpolacyjnego. Jednak w takich przypadkach podejście to umożliwia praktyczną realizację interpolacji przy założeniu bardzo wysokich wymagań jakości konwersji przy jednoczesnym znacznym zmniejszeniu liczby współczynników filtru interpolacyjnego. Zaproponowano również strukturę interpolatora, która pozwala na nawet kilkunastokrotne zmniejszenie złożoności obliczeniowej w porównaniu do bezpośredniej realizacji z użyciem struktury polifazowej.

LITERATURA

[1] Blok Marek. 2011. „Zmiana szybkości próbkowania z zastosowaniem filtrów I-FIR". Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne 84 (8-9): 1374-1379.

[2] Lim Y.. 1986. „Frequency-response masking approach for the synthesis of sharp linear phase digital filters". IEEE transactions on circuits and systems 33 (4): 357-364.

[3] Lyons Richard. 2003. „Interpolated narrowband lowpass FIR filters", IEEE Signal Processing Magazine 20 (1): 50-57.

[4] Saramaki T., Neuvo T., Mitra S.K.. 1988. „Design of computationally efficient interpolated FIR filters". IEEE Transactions on Circuits and Systems 35 (1): 70-88.

[5] Vaidyanathan P.P.. 1993. „Multirate Systems and Filter Banks", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl