

## ŁĄCZENIE DANYCH POMIAROWYCH Z DODATKOWĄ WIEDZĄ METROLOGICZNĄ W CELU OCENY NIEPEWNOŚCI POMIARU

Wojciech TOCZEK, Bala Sasirekha NAGOTHU

Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Katedra Metrologii i Optoelektroniki  
tel.: 583471657, e-mail: toczek@eti.pg.gda.pl

**Streszczenie:** Przedstawiono modus operandi w ocenie niepewności pomiaru dla krótkich serii pomiarowych. Metoda wykorzystuje dodatkową wiedzę metrologiczną do zwiększenia liczby stopni swobody rozkładu t-Studenta, uzyskiwanego w wyniku bayesowskiej analizy wyników pomiarów. W rezultacie możliwe jest oszacowanie niepewności standardowych dla najkrótszych serii pomiarowych, o długości  $n = 2$  i  $n = 3$ .

**Słowa kluczowe:** standardowa niepewność pomiaru, krótka seria pomiarowa, dodatkowa wiedza o procesie pomiarowym

### 1. WPROWADZENIE

Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii (JCGM) zapowiada zmianę paradygmatu dotyczącego sposobu obliczania standardowej niepewności pomiaru metodą typu A. W obecnym przewodniku *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM) [1] obserwujemy mieszaninę częstościowego i bayesowskiego pojmowania prawdopodobieństwa. Wyznaczanie niepewności metodą typu A jest realizacją klasycznej analizy statystycznej, natomiast metoda typu B, bazująca na reprezentowaniu wiedzy przez rozkłady prawdopodobieństwa, jest bayesowska. Modyfikacja, która ma obowiązywać w nowej wersji przewodnika, polega na ujednoczeniu podejść w metodach typu A i B poprzez zastosowanie w obu przypadkach bayesowskiej interpretacji prawdopodobieństwa [2,3,4,5].

Użyteczną rolę w metrologii pełni statystyka bayesowska oparta na dwóch założeniach. Pierwsze założenie dotyczy obserwacji. Zakładamy, że obserwacje pochodzą z rozkładu Gaussa o nieznanym parametrach - wartości oczekiwanej  $Y$  i odchyleniu standardowym  $S$ . Możliwe wartości tych zmiennych losowych, to odpowiednio  $\theta$  i  $\sigma$ . Drugie założenie dotyczy rozkładu a priori, który powinien być rozkładem nieinformacyjnym w postaci iloczynu rozkładu równomiernego (dla nieznannej wartości oczekiwanej  $Y$ ) i rozkładu apriorycznego zaproponowanego przez Jeffreys'a o postaci  $\sigma^{-1}$  (dla nieznannej wartości odchylenia standardowego  $S$ ). Przy takich założeniach, po zastosowaniu formuły Bayesa dostajemy rozkład a posteriori, który po marginalizacji otrzymuje postać [6]

$$p(\theta|\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \sqrt{\frac{n}{(n-1)s^2\pi}} \left[1 + \frac{n(\theta-\bar{y})^2}{(n-1)s^2}\right]^{-\frac{n}{2}}, \quad (1)$$

gdzie:  $s$  jest odchyleniem standardowym obliczonym ze zbioru  $n$  wyników pomiarów,  $\bar{y}$  jest wartością średnią tych wyników.

Wyrażenie (1) jest rozkładem t-Studenta, o  $\nu = n - 1$  stopniach swobody, przesuniętym o  $\bar{y}$  i przeskalowanym przez  $\frac{s(\mathbf{y})}{\sqrt{n}}$ .

W nowym przewodniku GUM, standardowa niepewność pomiaru  $u$  ma być reprezentowana przez odchylenie standardowe rozkładu t-Studenta, a więc będzie obowiązywał wzór

$$u = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Jak widać ze wzoru (2), cechą rozkładu t-Studenta jest brak zdefiniowanego odchylenia standardowego dla liczby stopni swobody mniejszej od  $\nu = 3$ . Zatem konsekwencją implementacji wzoru (2) w analizie niepewności będzie wymóg aby liczba pomiarów w serii nie była mniejsza od  $n = 4$ .

Podejmowano już próby rozwiązania problemu wyznaczania niepewności dla przypadków  $\nu = 1$  i  $\nu = 2$ . Propozycja Kackera i Jonesa [7] polega na zastąpieniu, współczynnika  $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}$  ze wzoru (2), mnożnikami 6,48 dla serii pomiarów o liczebności  $n = 2$  i 2,19 dla liczebności  $n = 3$ . Proponowane wartości mnożników wynikają z porównania połowy 95 % przedziałów objęcia rozkładu t-Studenta: 12,71 dla  $n = 2$  i 4,30 dla  $n = 3$  z analogiczną wartością 1,96 dla rozkładu normalnego.

W niniejszym artykule rozważamy praktyczny sposób, który pozwala ocenić niepewność bazując na wynikach uzyskanych w krótkich seriach pomiarowych. Stosując statystykę bayesowską, można połączyć szczupłe dane pomiarowe z dodatkową wiedzą o pomiarze, co powoduje, że zwiększa się liczba stopni swobody rozkładu a posteriori i odchylenie standardowe tego rozkładu staje się aplikacyjną miarą niepewności.

Rozdział 2 przedstawia podstawy matematyczne procedury zwiększającej liczbę stopni swobody rozkładu a posteriori. W rozdziale 3 proponowana metoda jest zastosowana w przykładowym zadaniu, którego celem jest oszacowanie niepewności pomiaru pojemności pasywnych dużej liczby rezystorów SMD. W rozdziale 4

dokonano podsumowania i oceny zastosowanej metody analizy niepewności.

## 2. UŻYCIĘ DODATKOWEJ WIEDZY METROLOGICZNEJ DO ZWIĘKSZENIA LICZBY STOPNI SWOBODY ROZKŁADU A POSTERIORI

Właściwością bayesowskiego podejścia do analizy niepewności jest możliwość wzięcia pod uwagę wiedzy a priori o pomiarze. Twierdzenie Bayesa pozwala na łączenie danych pomiarowych z informacją metrologiczną pochodzącą spoza aktualnego pomiaru. Informacja ta przedstawiana jest w postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa łącznego  $p(\theta, \sigma^2)$ . Rozpisując rozkład łączny dostajemy

$$p(\theta, \sigma^2) = p(\theta|\sigma^2)p(\sigma^2). \quad (3)$$

Zakładając, że obserwacje pochodzą z rozkładu normalnego

$$\theta|\sigma^2 \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{m_0}\right), \quad (4)$$

oraz, że odchylenia standardowe serii pomiarów podlegają rozkładowi  $Inv\_ \chi^2$  [8]

$$\sigma^2 \sim Inv\_ \chi^2(v_0, \sigma_0^2), \quad (5)$$

gdzie:  $\sigma_0, \theta_0, v_0$  - parametry rozkładu a priori,  $m_0$  - liczba pomiarów wykonanych dla pozyskania dodatkowej wiedzy, otrzymujemy rozkład aprioryczny

$$p(\theta, \sigma^2) \propto \sigma^{-1}(\sigma^2)^{-\left(\frac{v_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[v_0\sigma_0^2 + m_0(\theta_0 - \theta)^2]\right\}. \quad (6)$$

Globalna gaussowska funkcja wiarygodności ma postać [6]

$$\prod_{i=1}^n L(\theta, \sigma^2; y_i) \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{(n-1)s^2 + n(\theta - \bar{y})^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (7)$$

Po wymnożeniu rozkładu apriorycznego (6) przez globalną funkcję wiarygodności (7) dostajemy łączny rozkład a posteriori

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto \sigma^{-1}(\sigma^2)^{-\left(\frac{v_0}{2}+1\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[v_0\sigma_0^2 + m_0(\theta_0 - \theta)^2]\right\} \times (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)s^2 + n(\theta - \bar{y})^2]\right\} = N\_Inv\_ \chi^2\left(\theta_p, \frac{\sigma_p^2}{m_p}; v_p, \sigma_p^2\right), \quad (8)$$

którego parametry wyznaczamy ze wzorów [8]:

$$\theta_p = \frac{n}{m_0+n}\bar{y} + \frac{m_0}{m_0+n}\theta_0, \quad (9)$$

$$m_p = n + m_0, \quad (10)$$

$$v_p = n + v_0, \quad (11)$$

$$v_p\sigma_p^2 = (n-1)s^2 + v_0\sigma_0^2 + \frac{m_0n}{m_0+n}(\theta_0 - \bar{y})^2. \quad (12)$$

Jak wynika ze wzoru (11), liczba stopni swobody rozkładu a posteriori  $v_p$  jest równa liczbie pomiarów w serii  $n$ , zwiększonej o liczbę stopni swobody rozkładu a priori  $v_0$ .

A więc, dodatkowa wiedza metrologiczna, zakodowana do postaci rozkładu a priori, wzbogaca rozkład a posteriori o dodatkowe stopnie swobody.

Marginalizując łączny rozkład a posteriori (8) względem  $\sigma^2$  otrzymujemy niezależny od  $\sigma^2$  rozkład menzurandu  $\theta$

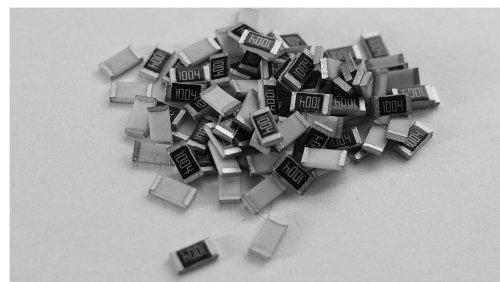
$$p(\theta|\mathbf{y}) \propto \left(1 + \frac{m_p(\theta - \theta_p)^2}{v_p\sigma_p^2}\right)^{-\frac{v_p+1}{2}} = t_{v_p}\left(\theta\left|\theta_p, \frac{\sigma_p^2}{m_p}\right.\right). \quad (13)$$

Jest to rozkład t-Studenta o liczbie stopni swobody  $v_p$ , zwiększonej dzięki dodatkowej wiedzy.

## 3. PRZYKŁAD

Rozważmy zadanie pomiarowe, którego celem jest określenie pojemności pasywnych stu rezystorów o konstrukcji przystosowanej do montażu powierzchniowego i nominalnej wartości rezystancji równej 1 M $\Omega$  (rys. 1). Pomiar wykonujemy za pomocą dokładnego miernika LCR typu E4980A firmy Agilent (rys. 2). Elementy mierzone dołączane są do przyrządu pomiarowego za pomocą adaptera typu 16034E firmy Agilent, przedstawionego na rys. 3. Z pola odczytowego przyrządu (rys. 4) można uzyskać informację o wybranych warunkach pomiaru: równoległy układ zastępczy, częstotliwość pomiarowa 100 kHz, napięcie sygnału pomiarowego 1 V. Uzyskiwane w tych warunkach wyniki pomiaru pojemności, o wartościach na poziomie femtofaradów, są obarczone błędami losowymi.

Bezpośrednie podejście do oceny niepewności pomiaru polega na użyciu metody typu A, która sprowadza się do wykonania kilkunastu pomiarów dla każdego ze stu mierzonych elementów i klasycznym opracowaniu wyników. Znaczna liczba mierzonych elementów powoduje, że bezpośrednie podejście cechuje się dużą pracochłonnością.



Rys. 1. Mierzone elementy typu SMD



Rys. 2. Dokładny miernik LCR E4980A firmy Agilent

Zmniejszenie pracochłonności jest możliwe poprzez skrócenie serii do 2 lub 3 pomiarów, lecz wtedy nie można użyć wzoru (2) do oceny niepewności standardowej. Na przeszkodzie stoi brak zdefiniowanego odchylenia standardowego dla rozkładu t-Studenta o liczbie stopni swobody mniejszej od  $\nu = 3$ .



Rys. 3. Adapter typu 16034E, do pomiaru elementów SMD



Rys. 4. Pole odczytowe przyrządu E4980A

Zwiększenie liczby stopni swobody rozkładu a posteriori za pomocą dodatkowej wiedzy o procesie pomiarowym usuwa tę przeszkodę. W celu pozyskania dodatkowej wiedzy wykorzystujemy jeden ze 100 mierzonych elementów w roli „zwiadowcy” i wykonujemy dla niego dostatecznie długą serię pomiarów, znacznie dłuższą niż serie dla pozostałych elementów. Zakładamy następnie, że z powodu podobieństwa obiektów pomiaru przy kolejnych pomiarach warunki i charakterystyka procesu pomiarowego nie ulegają zmianie (na przykład nie zmienia się zakres pomiarowy) i można raz zdobytą wiedzę metrologiczną, w zakresie dotyczącym niepewności, rozciągnąć na wszystkie mierzone objekty.

Na podstawie wyników serii  $m_0 = 18$  pomiarów, wykonanych dla pierwszego elementu, uformowano rozkład a priori (6), który koduje pozyskaną informację do postaci rozkładu normalnego. Dla pozostałych 99 mierzonych elementów wykonano tylko krótkie serie po dwa i po trzy pomiary. Do analizy wyników pomiarów każdego elementu zastosowano formułę Bayesa

$$p(\theta, \sigma^2 | y) = \frac{L(\theta, \sigma^2; y)p(\theta, \sigma^2)}{p(y)}, \quad (14)$$

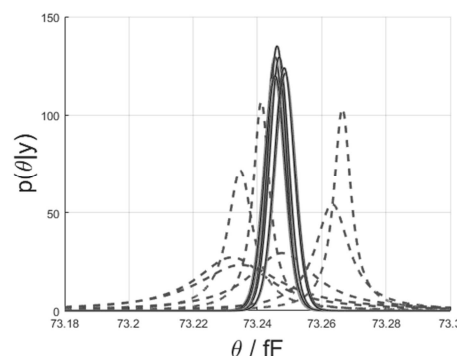
gdzie:  $L(\theta, \sigma^2; y)$  – bayesowska funkcja wiarygodności,  $p(\theta, \sigma^2)$  – rozkład łączny, niosący zakodowaną informację wstępną o zmiennych losowych  $Y$  i  $S$  (rozkład a priori),  $p(\theta, \sigma^2 | y)$  – rozkład a posteriori. Rozkład  $p(y)$  w mianowniku wyrażenia (14) pełni rolę normalizującą.

Rozkład a posteriori jest rozkładem łącznym dla dwóch zmiennych losowych - wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego. W celu otrzymania funkcji gęstości prawdopodobieństwa a posteriori wyłącznie dla nieznannej wartości oczekiwanej  $\theta$  stosujemy marginalizację. Całkując

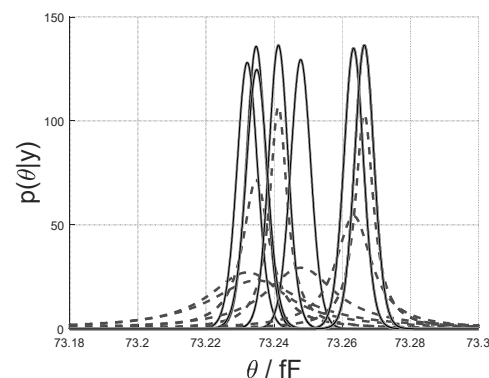
(14) po wszystkich możliwych wartościach zmiennej losowej  $\sigma$  otrzymujemy

$$p(\theta | y) = \int_0^\infty p(\theta, \sigma^2 | y) d\sigma. \quad (15)$$

Przykładowe zmarginalizowane rozkłady a posteriori dla siedmiu mierzonych elementów (7 serii po 2 pomiary) przedstawiono na rys. 5 i 6. Na rys. 5, na wspólnym wykresie zamieszczono rozkłady prawdopodobieństwa a posteriori uzyskane z zastosowaniem informacyjnego rozkładu a priori (linie ciągłe) oraz rozkłady uzyskane bez uwzględnienia dodatkowej wiedzy o mierzonym (linie przerywane). Obie grupy wykresów na rys. 5 są rozkładami t-Studenta, charakteryzującymi się różną liczbą stopni swobody  $\nu_p = 19$  (z dodatkową informacją) i  $\nu = 1$  (bez dodatkowej informacji).



Rys. 5. Zmarginalizowane rozkłady a posteriori dla siedmiu elementów mierzonych. Linia przerywana – rozkłady uzyskane bez wiedzy apriorycznej ( $\nu = 1$ ), linia ciągła – rozkłady uzyskane z uwzględnieniem pełnej wiedzy apriorycznej ( $\nu_p = 19$ )



Rys. 6. Zmarginalizowane rozkłady a posteriori dla siedmiu elementów mierzonych. Linia przerywana – rozkłady uzyskane bez wiedzy apriorycznej ( $\nu = 1$ ), linia ciągła – rozkłady uzyskane z wykorzystaniem wiedzy apriorycznej tylko w zakresie niepewności pomiaru ( $\nu_p = 19$ )

Rys. 6 przedstawia rozkłady prawdopodobieństwa a posteriori uzyskane z uwzględnieniem dodatkowej informacji tylko o odchyleniu standardowym (linie ciągłe) oraz rozkłady uzyskane bez uwzględnienia dodatkowej wiedzy (linie przerywane). Do rozpatrywanego zadania pomiarowego, w którym mamy do czynienia z wieloma obiektami pomiaru, lepiej dopasowany jest wariant wykorzystujący ograniczoną informację aprioryczną, ponieważ pozwala on na dominację danych pomiarowych w rozkładzie a posteriori.

Wykresy z rysunków 5 i 6 pokazują, że uwzględniając dodatkową wiedzę o pomiarze, otrzymujemy rozkłady

a posteriori bardziej szczupłe i pozbawione „tłustych ogonów”, co wynika ze wzrostu liczby ich stopni swobody.

Dla zmarginalizowanych rozkładów a posteriori, uzyskanych z uwzględnieniem wiedzy apriorycznej w zakresie dotyczącym niepewności, wyznaczono estymaty wartości oczekiwanych  $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|\mathbf{y})d\theta, \quad (16)$$

oraz odchylenia standardowe  $s_{\hat{\theta}}$  wartości  $\hat{\theta}$

$$s_{\hat{\theta}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta})^2 p(\theta|\mathbf{y})d\theta}. \quad (17)$$

Zgodnie z punktem 4.2.4 przewodnika [1], do oszacowania niepewności metodą typu A przy krótkich seriach pomiarowych można użyć posiadanej wiedzy apriorycznej w formie odchylenia standardowego z dużej próby (ang. „pooled standard deviation”), oznaczanego w przewodniku jako  $s_p$ . Wyznaczając z (17) odchylenie standardowe z próby  $s_p$  i postępując zgodnie z zaleceniem przewodnika, dostajemy wzór roboczy do obliczeń niepewności

$$u = \frac{s_p}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{n}} s_{\hat{\theta}}. \quad (18)$$

Wyniki obliczeń wartości średnich wyników pomiarów i niepewności standardowych dla siedmiu przykładowych elementów zamieszczono w Tab. 1.

Tabela 1. Wartości średnie z serii  $n = 2$  i  $n = 3$  wyników pomiarów oraz standardowe niepewności pomiarów dla elementów mierzonych o numerach od 2 do 8

Numer elementu	$n = 2$		$n = 3$	
	$\bar{y}/fF$	$u/aF$	$\bar{y}/fF$	$u/aF$
2	73,2349	9,8	73,2379	7,8
3	73,2333	10	73,2636	7,7
4	73,2411	9,7	73,2487	8,1
5	73,2466	10	73,2461	7,7
6	73,2358	11	73,2468	7,7
7	73,2654	9,7	73,2403	8,9
8	73,2615	9,8	73,2409	7,9

Analiza niepewności z zastosowaniem statystyki bayesowskiej, uwzględniającej dodatkową informację w postaci rozkładu apriorycznego (6), wymaga mniejszego nakładu pracy, niż klasyczna realizacja metody typu A. Na przykład, podchodząc do przedstawionego zadania pomiarowego w sposób tradycyjny wykonujemy 100 serii po 20 pomiarów, czyli łącznie 2000 pomiarów. Stosując bayesowską analizę niepewności, pierwszy element

mierzony 18 razy, a 99 pozostałych elementów po 2 razy. Łącznie wykonujemy 216 pomiarów, czyli nakład pracy jest ponad 9 krotnie mniejszy.

#### 4. PODSUMOWANIE

Konieczność oceny niepewności pomiaru dla krótkiej serii pomiarowej jest przypadkiem często spotykanym w praktyce. Rozwiązaniem tego problemu może być użycie statystyki bayesowskiej uwzględniającej dodatkową wiedzę o spodziewanym zachowaniu się systemu pomiarowego, pozyskaną w trakcie wcześniejszych pomiarów.

W wyniku takiego podejścia osiąga się trzy cele: zwiększoną liczbę stopni swobody rozkładu a posteriori i dzięki temu możliwość oceny niepewności standardowej dla najkrótszych serii pomiarowych, zmniejszenie niepewności pomiaru, oszczędność nakładu pracy.

Metoda jest użyteczna do oceny wyników pomiarów dużej liczby jednorodnych obiektów o zbliżonych właściwościach. Pomiaru powinny być wykonywane w tych samych warunkach.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

1. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML 2008: Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement, Joint Committee for Guides In Metrology, JCGM vol. 100.
2. Bich W.: Revision of the “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”. Why and how. Metrologia, 51, 2014, s. 155-158.
3. Bich W., Cox M., Michotte C.: Towards a new GUM-an update, Metrologia, 53, 2016, s. 149-159.
4. Fotowicz P.: Modyfikacja sposobu obliczania niepewności pomiaru, Pomiar Automatyka Robotyka, Nr 3, 2016, s. 29-32.
5. Lira I.: The GUM revision: the Bayesian view toward the expression of measurement uncertainty, Institute of Physics Publishing, European Journal of Physics 37, 2016, s. 1-16.
6. Toczek W.: Zastosowanie statystyki bayesowskiej do uzasadnienia zmiany sposobu obliczania standardowej niepewności pomiaru. Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, 57, 2017, s. 141-146.
7. Kacker R., Jones A.: On use of Bayesian statistics to make the guide to the expression of uncertainty in measurement consistent. Metrologia 40, 2003, s. 235-248.
8. Gelman A., Carlin J.B., Stern H.S., Dunson D.B., Vehtari A., Rubin D.B.: Bayesian Data Analysis. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014.

### COMBINING OF MEASUREMENT DATA WITH ADDITIONAL METROLOGICAL KNOWLEDGE FOR EVALUATING THE MEASUREMENT UNCERTAINTY

A modus operandi in the expression of uncertainty in measurement is presented. The method uses additional metrological knowledge for increasing the degrees of freedom of Student-t distribution, obtained as a result of bayesian analysis of small number of observations. In consequence, type A uncertainty evaluation in the cases of  $n = 2$  and  $n = 3$  is possible. The method is useful for measurements of homogeneous objects. The constant measurement conditions are required.

**Keywords:** standard measurement uncertainty, short measurement series, additional knowledge about measurement process.