



Imię i nazwisko autora rozprawy: **mgr inż. Witold Tisler**  
Dyscyplina naukowa: **Budownictwo**

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: **Modelowanie przepływu wody i powietrza w ośrodkach porowatych o zmiennym nasyceniu za pomocą równania Richardsa i modelu dwufazowego**

Tytuł rozprawy w języku angielskim: **Numerical modeling of water and air flow in variably saturated porous media using Richards equation and two phase flow model**

Promotor  <i>podpis</i>	Drugi promotor  N/D  <i>podpis</i>
dr hab. inż. Adam Szymkiewicz, prof. nadzw. PG	N/D
Promotor pomocniczy  <i>podpis</i>	Kopromotor  N/D  <i>podpis</i>
dr inż. Rafał Ossowski	N/D

Gdańsk, .....



## OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: **mgr inż. Witold Tisler**

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam ~~zgode~~~~nie wyrażam zgody~~\* na bezpłatne korzystanie z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

**Modelowanie przepływu wody i powietrza w ośrodkach porowatych o zmiennym nasyceniu za pomocą równania Richardsa i modelu dwufazowego**

do celów naukowych lub dydaktycznych.<sup>1</sup>

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),<sup>2</sup> a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem **dr hab. inż. Adamem Szymkiewiczem, prof. nadzw. PG**, promotorem pomocniczym **dr inż. Rafałem Ossowskim**, ~~kepromotorem~~ <kepromotor>.\*

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam ~~zgode~~~~nie wyrażam zgody~~\* na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej, Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

\*) niepotrzebne skreślić.

<sup>1</sup> Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

<sup>2</sup> Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: Rozdział 7 Odpowiedzialność dyscyplinarna doktorantów, Art. 226.





## OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

**Autor rozprawy doktorskiej:** mgr inż. Witold Tisler

**Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Modelowanie przepływu wody i powietrza w ośrodkach porowatych o zmiennym nasyceniu za pomocą równania Richardsa i modelu dwufazowego

**Tytuł rozprawy w języku angielskim:** Numerical modeling of water and air flow in variably saturated porous media using Richards equation and two phase flow model

**Język rozprawy doktorskiej:** polski

**Promotor rozprawy doktorskiej:** dr hab. inż. Adam Szymkiewicz, prof. nadzw. PG

**Drugi promotor rozprawy doktorskiej\*:** N/D

**Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej\*:** dr inż. Rafał Ossowski

**Kopromotor rozprawy doktorskiej\*:** N/D

**Data obrony:** TBA

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polski:** grunty nienasycone, równanie Richardsa, model dwufazowy, metody numeryczne

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim:** unsaturated soils, Richards equation, two phase flow model, numerical methods

**Streszczenie rozprawy w języku polskim:** W pracy zostały przedstawione symulacje numeryczne przepływu w gruntach nasyconych i nienasyconych bazujące na dwóch najbardziej rozpowszechnionych modelach matematycznych: równaniu Richardsa, gdzie przepływ powietrza jest pomijany i rozważa się tylko przepływ wody oraz modelu dwufazowym, w którym pod uwagę bierze się oba płyny. Rozwiązanie Richardsa jest bardziej uproszczone oraz zdecydowanie częściej stosowane w najpopularniejszych programach inżynierskich. Ponadto w pracy wykonano przegląd oraz zaproponowano klasyfikację problemów, w których przepływ fazy gazowej ma istotny wpływ na procesy zachodzące w ośrodku gruntowym.

**Streszczenie rozprawy w języku angielskim:** In this thesis has been presented the numerical simulations of water and air flow in saturated and unsaturated soils. Calculations are based on the two the most popular mathematical models describing flow in unsaturated porous media: Richards equation, where air flow is neglected and only water flow is considered and two phase flow model, where both fluids are taking into account. Richards equation is more simplified and widely used in various popular numerical programs available in the market. In addition a review aimed at identifying and classifying problems in which the air flow has a significant impact on the processes occurring in the porous medium.

**Streszczenie rozprawy w języku, w którym została napisana\*\*:** N/D

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku, w którym została napisana\*\*:** N/D

\*) niepotrzebne skreślić.

\*\*) dotyczy rozpraw doktorskich napisanych w innych językach, niż polski lub angielski.



*Niniejsza praca doktorska, będąca zwieńczeniem blisko pięciu lat pracy, nie powstałaby bez wsparcia i zrozumienia ze strony szerokiej grupy ludzi.*

*Pragnę złożyć serdecznie podziękowania mojemu Promotorowi dr hab. inż. Adamowi Szymkiewiczowi, prof. nadz. PG za nieocenioną pomoc udzieloną w trakcie przygotowywania pracy doktorskiej, cierpliwość i wyrozumiałość oraz motywację do dalszej pracy.*

*Ponadto chciałbym wyrazić głęboką wdzięczność mojemu Promotorowi pomocniczemu dr inż. Rafałowi Ossowskiemu, za krytyczne uwagi odnośnie pracy oraz wiele istotnych spostrzeżeń, które pomogły mi ukierunkować pracę badawczą.*

*Szczególne wyrazy wdzięczności chciałbym skierować do dr inż. Krzysztofa Szarfa, który zawsze służył mi pomocą i zaraził pasją programowania. Dzięki jego wsparciu mogłem rozwinąć stronę techniczną niniejszej rozprawy doktorskiej oraz wykorzystać zdobyte umiejętności w pracy naukowej oraz dydaktycznej.*

*Pragnę również podziękować Rodzicom, za nieustanną pomoc oraz motywację do pracy naukowej.*

*Żonie dziękuję za cierpliwość i wsparcie.*





Modelowanie przepływu wody i powietrza w ośrodkach  
porowatych o zmiennym nasyceniu za pomocą równania  
Richardsa i modelu dwufazowego

mgr inż. Witold Tisler

5 kwietnia 2018



# Spis treści

<b>Spis rysunków</b>	<b>9</b>
<b>Spis tablic</b>	<b>13</b>
<b>Wykaz ważniejszych oznaczeń</b>	<b>14</b>
<b>1 Wstęp</b>	<b>18</b>
1.1 Motywacja . . . . .	18
1.2 Teza i zakres pracy . . . . .	19
<b>2 Matematyczny opis przepływu wody i powietrza w ośrodku porowatym</b>	<b>21</b>
2.1 Występowanie wody i powietrza w porach gruntu . . . . .	21
2.2 Potencjał wody gruntowej i krzywa retencji . . . . .	25
2.3 Przewodność hydrauliczna . . . . .	32
2.4 Zależność między parametrami retencji i przewodności hydraulicznej, a krzywą uziarnienia . . . . .	38
2.5 Związki naprężenie-odkształcenie . . . . .	41
2.6 Równania przepływu w odkształcalnym ośrodku porowatym . . . . .	45
2.7 Warunki początkowe . . . . .	49
2.8 Warunki brzegowe . . . . .	50
2.9 Warunki na styku materiałów o różnych właściwościach . . . . .	53
<b>3 Rozwiązanie numeryczne</b>	<b>56</b>
3.1 Podstawowe właściwości równań przepływu . . . . .	56
3.2 Dyskretyzacja przestrzenna . . . . .	58
3.3 Rozwiązanie równań półdyskretnych . . . . .	68
3.4 Przykłady programów numerycznych . . . . .	73
<b>4 Znaczenie przepływu powietrza w strefie nienasyconej</b>	<b>78</b>
4.1 Przepływ naturalny . . . . .	80
4.2 Transport zanieczyszczeń, wentylacja gruntu . . . . .	81
4.3 Odwadnianie sprężonym powietrzem . . . . .	83
4.4 Zredukowana mobilność fazy gazowej, zamykanie powietrza w skali porów . . . . .	84
4.5 Infiltracja na dużych obszarach oraz w zamkniętych kolumnach . . . . .	86
4.6 Niejednorodności w ośrodku gruntowym . . . . .	87
4.7 Wpływ pęcherzyków powietrza na proces konsolidacji . . . . .	88
4.8 Zamykanie powietrza w wałach przeciwpowodziowych . . . . .	89
4.9 Wpływ fazy gazowej na stateczność zboczy . . . . .	91
4.10 Wpływ wahań zwierciadła wody na powstawanie wysadzin . . . . .	93
4.11 Oddziaływanie sejsmiczne na zapory ziemne . . . . .	94

<b>5</b>	<b>Przykłady numeryczne</b>	<b>96</b>
5.1	Infiltracja wody na dużych obszarach . . . . .	96
5.2	Filtracja w ośrodkach niejednorodnych . . . . .	103
5.3	Filtracja w wałach przeciwpowodziowych . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Porównania z eksperymentami</b>	<b>120</b>
6.1	Mechanizm zamykania powietrza w wałach przeciwpowodziowych . . . . .	120
6.2	Efekt zamykania powietrza w gruboziarnistych inkluzjach . . . . .	134
<b>7</b>	<b>Wnioski i perspektywy dalszych badań</b>	<b>147</b>
	<b>Literatura</b>	<b>149</b>



## Spis rysunków

2.1	Skale analizy ośrodka gruntowego [Helmig et al., 1997]. . . . .	22
2.2	Kształt kropeł cieczy o różnym napięciu powierzchniowym na powierzchni ciała stałego. . . . .	23
2.3	Podciąg wody w rurkach kapilarnych w zależności od średnicy. . . . .	23
2.4	Stany nasycenia w gruntach nienasyconych: a) suchy, b) pendularny, c) kapilarny, d) nienasycony - zamknięte pęcherzyki powietrza, e) nienasycony - zamknięte pęcherze powietrza większe niż pory gruntu (ang. <i>gassy soil</i> ), f) nasycony. . . . .	24
2.5	Histereza krzywej retencji gruntu. . . . .	29
2.6	Przykładowe krzywe retencji wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem van Genuchtena. . . . .	31
2.7	Przykładowe krzywe retencji wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem Brooks-Corey'a. . . . .	31
2.8	Przykładowe krzywe przewodności względnej powietrza dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem Brooks-Corey'a. . . . .	35
2.9	Przykładowe krzywe przewodności względnej wody dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem van Genuchtena. . . . .	35
2.10	Przykładowe krzywe przewodności względnej powietrza dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem Brooks-Corey'a. . . . .	36
2.11	Przykładowe krzywe przewodności względnej wody dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem van Genuchtena. . . . .	36
2.12	Przykładowe krzywe przewodności hydraulicznej dla piasku oraz gliny (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]). . . . .	38
2.13	Krzywe uziarnienia dla przykładowych wskaźników różnoziarnistości. . . . .	40
2.14	Warunki brzegowe dla przepływu dwufazowego w wałach przeciwpowodziowych. . . . .	51
2.15	Warunki brzegowe oraz proces podnoszenia zwierciadła wody gruntowej w wale przeciwpowodziowym. . . . .	52
2.16	Warunki brzegowe dla przepływu: infiltracja a) stan początkowy b) stan końcowy, parowanie c) stan początkowy d) stan końcowy. . . . .	53
2.17	Warunki na styku dwóch różnych materiałów [Szymkiewicz, 2012]. . . . .	54
3.1	Proces modelowania numerycznego [Helmig et al., 1997]. . . . .	57
3.2	Siatka numeryczna dla metody różnic skończonych. . . . .	59
3.3	Przykłady siatek numerycznych dla metody elementów skończonych. . . . .	60
3.4	Transformacja z układu globalnego do lokalnego. . . . .	62
3.5	Schemat objętości skończonej [Sobieski, 2016]. . . . .	63
3.6	Siatki numeryczne stosowane dla punktów środkowych w metodzie objętości skończonych [Szymkiewicz, 2012]. . . . .	64
3.7	Siatki numeryczne stosowane dla metody punktów węzłowych w metodzie objętości skończonych [Szymkiewicz, 2012]. . . . .	66
3.8	Ilustracja działania metody Newtona. . . . .	71



4.1	Problemy inżynierskie związane z przepływem powietrza w gruncie. . . . .	80
4.2	Schemat działania odwodnienia sprężonym powietrzem. . . . .	84
4.3	Geometria przyjęta w modelu [Sun et al., 2015]. . . . .	91
4.4	Zmiana współczynnika bezpieczeństwa w zależności od wybranego modelu obliczeniowego [Sun et al., 2015]. . . . .	92
5.1	Geometria oraz warunki brzegowe. . . . .	96
5.2	Nasylenie obszaru w czasie $t=4800$ s. . . . .	97
5.3	Nasylenie obszaru w czasie $t=9600$ s. . . . .	97
5.4	Masa wody znajdująca się w analizowanym obszarze w odniesieniu do czasu. . . . .	98
5.5	Zmiana nasycenia w punkcie A analizowanego obszaru. . . . .	99
5.6	Zmiana ciśnienia powietrza w punkcie A analizowanego obszaru. . . . .	99
5.7	Zmiana nasycenia w punkcie A dla zasięgu infiltracji równego 10 m w zależności od stosunku $\mu_w/\mu_a$ . . . . .	100
5.8	Zmiana nasycenia w punkcie A dla zasięgu infiltracji równego 15 m w zależności od stosunku $\mu_w/\mu_a$ . . . . .	100
5.9	Zmiana masy wody w czasie dla zasięgu infiltracji równego 10 m w zależności od stosunku $\mu_w/\mu_a$ . . . . .	101
5.10	Zmiana masy wody w czasie dla zasięgu infiltracji równego 15 m w zależności od stosunku $\mu_w/\mu_a$ . . . . .	101
5.11	Geometria oraz warunki brzegowe przykładów obliczeniowych dla gruntu niejednorodnego. . . . .	103
5.12	Wykres ciśnienia powietrza w czasie dla geometrii nr 1 i 2 (parametry A). . . . .	105
5.13	Wykres masy wody w stosunku do czasu dla geometrii nr 1 i parametrów A. . . . .	106
5.14	Wykres masy wody w stosunku do czasu dla geometrii nr 2 i parametrów A. . . . .	106
5.15	Mapy nasycenia analizowanych obszarów na koniec obliczeń. . . . .	107
5.16	Mapy nasycenia w zależności od przyjętych parametrów gruntowych. . . . .	108
5.17	Zmienność masy powietrza w czasie . . . . .	109
5.18	Zmiana ciśnienia powietrza w środku analizowanego obszaru . . . . .	109
5.19	Zmiana nasycenia w zależności od układu inkluzji. . . . .	110
5.20	Zmiana masy wody w zależności od układu inkluzji. . . . .	110
5.21	Zmiana masy wody w zależności od układu inkluzji. . . . .	111
5.22	Zmiana nasycenia w środku obszaru w zależności od układu inkluzji. . . . .	111
5.23	Konstrukcja wału przeciwpowodziowego i jego główne wymiary [Dyka, 2013] . . . . .	114
5.24	Minimalna odległość krzywej depresji od skarpy wału . . . . .	115
5.25	Geometria oraz warunki brzegowe dla wałów użytych w symulacjach. . . . .	116
5.26	Całkowity wpływ z krawędzi odpowietrznej wału. . . . .	117
5.27	Rozkład nasycenia w czasach: $2 \cdot 10^5$ i $7 \cdot 10^5$ . . . . .	118
5.28	Rozkład nasycenia w czasach: $0.5 \cdot 10^5$ i $1.7 \cdot 10^5$ . . . . .	118
5.29	Ilość wody znajdująca się w obszarze w zależności do czasu. . . . .	119
6.1	Stanowisko badawcze, gdzie 1 - skrzynia doświadczalna, 2 - urządzenie do usypywania metodą deszczu piaskowego [Leśniewska, 2013]. . . . .	120



6.2	Geometria modelu badawczego [cm] oraz warunki brzegowe w kolejnych etapach doświadczenia. . . . .	121
6.3	Zmiany w korpusie wału wywołane podnoszeniem zwierciadła wody. . . . .	122
6.4	Zmiana ciśnienia powietrza w czasie: 1- przed zalaniem wału, 2- tuż po zalaniu, 3- osiągnięcie maksymalnego ciśnienia tuż przed powstaniem makro-pora, 4 i 5 - spadek ciśnienia spowodowany powstaniem makro-pora. . . . .	123
6.5	Dyskretyzacja przestrzenna rozpatrywanego modelu. . . . .	124
6.6	Krzywa uziarnienia dla piasku FSa1. . . . .	125
6.7	Krzywa uziarnienia dla piasku FSa2. . . . .	125
6.8	Krzywa retencji dla piasku drobnego użytego do wykonania konstrukcji wału (FSa2). . . . .	127
6.9	Krzywa retencji dla piasku drobnego użytego do wykonania podłoża wału (FSa1). . . . .	127
6.10	Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z założeniem modelu van Genuchtena. . . . .	129
6.11	Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z założeniem modelu Brooksa-Corey'a. . . . .	130
6.12	Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru $n_b$ ( $\lambda$ ) w modelu Brooksa-Corey'a. . . . .	131
6.13	Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru $p_e$ w modelu Brooksa-Corey'a. . . . .	131
6.14	Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru $n_g$ w modelu van Genuchtena. . . . .	132
6.15	Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru $p_g$ w modelu van Genuchtena. . . . .	132
6.16	Porównanie map nasycenia uzyskanych dla rozwiązań numerycznych z eksperymentem ( $t=660$ s). . . . .	133
6.17	Schemat ułożenia warstw piasku w komorze wymiary w [cm] [Szymańska et al., 2016]. . . . .	135
6.18	Rozkład nasycenia w korycie w zależności od czasu [Szymańska et al., 2016]. . . . .	136
6.19	Zmiana nasycenia wody na wybranych krawędziach komory [Szymańska et al., 2016]. . . . .	136
6.20	Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016]. . . . .	139
6.21	Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016]. . . . .	139
6.22	Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem Richardsa, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016]. . . . .	140



6.23	Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem Richardsa, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016]. . . . .	140
6.24	Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymańska et al., 2016]. . . . .	143
6.25	Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymańska et al., 2016]. . . . .	143
6.26	Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem RE, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymańska et al., 2016]. . . . .	144
6.27	Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem RE, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymańska et al., 2016]. . . . .	144
6.28	Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano doświadczalne parametry gruntowe z uwzględnieniem zerowej rezydualnej zawartości powietrza [Szymańska et al., 2016].	145
6.29	Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano doświadczalne parametry gruntowe z uwzględnieniem zerowej rezydualnej zawartości powietrza [Szymańska et al., 2016]. . . .	145

## Spis tablic

2.1	Średnie wartości parametrów funkcji retencji (główna krzywa drenażu) i przewodności hydraulicznej dla wybranych rodzajów gruntów (według [Carsel i Parrish, 1988]). . . . .	30
2.2	Parametry użyte w modelu przepuszczalności według Mualem'a i Burdine'a. . . . .	34
4.1	Wahania ciśnienia atmosferycznego w zależności od powodującego je czynnika (na podstawie [Kuang et al., 2013]). . . . .	81
5.1	Parametry gruntu piasek drobny według [Carsel i Parrish, 1988]. . . . .	96
5.2	Warianty obliczeń dla których wykonane zostały symulacje. . . . .	104
5.3	Ustalenie klasy ważności obiektu (według [Środowiska, 2007]). . . . .	113
5.4	Minimalna odległość między maksymalnym przewidywanym poziomem zwierciadła a koroną wału (według [Środowiska, 2007]). . . . .	113
5.5	Minimalne wymiary wałów w odniesieniu do rysunku 5.23 (według [Środowiska, 2007]). . . . .	114
5.6	Parametry gruntu użyte w symulacji. . . . .	116
6.1	Parametry piasków użyte w badaniu. . . . .	121
6.2	Parametry piasków użyte obliczone według [Aubertin et al., 2003]. . . . .	126
6.3	Parametry piasków uzyskane z programu RETC oraz według [Parker i Lenhard, 1987]. . . . .	126
6.4	Wzory oraz ich współczynniki przyjęte do obliczeń według [Szymkiewicz i Kryczka, 2011] Parametry $d_d^{(i)}$ oraz $d_g^{(i)}$ to odpowiednio $i$ -te dolne i górne ograniczenie frakcji. . . . .	128
6.5	Parametry piasków użyte w eksperymencie. . . . .	134

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

### Wielkie litery

$A_{\alpha}^{ij}$	współczynnik w równaniach przepływu dla fazy $\alpha$ , [–]
$C$	macierz sztywności, [–]
$C_{it}^{dec}$	współczynnik zmniejszania kroku czasowego, [–]
$C_{it}^{inc}$	współczynnik zwiększania kroku czasowego, [–]
$C_r$	współczynnik w modelu [Fredlund i Xing, 1994], [–]
$C_k$	współczynnik we wzorze Kozeny’ego Carman’a [Szymkiewicz i Kryczka, 2011], [–]
$D_H$	równoważna średnica ziaren w modelu [Aubertin et al., 2003], [m]
$E^n$	n-ty element skończony, [–]
$F^n$	n-ta krawędź objętości skończonej, [–]
$G$	moduł ścinania, [N/m <sup>2</sup> ]
$G_{\alpha}^j$	wektor grawitacji fazy $\alpha$ w równaniach przepływu, [–]
$H_{\alpha}$	całkowita wysokość potencjału fazy $\alpha$ , [m]
$K_b$	współczynnik sprężystości objętościowej gruntu, [Pa]
$K_g$	współczynnik sprężystości szkieletu gruntowego, [Pa]
$K_{\alpha}$	tensor przewodności hydraulicznej fazy $\alpha$ , [m <sup>2</sup> ]
$L$	długość, [m]
$M_{\alpha}$	gęstość masy fazy $\alpha$ , [kg/m <sup>3</sup> ]
$P_{\alpha}$	całkowity potencjał fazy $\alpha$ , [kg/m <sup>3</sup> ]
$Q_{\alpha}^{fc}$	całkowity wypływ fazy $\alpha$ z danej krawędzi objętości kontrolnej, [kg/s]
$R_{gas}$	stała gazowa, [J/(mol°K)]
$S_{ew}$	znormalizowany stopień nasycenia, [–]
$S_m$	powierzchnia właściwa w modelu [Aubertin et al., 2003], [m <sup>2</sup> ]
$S_{\alpha}$	nasycenie fazy $\alpha$ , [%]
$S_{\alpha}^{max}$	maksymalne nasycenie fazy $\alpha$ , [%]
$S_{\alpha}^{min}$	minimalne nasycenie fazy $\alpha$ , [%]
$S_{r\alpha}$	rezydualne nasycenie fazy $\alpha$ , [%]
$V_{\alpha}$	objętość fazy $\alpha$ , [m <sup>3</sup> ]
$V^i$	i-ta objętość kontrolna, [–]

$V_p$	objętość przestrzeni porów $\alpha$ , [ $m^3$ ]
$V$	objętość próbki, [ $m^3$ ]
$Z_s$	parametr skalujący w modelu Lenharda, [-]

### Małe litery

$a_c$	parametr w modelu [Aubertin et al., 2003], [-]
$e$	wskaźnik porowatości, [-]
$c$	spójność gruntu, [ $Pa$ ]
$c'$	efektywna spójność gruntu, [ $Pa$ ]
$d$	średnica rurki kapilarnej w modelu [Aubertin et al., 2003], [ $m$ ]
$d_{eq}$	równoważna średnica porów w modelu [Aubertin et al., 2003], [ $m$ ]
$g$	przyśpieszenie ziemskie, [ $m/s^2$ ]
$\mathbf{g}$	wektor przyśpieszenia ziemskiego, [ $m/s^2$ ]
$h_w$	ciśnienie słupa wody, [ $Pa$ ]
$h_c$	wysokość podciągu kapilarnego w rurce, [ $m$ ]
$k_\alpha$	tensor przepuszczalności hydraulicznej $\alpha$ , [ $m^2$ ]
$k_s$	tensor przepuszczalności hydraulicznej w warunkach pełnego nasycenia $\alpha$ , [ $m^2$ ]
$k_{r\alpha}$	skalarny współczynnik przepuszczalności względnej fazy $\alpha$ , [-]
$m$	parametr w modelu [Aubertin et al., 2003], [-]
$m_g$	bezwymiarowy parametr modelu van Genuchtena, [-]
$m_\alpha$	masa fazy $\alpha$ , [ $g$ ]
$n$	porowatość, [-]
$n_g$	bezwymiarowy parametr modelu van Genuchtena, [-]
$\mathbf{n}$	wektor normalny do powierzchni granicznej między dwoma różnymi gruntami, [-]
$\mathbf{n}_E$	wektor normalny do krawędzi elementu skończonego, [-]
$\mathbf{n}_V$	wektor normalny do krawędzi objętości skończonej, [-]
$\mathbf{n}_W$	wektor normalny do krawędzi analizowanego obszaru, [-]
$p_a$	ciśnienie powietrza, [ $Pa$ ]
$p_{atm}$	ciśnienie atmosferyczne, [ $Pa$ ]
$p_c$	ciśnienie kapilarne, [ $Pa$ ]
$p_e$	ciśnienie wejścia powietrza, [ $Pa$ ]

$p_w$	ciśnienie wody, [ $Pa$ ]
$p_g$	ciśnienie skalujące, [ $Pa$ ]
$p'$	uśrednione ciśnienie w porach gruntu, [ $Pa$ ]
$r_c$	promień rurki kapilarnej, [ $m$ ]
$r_{c1}, r_{c2}$	parametry opisujące krzywiznę powierzchni granicznej między wodą a powietrzem, [ $m$ ]
$t$	czas, [ $s$ ]
$u$	wektor niewiadomych wartości węzłowych w rozwiązaniu numerycznym, [ $-$ ]
$v_{st}^{ij}$	objętościowa wartość przepływu między węzłami $i$ oraz $j$ , [ $m/s$ ]
$\mathbf{v}_\alpha$	prędkość filtracji fazy $\alpha$ , [ $m/s$ ]
$w$	wilgotność grawimetryczna, [%]
$z$	wysokość powyżej/poniżej poziomu odniesienia, [ $m$ ]

### Wielkie litery greckie

$\Gamma$	powierzchnia graniczna między dwoma materiałami, [ $-$ ]
$\Delta x^{ij}$	odległość między węzłem $i$ oraz $j$ , [ $m$ ]
$\Delta t$	krok czasowy, [ $s$ ]
$\Theta$	współczynnik w schemacie dyskretyzacji czasowej, [ $-$ ]
$\Theta_{ew}$	znormalizowana wilgotność objętościowa, [ $-$ ]
$\Theta_{sw}$	wilgotność objętościowa wody, [ $-$ ]
$\Psi^i$	funkcja kształtu dla węzła $i$ w MES, [ $-$ ]
$\Psi_e^i$	funkcja kształtu elementu dla węzła $i$ w MES, [ $-$ ]

### Małe litery greckie

$\alpha$	odwrotność ciśnienia skalującego w funkcji kapilarnej, [ $1/Pa$ ]
$\alpha_0$	współczynnik kształtu ziaren w modelu [Aubertin et al., 2003], [ $-$ ]
$\alpha_K$	bezwymiarowy parametr w modelu [Biot, 1941], [ $-$ ]
$\beta$	współczynnik w modelu [Fredlund i Xing, 1994], [ $-$ ]
$\beta_w$	kąt między wodą a powierzchnią rurki kapilarnej, [ $^\circ$ ]
$\delta_{ij}$	delta Kroneckera, [ $-$ ]
$\epsilon$	odkształcenie, [ $-$ ]
$\gamma$	współczynnik w modelu [Fredlund i Xing, 1994], [ $-$ ]



$\kappa$	parametr w funkcji przepuszczalności Mualema-Burdine'a, [-]
$\lambda$	bezwymiarowy parametr modelu Brooksa-Corey'a, [-]
$\lambda_\alpha$	mobilność fazy $\alpha$ , $[1/(Pa \cdot s)]$
$\lambda_0$	stała Lamé'ego, $[1/(Pa \cdot s)]$
$\mu_\alpha$	lepkość fazy $\alpha$ , $[Pa \cdot s]$
$\eta_\alpha$	wykładniki w funkcji przepuszczalności dla fazy $\alpha$ w , [-]
$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$	wykładniki w funkcji przepuszczalności Mualema-Burdine'a, [-]
$\nu$	współczynnik Poissona, [-]
$\xi$	lokalna współrzędna przestrzenna w MES, [-]
$\rho$	gęstość objętościowa gruntu, $[g/cm^3]$
$\rho_\alpha$	gęstość fazy $\alpha$ , $[g/cm^3]$
$\rho_d$	gęstość objętościowa szkieletu gruntowego, $[g/cm^3]$
$\rho_s$	gęstość właściwa szkieletu gruntowego, $[g/cm^3]$
$\sigma_{\alpha\beta}$	napięcie powierzchniowe między fazą $\alpha$ i $\beta$ , $[Pa]$
$\sigma^{net}$	naprężenie netto, $[Pa]$
$\sigma_n$	naprężenie normalne, $[Pa]$
$\sigma_s$	naprężenie ssania, $[Pa]$
$\sigma'$	naprężenie efektywne, $[Pa]$
$\sigma$	naprężenie całkowite, $[Pa]$
$\theta_\alpha$	wilgotność objętościowa fazy $\alpha$ , [%]
$\theta_{r\alpha}$	wilgotność objętościowa fazy $\alpha$ w stanie rezydualnym, [%]
$\tau_{xy}$	naprężenie ścinające w płaszczyźnie xy, $[Pa]$
$\phi$	kąt tarcia wewnętrznego, [°]
$\phi'$	efektywny kąt tarcia wewnętrznego, [°]
$\phi_b$	kąt tarcia wewnętrznego uzależniony od zmiany ssania, [°]
$\psi$	kąt zwilżania, [°]
$\chi$	współczynnik w formule Bishopa, [-]

# 1 Wstęp

## 1.1 Motywacja

Jedną z najistotniejszych cech ośrodka gruntowego, w dużym stopniu decydującą o jego właściwościach mechanicznych i fizycznych, jest występowanie wody w porach gruntu. Biorąc pod uwagę stopień nasycenia wodą, znajdujące się w podłożu grunty i skały można podzielić na dwie grupy: nasycone i nienasycone. Umownie przyjmowaną granicę między nimi stanowi zwierciadło wody gruntowej. Poniżej jego poziomu zakładamy pełne nasycenie, powyżej natomiast, aż do powierzchni gruntu, tylko częściowe. Związane jest to z faktem, iż w przestrzeni porów szkieletu gruntowego oprócz wody znajduje się również powietrze. Z uwagi na swoje położenie strefa nienasycona jest miejscem, w którym zachodzi wiele procesów fizycznych takich jak: parowanie, infiltracja, migracja zanieczyszczeń, czy podciąganie wody przez rośliny. Ponadto strefa ta jest obszarem intensywnej działalności inżynierskiej.

W ostatnich latach coraz częściej do opisu przepływu w strefie nienasyconej wykorzystuje się techniki modelowania numerycznego. Są one stosowane zarówno w geotechnice (analiza stateczności zboczy, filtracja w wałach przeciwpowodziowych i zaporach ziemnych, zmiany objętościowe gruntów ekspansywnych), jak i hydrologii i hydrogeologii (określanie rzeczywistego natężenia filtracji, zasilania wód podziemnych oraz czasu migracji zanieczyszczeń przez strefę aeracji) [Kuang et al., 2013, Hammecker et al., 2003].

Z fizycznego punktu widzenia przepływ w strefie niepełnego nasycenia ma na ogół charakter dwufazowy, związany z równoczesnym ruchem wody i powietrza. W związku z działaniem sił adhezji (szkielet-woda) oraz kohezji (pomiędzy cząsteczkami wody), ciśnienie wody w warunkach niepełnego nasycenia jest mniejsze niż ciśnienie powietrza w porach. Różnicę między ciśnieniem wody i powietrza definiuje się jako ciśnienie kapilarne. W gruntach nienasyconych związek między nasyceniem a ciśnieniem kapilarnym jest nieliniowy i określa się go mianem funkcji retencji. Opisuje go szereg modeli analitycznych, z których najpopularniejsze to funkcje Brooks-Corey'a [Brooks i Corey, 1964] i van Genuchtena [Van Genuchten, 1980a]. Drugim nieliniowym związkiem oprócz funkcji retencji jest przepuszczalność względem wody i powietrza. Można ją wyrazić jako funkcję stopnia nasycenia wodą lub funkcję ciśnienia kapilarnego. Nieliniowy charakter zależności między ciśnieniem kapilarnym, stopniem nasycenia i współczynnikiem przepuszczalności jest przyczyną istotnych trudności w modelowaniu numerycznym procesów przepływu wody w strefie nienasyconej.

W geotechnice, hydrologii i hydrogeologii do opisu przepływu wody w gruntach nienasyconych powszechnie wykorzystuje się uproszczony model w postaci równania Richardsa. Zakłada on, że powietrze posiada nieskończenie wielką mobilność i może opuścić dany obszar bez jakichkolwiek utrudnień. Dzięki temu istnieje możliwość zmniejszenia stopnia skomplikowania modelu matematycznego, poprzez redukcję liczby równań z dwóch do jednego. Mimo tego równanie Richardsa zachowuje nieliniowy charakter, a jego rozwiązanie pozostaje nietrywialnym problemem numerycznym. Stosując równanie Richardsa należy być świadomym, że jego założenia nie zawsze są spełnione. Dzieje się tak w przypadku, kiedy powietrze obecne w porach gruntu nie ma swobodnego kontaktu z atmosferycznym. Przykładami takich sytuacji są: infiltracja w zamkniętych kolumnach [Vachaud et al., 1973], drenaż z gruboziarnistych inkluzji otoczonych

piaskiem drobnym [Kuang et al., 2011], nawadnianie dużych obszarów [Hammecker et al., 2003], czy zamykanie powietrza w wałach przeciwpowodziowych podczas powodzi [Leśniewska, 2013]. Jednakże, nawet jeśli powietrze obecne w porach gruntu ma bezpośredni kontakt z atmosferycznym, obserwuje się różnice między równaniem Richardsa a modelem dwufazowym [Forsyth, 1988, Tegnander, 2001]. Wiąże się to z mobilnością powietrza, która nie jest nieskończenie wielka.

Mimo znaczącej liczby prac poświęconych modelowaniu przepływu wody i powietrza w strefie nienasyconej, brakuje systematycznych porównań między modelem Richardsa i modelem dwufazowym dla różnych warunków początkowo-brzegowych, jak również porównań obu modeli z wynikami badań eksperymentalnych. Zagadnienia te podjęto w niniejszej rozprawie.

## 1.2 Teza i zakres pracy

Głównym celem rozprawy doktorskiej jest przeprowadzenie szczegółowych porównań między modelem przepływu dwufazowego i jednofazowym modelem Richardsa oraz określenie ograniczeń w stosunku do jego stosowania. Cel ten zrealizowano poprzez:

- identyfikację i klasyfikację opisanych w literaturze zagadnień, w których przepływ powietrza w strefie nienasyconej odgrywa istotną rolę,
- wykonanie symulacji numerycznych dla szeregu przypadków teoretycznych odzwierciedlających procesy spotykane w geotechnice i hydrologii (m. in. infiltracja na dużych obszarach, czy filtracja w wałach przeciwpowodziowych),
- porównanie wyników obliczeń numerycznych z eksperymentami laboratoryjnymi, w których badano infiltrację w niejednorodnym materiale porowatym oraz przelewanie wody przez koronę budowli ziemnej.

Tezą pracy jest stwierdzenie, iż *w wielu praktycznych przypadkach ze względu na ograniczoną mobilność powietrza w porach gruntu do opisu przepływu wody należy stosować model dwufazowy, zamiast powszechnie stosowanego równania Richardsa.*

Niniejsza rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. Pierwszy z nich poświęcono motywacji oraz przedstawieniu tezy pracy. Rozdział drugi obejmuje matematyczny opis przepływu wody i powietrza w ośrodku porowatym. Omówione zostały trzy fazy występujące w ośrodku gruntowym, ogólne założenia modeli matematycznych, równania oraz warunki początkowe i brzegowe.

Rozdział trzeci zawiera opis metod rozwiązania numerycznego równań przepływu. Obejmuje on najpopularniejsze metody dyskretyzacji przestrzennej: metodę różnic skończonych, metodę elementów skończonych oraz metodę objętości skończonych, za pomocą której wykonano wszystkie obliczenia zamieszczone w pracy. Na końcu rozdziału przedstawiono skrótową charakterystykę kilku popularnych programów numerycznych oraz możliwości ich wykorzystania w kontekście analizy przepływu wody i powietrza w warunkach nienasyconych.

W związku z tezą pracy, zakładającą, że powietrze obecne w porach gruntu ma istotny wpływ na przepływ wody, rozdział czwarty poświęcony został przeglądowi literatury na temat tego zjawiska. Zaproponowano klasyfikację oraz omówiono problemy, w których rola fazy

gazowej ma istotny wpływ na procesy zachodzące w ośrodku gruntowym. Następnie w podrozdziałach dla najważniejszych z nich przedstawiono bardziej szczegółowy opis.

Kolejne dwa rozdziały zawierają przykłady numeryczne, które stanowiły główną część badań prowadzonych w rozprawie doktorskiej. Analizie poddane zostały następujące problemy, o których mowa była w rozdziale czwartym: infiltracja obszarowa, zamykanie powietrza w gruntach niejednorodnych oraz zatapianie wałów przeciwpowodziowych. Rozdział numer pięć przedstawia symulacje numeryczne dla różnych warunków brzegowych oraz materiałowych celem odnalezienia różnic między równaniem Richardsa a modelem dwufazowym. W rozdziale szóstym natomiast, dokonano porównania z eksperymentami doświadczalnymi mającymi na celu weryfikację modelu numerycznego oraz wizualną ocenę wpływu fazy gazowej na procesy zachodzące w ośrodku porowatym. Omawiane wyniki doświadczalne oraz numeryczne świadczą o znacznym wpływie powietrza znajdującego się w porach gruntu na wiele procesów w nim zachodzących oraz mają kluczowe znaczenie dla tezy rozprawy.

Ostatni rozdział zatytułowany „Wnioski i perspektywy dalszych badań”, podsumowuje materiał omówiony w rozprawie oraz przedstawia wnioski dotyczące postawionej we wstępie tezy wraz z uwagami perspektywicznymi.

Tekst rozprawy doktorskiej przygotowano za pomocą systemu edycyjnego L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, zaprojektowanego przez Leslie Lamporta, który oparł konstrukcję aplikacji na języku programowania *plain*.

## 2 Matematyczny opis przepływu wody i powietrza w ośrodku porowatym

Niniejszy rozdział opiera się na artykule [Szymkiewicz et al., 2014] oraz książkach [Szymkiewicz, 2012, Helmig et al., 1997, Ossowski i Sikora, 2004].

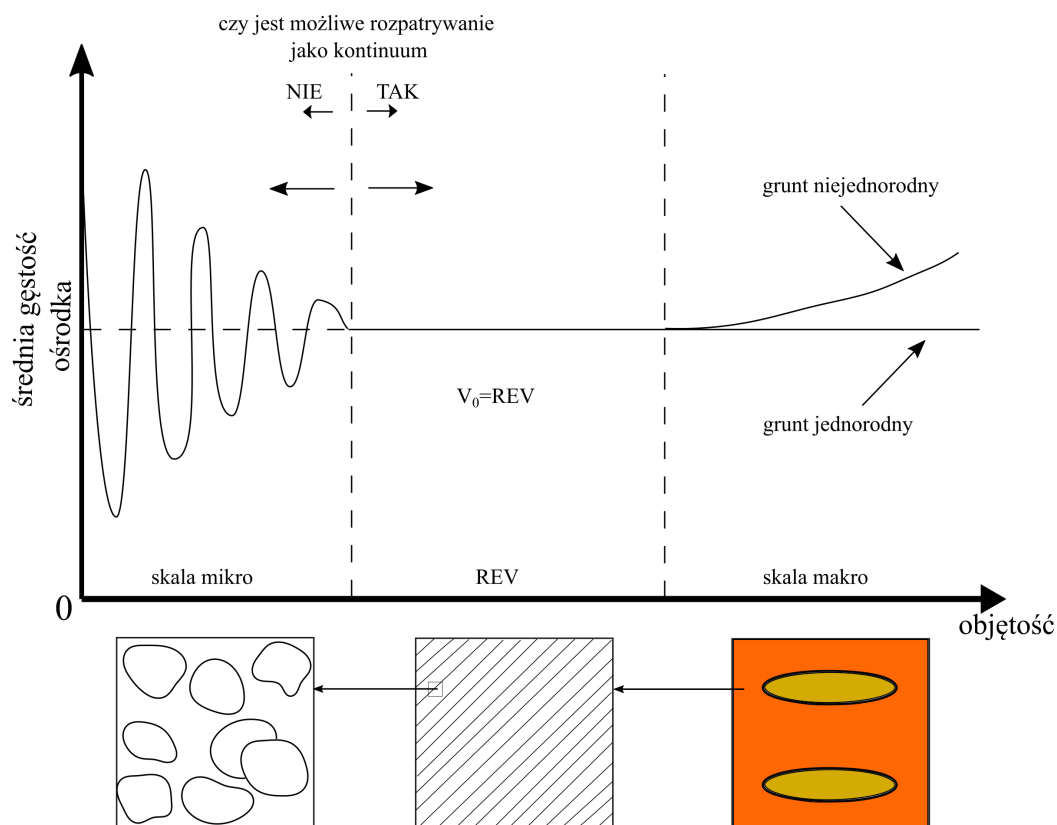
### 2.1 Występowanie wody i powietrza w porach gruntu

Z uwagi na wielofazowość oraz wieloskalową strukturę ośrodka porowatego modelowanie przepływu jest bardzo złożonym problemem numerycznym. W odniesieniu do gruntów nienasyconych możemy wyróżnić trzy rodzaje faz: stałą (szkielet gruntowy), ciekłą oraz gazową. Wszystkie oddzielone są od siebie nieskończenie cienkimi powierzchniami granicznymi. Dodatkowo każda z faz zbudowana jest z wielu składników chemicznych, które mogą poruszać się między nimi. Dla przykładu powietrze to mieszanina gazów takich jak: azot, tlen, argon, para wodna. Faza ciekła natomiast zawiera wiele cząstek substancji w niej rozpuszczonych m. in. szkieletu gruntowego, czy zanieczyszczeń, które dostały się do gruntu poprzez opady deszczu. Liczba faz i ich składników koniecznych do uwzględnienia podczas modelowania zależy od skomplikowania rozpatrywanego problemu. W wielu zagadnieniach skupiających się na przepływie wody w ośrodkach nienasyconych, wystarczającym założeniem będzie potraktowanie fazy ciekłej i gazowej jako niemieszalnych, co zostało przyjęte w niniejszej rozprawie.

Modelowanie procesów przepływu komplikuje również konieczność opisywania zjawisk fizycznych w różnej skali odniesienia. Używane do tego modele matematyczne bazują zazwyczaj na zasadach zachowania masy, energii, czy pędu. Jednak ich postać będzie inna w zależności od skali w jakiej należy je stosować. W niektórych przypadkach model opisujący zjawisko w dużej skali może pochodzić bezpośrednio z modelu użytego do opisania zjawiska zachodzącego w mikroskali. Proces taki nazywa się skalowaniem i może również zachodzić w odwrotną stronę.

Dla ośrodka gruntowego możemy wyróżnić trzy najważniejsze skale: makro, mikro oraz REV (rys. 2.1). Podstawowym założeniem mikroskali jest rozważanie punktów znajdujących się w przestrzeni, które są elementami poszczególnych faz lub rozdzielających je powierzchni granicznych. Przepływ wody opisywany może być wówczas równaniem Naviera-Stokesa z odpowiednimi warunkami dla powierzchni styku płyn-płyn oraz szkielet-płyn. Podejście to jest dokładne, ale niestety niepraktyczne, kiedy konieczne jest rozważenie problemów charakteryzujących się dużymi wymiarami. Zaliczamy do nich m. in. problemy geotechniczne np. wały przeciwpowodziowe, zapory, czy nasypy. W związku z tym, zamiast opisywać grunt w skali mikroskopowej, rozważamy jego reprezentatywny element - REV (ang. *representative elementary volume*), zawierający wszystkie fazy ośrodka gruntowego oraz przestrzeń porową. Słowo reprezentatywny oznacza, że lokalna zmiana uśrednianej objętości nie będzie prowadziła do znaczących zmian w opisywanym fragmencie gruntu. Założenie takie pozwala traktować ośrodek porowaty jako continuum.

Większość gruntów naturalnych wykazuje właściwości hydrofilowe. Oznacza to, że cząsteczki wody są przyciągane przez minerały budujące szkielet gruntowy bardziej niż cząsteczki powietrza. Wodę określa się zatem jako płyn zwilżający (w stosunku do gruntu), zaś powietrze – jako płyn niezwilżający. Płyны są z założenia niemieszalne oraz oddzielone nieskończenie cienką



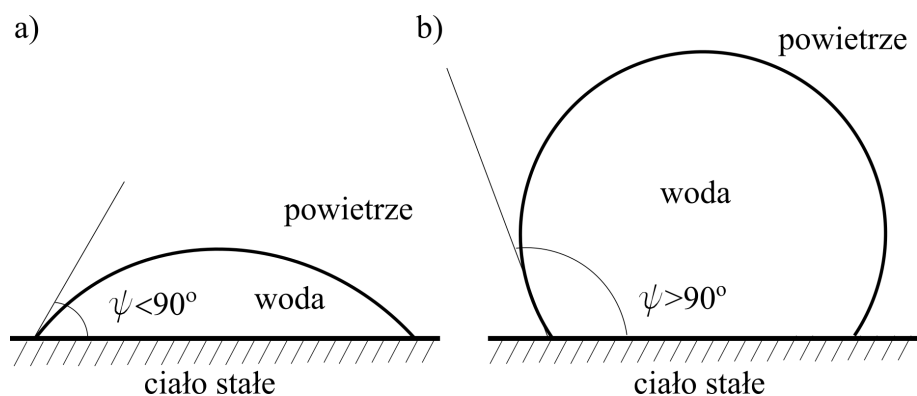
Rysunek 2.1: Skale analizy ośrodka gruntowego [Helmig et al., 1997].

powierzchnią graniczną. Wartość kohezji między cząsteczkami po jednej i po drugiej stronie powierzchni granicznej jest inna, zatem możemy ją zdefiniować jako pewną energię powierzchniową (lub napięcie powierzchniowe), która jest miarą siły jaka musi zostać pokonana, aby powierzchnia zmieniła kształt. Konsekwencją występowania siły napięcia powierzchniowego jest różnica między ciśnieniem fazy ciekłej i gazowej. Różnica ciśnienia między powietrzem i wodą może zostać obliczona przy pomocy równania Laplace'a [Pinder i Gray, 2008]:

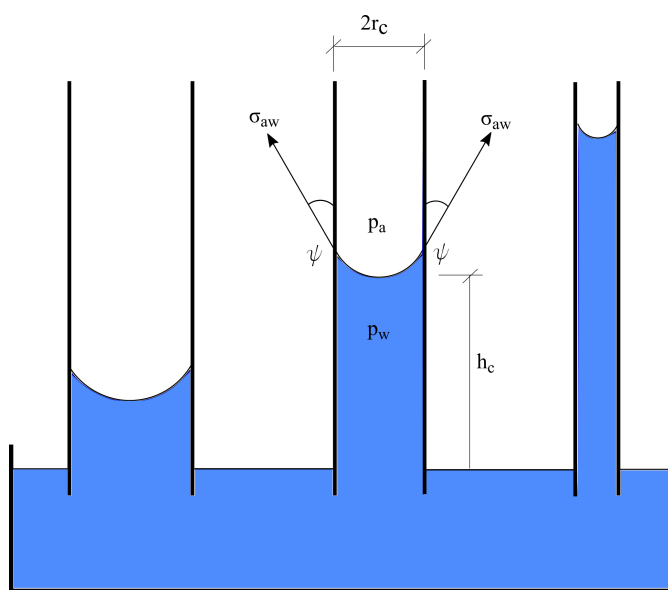
$$\nabla p = p_a - p_w = \sigma_{aw} \left( \frac{1}{r_{c1}} + \frac{1}{r_{c2}} \right), \quad (2.1)$$

gdzie indeksy  $a$  oraz  $w$  oznaczają odpowiednio powietrze i wodę,  $\sigma_{aw}$  to napięcie powierzchniowe, a  $r_{c1}$  oraz  $r_{c2}$  to symbole opisujące krzywiznę powierzchni granicznej między fazami. Wartość napięcia powierzchniowego w temperaturze  $20^\circ\text{C}$  jest równa  $0.0726 \text{ Nm}^{-1}$  i maleje wraz ze wzrostem temperatury [Pinder i Gray, 2008]. Dodatkowo ciśnienie po wklęsłej stronie powierzchni granicznej zawsze przyjmuje mniejszą wartość niż po stronie wypukłej. W przypadku, kiedy oprócz faz ciekłej i gazowej występuje jeszcze szkielet gruntowy, kształt powierzchni granicznej określa względna wartość napięcia powierzchniowego opisana wzorem:

$$\sigma_{aw} \cos(\psi) = \sigma_{sa} - \sigma_{sw}, \quad (2.2)$$



Rysunek 2.2: Kształt kroplel cieczy o różnym napięciu powierzchniowym na powierzchni ciała stałego.

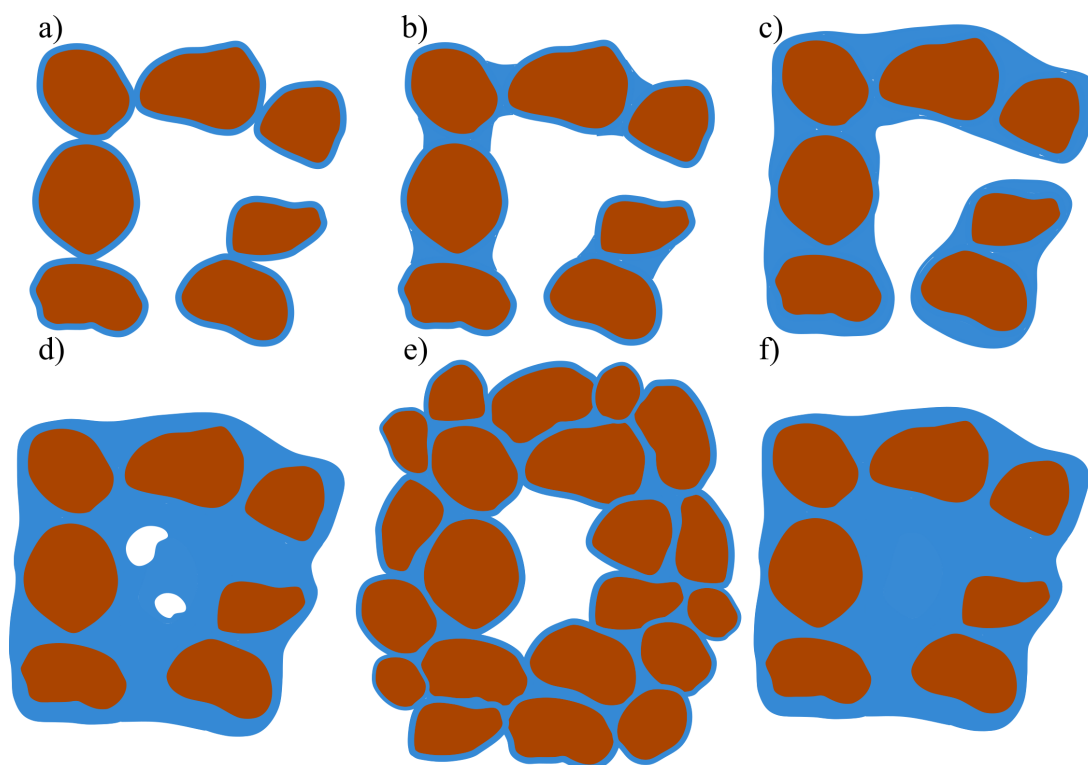


Rysunek 2.3: Podciąg wody w rurkach kapilarnych w zależności od średnicy.

gdzie,  $\sigma_{sa}$  oraz  $\sigma_{sw}$  to odpowiednio naprężenie powierzchniowe szkielel gruntowy-powietrze i szkielel gruntowy-woda, a  $\psi$  to kąt zwilżania. Wartość  $\psi$  wynosząca  $0^\circ$  oznacza tendencję do równomiernego rozchodzenia się wody po powierzchni, natomiast  $180^\circ$  powoduje tworzenie się kulistych kroplel wody, rys. 2.2. Napięcie powierzchniowe jest przyczyną zjawiska wzniosu kapilarnego, obserwowanego w cienkich rurkach. Molekuły wody są przyciągane przez ścianki rurki, a między wodą i powietrzem tworzy się zakrzywiona powierzchnia swobodna nazywana meniskiem rys. 2.3. Różnica ciśnienia między płynami jest nazywana ciśnieniem kapilarnym. Dla cylindrycznej rurki można ją obliczyć używając wzoru:

$$\delta p = p_c = p_a - p_w = \frac{2\sigma_{aw}\cos\psi}{r_c}, \quad (2.3)$$

gdzie  $r_c$  jest promieniem rurki. Zakładając, że wartość napięcia powierzchniowego między powietrzem i wodą odpowiada temperaturze  $20^\circ C$ , materiał rurki jest całkowicie zwilżalny ( $\psi = 0^\circ$ ),



Rysunek 2.4: Stany nasycenia w gruntach nienasyconych: a) suchy, b) pendularny, c) kapilarny, d) nienasycony - zamknięte pęcherzyki powietrza, e) nienasycony - zamknięte pęcherze powietrza większe niż pory gruntu (ang. *gassy soil*), f) nasycony.

ciśnienie powietrza jest stałe, a woda jest nieściśliwa, możemy zapisać:

$$h_c = \frac{1.5 \times 10^{-5}}{r_c} . \quad (2.4)$$

Powyższe równanie jest często używane w celu przybliżenia wysokości podciągu kapilarnego w ośrodku gruntowym, który charakteryzuje się małymi kątami zwilżania. Ma ono wówczas charakter przybliżony, gdyż rzeczywista geometria porów jest bardzo skomplikowana i trudno wyznaczyć reprezentatywną wartość promienia  $r_c$  (zarówno  $r_c$  oraz  $h_c$  we wzorze (2.4) podawane jest w metrach).

Molekuły wody absorbowane z pary wodnej obecnej w porach gruntu przyciągane są przez powierzchnię ziaren szkieletu. W związku z tym w warunkach naturalnych nawet w gruncie suchym obecna jest mała ilość wody w formie cienkiej błonki otaczającej ziarna szkieletu. Grubość błonki uzależniona jest od wilgotności względnej powietrza oraz siły przyciągania na poziomie molekularnym między wodą a szkieletem gruntu. Najczęściej siła wiązania jest na tyle duża, że adsorbowana woda uznawana jest za niemobilną. W przypadku rosnącej zawartości fazy ciekłej, woda utrzymywana jest siłami kapilarnymi i najczęściej pojawia się w ostrych kątach między ziarnami szkieletu gruntowego. Jeśli przestrzeń porową kształtują większe ziarna, to woda tworzy wokół nich tzw. pierścienie pendularne (rys. 2.4b). Utrzymywana w ten sposób woda jest mniej związana z szkieletem gruntowym, najczęściej występuje w odizolowanych obszarach gruntu oraz nie tworzy ciągłych ścieżek przepływu, dlatego można założyć, że jest ona



makroskopowo niemobilna. Różnica ciśnienia pomiędzy wodą pendularną oraz powietrzem w porach może być obliczona z wzoru (2.1) zakładając ujemną wartość  $r_{c1}$  oraz dodatnią dla  $r_{c2}$ . Przy wzrastającej wilgotności obszary zajęte przez wodę kapilarną łączą się ze sobą umożliwiając przepływ (rys. 2.4c). We wszystkich wcześniej opisanych konfiguracjach, powietrze zajmuje centralną część porów. Wraz ze wzrostem zawartości wody, wypełnia ona coraz to większą objętość przestrzeni porów. Faza gazowa traci swoją ciągłość, co uniemożliwia z czasem przepływ powietrza w gruncie. Zbyt szybka infiltracja lub warunki brzegowe mogą jednak doprowadzić do stanu, w którym część powietrza zostaje zamknięta w ośrodku porowatym. Pęcherze powietrza znajdujące się w gruncie są zazwyczaj mniejsze niż rozmiar porów. Jednak kiedy faza gazowa znajdująca się w gruncie pochodzi z wnętrza gleby, to pęcherze te mogą osiągać znacznie większe rozmiary (rys. 2.4e). Taki stan określa się jako ang. *gassy soil* i występuje on często w osadach na dnie mórz i zbiornikach wodnych. Poziom nasycenia dla tego rodzaju zamknięcia powietrza wynosi zwykle między 0.85 – 1. Zamknięta w ten sposób faza gazowa może zostać rozpuszczona w wodzie lub opuścić grunt w postaci pęcherzyków, co ostatecznie spowoduje osiągnięciu stanu pełnego nasycenia (rys. 2.4f). W niniejszej pracy procesy takie jak parowanie, czy rozpuszczanie nie zostaną uwzględnione.

## 2.2 Potencjał wody gruntowej i krzywa retencji

Stan energetyczny wody w gruncie jest określony poprzez jej potencjał, będący miarą sił oddziałujących na wodę. Potencjał można wyrazić jako energię przypadającą na jednostkę masy [J/kg], objętości [J/m<sup>3</sup> = Pa] lub ciężaru [J/N = m]. W przypadku pomijalnie małych efektów osmotycznych, związanych ze zmiennym stężeniem substancji rozpuszczonych w wodzie gruntowej oraz przy założeniu nieściśliwości wody, potencjał wody wygodnie jest zapisać w postaci sumy dwóch składowych, ciśnieniowej i grawitacyjnej:

$$P_w = p_w + \rho_w g z \text{ lub } H_w = h_w + z , \quad (2.5)$$

gdzie:  $P_w$  – potencjał całkowity wyrażony w jednostkach ciśnienia,  $p_w$  – potencjał ciśnieniowy,  $\rho_w$  – gęstość wody,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $z$  – wysokość względem przyjętego poziomu odniesienia,  $H_w$  – całkowita wysokość potencjału,  $h_w$  – wysokość potencjału ciśnieniowego.

Umownie przyjmuje się, że składowa ciśnieniowa  $p_w = 0$  dla wody pod ciśnieniem atmosferycznym (na powierzchni zwierciadła swobodnego wody gruntowej). Poniżej zwierciadła wody gruntowej potencjał ciśnieniowy przyjmuje wartości dodatnie i odpowiada panującemu w wodzie nadciśnieniu względem ciśnienia atmosferycznego. Powyżej zwierciadła swobodnego potencjał ciśnieniowy jest ujemny, co wynika z działania sił kapilarnych i adsorbcyjnych, wiążących wodę ze szkieletem gruntowym. Ujemny potencjał ciśnieniowy wody w strefie nienasyconej jest nazywany potencjałem macierzowym (ang. *matric potential*), natomiast różnicę między potencjałem ciśnieniowym powietrza i wody w strefie nienasyconej, będącą wartością dodatnią, nazywa się ssaniem (ang. *suction*), potencjałem ssącym lub ciśnieniem kapilarnym (ang. *capillary pressure*):

$$p_c = p_a - p_w , \quad (2.6)$$

gdzie:  $p_c$  – ssanie,  $p_a$  – ciśnienie powietrza w porach gruntu.

Przy ciśnieniu powietrza w porach równym ciśnieniu atmosferycznemu ssanie jest równe co do wartości bezwzględnej potencjałowi macierzowemu.

$$p_c = -p_w . \quad (2.7)$$

Należy zauważyć, że określenie „potencjał ciśnieniowy” w odniesieniu do strefy nienasyconej jest pewnym uproszczeniem, gdyż jego ujemne wartości tylko w ograniczonym zakresie odpowiadają rzeczywistym wartościom ciśnienia wody. W wodzie utrzymywanej siłami kapilarnymi panuje ciśnienie niższe od atmosferycznego, jednak ze względu na zjawisko kawitacji jego minimalna wartość nie powinna teoretycznie przekroczyć około  $-0.1\text{MPa}$  [Baker i Frydman, 2009]. Tymczasem wartości potencjału macierzowego mierzone w wysuszonym gruncie okazują się być znacznie niższe, co wiąże się z działaniem sił adsorbcyjnych, wiążących cząsteczki wody na powierzchni ziaren gruntu. Potencjał ssący wody gruntowej będącej w równowadze termodynamicznej z parą wodną w powietrzu można określić, korzystając z równania Kelvina [Ning i Likos, 2004]:

$$p_c = -\frac{RT\rho_w}{M_w}\ln(R_h) , \quad (2.8)$$

gdzie:  $R$  – uniwersalna stała gazowa ( $8.3143\text{ J/mol/K}$ ),  $T$  – temperatura [K],  $M_w$  – masa molowa wody ( $18.016 \cdot 10^{-3}\text{ kg/mol}$ ),  $R_h$  – wilgotność względna powietrza (wyrażona w ułamku).

Dla temperatury powietrza równej  $20^\circ\text{C}$  i wilgotności  $60\%$ , wartość  $p_c = 70\text{ MPa}$  (stan powietrzno-suchy). Natomiast przy temperaturze  $105^\circ\text{C}$  i wilgotności  $0.3\%$  otrzymujemy  $p_c = 1000\text{ MPa}$ , co przyjmuje się jako minimalną wartość potencjału gruntu o zerowej wilgotności. W literaturze można znaleźć propozycje bardziej szczegółowego opisu potencjału wody w strefie nienasyconej, z uwzględnieniem podziału na składową kapilarną i adsorbcyjną [Nitao i Bear, 1996, Tuller et al., 1999]. Koncepcje te nie doczekały się jednak szerszego zastosowania w używanych praktycznie modelach. Wartości ssania w gruncie nienasyconym zwiększają się wraz ze zmniejszającą się zawartością wody. Związane jest to rosnącym udziałem sił wiążących wodę ze szkieletem w przeliczeniu na jednostkę objętości wody. Zależność ssania od zawartości wody przedstawia się w postaci tak zwanej krzywej retencji (ang. *retention curve* lub *soil-water characteristic curve*). Zawartość wody w gruncie można wyrazić poprzez:

- wilgotność grawimetryczną (masową)

$$w = \frac{m_w}{m_s} = \frac{nS_r\rho_w}{\rho_d} , \quad (2.9)$$

- zawartość objętościową wody (wilgotność objętościową)

$$\theta_w = \frac{V_w}{V} , \quad (2.10)$$

- stopień nasycenia wodą (stopień wilgotności)

$$S_w = \frac{V_w}{V_p} . \quad (2.11)$$

Podobnie dla powietrza można zdefiniować:

- zawartość objętościową powietrza (porowatość powietrzną)

$$\theta_a = \frac{V_a}{V}, \quad (2.12)$$

- stopień nasycenia powietrzem

$$S_a = \frac{V_a}{V_p}, \quad (2.13)$$

przy czym:  $\theta_w + \theta_a = n$ ,  $S_w + S_a = 1$ . W powyższych wzorach:  $m_w$  – masa wody w próbce gruntu,  $m_s$  – masa szkieletu w próbce,  $V_w$  – objętość wody,  $V_a$  – objętość powietrza,  $V$  – objętość próbki,  $V_p$  – objętość porów. Inne często używane związki służące do definiowania stopnia wilgotności można przedstawić następująco:

$$S_w = \frac{V_w}{V_p} = \frac{w\rho_s}{e\rho_w} = \frac{w\rho_d}{n\rho_w} = \frac{w\rho}{n(1+w)\rho_w}. \quad (2.14)$$

W wyżej wymienionych wzorach wybór zmiennej opisującej zawartość wody w gruncie ma istotne znaczenie w przypadku gruntów, w których zmiana wartości ssania powoduje znaczące zmiany porowatości. Przykładowo wiele gruntów ekspansywnych zmienia swoją porowatość oraz wilgotność objętościową i masową, pozostając w stanie pełnego nasycenia ( $S_w = 1$ ) w stosunkowo szerokim zakresie wartości ssania [Fredlund i Houston, 2013, Parent et al., 2011]. W niniejszej pracy założono, że ewentualne zmiany porowatości gruntu są małe, a zależność między  $S_w$  i  $\theta_w$  ma charakter jednoznaczny.

Gdy pory gruntu wypełnione są całkowicie wodą, można obliczyć wielkość definiowaną jako wilgotność w stanie pełnego nasycenia:

$$w_{sr} = n \frac{\rho_w}{\rho_d} = e \frac{\rho_w}{\rho_s} = \frac{(1+w)\rho_s - \rho}{\rho_s \rho} \rho_w. \quad (2.15)$$

Krzywa retencji określona dla danego gruntu w warunkach drenażu (osuszania) ma inny kształt niż krzywa zmierzona do tego samego gruntu w warunkach nawadniania. Zjawisko to jest nazywane histerezą krzywej retencji. Przy określonej wartości wilgotności ciśnienie ssania będzie większe w warunkach drenażu niż w warunkach nawadniania. Podczas nawadniania zerową wartość ssania można uzyskać w stanie niepełnego nasycenia, w którym w porach występują izolowane od siebie pęcherzyki powietrza. Przyjmuje się, że histereza wywoływana jest przez następujące mechanizmy i zjawiska:

- efekt zmiennej średnicy porów: w przypadku nawadniania maksymalny podciąg kapilarny jest zależny od średnicy kanalika porowego w najszerszym miejscu, natomiast podczas drenażu gruntu nasyconego wznios kapilarny jest zależny od średnicy kanalików w najwęższych miejscach; pierwsza z wymienionych sytuacji odpowiada kapilarności czynnej, a druga kapilarności biernej,
- zmiana wartości kąta zwilżania między warstwą wody nachodzącą na powierzchnię minerału i warstwą cofającą się; kąt zwilżania jest większy w przypadku nachodzenia,
- efekt zamykania powietrza w porach gruntu: powietrze jako płyn niezwilżający zajmuje środkową część porów i może być odcięte w rozszerzeniach przestrzeni porowej, gdy węższe

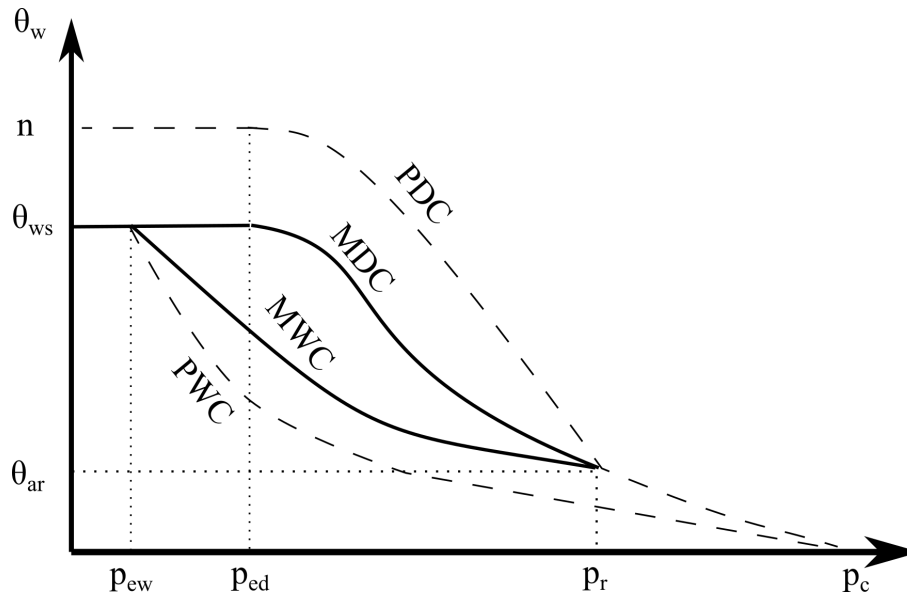
kanaliki są całkowicie wypełnione wodą.

Zjawisko histerezy zilustrowano na rys. 2.5. Zaznaczono na nim cztery charakterystyczne krzywe retencji [Kutilek et al., 1994, Luckner et al., 1989]:

- Pierwotna krzywa drenażu (ang. *primary drainage curve-PDC*) reprezentuje osuszanie gruntu rozpoczynające się od stanu pełnego nasycenia. Grunty pozostają całkowicie nasycone dopóki wartość ssania nie przekroczy wielkości krytycznej, odpowiadającej średnicy największych porów w próbce. Taką wartość ssania nazywa się ciśnieniem wejścia powietrza lub ciśnieniem pęcherzykowym (ang. *air entry pressure* lub *bubbling pressure*),  $p_{ed}$ . W warunkach laboratoryjnych proces ten można kontynuować do stanu całkowicie suchego, jednak w warunkach terenowych drenaż kończy się na pewnej niezerowej wartości wilgotności, określanej jako wilgotność rezydualna  $\theta_{rw}$ . Wilgotność rezydualna nie jest ściśle zdefiniowanym parametrem, niekiedy przyjmuje się, że odpowiada ona wartości ssania około 15 MPa, która jest granicą możliwości poboru wody przez rośliny [Van Genuchten, 1980b], według innej definicji wilgotność rezydualna odpowiada zawartości wody utrzymywanej w gruncie przez siły adsorpcji, w odróżnieniu od sił kapilarnych [Vanapalli et al., 1998],
- Pierwotna krzywa nawadniania (ang. *primary wetting curve-PWC*) przedstawia nawadnianie gruntu od stanu całkowicie suchego; krzywa ta zwykle kończy się na wartości wilgotności objętościowej mniejszej od porowatości, oznaczonej  $\theta_{sw}$ , gdyż podczas nawadniania część powietrza pozostaje w gruncie w postaci odizolowanych od siebie pęcherzyków -  $\theta_{ra}$  (rezydualna zawartość powietrza). Stosunek  $\theta_{sw}$  do porowatości na ogół zawiera się w przedziale 0.85 do 0.9 [Kosugi et al., 2002, Likos et al., 2013]. Wartość tę osiąga się często przy większej od zera wartości ssania  $p_{ew}$ , którą nazywa się ciśnieniem usunięcia powietrza (ang. *air expulsion pressure*) – odpowiada ona ciśnieniu wejścia powietrza na krzywej drenażu,
- Główną krzywą drenażu (ang. *main drainage curve- MDC*) i główną krzywą nawadniania (ang. *main wetting curve, MWC*) opisuje się odpowiednio procesy drenażu i nawadniania zachodzące między stanem rezydualnej zawartości powietrza i stanem rezydualnej wilgotności. Są one zatem reprezentatywne w warunkach terenowych. Jeżeli proces nawadniania lub drenażu będzie odwrócony przed osiągnięciem końcowej wartości wilgotności, zmiany ssania i wilgotności będą odbywać się wzdłuż tak zwanych krzywych skanujących (ang. *scanning curves*), zawartych między krzywymi głównymi.

Ze zjawiskiem histerezy krzywej retencji w gruntach wiąże się różnica w wysokości strefy kapilarnej czynnej i biernej. Strefa kapilarności czynnej tworzy się w warunkach nawadniania (podciągu kapilarnego ponad zwierciadło wody). Natomiast strefa kapilarności biernej, powstaje podczas opadania zwierciadła wody, a zatem odpowiada warunkom drenażu. Strefa bierna ma zatem wysokość większą od strefy czynnej.

Każdą z krzywych retencji można opisać, wykorzystując wzory analityczne. Zestawienia takich wzorów przedstawiono m. in. w pracach [Leij et al., 1997, Leong i Rahardjo, 1997b, Ossowski i Sikora, 2004] – poniżej przytoczono najbardziej popularne propozycje. Można je



Rysunek 2.5: Histereza krzywej retencji gruntu.

zapisać, wykorzystując znormalizowaną wilgotność objętościową  $\theta_{ew}$  lub znormalizowany stopień nasycenia  $S_{ew}$ :

$$\theta_{ew} = \frac{\theta - \theta_{min}}{\theta_{max} - \theta_{min}} \text{ lub } S_{ew} = \frac{S_w - S_{min}}{S_{max} - S_{min}}, \quad (2.16)$$

gdzie: indeksy „min” i „max” oznaczają wartości minimalne i maksymalne w danych warunkach przepływu.

- Wzory Brooksa-Corey'a [Brooks i Corey, 1964]

$$S_{ew} = \begin{cases} (\alpha p_c)^{-\lambda} & p_c > \frac{1}{\alpha} = p_e \\ 1 & p_c \leq \frac{1}{\alpha} = p_e \end{cases}, \quad (2.17)$$

$$p_c = p_e (S_{ew})^{\frac{1}{\lambda}}. \quad (2.18)$$

- Wzory van Genuchtena [Van Genuchten, 1980b]

$$S_{ew} = [1 + (\alpha p_c)^{n_g}]^{-m_g}, \quad (2.19)$$

$$p_c = \frac{1}{\alpha} \left[ S_{ew}^{\frac{1}{m_g}} - 1 \right]^{\frac{1}{n_g}}. \quad (2.20)$$

- Wzory Gardnera [Gardner, 1958]

$$S_{ew} = \frac{1}{1 + (\alpha p_c)^{n_g}}, \quad (2.21)$$

$$p_c = p_g (S_{ew} - 1)^{\frac{1}{n_g}}. \quad (2.22)$$

Tablica 2.1: Średnie wartości parametrów funkcji retencji (główna krzywa drenażu) i przewodności hydraulicznej dla wybranych rodzajów gruntów (według [Carsel i Parrish, 1988]).

	$\theta_r[-]$	$\theta_s[-]$	$\alpha[1/kPa]$	$n$	$k_s[m/s]$	$\eta$
<i>piasek</i>	0.045	0.43	1.48	2.68	$8.25 \cdot 10^{-5}$	4.19
<i>glina</i>	0.78	0.43	0.37	1.56	$2.89 \cdot 10^{-6}$	6.57
<i>ił</i>	0.68	0.38	0.08	1.09	$5.56 \cdot 10^{-7}$	5.22

- Wzór Fredlunda i Xinga [Fredlund i Xing, 1994]

$$S_{ew} = (\exp(1)(\alpha p_c)^{n_g})^{-m_g} . \quad (2.23)$$

W każdym z powyższych wzorów występuje parametr  $\alpha$ , skalujący wartość ssania, wyrażony w jednostkach odwrotnych do  $p_c$ . We wzorze Brooksa-Corey'a (2.17) reprezentuje on odwrotność ciśnienia wejścia powietrza. We wzorach (2.19), (2.21) i (2.23) wartość  $1/\alpha$  odpowiada w przybliżeniu punktowi przegięcia krzywej retencji i jest większa od ciśnienia wejścia powietrza. Parametry  $\lambda$ ,  $n_g$  i  $m_g$  są związane z rozkładem wielkości porów w gruncie i odpowiadają za nachylenie krzywej. We wzorze van Genuchtena najczęściej zakłada się zależność  $m_g = 1 - 1/n_g$ .

Często konieczne jest przeliczanie parametrów Brooksa-Coreya na parametry van Genuchtena i odwrotnie. Jednym z popularniejszych rozwiązań są równania zaproponowane przez Lenharda [Parker i Lenhard, 1987]:

$$Z_s = 0.72 - 0.35 \exp(-n_g^4) , \quad (2.24)$$

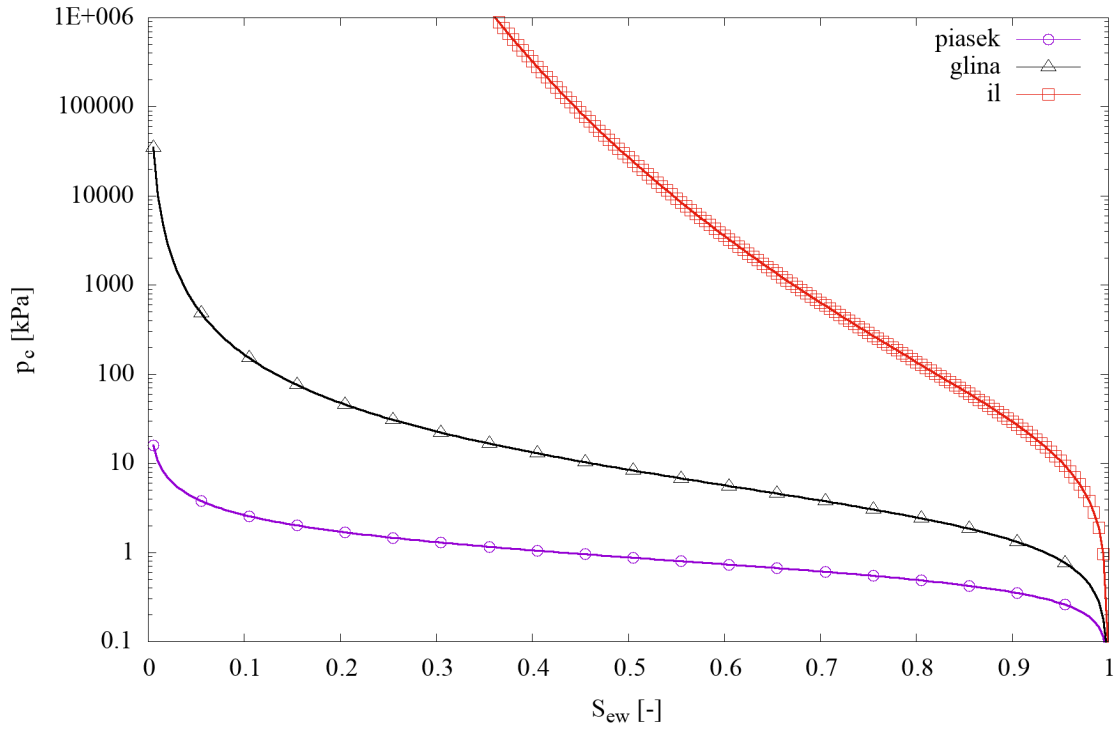
$$\lambda = (n_g - 1) \left(1 - 0.5 \frac{n_g}{n_g - 1}\right) , \quad (2.25)$$

$$p_e = p_g Z_s^{\frac{1}{\lambda}} \left(Z_s^{\frac{n_g}{n_g - 1}} - 1\right)^{\frac{1}{n_g}} , \quad (2.26)$$

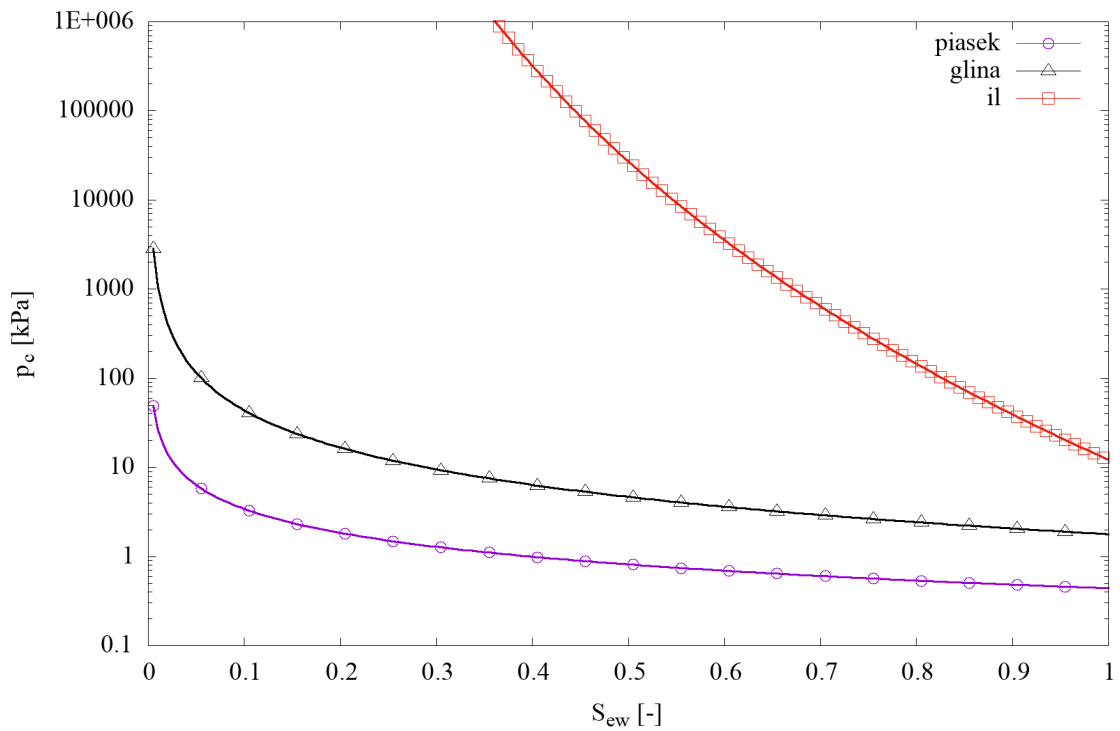
gdzie  $Z_s$  jest parametrem pomocniczym. Przykładowe wartości parametrów van Genuchtena dla wybranych rodzajów gruntu, według [Carsel i Parrish, 1988], zestawiono w tabeli 2.1. Przy dużych wartościach ssania wzory Brooksa-Coreya i van Genuchtena dają zbliżone wyniki, gdy  $\lambda = m_g n_g$ . Z badań przedstawionych w artykule [Likos et al., 2013] dla modelu van Genuchtena wynika, że parametr  $n_g$  przyjmuje zbliżoną wartość w warunkach nawadniania i drenażu, natomiast stosunek parametrów  $\alpha_w$  (nawadnianie) do  $\alpha_d$  (drenaż) wynosi średnio około 1.73 dla gruntów spoistych i około 3.14 dla gruntów niespoistych.

Kształt krzywej retencji jest zależny od rozkładu wielkości porów w gruncie. Im mniejszy jest rozmiar porów, tym większa jest wilgotność gruntu przy dużych wartościach ssania (i mniejsza wartość  $\alpha$ ). Nachylenie krzywej retencji zależy od jednorodności rozmiaru porów. Jeżeli wszystkie pory mają zbliżony rozmiar, krzywa przybiera kształt schodkowy – większość porów podlega drenażowi w określonym, wąskim przedziale wartości ssania (duże wartości  $\lambda$  lub  $n_g$ ). Natomiast w przypadku dużego zróżnicowania wielkości porów krzywa jest łagodnie nachylona, gdyż w każdym przedziale wartości ssania osuszana jest jedynie niewielka część porów.





Rysunek 2.6: Przykładowe krzywe retencji wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem van Genuchtena.



Rysunek 2.7: Przykładowe krzywe retencji wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem Brooks-Corey'a.

Wszystkie przedstawione wyżej modele krzywej retencji charakteryzują się tym, że przy wartości  $S_{ew}$  dążącej do 0 wartości ssania zmierzają do nieskończoności, stąd też nie powinny być stosowane przy małej wilgotności gruntu. Realistyczny kształt krzywej retencji przy dużych wartościach ssania można uzyskać, stosując wzór Fredlunda i Xinga z dodatkowym współczynnikiem korekcyjnym [Fredlund i Xing, 1994]:

$$S_{ew} = C_r(p_c) \left( \ln[\exp(1) + (p_c/p_g)^\beta] \right)^{-\gamma}, \quad (2.27)$$

przy czym  $C_r(p_c)$  określone jest poniższym wzorem:

$$C_r(p_c) = 1 - \frac{\ln[1 + (p_c/p_r)]}{\ln[1 + (p_{c,max}/p_r)]}, \quad (2.28)$$

gdzie:  $p_{c,max}$  - maksymalna wartość ssania dla której  $S_{ew} = 0$  ( $10^6$  kPa),  $p_r$  - wartość ssania rezydualnego, przy której następuje zmiana nachylenia krzywej retencji.

Szereg alternatywnych propozycji dostosowania modeli krzywych retencji w zakresie wysokich wartości ssania opisano w artykule [Khlosi et al., 2008]. W podobny sposób można również zmodyfikować wzory (2.17) i (2.19). Na rys. 2.6 przedstawiono przykładowe krzywe retencji (główne krzywe drenażu) dla piasku, gliny i łu, opisane wzorem van Genuchtena z parametrami z tabl. 2.1. Z kolei na rys. 2.7 znajdują się krzywe otrzymane przy użyciu wzoru Brooks-Corey'a (2.18). Największe różnice między krzywymi można zaobserwować w obszarze pełnego nasycenia. Wiąże się to z parametrem  $p_e$  (ciśnienie wejścia powietrza), którego wartość decyduje o rozpoczęciu procesu drenażu w gruncie.

### 2.3 Przewodność hydrauliczna

Podstawowym parametrem charakteryzującym zdolność gruntu do przewodzenia wody w warunkach pełnego nasycenia jest współczynnik filtracji (współczynnik przewodności hydraulicznej). Współczynnik ten zależy od parametrów ośrodka porowatego oraz gęstości i lepkości wody, które zmieniają się wraz z temperaturą. Prędkość filtracji  $\mathbf{v}_\alpha$  w warunkach pełnego nasycenia określa się prawem Darcy'ego-Buckinghamha [Bear, 2013, Hassanizadeh i Gray, 1979]:

$$\mathbf{v}_\alpha = -\frac{\mathbf{k}_s}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}), \quad (2.29)$$

gdzie  $\mathbf{k}_s$  to tensor przepuszczalności właściwej,  $\mathbf{g}$  - wektor grawitacji. Przepuszczalność wykorzystywana we wzorze (2.29) wyrażana jest w  $[m^2]$  i zależy od geometrii porów w gruncie. Jej wartość można oszacować używając wielu wzorów empirycznych lub pół-empirycznych oraz metod laboratoryjnych. Kilka przykładowych propozycji można znaleźć w [Chapuis, 2012, Szymkiewicz i Kryczalło, 2011]. W warunkach niepełnego nasycenia równanie Darcy przybierze następującą postać:

$$\mathbf{v}_\alpha = -\frac{\mathbf{k}_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) = -K_\alpha(S_\alpha) \nabla H_\alpha, \quad (2.30)$$

gdzie  $\mathbf{k}_\alpha$  i  $K_\alpha$  to odpowiednio tensor przepuszczalności oraz przewodności hydraulicznej. Równania (2.29) oraz (2.30) przedstawiają rozszerzoną, trójwymiarową formę klasycznego równania



Darcy [Darcy, 1856].

Z uwagi na anizotropię ośrodka gruntowego, związek między przepuszczalnością a nasyceniem będzie różny dla każdej składowej tensora przepuszczalności. Jednakże, dla celów praktycznych, najczęściej używa się uproszczonego związku:

$$k_{\alpha}(S_{\alpha}) = k_s k_{r\alpha}(S_{\alpha}) , \quad (2.31)$$

gdzie  $k_{r\alpha}$  to skalarny współczynnik przepuszczalności względnej, przyjmujący wartości od 0 do 1. W odniesieniu do równania (2.31) można zapisać podobny związek dla przewodności hydraulicznej:

$$K_{\alpha}(S_{\alpha}) = K_{s\alpha} k_{r\alpha}(S_{\alpha}) . \quad (2.32)$$

Wartość  $k_{r\alpha} = 1$  odpowiada warunkom pełnego nasycenia fazą  $\alpha$ , natomiast  $k_{r\alpha} = 0$  zachodzi, kiedy nasycenie ośrodka gruntowego daną fazą spada poniżej wartości rezydualnej ( $S_{\alpha} < S_{r\alpha}$ ). Prawo Darcy można również zapisać w postaci:

$$\mathbf{v}_{\alpha} = -k_s \lambda_{\alpha}(S_{\alpha}) (\nabla p_{\alpha} - \rho_{\alpha} \mathbf{g}) , \quad (2.33)$$

gdzie  $\lambda_{\alpha} = \frac{k_{r\alpha}(S_{\alpha})}{\mu_{\alpha}}$  jest mobilnością odpowiedniej fazy.

Współczynnik przewodności względnej  $k_{r\alpha}$  można wyrazić jako funkcję stopnia wilgotności  $S_w$  lub ciśnienia kapilarnego  $p_c$ . Zaproponowano szereg wzorów analitycznych, których przegląd można znaleźć w pracach [Leij et al., 1997, Leong i Rahardjo, 1997b, Ossowski i Sikora, 2004]. Często stosowane są proste formuły, w których  $k_{r\alpha}$  jest funkcją potęgową znormalizowanego stopnia nasycenia:

$$k_{rw} = (S_{ew})^{\eta_w} , \quad (2.34)$$

$$k_{ra} = (1 - S_{ew})^{\eta_a} , \quad (2.35)$$

gdzie wykładnik  $\eta_w$  można oszacować na podstawie parametrów funkcji Brooksa-Corey'a lub van Genuchtena:

$$\eta_w = \frac{2}{\lambda} + 3 = \frac{2}{m_g n_g} + 3 . \quad (2.36)$$

W związku z tym, że przy przepływie faza ciekła napotyka większy opór gruntu niż faza gazowa, parametr  $\eta_w$  jest często większy niż  $\eta_a$ . Wartości wyznaczone dla poszczególnych gruntów (tab. 2.1), są zgodne z zakresem zmienności  $\eta_w$  podanym przez Mualem'a [Mualem, 1978] tj. od 2.5 do 24.5. Bardziej złożone modele przepuszczalności uwzględniają statystyczny rozkład porów. Obliczyć go można na podstawie krzywej retencji gruntu. Szerszy opis tych wzorów oraz ich wyprowadzenie można znaleźć np. w [Leong i Rahardjo, 1997a]. Najczęściej stosowane modele z tej grupy, to modele Burdine'a [Burdine et al., 1953] i Mualema [Mualem, 1976], które można zapisać w ujednocionej formie [Kutílek et al., 1994]:

Tablica 2.2: Parametry użyte w modelu przepuszczalności według Mualem'a i Burdine'a.

	$\kappa[-]$	$\eta_1[-]$	$\eta_2[-]$	$\eta_3[-]$	$\eta_4[-]$
<i>Mualem</i>	0.5	1.0	2.0	$2.5 + 2.0/\lambda$	$1.0 + 1.0/\lambda$
<i>Burdine</i>	2.0	2.0	1.0	$3.0 + 2.0/\lambda$	$1.0 + 2.0/\lambda$

$$k_{rw}(S_{ew}) = (S_{ew})^\kappa \left[ \frac{\int_0^{S_{ew}} p_c(S)^{-\eta_1} dS}{\int_0^1 p_c(S)^{-\eta_1} dS} \right]^{\eta_2}, \quad (2.37)$$

$$k_{ra}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^\kappa \left[ \frac{\int_{S_{ew}}^1 p_c(S)^{-\eta_1} dS}{\int_0^1 p_c(S)^{-\eta_1} dS} \right]^{\eta_2}, \quad (2.38)$$

gdzie  $S$  oznacza zmienną całkowaną, parametr  $\kappa$  oraz wykładniki  $\eta_1$  i  $\eta_2$  zestawiono w tabeli 2.2. W ogólnych przypadkach zastosowanie tych rozbudowanych modeli do funkcji postaci  $p_c(S_{ew})$  wymaga całkowania numerycznego. W przypadku funkcji zaproponowanej przez Brooksa-Corey'a całkę można wyznaczyć analitycznie, co prezentuje formuła poniżej:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S_{ew}^{\eta_3}, \quad (2.39)$$

$$k_{ra}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^\kappa [1 - (S_{ew})^{\eta_4}]^{\eta_2}. \quad (2.40)$$

Parametry  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ ,  $\eta_4$  zestawione zostały w tab. 2.2. W przeciwieństwie do funkcji van Genuchten'a, formułę Mualem'a można całkować analitycznie jeśli  $m_g = 1 - \frac{1}{n_g}$ , co prowadzi do poniższych równań:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S_{ew}^{0.5} \left[ 1 - (1 - (S_{ew})^{\frac{1}{m_g}})^{m_g} \right]^2, \quad (2.41)$$

$$k_{ra}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^{0.5} \left[ 1 - (S_{ew})^{\frac{1}{m_g}} \right]^{2m_g}. \quad (2.42)$$

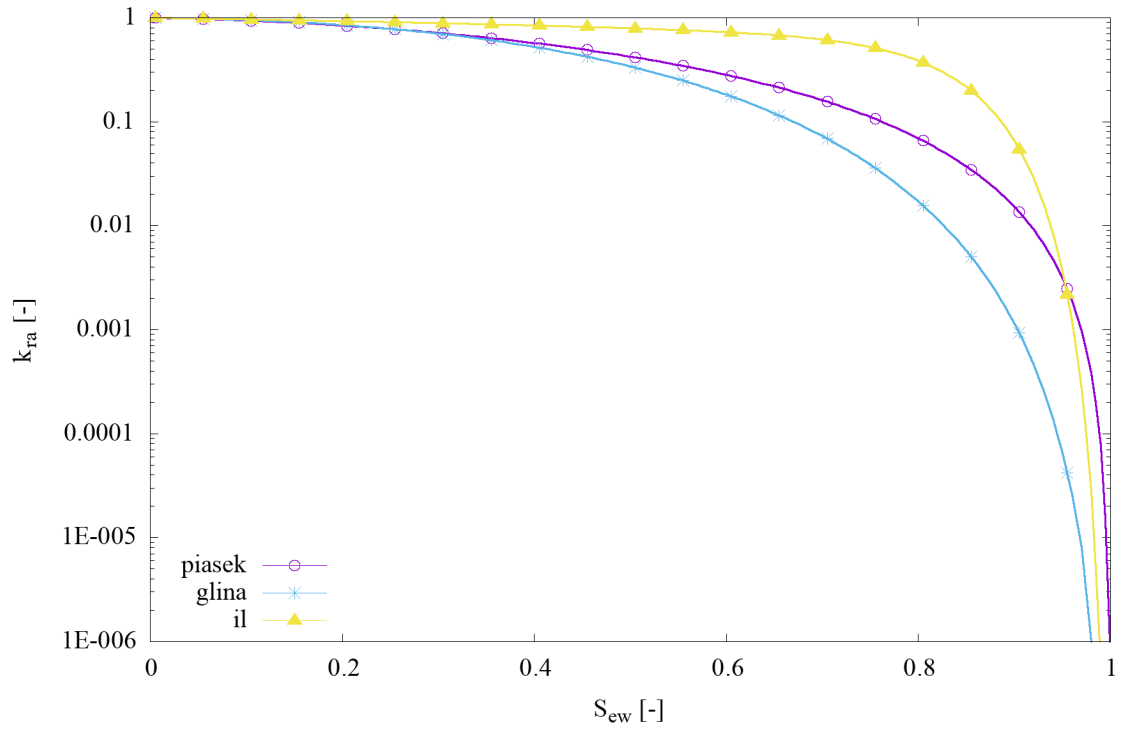
Natomiast formułę Burdine'a można całkować analitycznie jeżeli  $m_g = 1 - \frac{2}{n_g}$ :

$$k_{rw}(S_{ew}) = S_{ew}^2 \left[ 1 - (1 - (S_{ew})^{\frac{1}{m_g}})^{m_g} \right], \quad (2.43)$$

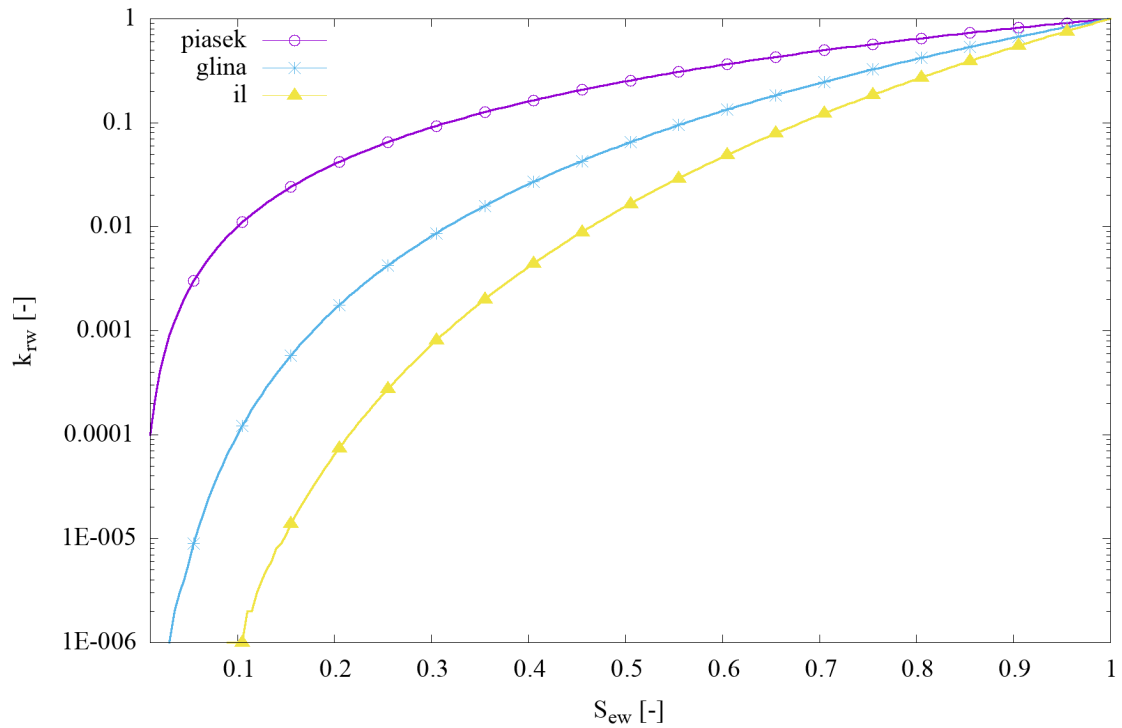
$$k_{ra}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^2 \left[ 1 - (S_{ew})^{\frac{1}{m_g}} \right]^{m_g}. \quad (2.44)$$

Symbol  $\kappa$  w równaniach (2.39) oraz (2.40) jest parametrem, który należy dopasować w zależności od analizowanego gruntu. Dla fazy ciekłej waha się od -1.28 do -5.96 (odpowiednio piasek i glina). Natomiast dla fazy gazowej wynosi on zazwyczaj 1/3 [Leij et al., 1997].

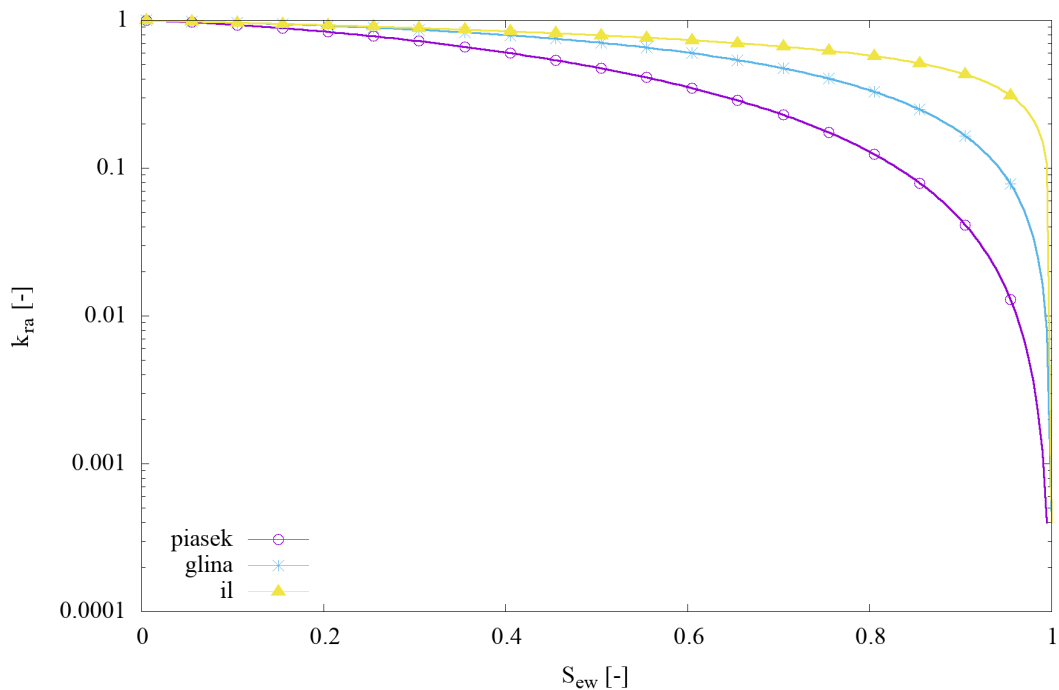
Wszystkie wyżej opisane wzory można przekształcić analitycznie, aby wyznaczyć przewodność hydrauliczną jako funkcję ciśnienia kapilarnego. Przykładowe funkcje dla piasku, gliny oraz



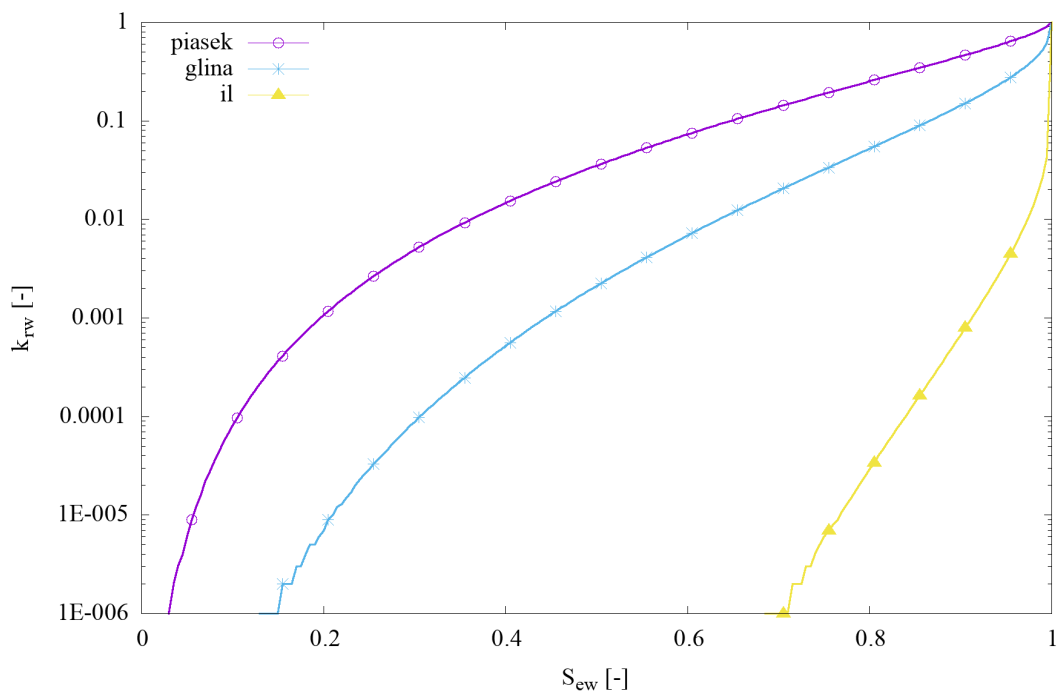
Rysunek 2.8: Przykładowe krzywe przewodności względnej powietrza dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem Brooks-Corey'a.



Rysunek 2.9: Przykładowe krzywe przewodności względnej wody dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem van Genuchtena.



Rysunek 2.10: Przykładowe krzywe przewodności względnej powietrza dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem Brooks-Corey'a.



Rysunek 2.11: Przykładowe krzywe przewodności względnej wody dla wybranych rodzajów gruntu (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]), opisane modelem van Genuchtena.

ilu według wzorów Brooksa-Corey'a oraz van Genuchtena-Mualem'a przedstawiają rysunki 2.8-2.11. Parametry gruntów, dla których wykonano obliczenia znajdują się w tabelicy 2.1. Największe różnice można zaobserwować dla gliny. W modelu van Genuchtena w przedziale wzrostu wartości ciśnienia kapilarnego od 0 do 100 Pa można zaobserwować gwałtowny spadek przewodności wody i szybki wzrost przewodności powietrza. Jest to niezgodne z fizyką tego zjawiska, ponieważ nasycenie wodą w tych przedziałach powinno być stałe i bliskie jedności [Szymkiewicz et al., 2012]. Przyczyną tego jest nie uwzględnienie ciśnienia wejścia powietrza w równaniach (2.43) i (2.44), co zostało zauważone w pracach [Ippisch et al., 2006, Vogel i Cislerova, 1988].

Niektóre empiryczne modele definiują przewodność hydrauliczną bezpośrednio jako funkcję ciśnienia kapilarnego. Są one najczęściej stosowane w modelu Richardsa, gdzie założenie stałego ciśnienia atmosferycznego pozwala na wyrażenie przewodności hydraulicznej wody tylko jako funkcji jej ciśnienia. Przykładem takiego podejścia jest wzór Philipa, bazujący na wzorach Gardnera [Philip, 1957]:

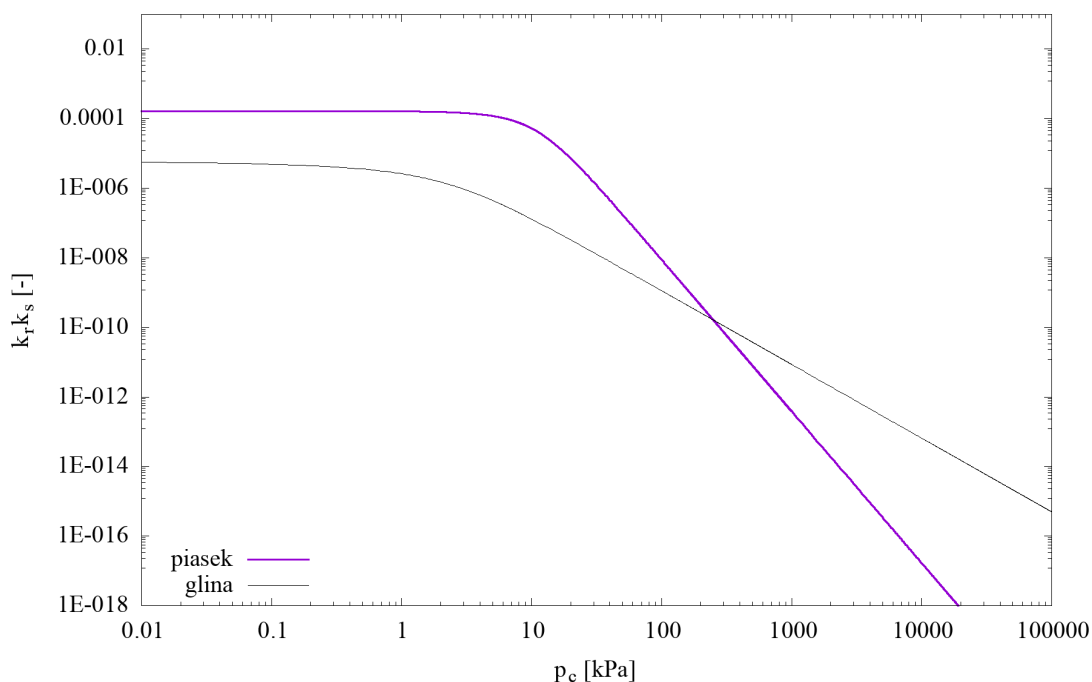
$$k_{rw}(p_c) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{p_c - p_e}{p_g}\right) & p_c > p_e \\ 1 & p_c < p_e \end{cases} \quad (2.45)$$

Kolejnym istotnym zjawiskiem jest krzyżowanie się funkcji przewodności w gruntach grubo- i drobnoziarnistych w warunkach wzrastającego ssania, co opisano w m. in. w [Szymkiewicz et al., 2014]. Aby omówić ten efekt przedstawiono przewodność całkowitą, będącą iloczynem współczynnika przewodności w stanie pełnego nasycenia i współczynnika przewodności względnej, dla piasku (ang. *sand*) i gliny (ang. *loam*), których parametry określono w danych z pracy [Carsel i Parrish, 1988]. W piasku przewodność w stanie nasycenym jest większa niż w glinie, jednak wraz z wzrostem ssania, stopień nasycenia a zatem i przewodność względna, maleją znacznie szybciej w piasku niż w glinie. Już przy ssaniu około 250 kPa przewodność obu gruntów jest taka sama, zaś przy większych wartościach ssania piasek staje się znacznie mniej przepuszczalny od gliny (rys. 2.12). Wartość ciśnienia kapilarnego, przy której krzyżują się funkcje przewodności, może różnić się w zależności od wybranej funkcji opisującej przewodność hydrauliczną. Wspomniany wyżej efekt jest podstawą działania między innymi barier kapilarnych osłaniających składowiska odpadów, warstw drenażowych pod trawnikami oraz obsypki żwirowych wokół fundamentów. W każdym z tych przypadków warstwa materiału gruboziarnistego jest praktycznie nieprzepuszczalna dla wilgoci w warunkach ssania występujących in situ.

We wzorach (2.37), (2.38)  $S_{ew}$  jest znormalizowanym stopniem nasycenia. Tymczasem, w gruntach nienasyconych podlegających deformacji, przewodność hydrauliczna zmienia się nie tylko na skutek zmiany stopnia nasycenia, ale również z powodu zmiany porowatości wywołanej odkształceniem. W literaturze można znaleźć szereg wzorów opisujących zależność współczynnika przewodności w warunkach nasyconych od współczynnika porowatości  $n$  bądź wskaźnika porowatości  $e$  np. [Szymkiewicz i Kryczalło, 2011]. Jednym z popularnych wzorów jest formuła Kozeny'ego-Carmana:

$$k_s = C_k \frac{e^3}{1 + e}, \quad (2.46)$$

gdzie  $C_k$  jest współczynnikiem niezależnym od porowatości. Stosunkowo niedawno zaproponowano zależność pomiędzy łącznym efektem zmian porowatości i stopniem nasycenia, a wartością



Rysunek 2.12: Przykładowe krzywe przewodności hydraulicznej dla piasku oraz gliny (parametry według [Carsel i Parrish, 1988]).

współczynnika filtracji w warunkach zmiennego ssania np. [Parent et al., 2011]. Problem ten jest istotny szczególnie w przypadku gruntów silnie odkształcalnych i ekspansywnych, które jak wspomniano, podlegają znaczącym odkształceniom wywołanym zmianami ssania, pozostając w stanie nasyconym. Ze względu na założenie nie uwzględniania odkształceń szkieletu w niniejszej pracy zostanie on pominięty.

## 2.4 Zależność między parametrami retencji i przewodności hydraulicznej, a krzywą uziarnienia

Krzywa retencji jest kluczową funkcją, która definiuje sposób w jaki zachowuje się grunt nienasycony. Jej wyznaczenie jest stosunkowo pracochłonne i wymaga specjalistycznego sprzętu, stąd też zaproponowano szereg metod pozwalających określić parametry krzywej retencji na podstawie innych łatwo mierzalnych parametrów gruntu, są to tzw. funkcje pedotransferu. Poniżej przedstawiona została jedna z takich metod, zaproponowana przez [Aubertin et al., 2003], którą wykorzystano w obliczeniach zawartych w dalszej części pracy.

Autorzy zaproponowali zestaw równań pozwalający na oszacowanie przebiegu krzywej retencji na podstawie danych uzyskanych z krzywej przesiewu. Model jest rozszerzeniem opisu zaproponowanego przez [Kovács, 2011] w literaturze znanego pod nazwą MK (ang. *Modified Kovacs*). Rozwiązanie MK korzysta z parametru  $h_{c0}$ , czyli wysokości podciągu kapilarnego. Można go zdefiniować za pomocą wcześniej omówionego równania (2.3) określającego podciąganie wody w rurce posiadającej średnicę  $d$  [Szymkiewicz, 2012]:

$$h_{c0} = \frac{4\sigma_{aw}\cos\psi}{\gamma_w d} . \quad (2.47)$$

To stosunkowo proste równanie pozwala zauważyć, że podciąg kapilarny jest odwrotnie proporcjonalny do średnicy rurki. Tłumaczy to również dlaczego w gruntach drobnoziarnistych strefa podciągu kapilarnego jest znacznie większa. Ponieważ rzeczywisty ośrodek porowaty posiada nieregularną strukturę, konieczne jest wyznaczenie równoważnej średnicy porów  $d_{eq}$  [Aubertin et al., 2003], która zależy od wskaźnika porowatości, ciężaru objętościowego szkieletu gruntowego oraz powierzchni właściwej:

$$d_{eq} = 4 \frac{e}{\rho_s S_m} , \quad (2.48)$$

gdzie  $S_m$  to powierzchnia właściwa, którą możemy wyznaczyć z poniższego wzoru [Aubertin et al., 2003]:

$$S_m = \frac{\alpha_0}{\rho_s D_H} , \quad (2.49)$$

przy czym  $\alpha_0$  jest współczynnikiem kształtu ziaren oscylującym w przedziale między 6 a 18 (w modelu MK zalecane jest przyjmowanie  $\alpha_0 = 10$ ), a  $D_H$  jest równoważną średnicą ziaren. Podstawiając równania (2.48) oraz (2.49) do (2.47) otrzymamy:

$$h_{c0} = \frac{\sigma_{aw}\cos\psi}{\gamma_w} \frac{\alpha_0}{e D_H} . \quad (2.50)$$

$D_H$  w gruncie jednorodnym jest równe średnicy ziarna gruntu, natomiast w przypadku gruntów niejednorodnych wygodniej jest wyznaczyć ją z następującego równania [Aubertin et al., 2003]:

$$D_H = [1 + 1.17\log(C_U)] d_{10} , \quad (2.51)$$

gdzie  $d_{10}$  i  $d_{60}$  to średnica ziaren, które wraz z mniejszymi stanowią odpowiednio 10% i 60% całej frakcji,  $C_U$  to wskaźnik różnoziarnistości:

$$C_U = \frac{d_{60}}{d_{10}} . \quad (2.52)$$

Uwzględniając powyższe zależności i podstawiając do równania (2.50), wysokość podciągu kapilarnego możemy przedstawić następująco:

$$h_{c0} = \frac{[1.17 \log(C_U) + 1]\gamma_w}{e d_{10} \alpha_0 \sigma_{aw} \cos\psi} . \quad (2.53)$$

W modelu MK  $h_{c0}$  jest jedną z wartości koniecznych do określenia zależności między stopniem nasycenia  $S_w$  (lub objętościową zawartością wody  $\theta$ ), a ssaniem matrycowym. Rozwiązanie Kovacs'a zakłada, że woda utrzymywana jest za pomocą sił kapilarnych (odpowiedzialnych za nasycenie kapilarne  $S_c$ ) i sił adhezyjnych (powodując nasycenie przez adsorbcję  $S_a$ ).  $S_c$  jest wartością dominującą w przypadku niskich wartości ssania, natomiast  $S_a$  przy wyższych. Równanie uwzględniające powyższą zależność można zapisać:

$$S_w = \frac{\theta}{n} = S_{wc} + S_{wa}^*(1 - S_c) . \quad (2.54)$$

W równaniu (2.54) konieczne jest użycie parametru  $S_{wa}$  (który zawiera się między 0 a 1), ponieważ należy uwzględnić fakt, że czynnik odpowiedzialny za adsorbcję nie może osiągnąć jedności przy małych wartościach ssania:

$$S_{wa}^* = \begin{cases} S_{wa} & S_a < 1 \\ 1 & S_a \geq 1 \end{cases} . \quad (2.55)$$

Wpływ czynnika adhezyjnego oraz kapilarnego na nasycenie zdefiniować można jako funkcję podciągu kapilarnego ( $h_{c0}$ ) oraz ssania ( $p_c$ ) [Aubertin et al., 2003]:

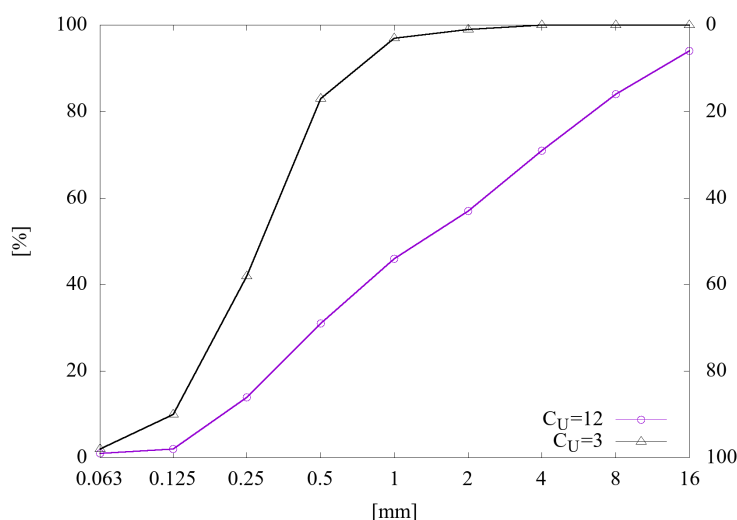
$$S_c = 1 - \left[ \left( \frac{h_{c0}}{p_c} \right)^2 + 1 \right]^m \exp \left[ -m \left( \frac{h_{c0}}{p_c} \right)^2 \right] , \quad (2.56)$$

$$S_a = a_c C_{p_c} \frac{\left( \frac{h_{c0}}{p_{c,n}} \right)^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{1}{3}} \left( \frac{p_c}{p_{c,n}} \right)^{\frac{1}{6}}} , \quad (2.57)$$

$$C_{p_c} = 1 - \frac{\ln \left( 1 + \frac{p_c}{p_{c,r}} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{p_{c,0}}{p_{c,r}} \right)} , \quad (2.58)$$

gdzie  $m$  oraz  $a_c$  to parametry zależące od rodzaju ośrodka porowatego. Dla gruntów granulanych przyjmują one wartości odpowiednio 0.091 oraz 0.013. Natomiast  $p_{c,n}$  oraz  $p_{c,0}$  autorzy [Aubertin et al., 2003] sugerują przyjmować równe 1.0 cm oraz  $10^7$  cm. Rezydualna wartość ssania ( $p_{c,r}$ ) obliczona została według poniższego wzoru:

$$p_{c,r} = 0.86h_{c0}^{1.2} \quad \text{lub} \quad p_{c,r} = \frac{0.42}{(e D_H)^{1.26}} \quad (2.59)$$



Rysunek 2.13: Krzywe uziarnienia dla przykładowych wskaźników różnoziarnistości.



## 2.5 Związki naprężenie-odkształcenie

W większości sytuacji inżynierskich grunt ulega zniszczeniu poprzez przekroczenie naprężeń ścinających. Typowym przykładem jest osunięcie się zbocza wskutek zbyt dużego dociążenia skarpy lub intensywnych opadów deszczu. Klasycznym kryterium wytrzymałości na ścinanie gruntów jest kryterium Coulomba-Mohra. Na jego podstawie zbudowane zostały inne bardziej zaawansowane modele konstytutywne. Dodatkowo występuje ono w wielu rozwiązaniach analitycznych z teorii plastyczności gruntów, co często wykorzystywane jest jako podstawa do weryfikacji problemów związanych z nośnością w programach obliczeniowych.

Pełny opis naprężeń i odkształceń zachodzących w gruntach nienasyconych wymaga użycia zaawansowanych modeli konstytutywnych określających związki między tensorem naprężenia i odkształcenia w ramach teorii sprężysto-plastycznej. Rozbudowane modele sprężysto-plastyczne zawierają dużą liczbę parametrów, które w zależności od skomplikowania modelu mogą być trudne do wyznaczenia. Dlatego w sytuacjach, kiedy zewnętrzne obciążenia gruntu są niewielkie, grunt jest silnie prekonsolidowany, a odkształcenie powodowane jest głównie przez ssanie i zmiany objętościowej zawartości wody, zakłada się że odkształcenie jest liniową funkcją naprężenia. Oznacza to, że rośnie ono liniowo oraz odwracalnie w stosunku do naprężenia. W związku z tym, że zarówno tensor naprężenia jak i odkształcenia mają po 9 składowych, potrzeba tensora czwartego rzędu  $C$  ( $3^4$ ), aby opisać ich wzajemną zależność.  $C$  nazywamy macierzą sztywności, a sprężysty stosunek zachodzący między naprężeniem i odkształceniem zapisujemy jako:

$$\sigma = C\epsilon . \quad (2.60)$$

Biorąc pod uwagę symetrię tensora oraz założenie izotropii, macierz sztywności  $C$  można zredukować ograniczając liczbę zmiennych. Wykorzystując prawo Hooke'a możemy zapisać:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda_0 tr(\epsilon_{ij})\delta_{ij} , \quad (2.61)$$

gdzie  $tr$  oznacza ślad macierzy odkształcenia,  $\delta_{ij}$  to delta Kronecker'a,  $G$  to moduł ścinania, a  $\lambda_0$  to stała Lamé'ego. Liniowa sprężystość opisana równaniem (2.61) dotyczy przypadku, w którym naprężenie przenosi tylko faza stała. W przypadku gruntu nie możemy przyjąć takiego założenia z uwagi na obecność faz ciekłej i gazowej w porach, które oprócz szkieletu również będą przenosiły pewną część naprężenia. W roku 1923 Terzaghi sformułował koncepcję naprężenia efektywnego, bazującą na wyżej wspomnianym założeniu:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} . \quad (2.62)$$

Koncepcja Terzaghi'ego w 1941 r. została kontynuowana przez Biot'a, który w oparciu o założenie swobodnego przepływu wody w porach sformułował koncepcję naprężenia efektywnego, opisującą wpływ ciśnienia wody w gruncie. Całkowitą wartość naprężenia opisują zatem dwa składniki pochodzące od szkieletu gruntowego oraz woda obecna w porach gruntu:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_K p\delta_{ij} . \quad (2.63)$$

W związku z tym, że tylko woda znajdująca się w wzajemnie ze sobą połączonych porach gruntu

może przenosić część naprężeń całkowitych, Biot zaproponował parametr  $\alpha_K$ , będący stosunkiem współczynnika sprężystości objętościowej gruntu  $K_b$  do współczynnika sprężystości szkieletu gruntowego  $K_g$ . Kiedy ośrodek charakteryzuje się dużą porowatością,  $\alpha_K$  przyjmuje wartość równą 1. Natomiast gdy porów jest mało i nie są one wzajemnie połączone  $\alpha_K$  wynosi 0.

$$\alpha_K = 1 - \frac{K_b}{K_g} . \quad (2.64)$$

Podobnie jak w przypadku gruntów nasyconych, zmiany ciśnienia wody w porach gruntu nienasyconego zmieniają stan naprężenia, prowadząc do odkształceń gruntu. Opis takiego zjawiska wymaga sformułowania odpowiednich modeli konstytutywnych definiujących związek między stanem naprężenia i odkształcenia. W warunkach pełnego nasycenia powszechnie przyjmuje się, że stan naprężenia w gruncie jest określony za pomocą naprężenia efektywnego  $\sigma'$  według propozycji Terzaghiego (2.62).

Dla gruntów nienasyconych sformułowano szereg różnych propozycji dotyczących określania naprężenia efektywnego (szczegółowy przegląd, np. w pracach [Nuth i Laloui, 2008, Ossowski i Sikora, 2004]). Koncepcje te można podzielić na dwie podstawowe grupy. Pierwszą tworzą modele rozszerzające zasadę naprężeń efektywnych [Leij et al., 1997] na warunki niepełnego nasycenia. Podejście to zaproponowane zostało m. in. przez Bishopa [Bishop, 1960], według którego naprężenie efektywne można zdefiniować jako:

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}) + \chi(p_a - p_w) \delta_{ij} = \sigma_{ij}^{net} + \chi p_c \delta_{ij} = \sigma_{ij} - p' \delta_{ij} , \quad (2.65)$$

gdzie:  $\chi$  - parametr Bishopa, którego wartości zmieniają się od 1 w gruncie nasyconym do 0 w gruncie suchym,  $\sigma^{net}$  - naprężenie netto:

$$\sigma_{ij}^{net} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} , \quad (2.66)$$

zaś  $p'$  to uśrednione naprężenie w porach gruntu:

$$p' = \chi p_w + (1 - \chi) p_a . \quad (2.67)$$

Wykorzystując tak zdefiniowane naprężenie efektywne, można dostosować powszechnie znane kryterium wytrzymałościowe Coulomba-Mohra do warunków niepełnego nasycenia np. [Ning i Likos, 2004]:

$$\tau_f = c' + [(\sigma_n - p_a) - \chi(p_a - p_w)] \tan(\phi') , \quad (2.68)$$

gdzie:  $\sigma_n$  - naprężenie normalne  $\tau_f$  - graniczna wytrzymałość na ścinanie  $c'$  oraz  $\phi'$  - efektywna spójność i efektywny kąt tarcia wewnętrzznego w klasycznym rozumieniu gruntów nasyconych. Ponieważ ciśnienie powietrza w porach jest na ogół bliskie wartości ciśnienia atmosferycznego ( $p_a = p_{atm} = 0$ ), a ciśnienie wody kapilarnej  $p_w < 0$ , w warunkach niepełnego nasycenia naprężenie efektywne jest większe od naprężenia całkowitego. Zasada ta znajduje swoje odzwierciedlenie w problemach związanych z statecznością skarp, która jest większa dla zboczy wykonanych z gruntu częściowo nasyconego niż suchego, czy całkowicie nasyconego.

Istotnym problemem jest określenie wartości parametru Bishopa  $\chi$ . Przyjmuje się, że jest

on funkcją ssania bądź stopnia wilgotności gruntu. Często proponuje się proste zależności w postaci np. [Lewis i Schrefler, 1998, Lu et al., 2010]:

$$\chi = S_w \text{ lub } \chi = S_{ew} . \quad (2.69)$$

Inna propozycja, zyskująca ostatnio dużą popularność w literaturze, uzależnia  $\chi$  od ssania [Khalili i Khabbaz, 1998] i uwzględnia ciśnienie wejścia powietrza:

$$\chi = \begin{cases} \left(\frac{p_c}{p_e}\right)^{-0.55} & p_c > p_e \\ 1 & p_c \leq p_e \end{cases} , \quad (2.70)$$

Warto zwrócić uwagę, że powyższy wzór (2.69) przypomina wzór Brooksa-Corey'a na zależność  $\theta_{ew}$  lub  $S_{ew}$  od  $p_c$ , z tym, że wykładnik ma tu stałą, uśrednioną wartość, niezależną od rodzaju gruntu. Istnieje zatem koncepcyjne podobieństwo między wzorami (2.69) i (2.70). W każdym przypadku wraz ze wzrostem ssania i towarzyszącym mu zmniejszaniem się wilgotności gruntu następuje zmniejszenie udziału ssania w naprężeniu efektywnym. Lu i Likos [Lu i Likos, 2006] wprowadzili pojęcie „naprężenia ssania” (ang. *suction stress*), oznaczonego  $\sigma_s$  i zdefiniowali naprężenie efektywne następująco:

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}) - \sigma_s , \quad (2.71)$$

$$\sigma_s = -S_{ew} p_c . \quad (2.72)$$

Zakładając  $p_a = 0$  oraz wyrażając  $p_c$  jako funkcję znormalizowanego stopnia nasycenia według formuły van Genuchtena, otrzymano [Lu et al., 2010]:

$$\sigma_s = -\frac{S_{ew}}{\alpha} (S_{ew}^{\frac{1}{n_g}} - 1)^{\frac{1}{n_g}} . \quad (2.73)$$

Alternatywą dla modeli opartych na jednej zmiennej stanu naprężenia (naprężenie efektywne) są modele wykorzystujące dwie zmienne niezależne. Zgodnie z zasadą, że stan naprężenia w gruncie może być zdefiniowany przez dwie z trzech dowolnych zmiennych ( $\sigma$ ,  $p_a$ ,  $p_w$ ) możliwe kombinacje prezentują się następująco [Nuth i Laloui, 2008]:

- $(\sigma - p_a)$  oraz  $(p_a - p_w)$ ,
- $(\sigma - p_w)$  oraz  $(p_a - p_w)$ ,
- $(\sigma - p_a)$  oraz  $(\sigma - p_w)$ .

Najczęściej używanym rozwiązaniem jest wersja pierwsza, która wykorzystuje naprężenie netto  $(\sigma - p_a)$  i ssanie  $(p_a - p_w)$ . Pierwsza para zmiennych opisuje wpływ naprężenia, natomiast druga ma za zadanie uwzględnić inne procesy zachodzące w gruncie. Najczęściej jest to ssanie, siły międzycząsteczkowe, zmiany objętościowe zachodzące w gruncie, czy spadki nośności związane ze wzrostem nasycenia, co można zapisać następująco:

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}) + \mu_1 (p_a - p_w, \dots) \delta_{ij} ; \mu_2 (p_a - p_w, \dots) , \quad (2.74)$$

gdzie  $\mu_1$  i  $\mu_2$  są funkcjami ssania oraz innych wspomnianych wyżej procesów. W zależności od sposobu wyrażania  $\mu_1$  wyróżnia się trzy najbardziej rozpowszechnione modele, w których funkcja uzależniona jest odpowiednio od ssania ( $p_a - p_w$ ), ssania i stopnia nasycenia ( $p_a - p_w, S$ ) lub ma wartość zerową. Ostatni przypadek oznacza, że model reprezentowany jest tylko i wyłącznie przez naprężenie netto. Podejście to uniemożliwia jednak przejście ze stanu nasyconego (naprężenia efektywne) w nienasycony (naprężenia całkowite). Związane jest to z ciśnieniem powietrza, które w stanie nasyconym przyjmuje 0 kPa. Ciśnienie kapilarne jest wówczas równe ujemnemu ciśnieniu wody, a naprężenie netto równa się naprężeniu całkowitemu. Innymi słowy model uwzględniający tylko naprężenie netto nie powinien być używany w gruntach suchych, gdzie ssanie jest na bardzo wysokim poziomie. Problem ten został rozwiązany w modelu Shenga [Sheng et al., 2008].

Zdecydowanie najwięcej modeli konstytutywnych wykorzystuje zależność naprężenia od ssania lub ssania i nasycenia. Wprowadzenie nasycenia jako dodatkowej zmiennej ma za zadanie uwzględnienie zjawiska histerezy i nie wpływa w żaden sposób na dokładniejsze uwzględnienie związku między wzrostem wytrzymałości gruntu podczas wysuszenia. Dlatego druga para zmiennych w większości modeli konstytutywnych uwzględnia głównie ssanie [Sheng et al., 2008], na które wpływ ma kapilarność oraz adsorpcja. Kiedy ośrodek gruntowy jest całkowicie nasycony lub posiada wysoki stopień nasycenia, to definiowanie ssania jako różnicy dwóch ciśnień jest prawidłowe. Jednakże w warunkach suchych lub w przypadku niskich wartości stopnia wilgotności, woda obecna jest w gruncie jedynie w formie cienkiej błonki przywiązanej do szkieletu gruntowego co sprawia, że ciśnienie wody staje się trudne do zdefiniowania. Rozwiązaniem jest wprowadzenie pozornego ciśnienia wody [Sheng et al., 2008]

$$p_w = p_a - p_{ac} , \quad (2.75)$$

gdzie  $p_{ac}$  to potencjał adsorpcyjny. Sformułowane w ten sposób pozorne ciśnienie wody może być zastosowane do obliczeń w całym zakresie nasycenia. W niektórych modelach dla gruntów nienasyconych ssanie traktowane jest jako zmienna zależna lub parametr wzmacniający [Bolzon et al., 1996, Loret i Khalili, 2002]. Jednak w większości modeli konstytutywnych dla gruntów nienasyconych człon odpowiedzialny za ssanie traktowany jest jako zmienna niezależna. Do tej grupy możemy zaliczyć: Fredlunda i Morgensterna [Fredlund et al., 1978], Alonso i in. [Alonso et al., 1990] (*Barcelona Basic Model* - BBM) oraz nowszy model Shenga, Fredlunda i Gensa [Sheng et al., 2008]. Jedną z głównych cech wyróżniających model BBM jest krzywa *LC*, która odpowiada za tempo wzrostu ssania. Kiedy osiągnie ono wartość równą 0, uzyskana krzywa przedstawiać będzie model *Modified Cam Clay*-MCC.

Modele konstytutywne reprezentowane przez dwie pary zmiennych rozwinęły się jako odpowiedź na niedoskonałości wczesnych modeli opartych na pojedynczym naprężeniu efektywnym, co w szczególności przejawiało się w niemożności modelowania zachowania gruntów zapadawych, w których zmniejszanie ssania powodowało znaczne zmniejszenie objętości. Późniejsze prace wykazały jednak, że zjawiska te można opisać za pomocą koncepcji naprężenia efektywnego, pod warunkiem zastosowania modelu sprężysto-plastycznego, w którym powierzchnia plastyczności zmienia się w funkcji ssania.

Jako przykład prostego modelu wykorzystującego dwie zmienne stanu naprężenia można

przytoczyć często wykorzystywane kryterium wytrzymałości Coulomba-Mohra, według propozycji Fredlunda i in. [Fredlund et al., 1978]:

$$\tau_f = c' + (\sigma_n - p_a) \tan(\phi') + (p_a - p_w) \tan(\phi_b) = c' + \sigma_f^{net} \tan(\phi') + p_{c,f} \tan(\phi_b) , \quad (2.76)$$

gdzie  $\phi_b$  jest kątem tarcia wewnętrznego, związanym ze zmianą ssania. Badania wskazują jednak, że  $\phi_b$  jest nieliniowo zależne od stopnia wilgotności gruntu. Natomiast w warunkach pełnego nasycenia  $\phi_b = \phi'$ , wraz z wzrostem ssania (zmniejszaniem nasycenia) kąt  $\phi_b$  maleje. W suchym piasku kąt  $\phi_b = 0$ . Warto zauważyć, że wzór [Lu i Likos, 2006] można sprowadzić do postaci równoważnej z wzorem [Leong i Rahardjo, 1997b], definiując parametr Bishopa jako:

$$\chi = \frac{\tan(\phi_b)}{\phi'} = f(S_r) . \quad (2.77)$$

W ten sposób można wykazać zgodność dwóch różnych koncepcji opisu wytrzymałości gruntów nienasyconych [Ning i Likos, 2004].

## 2.6 Równania przepływu w odkształcalnym ośrodku porowatym

Do pełnego matematycznego opisu trójfazowego ośrodka gruntowego konieczne jest rozwiązanie trzech wzajemnie powiązanych układów równań, są to:

- równania zachowania,
- równania empiryczne,
- zależności konstytutywne.

W skład tych równań wchodzi równania różniczkowe cząstkowe względem przestrzeni i czasu, równania różniczkowe zwyczajne oraz algebraiczne. Podstawowe równania są oparte o zasady zachowania masy, pędu i momentu pędu definiowane dla wszystkich faz ośrodka gruntowego. Parametry materiałowe gruntów określają z kolei równania konstytutywne. Uzupełnieniem obu powyższych zależności są równania empiryczne, które opisują zmianę: wskaźnika porowatości  $e$ , stopnia wilgotności  $S_w$ , względnego współczynnika przepuszczalności  $k_{rw}$  [Ossowski i Sikora, 2004]. Prawa zachowania masy dla poszczególnych faz ośrodka gruntowego prezentują się następująco:

- Prawo zachowania masy dla wody:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \theta_w) + \nabla(\rho_w \theta_w \mathbf{v}_w) = 0 , \quad (2.78)$$

- Prawo zachowania masy dla powietrza:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a \theta_a) + \nabla(\rho_a \theta_a \mathbf{v}_a) = 0 , \quad (2.79)$$

- Prawo zachowania masy dla szkieletu gruntowego:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s \theta_s) + \nabla(\rho_s \theta_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (2.80)$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s(1-n)) + \nabla(\rho_s(1-n)\mathbf{v}_s) = 0. \quad (2.81)$$

Każda z trzech faz ośrodka gruntowego składa się z wielu składników chemicznych, które mogą przenikać z jednej fazy do drugiej. Przykładem jest woda, która zawiera wiele rozpuszczonych substancji, w tym gazów. Liczba faz oraz jej składników, które uwzględnia się w modelu zależy głównie od rozważanego problemu. W wielu problemach inżynierskich, gdzie główną rolę odgrywa przepływ wody, wystarczającym założeniem jest użycie uproszczonego modelu, w którym powietrze i woda są niemieszalne oraz pomijana jest odkształcalność szkieletu gruntowego. Podejście to zostało również zastosowane w niniejszej pracy.

### Przepływ dwufazowy

Główne równania dla przepływu dwufazowego odnoszą się do reprezentatywnego elementu objętościowego REV (ang. *representive elementary volume*). Całkowita zmiana masy płynu  $\alpha$  w środku REV musi być zrównoważona poprzez całkowity strumień wzdłuż krawędzi REV. Zakładając nieruchome krawędzie REV, możemy zapisać:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha S_\alpha n) + \nabla(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0. \quad (2.82)$$

Rozpisując drugi człon równania (2.82) na część odpowiedzialną za szkielet oraz płyny przybierze ono następującą postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha S_\alpha n) + \nabla(\rho_\alpha S_\alpha n \mathbf{v}_{\alpha s}) + \nabla(\rho_\alpha S_\alpha n \mathbf{v}_s) = 0. \quad (2.83)$$

W niniejszej pracy przyjęto założenie, że ośrodek gruntowy jest nieodkształcalny. Zatem dalsza analiza opierać się będzie na równaniu (2.82).

Prędkość każdej z faz w odniesieniu do ośrodka gruntowego opisać można używając rozbudowanej wersji równania Darcy (2.30). Podstawiając równanie Darcy do równania opisującego bilans masy, otrzyma się dwa sprzężone równania różniczkowe:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w S_w n) - \nabla \left[ \frac{\rho_w k_s k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}) \right] = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a S_a n) - \nabla \left[ \frac{\rho_a k_s k_{ra}}{\mu_a} (\nabla p_a - \rho_a \mathbf{g}) \right] = 0. \quad (2.85)$$

Istotnym jest wybór głównych niewiadomych, względem których rozwiązywany jest powyższy układ równań. Najczęściej stosuje się kombinację dwóch ciśnień ( $p_a$  i  $p_w$ ) lub jednego ciśnienia i stopnia nasycenia ( $p_\alpha$  i  $S_\alpha$ ).

Wybieranie głównych niewiadomych w parze  $p_a - p_w$  nie jest zalecane z uwagi na małą uniwersalność i stabilność rozwiązania [Helmig et al., 1997, Szymkiewicz, 2012, Binning, 1992].



W sytuacji, kiedy powietrze znajdujące się w danym obszarze np. wskutek infiltracji opuszcza go całkowicie, w pewnym momencie dyskretna część równania (2.85) będzie równa 0. To ograniczenie powoduje, że formuła ta jest stosunkowo nieprzydatna w problematyce związanej z procesami przepływu oraz transportu w gruntach niejednorodnych. Zdecydowanie bardziej efektywnym rozwiązaniem jest wybór mieszanych głównych niewiadomych. Poniżej równania (2.84) i (2.85), w których głównymi niewiadomymi są  $S_w$  i  $p_w$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho_w(p_w)S_w)n] - \nabla \left[ \frac{\rho_w(p_w)k_s k_{rw}(S_w)}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w(p_w)\mathbf{g}) \right] = 0, \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho_a(p_w, S_w)(1 - S_w)n)] - \nabla \left[ \frac{\rho_a(p_w, S_w)k_s k_{ra}(S_w)}{\mu_a} (\nabla p_w + \nabla p_c(S_w) - \rho_a(p_w, S_w)\mathbf{g}) \right] = 0. \quad (2.87)$$

Powyższy układ równań jest silnie nieliniowy, jednak posiada niewątpliwą zaletę umożliwiającą zastosowanie go w przypadkach, kiedy w rozważanej przestrzeni znajdują się podobszary z gradientem ciśnienia kapilarnego zbliżonym do 0. W związku z tym możemy ich użyć zarówno do analizy gruntów jednorodnych jak i niejednorodnych. Ponadto możemy również zastosować zmienne w następujących kombinacjach:  $S_a - p_w$ ,  $S_w - p_a$ ,  $S_n - p_n$ . Wybór zależy od problemu jakim się zajmujemy. Niniejsza praca dotyczy modelowania przepływu wody i powietrza w ośrodkach porowatych, dlatego w symulacjach numerycznych prezentowanych w niniejszej pracy używane będą główne niewiadome w postaci mieszanej. Szerszy opis problemu wyboru głównych niewiadomych można znaleźć np. w [Helmig et al., 1997, Szymkiewicz, 2012, Lewis i Schrefler, 1998].

## Równanie Richardsa

W porach gruntu znajdującego się w strefie nienasyconej znajdują się dwa płyny: woda i powietrze. W temperaturze  $20^\circ C$  lepkość powietrza jest około 55 razy mniejsza od lepkości wody. Zatem, jeśli względne przepuszczalności obu płynów są do siebie zbliżone, to możemy powiedzieć, że różnica mobilności obu faz jest do niej proporcjonalna. W związku z tym, różnice w ciśnieniu powietrza będą równoważone znacznie szybciej niż w przypadku ciśnienia wody. Ponadto często można założyć, że powietrze znajdujące się w porach gruntu jest bezpośrednio połączone z powietrzem atmosferycznym. Jeśli warunki, jakie rozpatrujemy nie zakładają zmiany ciśnienia powietrza atmosferycznego, to można założyć, że ciśnienie w porach gruntu posiada wartość równą ciśnieniu atmosferycznemu. Powyższe założenia pozwalają z układu wyeliminować równanie przepływu powietrza (2.85), a problem, który należy rozwiązać opisywany jest tylko równaniem fazy ciekłej (2.84). Założenie ciśnienia atmosferycznego równego atmosferycznemu ( $p_a = p_{atm} = 0$ ) spowoduje, że ciśnienie kapilarne będzie opisywane tylko poprzez ciśnienie wody:

$$p_c = p_{atm} - p_w = -p_w. \quad (2.88)$$

W związku z powyższym, nasycenie oraz względna przepuszczalność wody może być zdefiniowana jako funkcja ciśnienia wody. Dla wartości ciśnienia wody które są mniejsze od ciśnienia wejścia

powietrza,  $p_w < -p_e$ , nasycenie wodą oraz przepuszczalność można obliczać korzystając z wielu popularnych modeli np. van Genuchtena, czy Brooks-Corey'a zakładając, że  $p_c = -p_w$ . Dla wartości ciśnienia wody, które są większe od ujemnej wartości ciśnienia wody w porach  $p_c > -p_e$ , nasycenie wody oraz przepuszczalność równe są swoim maksymalnym wartościom. Równanie przepływu wody otrzymuje wówczas postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n S_w(p_w)) - \nabla \left[ \frac{\rho_w(p_w) k_s k_{rw}(p_w)}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w(p_w) \mathbf{g}) \right] = 0. \quad (2.89)$$

Rozpisując pierwszą część równania, otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w S_w n) = S_w n \rho_w \beta_w \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_w n \frac{\partial S_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial t}. \quad (2.90)$$

Zazwyczaj zakłada się, że przestrzenny gradient gęstości wody ( $\nabla(\rho_w v_w) \approx \rho_w \nabla v_w$ ) jest pomijalny, w związku z tym otrzymujemy następującą postać równania:

$$c(p_w) \frac{\partial p_w}{\partial t} - \nabla \left[ \frac{\rho_w(p_w) k_s k_{rw}(p_w)}{\mu_w} (\nabla p_w + \rho_w(p_w) \mathbf{g}) \right] = 0, \quad (2.91)$$

przy czym  $c$  jest współczynnikiem określanym w następujący sposób:

$$c = n \beta_w S_w + n \frac{dS_w}{dp_w} = c_c, \quad (2.92)$$

gdzie  $c_c$  jest parametrem opisującym wpływ ściśliwości. Założenie nieściśliwości jest uzasadnione tylko w przypadku, kiedy przepływ jest rozważany w płytkiej strefie aeracji. Zapis równania Richardsa jest możliwy na trzy różne sposoby. W zależności od rodzaju głównych niewiadomych wyróżnić możemy postać zależną od ciśnienia, nasycenia oraz tzw. mieszana. Najczęściej używa się postaci bazującej na wartości ciśnienia  $p_w$  lub ciśnienia słupa wody  $h_w$  (które często stosuje się w hydrologii), zakładając że:

$$C(h_w) = n \frac{dS_w}{dh_w} = \frac{d\theta_w}{dh_w}. \quad (2.93)$$

Człon pojemnościowy (ang. *storage coefficient*) określa się jako właściwą pojemność wilgotnościową. Forma mieszana wyrażenia zawiera zarówno człon opisujący ciśnienie jak i objętościową zawartość wody. Dodatkowo łatwiej rozwiązać ją numerycznie, ponieważ pozwala wyeliminować ona błędy bilansu masy:

$$\frac{\partial \theta_w(h_w)}{\partial t} - \nabla [K_{sw} k_{rw}(h_w) \nabla (h_w + z)] = 0. \quad (2.94)$$

Równanie bazujące na zawartości wody otrzymuje się poprzez eliminację czlonu odpowiadającego za ciśnienie z równania (2.94):

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \nabla [D(\theta_w) \nabla \theta_w] + K_{sw} k_{rw}(\theta_w) \nabla z = 0. \quad (2.95)$$

Powyższe równanie ma formę nieliniowego równania adwekcji-dyfuzji i jest często wykorzystywane jako podstawa rozwiązań analitycznych i półanalitycznych. Przyczyną jest najłatwiejsza implementacja numeryczna w porównaniu do równań (2.94) i (2.93). Główną wadą tej metody jest brak możliwości obliczeń w strefie całkowicie nasyconej. Dodatkowe problemy powstają, gdy



w analizowanej przestrzeni znajdują się obszary charakteryzujące się różnymi funkcjami retencji.

## 2.7 Warunki początkowe

Rozwiązanie równań przepływu nieustalonego wymaga zdefiniowania stanu początkowego (ang. *initial condition*). Określa się go za pomocą głównych niewiadomych lub innych, na podstawie których można je wyznaczyć. Dla przepływu dwufazowego, w którym głównymi niewiadomymi są  $p_w$  oraz  $S_w$ , warunki początkowe można przedstawić w następujący sposób:

$$p_w(x, y, t = 0) = p_w^{init}(y) , \quad (2.96)$$

$$S_w(x, y, t = 0) = S_w^{init}(y) . \quad (2.97)$$

W warunkach nienasyconych, początkowe nasycenie wody może zostać zastąpione przez początkowe ciśnienie powietrza  $p_a^{init}(x)$ . Jednakże jeśli część obszaru jest już całkowicie nasycona wodą, to użycie ciśnienia fazy gazowej jako głównej niewiadomej nie będzie miało sensu fizycznego. W tej sytuacji możliwy jest opis za pomocą dwóch ciśnień:

$$p_w(x, y, t = 0) = p_w^{init}(y) , \quad (2.98)$$

$$p_a(x, y, t = 0) = p_a^{init}(y) . \quad (2.99)$$

W literaturze np. [Szymkiewicz, 2012] można spotkać opis podstawowych schematów używanych przy dobieraniu warunków początkowych, który można streścić w następujący sposób:

- stałe ciśnienie wody i powietrza:

$$p_w(x, y, t = 0) = p_w^{init} , \quad (2.100)$$

$$p_a(x, y, t = 0) = p_a^{init} , \quad (2.101)$$

$$S_w(x, y, t = 0) = S_w(p_a - p_w) . \quad (2.102)$$

W gruntach jednorodnych stałe ciśnienie oznacza równomierny rozkład nasycenia wodą. W przypadku niejednorodności, saturacja różnić się będzie w zależności od materiału jaki znajdować się będzie na danym obszarze.

- stałe nasycenie wody:

$$S_w(x, y, t = 0) = S_w^{init} . \quad (2.103)$$

Powyższy warunek należy dodatkowo uzupełnić o ciśnienie fazy ciekłej lub gazowej. Dla gruntu całkowicie nasyconego przyjmuje się  $S_w^{init} = 1$  lub  $S_w^{init} = 1 - S_{ra}$  zakładając przy tym równomierny bądź hydrostatyczny rozkład ciśnienia wody w porach.

- hydrostatyczny rozkład ciśnienia wody i powietrza:

$$p_w(x, y, t = 0) = p_w^{ref} + \rho_w g z , \quad (2.104)$$

$$p_a(x, y, t = 0) = p_a^{ref} + \rho_a g z , \quad (2.105)$$

$$S_w(x, y, t = 0) = S_w(p_a - p_w) . \quad (2.106)$$

Warunki (2.104), (2.105), (2.106) opisują układ znajdujący się w równowadze. Używa się ich najczęściej w przypadku, kiedy znamy położenie zwierciadła wody. Ścisłość obu faz jest całkowicie pomijana.

- hydrostatyczny rozkład ciśnienia wody i stałe ciśnienie powietrza:

$$p_w(x, y, t = 0) = p_w^{ref} + \rho_w g z , \quad (2.107)$$

$$p_a(x, y, t = 0) = p_{atm} , \quad (2.108)$$

$$S_w(x, y, t = 0) = S_w(p_a - p_w) . \quad (2.109)$$

Stosunkowo małe zmiany ciśnienia powietrza spowodowane siłami grawitacji są często pomijane. Założenie atmosferycznej wartości ciśnienia fazy gazowej dla powietrza znajdującego się ośrodku porowatym spowoduje, że rozkład nasycenia powyżej zwierciadła wody zależny będzie tylko od ciśnienia wody. Dodatkowo wystąpi również przepływ powietrza, jednak będzie on pomijalny.

## 2.8 Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dostarczają informacji na temat sposobu zachowania się rozwiązania na krawędziach rozważanego obszaru. Rozważmy płaski obszar  $D \subset \mathbb{R}^2$  ograniczony krzywą  $\partial D$ . Dla problemów związanych z przepływem możemy wyróżnić trzy podstawowe rodzaje warunków brzegowych:

- Warunek Dirichleta - określa wartość poszukiwanej funkcji na danym brzegu. W zagadnieniach związanych z przepływem najczęściej opisuje się nim ciśnienie wody lub stopień nasycenia.

$$u|_{\partial D} = s(x, y, t) , \quad (2.110)$$

gdzie  $s$  jest daną funkcją określoną na brzegu  $\partial D$ .

- Warunek Neumanna - określa wartość pochodnej poszukiwanej funkcji w kierunku prostopadłym do danego brzegu.

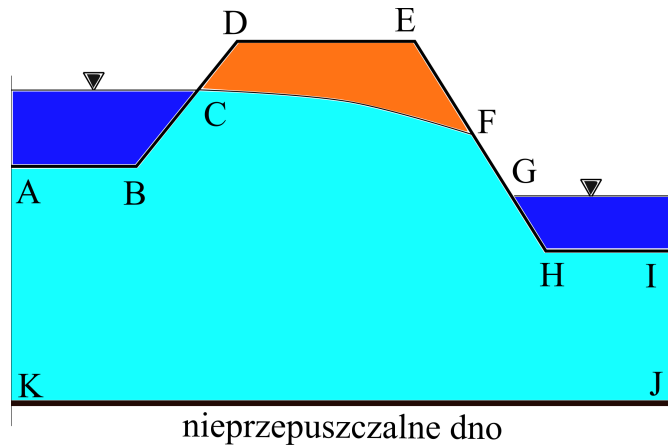
$$\frac{\partial u}{\partial j|_{\partial D}} = s(x, y, t) , \quad (2.111)$$

gdzie  $s$  jest daną funkcją określoną na brzegu  $\partial D$ .

- Warunek Robina - opisuje związek między rozwiązaniem, a jego pochodną. Jest on uogólnieniem warunku Dirichleta i Neumanna.

$$\left( a \frac{\partial u}{\partial j} + bu \right) |_{\partial D} = s(x, y, t) , \quad (2.112)$$

gdzie  $a, b, s$  są danymi funkcjami określonymi na brzegu  $\partial D$ , a  $a^2 + b^2 > 0$ ,  $j$  jest wektorem normalnym.



Rysunek 2.14: Warunki brzegowe dla przepływu dwufazowego w wałach przeciwpowodziowych.

Ogólnie rzecz biorąc, dla każdego brzegu rozważanego obszaru można przypisać różne rodzaje warunków brzegowych. Rozwiązując problem, w którym mamy do czynienia z przepływem ustalonym (równanie eliptyczne), konieczne jest aby w co najmniej jednym punkcie przypisać warunek Dirichleta. W przeciwnym wypadku rozwiązanie nie będzie jednoznacznie określone. Dla przepływu nieustalonego opisywanego równaniem parabolicznym nie ma takiego ograniczenia i warunki brzegowe można implementować używając np. tylko warunków Neumanna. W zagadnieniach przepływu dwufazowego konieczne jest przypisanie warunków brzegowych dla obu faz. Przy czym możliwe jest, aby każdą z nich opisywał inny rodzaj zagadnienia np. powietrze - Dirichlet, woda - Neumann. Poniżej kilka przykładów użycia warunków brzegowych w modelowaniu przepływu w gruntach nienasyconych.

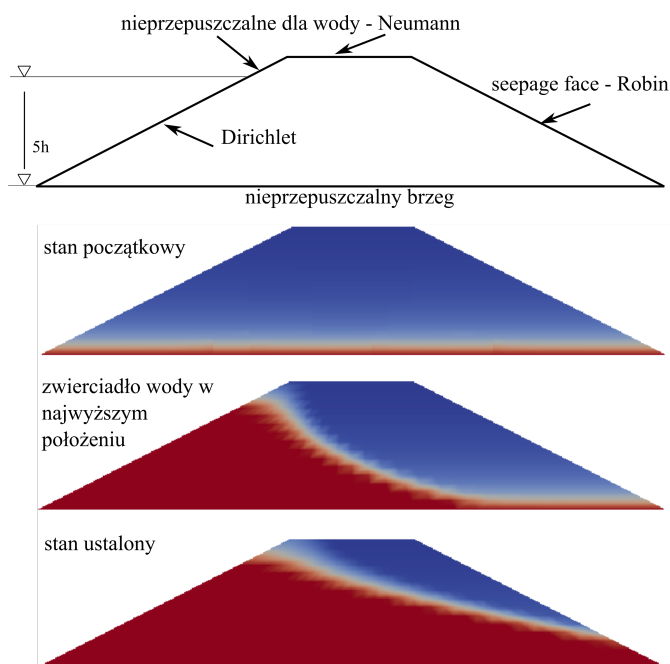
Warunkiem Dirichleta opisuje się konkretną wartość ciśnienia lub nasycenia danej fazy. Najczęściej używamy go w przypadkach, kiedy znamy:

- wartość ciśnienia wody (krawędź obszaru jest jednocześnie poziomem zwierciadła wody gruntowej, zakładamy rozkład hydrostatyczny parcia wody) - odcinki AB, BC, GH, HI na rys. 2.14,
- wartość ciśnienia powietrza (dany brzeg jest nienasycony oraz zachodzi ciągły przepływ między powietrzem w porach, a atmosferycznym) - odcinki CD, DE, EF na rys. 2.14,
- wartość nasycenia (krawędź jest całkowicie nasycona, a ciśnienie powietrza jest trudne do określenia) - odcinki AB, BC, GH, HI na rys. 2.14.

Warunek Neumanna znajduje swoje zastosowanie, gdy dany brzeg traktowany jest jako nieprzepuszczalny (dla jednej lub obu faz) oraz w sytuacji, kiedy podajemy konkretną wartość infiltracji lub wypływu.

Ponadto, w problematyce związanej z modelowaniem przepływu w strefie nienasyconej często używa się warunków brzegowych, których konkretna postać zależna jest od aktualnej wartości rozwiązania. Należą do nich [Radcliffe i Simunek, 2010, Simunek et al., 2006]:

- gradient jednostkowy, drenaż grawitacyjny (ang. *free drainage*) - np. rys. 2.16a,



Rysunek 2.15: Warunki brzegowe oraz proces podnoszenia zwierciadła wody gruntowej w wale przeciwpowodziowym.

- swobodny wypływ (ang. *seepage face*) - odcinek FG na rys. 2.14,
- powierzchnia gruntu w kontakcie z atmosferą (ang. *soil-atmosphere interface*) - odcinki CD, DE, EF na rys. 2.14.

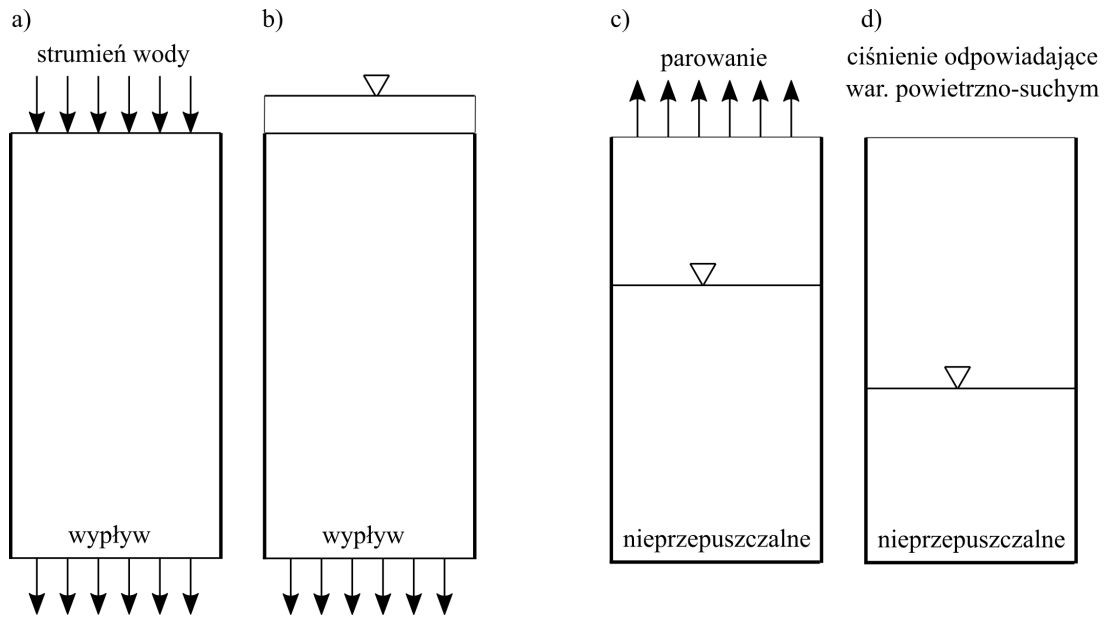
Warunek drenażu grawitacyjnego opisuje przepływ wody przez dolną krawędź profilu gruntowego w kierunku zwierciadła wody gruntowej. Zakłada się wówczas, że gradient ciśnienia wody jest równy 0, a na przepływ ma wpływ tylko przyspieszenie ziemskie:

$$\mathbf{v}_w = \left( \frac{\rho_w}{\mu_w} k_w(S_w) \mathbf{g} \right), \quad (2.113)$$

Warunek swobodnego wypływu stosuje się w przypadku analizy wałów przeciwpowodziowych, zboczy, czy otwartych kolumn. Krawędź traktowana jest jako nieprzepuszczalna dopóki przyległa część gruntu znajduje się w stanie nienasyconym. Gdy ciśnienie w ośrodku porowatym wzrosło do wartości ciśnienia atmosferycznego, woda może w sposób swobodny opuścić obszar nie powodując podwyższonego ciśnienia przy brzegu. Wspomniany efekt można uzyskać używając warunku drugiego rodzaju (Neumanna)  $\mathbf{v}_w = 0$  dla części nienasyconej oraz warunku pierwszego rodzaju (Dirichleta) dla nasyconej  $p_w = 0$ . Określenie przez którą część powierzchni jest w stanie wypływać woda, a która jest nieprzepuszczalna należy wyznaczyć iteracyjnie. Omówioną sytuację prezentuje rys. 2.15.

Modelując proces parowania i infiltracji w gruncie, często konieczne jest aby w trakcie symulacji zmieniać warunek Dirichleta na warunek Neumanna i odwrotnie. W trakcie infiltracji zachodzącej z górnej krawędzi obszaru początkowo przypisujemy pewną wartość przepływu używając warunku Neumanna (rys. 2.16a). Wraz z upływem czasu ciśnienie wody w gruncie wzrasta. W sytuacji kiedy przewodność hydrauliczna jest mniejsza od zadanej wartości prze-

pływ, na powierzchni gruntu ciśnienie osiągnie wartość większą od 0, co spowoduje pojawienie się zwierciadła wody (rys. 2.16b). W tym momencie warunek brzegowy zmienia się na warunek Dirichleta (np.  $p_w = 0$ ) przy założeniu, że nadmiar wody tworzy spływ powierzchniowy. Jeśli szybkość infiltracji spadnie poniżej przewodności hydraulicznej, procedura odwraca się i przywracany jest warunek Neumanna. Z podobnym problemem mamy do czynienia modelując parowanie. Wskutek tego procesu ciśnienie wody na powierzchni spada do pewnego poziomu  $p_{dry}$  (2.8), który określa temperatura i wilgotność względna powietrza (rys. 2.16c). Po jego przekroczeniu warunek brzegowy zmienia się na Dirichleta  $p_w = p_{dry}$  i jest utrzymywany do momentu, w którym wystąpi opad (rys. 2.16d).



Rysunek 2.16: Warunki brzegowe dla przepływu: infiltracja a) stan początkowy b) stan końcowy, parowanie c) stan początkowy d) stan końcowy.

## 2.9 Warunki na styku materiałów o różnych właściwościach

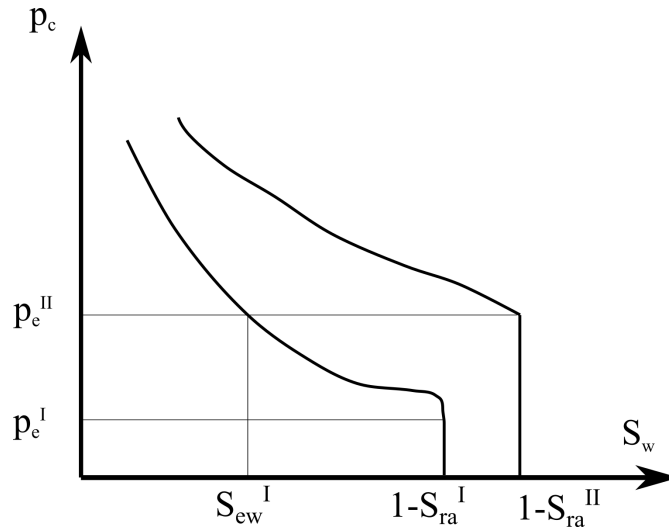
Ośrodek gruntowy składa się z wielu obszarów, które mogą charakteryzować się różnymi parametrami np. porowatość, czy przewodność hydrauliczna. W każdej z tych stref przepływ opisują omówione wcześniej równania (2.84) oraz (2.85). Rozwiązanie uzyskane dla niezależnych obszarów, należy połączyć poprzez zastosowanie właściwych warunków, które zostaną omówione poniżej.

Zakładając nieskończenie cienką powierzchnię graniczną na styku dwóch obszarów o różnych właściwościach materiałowych możemy założyć, że na podstawie zasady zachowania masy dla każdej z faz ośrodka gruntowego spełniona jest poniższa równość:

$$(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha)^I \mathbf{j}_\Gamma = (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha)^{II} \mathbf{j}_\Gamma, \quad (2.114)$$

gdzie  $\mathbf{j}_\Gamma$  jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni  $\Gamma$  znajdującej się między materiałem  $I$  i  $II$ .

Kolejny warunek można wyprowadzić korzystając z zasady zachowania momentu. Na jej



Rysunek 2.17: Warunki na styku dwóch różnych materiałów [Szymkiewicz, 2012].

podstawie zakładamy ciągłość ciśnienia kapilarnego oraz płynów na granicy faz:

$$p_w^I = p_w^I, \quad (2.115)$$

$$p_a^I = p_a^I, \quad (2.116)$$

$$p_c^I = p_c^I. \quad (2.117)$$

Należy zwrócić uwagę, że warunek ciągłości ciśnienia kapilarnego (2.117) zakłada brak ciągłości stopnia nasycenia wodą oraz powietrzem. Wyjątkiem jest sytuacja, w której oba materiały charakteryzują się tą samą krzywą retencji.

Założmy, że nasycenie na jednej stronie powierzchni granicznej ( $S_w^{II}$ ) jest znane, wartość po drugiej ( $S_w^I$ ) stronie można wówczas obliczyć na podstawie warunku:

$$S_w^I = S_w^I(p_c^I(S_w^{II})). \quad (2.118)$$

Powyższe warunki są poprawne jeśli każda z faz po obu stronach powierzchni granicznej jest ciągła w przestrzeni porów. Ze szczególnym przypadkiem mamy do czynienia, gdy jeden z materiałów charakteryzuje się znaczną wartością ciśnienia wejścia powietrza. Osiągnięcie  $p_e^{II}$  oznacza, że w ośrodku porowatym powietrze nie jest już ciągłe, a wartość ciśnienia kapilarnego utrzymuje się na minimalnym poziomie. Po drugiej stronie powierzchni granicznej, faza gazowa może przyjmować zdecydowanie mniejsze wartości, a nawet osiągać 0, jeśli  $p_e^I$ . Stan w jakim znajduje się rozważany układ może być zatem określony przez ciśnienie kapilarne  $p_c^I$  lub odpowiadające mu nasycenie  $S_w^I$ .

Z drugiej strony, stan w jakim znajduje się materiał nr 1 nie może być jednoznacznie zdefiniowany poprzez nasycenie lub ciśnienie kapilarne w materiale nr 2. W tej sytuacji należy zastosować rozszerzony warunek [De Neef i Molenaar, 1997]:

$$\begin{cases} p_c^I(S_w^I) = p_c^{II}(S_w^{II}) & \text{jeśli } S_w^I \geq S_{cw}^I \\ S_w^{II} = 1 - S_{ra}^{II} & \text{jeśli } S_w^I \leq S_{cw}^I \end{cases}, \quad (2.119)$$

gdzie próg nasycenia po lewej stronie powierzchni granicznej  $S_{cw}^I$  odpowiada wartości ciśnienia wejścia powietrza materiału po prawej stronie  $S_{cw} = S_w^I(p_e^{II})$ .

W równaniu Richardsa warunki na granicy materiałów definiujemy tylko dla wody. Uwzględniają one ciągłość płynu oraz ciśnienia. Natomiast nasycenie wodą jako funkcja ciśnienia nie jest ciągle wzdłuż powierzchni granicznej.

## 3 Rozwiązanie numeryczne

### 3.1 Podstawowe właściwości równań przepływu

Równania przepływu opisane w rozdziale 2 są równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego. Wprowadzając za iloczyn  $\rho_\alpha \phi S_\alpha$  wartość  $M_\alpha$ , oznaczającą masę danej fazy na jednostkę objętości gruntu, możemy je zapisać w postaci:

$$\frac{\partial M_\alpha}{\partial t} + \nabla(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $\mathbf{v}_\alpha$  prędkość filtracji, opisana formułą Darcy:

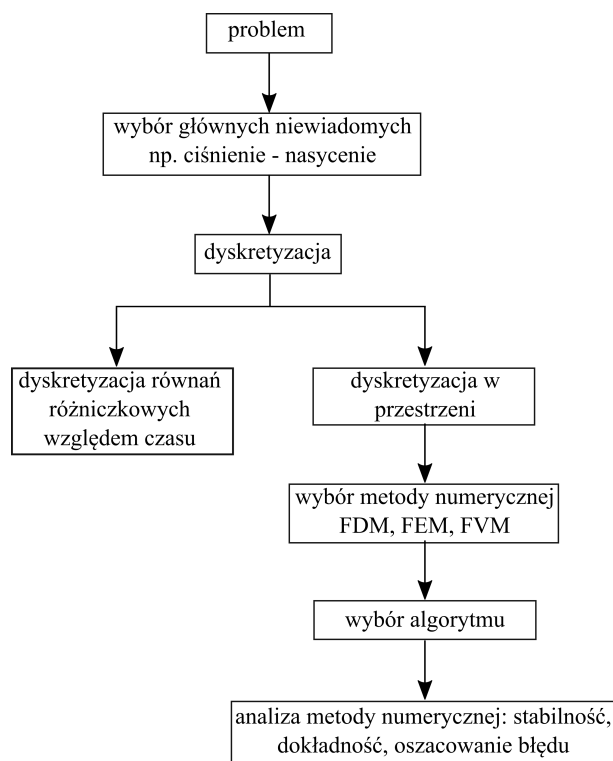
$$\mathbf{v}_\alpha = -\frac{\mathbf{k}_\alpha}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}). \quad (3.2)$$

Analityczne rozwiązanie modelu dwufazowego lub równania Richardsa z uwagi na dużą nieliniowość możliwe jest jedynie dla kilku prostych problemów brzegowych. W związku z czym najczęściej konieczne jest użycie metod komputerowych. Rozwiązanie numeryczne nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, opisujących procesy nieustalone odbywa się w kilku etapach. Najważniejsze z nich zostaną omówione poniżej [Szymkiewicz, 2012]:

- Dyskretyzacja obszaru. Najczęściej wykonywana za pomocą metody elementów, różnic, bądź objętości skończonych. Każda z nich opiera się na definicji siatki węzłów, w których poszukujemy wartości zmiennych stanu. Dyskretyzując przestrzeń sprowadzamy równanie różniczkowe cząstkowe do układu równań różniczkowych zwyczajnych, zawierających poszukiwane wartości węzłowe oraz ich pochodne względem czasu.
- Dyskretyzacja w czasie. Otrzymane równania różniczkowe muszą być całkowane w określonym przedziale czasowym, który dzielony jest na tzw. kroki czasowe. Rozwiązanie w kolejnych krokach można uzyskać używając metod jawnych lub niejawnych. Ze względu na stabilność obliczeń, częściej wykorzystuje się metody niejawne, które polegają na poszukiwaniu wartości funkcji na podstawie nieznanymi w danym kroku wartości. W ostatnich latach powraca się jednak również do metod jawnych np. [Gómez-Navarro et al., 2007, Anagnostopoulos i Burlando, 2012, Michalski, 2016].
- Linearyzacja. W związku, z tym że równania otrzymywane w każdym kroku obliczeniowym są nieliniowe, konieczne do ich rozwiązania jest użycie metod iteracyjnych. Najpierw szacuje się wartość początkową niewiadomej, a następnie wykonywana jest sekwencja kolejnych przybliżeń, aż do momentu uzyskania satysfakcjonującego wyniku. Najczęściej w tym przypadku używa się metody Newtona lub Picarda.
- Rozwiązanie układu równań liniowych. Dla każdej nieliniowej iteracji rozwiązuje się szereg równań liniowych, aby obliczyć kolejne przybliżenia szukanych wartości. W zależności od rozważanego problemu wyniki można otrzymać bezpośrednio lub iteracyjnie.

Przegląd metod numerycznych stosowanych do obliczania przepływu w ośrodku porowatym można znaleźć np. w [Chen et al., 2006, Helmig et al., 1997, Szymkiewicz, 2012]. Na





Rysunek 3.1: Proces modelowania numerycznego [Helmig et al., 1997].

potrzeby niniejszej pracy symulacje wykonywane były za pomocą kilku programów numerycznych: VS2DTI, DuMu<sup>x</sup>, FlexPDE oraz autorskiego programu Promotora. Opis tych oraz innych programów służących do modelowania przepływu można znaleźć w rozdziale 3.4.

Najważniejszą z cech jaką powinien posiadać model numeryczny jest zbieżność, która dla równań nieliniowych jest bardzo trudna do udowodnienia. O rozwiązaniu możemy powiedzieć, że jest zbieżne jeśli otrzymywane przybliżenie uzyskiwane przy zwiększaniu ilości węzłów oraz kroków czasowych prowadzi do tego samego wyniku. Jedną z najczęstszych metod sprawdzania zbieżności zgodnie z definicją, jest tworzenie tych samych modeli numerycznych (warunki brzegowe i początkowe bez zmian) jednocześnie zagęszczając siatkę węzłów. W przypadku rozwiązania zbieżnego model powinien dawać te same wyniki dla różnych dyskretyzacji.

Używając metod numerycznych możemy spotkać się z wieloma problemami, takimi jak: dyfuzja, dyssypacja oraz dyspersja numeryczna, czy brak stabilności. Ich wystąpienie może doprowadzić do sytuacji, w której interpretowane wyniki są jedynie efektem błędów numerycznych. Numeryczna dyssypacja może powodować nadmierne wygładzenie wyników, natomiast błąd dyspersji objawia się przez oscylacje o charakterze нефizycznym. W modelu dwufazowym wystąpienie dyfuzji związane jest z siłami kapilarnymi. Natomiast adwekcja zazwyczaj wywołwana jest przez grawitację oraz siły lepkości, które z uwagi na znaczną różnicę wartości między fazami wodną a powietrzną są mniej istotne w odniesieniu do błędu numerycznego. W modelu Richardsa w związku z pominięciem fazy gazowej, rozważa się tylko wpływ grawitacji oraz sił kapilarnych. Więcej na temat problemów związanych z pojawianiem się dyssypacji, dyspersji oraz dyfuzji numerycznej można znaleźć w [Kalinowska, 2007, Szymkiewicz et al., 2012].

Kolejną istotną cechą jaką powinno posiadać rozwiązanie numeryczne jest stabilność. Dane

rozwiązanie jest stabilne, jeśli nie jest wrażliwe na zaburzenia powstające w trakcie obliczania np. niefizyczne warunki początkowe. Innymi słowy w trakcie rozwiązywania nie występuje narastanie błędów wraz z każdym kolejnym krokiem czasowym. Stabilność odnosi się szczególnie do metody dyskretyzacji w czasie, która może być jawna lub niejawna. W metodzie jawnej wartości głównych niewiadomych dla dowolnego węzła obliczane są na podstawie wyników we wcześniejszym kroku czasowym. W niejawnej, zamiast wykonywania podstawień z poprzednich kroków czasowych, rozwiązuje się układ równań nieliniowych. Metoda niejawna jest tylko warunkowo stabilna, ponieważ długość kroku czasowego musi być ściśle określona tzn. mniejsza od określonej wartości granicznej. Dla niektórych przypadków schemat niejawny jest bezwarunkowo zbieżny bez względu na długość kroku czasowego. Mimo tego, występowanie silnie nieliniowych związków może prowadzić do numerycznych niestabilności, nawet jeśli dyskretyzacja dla równań liniowych jest bezwarunkowo stabilna [Abbott i Basco, 1989].

### 3.2 Dyskretyzacja przestrzenna

W rozwiązaniu przedstawionym w niniejszej rozprawie doktorskiej została zastosowana dyskretyzacja czasowo-przestrzenna znana inaczej jako metoda linii. Polega ona na dyskretyzacji przestrzennej danego równania, która prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych na siatce przestrzennej, który można całkować względem czasu za pomocą dostępnych metod numerycznych. Zapis ten jest częściowo dyskretny i pozwala na porównanie różnych metod dyskretyzacji przestrzennej. W związku ze stałą liczbą węzłów oraz niezmiennością ich położenia, założona zostanie stała siatka dyskretyzacji przestrzennej.

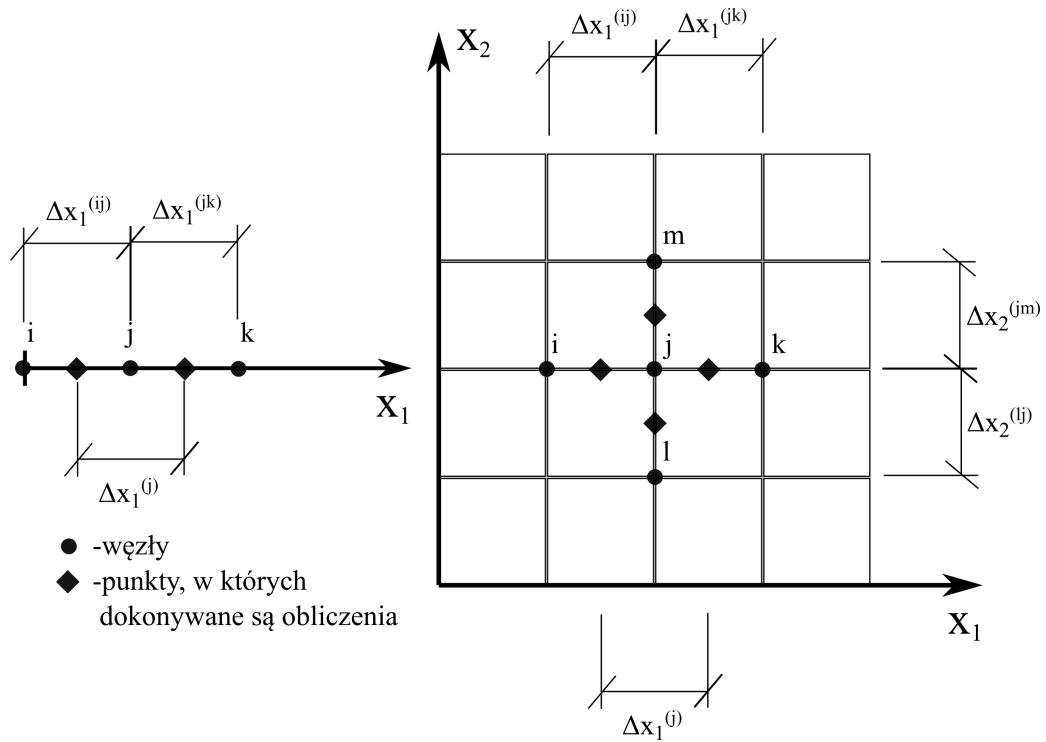
#### Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych stosowana jest najczęściej do obliczania równań przepływu zapisanych w formie różniczkowej. Siatkę numeryczną tworzą linie, które definiowane są tak, aby były równoległe do osi układu współrzędnych. Węzły natomiast tworzone są na przecięciu tychże linii (rys. 3.2). W związku z tym metoda używana jest najczęściej do problemów jednowymiarowych, dwuwymiarowych oraz trójwymiarowych posiadających prostokątną (prostokątną) geometrię.

Technika metody różnic skończonych opiera się na przybliżeniach, w których zastępuje się równanie różniczkowe przez równania różnic skończonych, które obejmują nieznaną wartość funkcji z sąsiednich węzłów. Rozwiązanie problemu za pomocą różnic skończonych sprowadza się do trzech ogólnych kroków:

- podzielenie obszaru na siatkę węzłów,
- przybliżenie równania różniczkowego przez równoważne równanie różnicowe, uzależniając zmienną w konkretnym punkcie obszaru od jej wartości w punktach leżących w sąsiedztwie,
- rozwiązanie równań dyskretnych dla określonych warunków brzegowych i początkowych.

Największymi zaletami metody różnic skończonych są: łatwa konstrukcja siatki i zagęszczenie, które sprowadza się do połowienia siatki podstawowej, proste do implementacji wzory oraz



Rysunek 3.2: Siatka numeryczna dla metody różnic skończonych.

szybka zbieżność. Niestety poprzez sposób w jaki kreślona jest siatka, często występują problemy z dopasowaniem do obszaru na jakim rozpatrujemy zagadnienie. Czas obliczeń często jest wydłużony z uwagi na bardzo dużą liczbę węzłów, spowodowaną koniecznością równomiernego podziału lub zagęszczenia, które musimy wykonać, jeśli chcemy poprawić dokładność obliczeń.

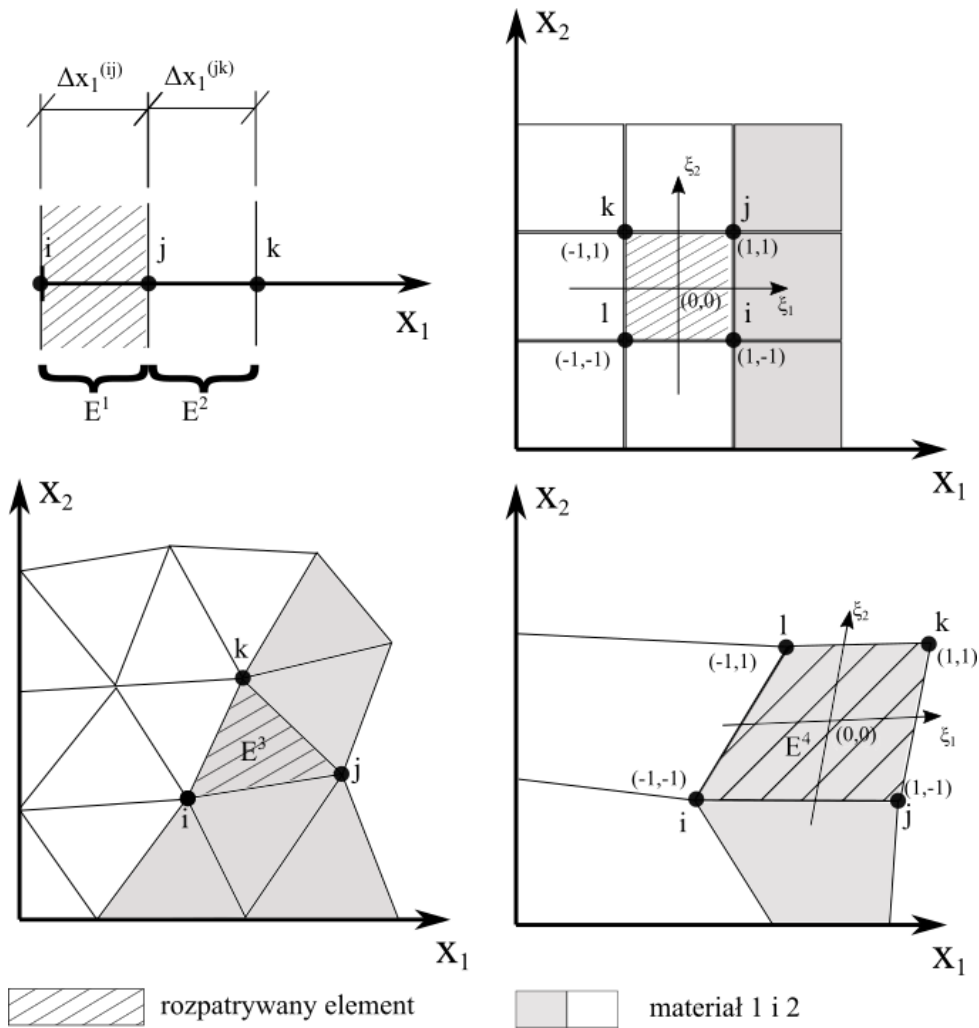
Analizując problem jednowymiarowy przedstawiony na rys. 3.2, objętościową wartość przepływu dla danej fazy pomiędzy węzłami  $ij$  i  $jk$  można obliczyć w połowie odległości między nimi:

$$v_{\alpha}^{(ij)} = -\frac{k_s k_{r\alpha}^{(ij)}}{\mu_{\alpha}} \left( \frac{p_{\alpha}^{(j)} - p_{\alpha}^{(i)}}{\Delta x^{(ij)}} - \rho_{\alpha}^{(ij)} g \xi \right), \quad (3.3)$$

$$v_{\alpha}^{(jk)} = -\frac{k_s k_{r\alpha}^{(jk)}}{\mu_{\alpha}} \left( \frac{p_{\alpha}^{(k)} - p_{\alpha}^{(j)}}{\Delta x^{(jk)}} - \rho_{\alpha}^{(jk)} g \xi \right), \quad (3.4)$$

gdzie:  $p_{\alpha}^i$  odpowiednio to wartość ciśnienia w obliczanym węźle,  $\Delta x^{(ij)}$  to odległość między węzłami,  $k_{r\alpha}^{(ij)}$  to średnia wartość przepuszczalności względnej,  $g$  - grawitacja, a  $\xi$  jest cosinusem kąta między osią  $x$  i wektorem grawitacji. Dla przepływu poziomego  $\xi = 0$ , dla pionowego  $\xi = 1$ . Współczynnik ten uwzględnia również kierunek przepływu, który staje się ujemny jeśli przepływ odbywa się w górę.

Najczęściej różnice między gęstościami węzłowymi poszczególnych faz są niewielkie, w takich przypadkach  $\rho_{\alpha}^{(ij)}$  oblicza się jako średnią arytmetyczną. Przepuszczalność względną  $k_{r\alpha}^{(ij)}$  wyznacza się również za pomocą średniej arytmetycznej lub schematów "pod prąd" (ang. *upstream / upwind*). Więcej na ten temat można znaleźć w [Szymkiewicz, 2012].



Rysunek 3.3: Przykłady siatek numerycznych dla metody elementów skończonych.

### Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych jest jedną z najczęściej używanych metod dyskretyzacji przestrzennej dla problemów inżynierskich. Jej uniwersalność polega na łatwości modelowania i dyskretyzacji różnych, nawet bardzo skomplikowanych geometrycznie obszarów. Podział każdego z nich wykonywany jest na tzw. elementy skończone, z których każdy może charakteryzować się różnymi właściwościami materiałowymi. Elementy są ze sobą połączone w skończonej liczbie punktów, które znajdują się na ich obwodzie. Kształt elementów dobiera się w taki sposób, aby funkcje aproksymujące rozwiązanie były jak najprostsze. Przykładowe typy elementów znajdują się na rysunku 3.3.

Wartości funkcji poszukujemy w węzłach leżących na wierzchołkach elementów. Jeśli wymagany jest wyższy rząd aproksymacji, tworzymy dodatkowe węzły na ich krawędziach i środkach. Szukana funkcja  $u(x, t)$  jest przybliżana jako:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{N_n} u^{(i)}(t) \Psi^{(i)}(x), \quad (3.5)$$

gdzie  $N_n$  jest liczbą węzłów w rozważanym obszarze,  $u^{(i)}(t)$  to wartość szukanej funkcji (argument  $t$  mówi, że zależna jest ona do czasu), a  $\Psi^{(i)}$  jest zbiorem funkcji kształtu. Zostały one wprowadzone, aby wyznaczyć wielkości, które nie znajdują się na wierzchołkach elementów. Ponadto zależą one od problemu jakim się zajmujemy oraz kształtu zastosowanych elementów skończonych. Przybliżenie szukanej funkcji wewnątrz elementu za pomocą funkcji kształtu, możemy zapisać jako:

$$u_e(x, t) = \sum_{i \in N_{elem}} u^{(i)}(t) \Psi_e^{(i)}(x), \quad (3.6)$$

gdzie  $N_{elem}$  określa zbiór węzłów danego elementu skończonego. Podstawowe typy funkcji kształtu dla różnych rodzajów elementów przedstawione zostały poniżej. Dla jednowymiarowego liniowego elementu  $E_1$  znajdującego się między węzłami  $i$  oraz  $j$  możemy zapisać:

$$\Psi_e^{(i)}(x) = \frac{x^{(j)} - x}{\Delta x^{(ij)}}, \quad (3.7)$$

$$\Psi_e^{(j)}(x) = \frac{x - x^{(i)}}{\Delta x^{(ij)}}. \quad (3.8)$$

Dla elementów trójkątnych  $E_3$  opisanych na węzłach  $i, j, k$  funkcje kształtu prezentują się następująco:

$$\Psi_e^{(i)}(x) = \frac{1}{2 |E^{(3)}|} \left[ (x_1^{(j)} x_2^{(k)} - x_1^{(k)} x_2^{(j)}) + (x_2^{(j)} - x_2^{(k)}) x_1 + (x_1^{(k)} - x_1^{(j)}) x_2 \right], \quad (3.9)$$

$$\Psi_e^{(j)}(x) = \frac{1}{2 |E^{(3)}|} \left[ (x_1^{(k)} x_2^{(i)} - x_1^{(i)} x_2^{(k)}) + (x_2^{(k)} - x_2^{(i)}) x_1 + (x_1^{(i)} - x_1^{(k)}) x_2 \right], \quad (3.10)$$

$$\Psi_e^{(k)}(x) = \frac{1}{2 |E^{(3)}|} \left[ (x_1^{(i)} x_2^{(j)} - x_1^{(j)} x_2^{(i)}) + (x_2^{(i)} - x_2^{(j)}) x_1 + (x_1^{(j)} - x_1^{(i)}) x_2 \right], \quad (3.11)$$

gdzie  $|E^{(3)}|$  jest powierzchnią elementu.

Definicja funkcji kształtu dla elementów czworokątnych  $E^{(4)}$  różni się od wcześniejszych, ponieważ  $\Psi_e^{(i)}$  uzależnia się od dwóch lokalnych współrzędnych  $\xi_1$  i  $\xi_2$ :

$$u_e(x, t) = \sum_{i \in N_{elem}} u^{(i)}(t) \Psi_e^{(i)}(\xi_1, \xi_2). \quad (3.12)$$

Dla najniższego stopnia aproksymacji, możliwe jest użycie liniowych funkcji kształtu jak poniżej:

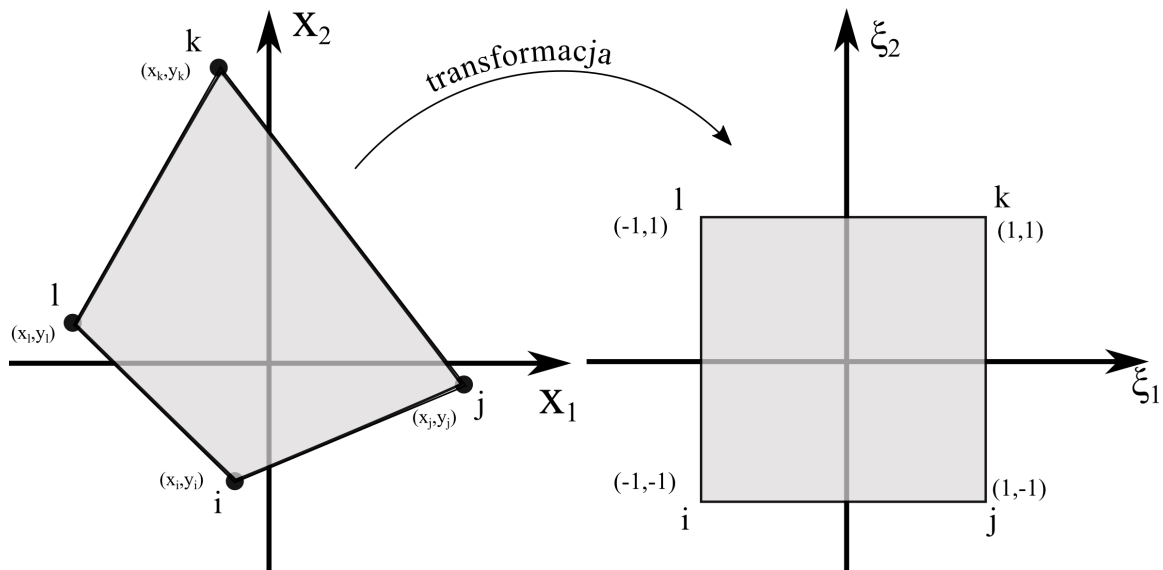
$$\Psi_e^{(i)} = \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 - \xi_2), \quad (3.13)$$

$$\Psi_e^{(j)} = \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 - \xi_2), \quad (3.14)$$

$$\Psi_e^{(k)} = \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 + \xi_2), \quad (3.15)$$

$$\Psi_e^{(l)} = \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 + \xi_2), \quad (3.16)$$

gdzie węzły  $i, j, k, l$  są rozmieszczone w odniesieniu do lokalnych osi układu współrzędnych  $\xi_1$  i  $\xi_2$ . Związek między współrzędnymi lokalnymi  $\xi$  a globalnymi  $x$  można otrzymać wykorzy-



Rysunek 3.4: Transformacja z układu globalnego do lokalnego.

stując podejście izoparametryczne. Zakłada się, że globalne współrzędne dowolnego punktu w rozważanym obszarze można wyrazić za pomocą tych samych funkcji kształtu jak dla szukanej funkcji:

$$x_1^{(e)}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i \in N_{elem}} x_1^{(i)} \Psi_e^{(i)}(\xi_1, \xi_2), \quad (3.17)$$

$$x_2^{(e)}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i \in N_{elem}} x_2^{(i)} \Psi_e^{(i)}(\xi_1, \xi_2). \quad (3.18)$$

Transformację z układu globalnego do lokalnego możemy zapisać:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial \xi_2} d\xi_2 \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial y}{\partial \xi_2} d\xi_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Związek między gradientami funkcji kształtu w odniesieniu do lokalnego układu współrzędnych może zostać zapisany jako:

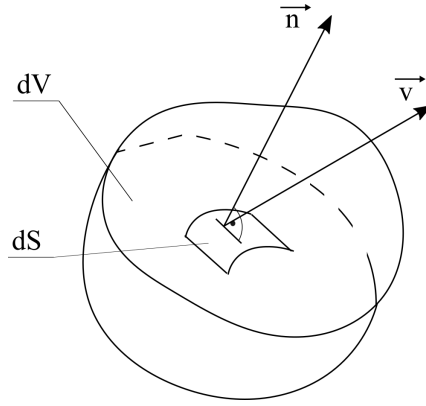
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = J_e \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = J_e^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \Psi_e^{(i)}}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$J_e$  jest jacobianem danego elementu, który po przekształceniu można zapisać:

$$J_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

### Metoda objętości skończonych - punkty środkowe

Metoda objętości skończonych polega na podziale rozważanego obszaru na tzw. objętości kontrolne (ang. *control volume* - CV). Każda z analizowanych objętości  $V$  jest otoczona zamkniętą



Rysunek 3.5: Schemat objętości skończonej [Sobieski, 2016].

powierzchnią  $S$ - rys. 3.5. Kształt elementu kontrolnego może być dowolny, co sprawia że metoda jest powszechnie używana, zwłaszcza w mechanice płynów. W literaturze możemy znaleźć szereg wariantów różniących się definiowaniem objętości skończonych oraz sposobami przybliżania wartości przepływu na krawędziach. Najbardziej rozpowszechnione są metody ang. *cell-centered* oraz ang. *vertex-centered*. W literaturze pierwszą z nich tłumaczy się jako metodę punktów środkowych, natomiast druga nie posiada polskiego odpowiednika, dlatego na potrzeby niniejszej pracy definiowana będzie jako metoda punktów węzłowych. W metodzie punktów środkowych każda objętość posiada jeden węzeł obliczeniowy znajdujący w jego centrum. Schemat dyskretyzacji opiera się na całkowitej postaci równania zastosowanej do objętości skończonej  $V^{(j)}$ , co można przedstawić w następujący sposób:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^{(j)}} M_{\alpha} dV^{(j)} + \int_{V^{(j)}} (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{n}_V^{(j)}) d\partial V^{(j)} = 0, \quad (3.22)$$

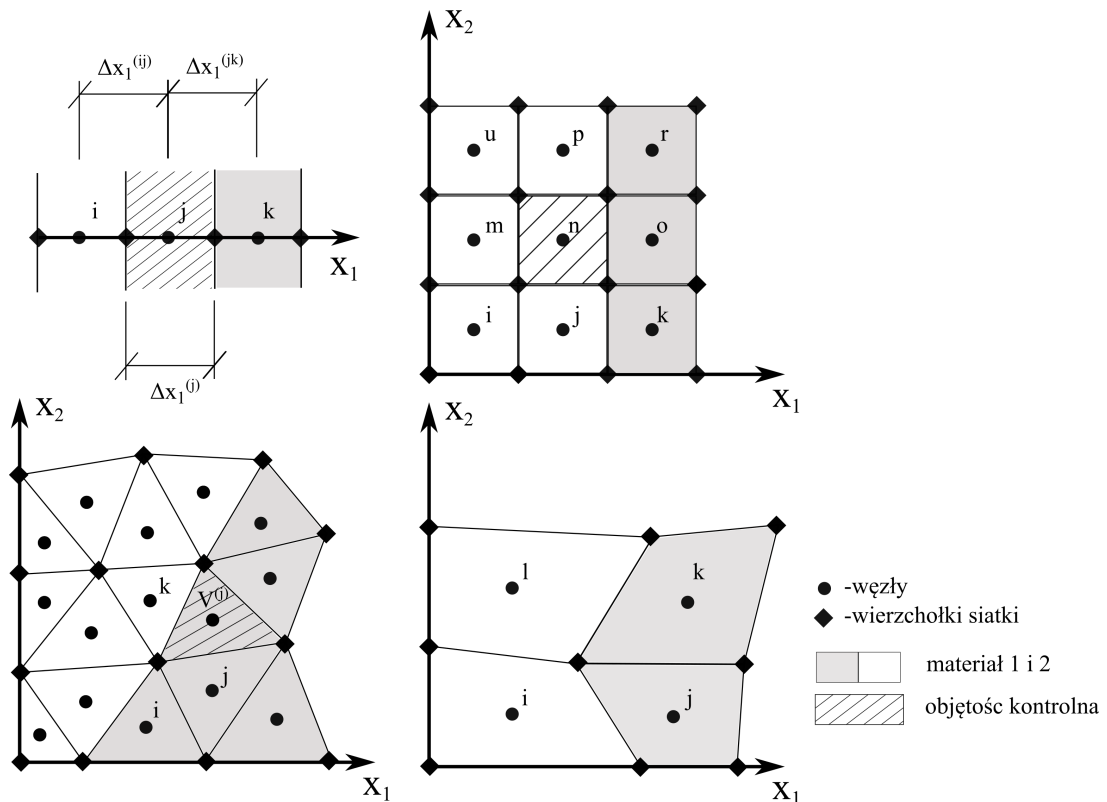
gdzie  $\partial V^{(j)}$  oznacza granicę objętości  $V^{(j)}$ , a  $\mathbf{n}_V^{(j)}$  to jednostkowy wektor normalny do  $\partial V^{(j)}$  i skierowany na zewnątrz. Zatem równanie (3.22) zapisać można dla każdej z objętości należących do rozważanego obszaru. Zakładając, że średnia wartość na jednostkę masy fazy ciekłej  $M_{\alpha}$  w objętości skończonej odpowiada wartości węzłowej  $M_{\alpha}^{(j)}$ , lewą stronę równania (3.22) możemy wyrazić jako:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^{(j)}} M_{\alpha} dV^{(j)} = |V^{(j)}| \frac{dM_{\alpha}^{(j)}}{dt}. \quad (3.23)$$

Natomiast prawą część równania (3.22), odpowiadającą za masę płynu, wyrazić można jako sumę całek na granicy danych objętości:

$$\int_{V^{(j)}} (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{n}_V^{(j)}) d\partial V^{(j)} = \sum_{F \in \partial V^{(j)}} \int_{F^{(n)}} (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{n}_V^{(j)}), \quad (3.24)$$

gdzie  $|V^{(j)}|$  jest objętością, powierzchnią lub długością w zależności od przestrzeni rozważanej



Rysunek 3.6: Siatki numeryczne stosowane dla punktów środkowych w metodzie objętości skończonych [Szymkiewicz, 2012].

w danym problemie.  $F$  to krawędzie, które należą do objętości  $V^{(j)}$ . Przepływ na każdej z krawędzi jest przybliżany za pomocą wzorów algebraicznych obejmujących wartości potencjału płynu z danej objętości skończonej  $V^{(j)}$  oraz innych do niej przyległych. Uzyskana wartość jest używana ze znakiem przeciwnym w obliczaniu przepływu dla objętości skończonych posiadających wspólną krawędź. W związku z tym, w rozwiązaniu nie pojawiają się lokalne różnice w bilansie masy.

W metodzie punktów środkowych każda z objętości skończonych jest również kontrolnym elementem objętościowym, posiadającym węzeł w swoim centrum i charakteryzującym się jednorodnością materiału. Oznacza to, że jeśli w rozważanym obszarze mamy do czynienia z dwoma różnymi materiałami, to granica między nimi będzie również granicą pomiędzy przyległymi do siebie objętościami skończonymi. Podejście to najczęściej stosowane jest do rozwiązywania problemów jedno lub dwuwymiarowych o regularnym obszarze. W takich przypadkach przepływ na krawędzi  $F^{(ij)}$  pomiędzy objętościowymi kontrolnymi  $V^{(i)}$  oraz  $V^{(j)}$  3.6, możemy obliczyć używając następującego równania:

$$\int_{F^{(ij)}} (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{n}_V^{(j)}) dF = - |F^{(ij)}| \frac{\rho_\alpha k_s k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \left( \frac{p_\alpha^{(j)} - p_\alpha^{(i)}}{\Delta x^{(ij)}} - \rho_\alpha g \xi \right), \quad (3.25)$$

gdzie  $|F^{(ij)}|$  to długość krawędzi między elementami. Istotną różnicą między metodą objętości skończonych a różnic skończonych jest implementacja warunków brzegowych. Warunek brze-



gowy Neumanna definiujemy jako określoną wartość przepływu przez krawędź odpowiedniego elementu. W przypadku warunku brzegowego Dirichleta, przepływ na krawędzi jest przybliżany za pomocą wartości ciśnienia na krawędzi oraz w punktach środkowych elementu. Sytuacja komplikuje się, kiedy rozważamy przepływ dwufazowy, gdzie jedną z faz opisuje warunek Dirichleta, a drugą Neumanna. Przykładem może być chociażby modelowanie podnoszenia zwierciadła wody w wale przeciwpowodziowym, kiedy fazę ciekłą na skarpie odwodnej opisujemy warunkiem Dirichleta, a fazę gazową z uwagi na stałe ciśnienie warunkiem Neumanna. Wartość przepływu powietrza jesteśmy w stanie obliczyć na podstawie ciśnienia między wartością na krawędzi a środkiem elementu. Natomiast problemem jest kalkulacja przepuszczalności, która zależy od ciśnienia kapilarnego, które nie jest znane z uwagi na dobór niewiadomych (nieznana wartość ciśnienia wody).

Metoda elementów objętościowych, podobnie jak elementów skończonych, pozwala na uwzględnienie niejednorodności w gruncie, poprzez założenie różnych cech materiałowych dla odpowiednich komórek. Kiedy sąsiednie elementy posiadają inne parametry, oprócz przepuszczalności względnej należy również uśrednić przepuszczalność całkowitą:

$$k_{\alpha} = k_s k_{r\alpha} . \quad (3.26)$$

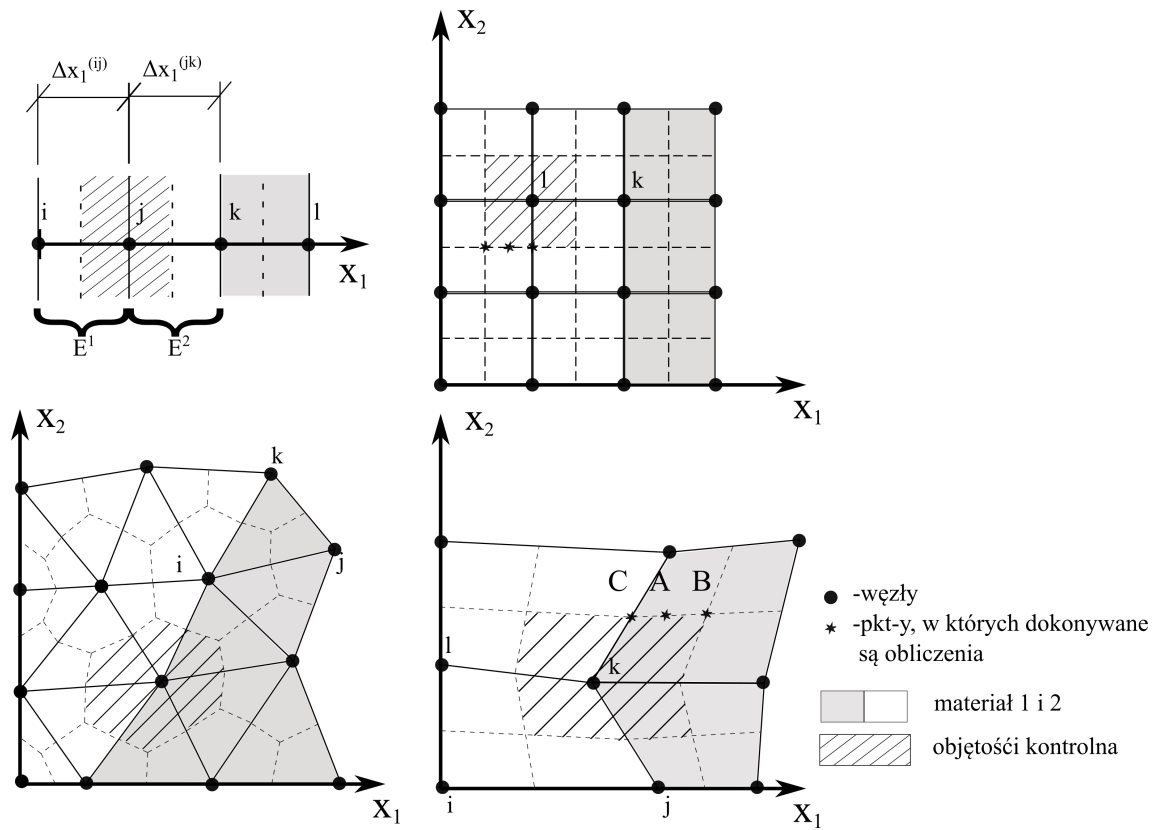
Bardziej rozbudowany opis obliczania międzywęzłowej przepuszczalności można znaleźć np. w [Szymkiewicz, 2012]. W przypadku, kiedy siatka wykonana jest z elementów nie będących prostokątami, przybliżanie wartości przepływu na podstawie wartości z dwóch sąsiednich elementów jest niedokładne z uwagi na brak zachowania prostopadłości między liniami łączącymi środki elementów objętościowych a krawędzią elementu [Szymkiewicz, 2012]. Możliwe jest zwiększenie dokładności dzięki aproksymacji wartości w punktach skrajnych rozważanej krawędzi. Jednakże wartości w tych miejscach nie są wyznaczone jawnie w rozwiązaniu równania dyskretnego, a interpolowane z wartości środkowych przyległych do siebie elementów.

### Metoda elementów objętościowych - punkty węzłowe

Drugą możliwością dyskretyzacji w metodzie elementów objętościowych jest metoda punktów węzłowych. Obszar dzielony jest na elementy, podobnie jak w MES. Następnie objętości kontrolne tworzone są wokół każdego z węzłów stanowiąc razem podwójną siatkę, rys. 3.7. Dla problemów jednowymiarowych do konkretnego węzła przypisuje się połowę z dwóch elementów do niego przylegających. W przypadku, kiedy nie są one jednakowych rozmiarów, węzły obliczeniowe znajdują się będą poza geometrycznym środkiem elementu objętościowego.

W zagadnieniach dwuwymiarowych składających się z elementów trójkątnych, siatkę drugorzędną można definiować na kilka różnych sposobów. Metoda podwójnej mediany (ang. *median dual*) polega na połączeniu środka ciężkości objętości kontrolnej z punktem znajdującym się na środku przyległych krawędzi. Inny sposób, to metoda Voronoi, która łączy proste prostopadłe wychodzących ze środków krawędzi elementów. Jest ona szczególnie użyteczna, jeśli analizujemy grunt anizotropowy, ponieważ gradient i przepływ prostopadły do odpowiednich krawędzi możemy obliczyć na podstawie punktów leżących na skrzyżowaniu dodatkowych prostych. Trzecią opcją jest łączenie środków ciężkości przyległych elementów. Z wszystkich omówionych technik, to metoda podwójnej mediany jest najwygodniejsza, ponieważ nie posiada żadnych ograniczeń

związanych z kształtem trójkątów. Bardzo łatwo można ją również rozbudować i wykorzystywać do tworzenia elementów czworokątnych (rys. 3.7) oraz w przestrzeni trójwymiarowej.



Rysunek 3.7: Siatki numeryczne stosowane dla metody punktów węzłowych w metodzie objętości skończonych [Szymkiewicz, 2012].

W metodzie punktów węzłowych, węzły obliczeniowe pokrywają się z wierzchołkami siatki podstawowej. W związku z tym, w trakcie obliczeń istnieje dostęp do wartości niewiadomych na brzegach obszaru oraz na krawędziach wewnętrznych między różnymi materiałami (rys. 3.7). W przypadku, kiedy dwa (lub więcej) obszary o różnych paramaterach stykają się w jednym punkcie, rozważana objętość kontrolna znajdować się będzie na granicy pomiędzy nimi. Oznacza to brak ciągłości nasycenia, który powinien być uwzględniony w dyskretyzacji członu pojemnościowego. Z drugiej strony, dzięki krawędziom umiejscowionym na styku objętości kontrolnych łatwiej jest wyznaczyć objętościową wartość przepływu. Istotne jest również, że gradient ciśnienia na krawędzi objętości kontrolnej obliczyć można za pomocą metody elementów skończonych, gdzie ciśnienie w obrębie elementu określone jest przez wartości węzłowe i funkcje kształtu. Omówiona metoda określana jest w literaturze jako ang. *control volume finite element method* (CVFEM) [Szymkiewicz, 2012].

Rozważmy objętość kontrolną wokół węzła  $j$ , która składa się z materiałów I oraz II-rys. 3.7. Obliczając człon pojemnościowy należy zdefiniować warunki na granicy objętości skończonych. Oznacza to, że dla węzła  $j$  należy określić jednoznacznie wartość głównej niewiadomej  $p_w^{(j)}$ . Stała wartość ciśnienia wody powoduje, że jej gęstość nie ulega zmianie, natomiast pozostałe parametry takie jak porowatość, czy nasycenie będą się zmieniać. W przypadku obliczeń

wykorzystujących równanie Richardsa wartości nasycenia w obu materiałach mogą zostać obliczone za pomocą odpowiednich funkcji kapilarnych zakładając  $p_c^{(j)} = -p_w^{(j)}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^{(j)}} M_w^{(j)} dV(j) = |V^{I(j)}| \frac{\partial}{\partial t} (n^I S_w^I(p_w^{(j)}) \rho^{(j)}) + |V^{II(j)}| \frac{\partial}{\partial t} (n^{II} S_w^{II}(p_w^{(j)}) \rho^{(j)}) , \quad (3.27)$$

gdzie wartości  $V^{I(j)}$  oraz  $V^{II(j)}$  określają jaka objętość komórki kontrolnej zajmowana jest przez materiał I lub II. W przypadku przepływu dwufazowego, nasycenie wody staje się drugą niewiadomą. Problem pojawia się, kiedy należy dokonać wyboru, które z nasyczeń (fazy ciekłej lub gazowej), będzie główną niewiadomą dla danego węzła. W [Helmig et al., 1997] zaleca się, aby opisywała ona nasycenie materiału, który posiada mniejszą wartość ciśnienia wejścia powietrza. Podejście to jest stosunkowo wygodne, ponieważ nasycenie dla drugiej fazy można określić jako funkcję nasycenia za pomocą równania ciągłości ciśnienia kapilarnego (2.119). Zakładając, że materiał I posiada mniejsze ciśnienie wejścia powietrza niż materiał II, nasycenie  $S_w^{(j)}$  odpowiadać będzie wartości  $S_w^I$ . Ciśnienie kapilarne określamy jako  $p_c^I(S_w^{(j)})$ , natomiast nasycenie materiału II jako  $S_w^{II}(p_c^I(S_w^{(j)}))$ .

Aby przybliżyć całkę na krawędzi objętości kontrolnej, obliczana jest objętościowa wartość przepływu w wybranym punkcie, następnie mnoży się ją przez wymiar brzegu (linia lub powierzchnia w zależności od przestrzeni w jakiej analizujemy). Z kolei obliczanie objętościowej wartości przepływu dla konkretnego punktu wymaga określenia kilku innych parametrów takich jak gradient ciśnienia, średnia gęstość, czy średnia przepuszczalność:

$$\int_F (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{n}_V^{(j)}) dF = Q_\alpha^{(fc)} = |F| \frac{\rho_\alpha^{(fc)}}{\mu_\alpha} \mathbf{k}_\alpha^{(fc)} \left( (\nabla p_\alpha)^{(fc)} - \rho_\alpha^{(fc)} \mathbf{g} \right) \mathbf{n}_V^{(j)} , \quad (3.28)$$

gdzie indeks górny  $f_c$  oznacza średnią wartość na krawędzi rozpatrywanej objętości kontrolnej. W metodzie CVFE gradient ciśnienia na krawędzi  $F$  przybliżany jest za pomocą tzw. funkcji kształtu. Dla elementów jednowymiarowych lub trójkątnych i liniowych funkcji kształtu, wartości gradientu nasycenia są jednakowe w każdym z elementów. Natomiast dla elementów czworokątnych i biliniowych funkcji kształtu, wartości te różnić się będą w każdym punkcie na krawędzi elementu. Na potrzeby obliczeń należy wybrać jeden z nich, przy czym najczęściej jest to środek krawędzi (pkt. A na rys. 3.7).

Ośrodek gruntowy charakteryzują dwa rodzaje przepuszczalności: właściwa i względna. Pierwsza z nich jest stała w danym obszarze, druga natomiast zależy od miejsca w jakim jest obliczana. Uzyskanie jej wartości jest możliwe na kilka sposobów, których krótki przegląd można znaleźć w [Szymkiewicz, 2012]. Jednymi z najczęściej stosowanych są wcześniej wspomniane metody *upstream* i *upwind*:

$$k_{r\alpha}^{(fc)} = \begin{cases} k_{r\alpha}^{(j)} & \text{jeśli } (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha^{(fc)} \mathbf{g}) \mathbf{n}_v^{(j)} \leq 0 \\ k_{r\alpha}^{(i)} & \text{jeśli } (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha^{(fc)} \mathbf{g}) \mathbf{n}_v^{(j)} > 0 \end{cases} . \quad (3.29)$$

Gęstość na krawędzi objętości kontrolnej podobnie jak ciśnienie i przepuszczalność może być przybliżana na kilka różnych sposobów. Najczęstszym jest obliczanie wartości średniej z dwóch przeciwległych węzłów lub interpolacja między wszystkimi węzłami.

Sumując przepływ z wszystkich krawędzi objętości kontrolnej  $V^{(j)}$  otrzymujemy poniższe równanie:

$$|V^{(j)}| \frac{dM_\alpha^{(j)}}{dt} + \sum_{F \in \partial V^{(j)}} Q_\alpha^{(fc)} = 0, \quad (3.30)$$

gdzie  $Q_\alpha^{(fc)}$  zależy od wartości węzłowych ciśnienia odpowiedniej fazy:

$$Q_\alpha^{(fc)} = \sum_{i \in N_{elem}} \left( A_\alpha^{fc(i)} p_\alpha^{(i)} \right) + G_\alpha^{(fc)}, \quad (3.31)$$

gdzie  $N_{elem}$  oznacza zbiór węzłów leżących na rozważanej krawędzi (lub krawędziach) elementu objętościowego. Współczynnik  $A_\alpha^{(jk)}$  zależy od geometrii, przepuszczalności i parametrów płynu. Wstawiając powyższe równanie do ogólnego, otrzymamy:

$$|V^{(j)}| \frac{dM_\alpha^{(j)}}{dt} + \sum_{i \in N_{elem}^{(j)}} \left( A_\alpha^{(jk)} p_\alpha^{(k)} \right) + G_\alpha^{(fc)} = 0. \quad (3.32)$$

$N_{elem}^{(j)}$  zawiera węzły wchodzące w skład wszystkich elementów objętości kontrolnej  $V^{(j)}$ .

### 3.3 Rozwiązanie równań półdyskretnych

#### Dyskretyzacja w czasie

Dyskretyzując w czasie równania przepływu za pomocą metody objętości skończonych, otrzymujemy układ równań półdyskretnych, które dla modelu dwufazowego można zapisać w następującej formie:

$$|V^{(j)}| \frac{dM_w^{(j)}}{dt} + \sum_{k \in N_{node}^{(j)}} \left( A_w^{(jk)} p_w^{(j)} \right) + G_w^{(j)} = 0, \quad (3.33)$$

$$|V^{(j)}| \frac{dM_a^{(j)}}{dt} + \sum_{k \in N_{node}^{(j)}} \left( A_a^{(jk)} p_a^{(j)} \right) + \sum_{k \in N_{node}^{(j)}} \left( A_a^{(jk)} p_c(S_w^{(j)}) \right) + G_a^{(j)} = 0. \quad (3.34)$$

Jeśli używamy głównych niewiadomych w relacji  $p_w - S_w$  to gęstość objętościowa płynu  $M_\alpha^{(j)}$  w węźle  $j$  zależy od ciśnienia wody i nasycenia. Współczynnik przepływu  $A_\alpha^{(jk)}$  oraz grawitacja  $G_\alpha^j$  również zależą bezpośrednio od ciśnienia wody i nasycenia w węźle  $j$  oraz sąsiednich ich wartości ze zbioru  $N_{node}^{(j)}$ . Dla równania Richardsa w związku z analizowaniem tylko fazy ciekłej rozwiązujemy jedno równanie dla każdego z węzłów:

$$|V^{(j)}| \frac{dM_w^{(j)}}{dt} + \sum_{k \in N_{node}^{(j)}} \left( A_w^{(jk)} p_w^{(j)} \right) + G_w^{(j)} = 0, \quad (3.35)$$

w którym gęstość objętościowa płynu  $M_w^{(j)}$  zależy tylko i wyłącznie od węzłowych wartości ciśnienia wody, a wartości  $A_\alpha^{(jk)}$  i  $G_\alpha^{(j)}$  są funkcjami wartości węzłowych ciśnienia wody w węźle  $j$  oraz sąsiednich ze zbioru  $N_{node}^{(j)}$ .

W związku z tym, że gęstość objętościowa płynu  $M_w^{(j)}$  jest funkcją algebraiczną zmiennych

$p_w$  i  $S_w$ , to równania (3.33), (3.34) stanowią układ równań różniczkowych algebraicznych. Za pomocą reguły łańcuchowej (ang. *chain differentiation rule*), można je przekształcić w układ równań różniczkowych zwyczajnych, gdzie pochodne głównych niewiadomych w odniesieniu do czasu wyrażane są jednoznacznie. Takie rozwiązanie jest zwykle stosowane w przepływie wód gruntowych, gdzie  $M_w^{(j)}$  zależy liniowo od ciśnienia wody [Szymkiewicz, 2012]. Zapisując równania (3.33), (3.34) bardziej zwięźle otrzymujemy [Szymkiewicz, 2012]:

$$\frac{dM_\alpha^{(j)}}{dt} = \mathcal{D}_\alpha^{(j)}, \quad (3.36)$$

gdzie  $\mathcal{D}_\alpha^{(j)}$  jest operatorem dyskretyzacji przestrzennej. Układ równań półdyskretnych musi być rozwiązany w rozważanym przedziale czasowym  $\langle 0, t_{max} \rangle$ . Wartości głównych niewiadomych  $p_w$  oraz  $S_w$  w czasie  $t = 0$  określają warunki początkowe. W związku z tym rozwiązanie układu równań półdyskretnych jest równoważne z rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych. Należy tutaj wyróżnić dwie metody: jawna oraz niejawną. W metodzie jawnej wartość pochodnej dla konkretnego kroku obliczeniowego jest obliczana za pomocą operatora dyskretyzacji przestrzennej  $\mathcal{D}_\alpha^{(j)}$  uzyskanego we wcześniejszych krokach czasowych, w których wartość rozwiązania jest znana:

$$M_{j,n} = M_{j,n-1} + \Delta t (\mathcal{D}_{j,n-1}), \quad (3.37)$$

gdzie  $n$  to numer kroku obliczeniowego, a  $\Delta t$  to wielkość kroku czasowego. W metodzie niejawnej pochodna obliczana jest na podstawie operatora dyskretyzacji przestrzennej obliczanego w kolejnym kroku obliczeniowym:

$$M_{j,n} = M_{j,n-1} + \Delta t (\mathcal{D}_{j,n}). \quad (3.38)$$

W konsekwencji otrzymujemy układ równań algebraicznych opisujących zależność między wartościami węzłowymi w kolejnych krokach czasowych. W zależności od ilości kroków czasowych koniecznych do uzyskania rozwiązania, metodę dzielimy na jedno (tylko wartości z wcześniejszego kroku obliczeniowego) i wielokrokową (oparta na wartościach z kilku wcześniejszych kroków czasowych). Formuły (3.37) i (3.38) można uogólnić i zapisać używając poniższej zależności [Szymkiewicz, 2012]:

$$M_{j,n+1} = M_{j,n} + \Delta t (\Theta \mathcal{D}_{j,n+1} + (1 - \Theta) \mathcal{D}_{j,n}), \quad (3.39)$$

gdzie  $\Theta$  jest współczynnikiem wahającym się między 0 a 1. Dla  $\Theta = 0$  otrzymujemy metodę jawną Eulera, natomiast dla  $\Theta = 1$  metodę niejawną. Przyjęcie przez  $\Theta$  wartości 0.5 prowadzi do otrzymania formuły Cranka-Nicholsona, polegającej na obliczeniu średniej arytmetycznej między wyrażeniem w kroku obecnym oraz kolejnym, celem uzyskania wartości w korcu następnym. W zależności od parametru  $\Theta$  rozwiązywane równanie nieliniowe może prowadzić do oscylacji między kolejnymi krokami obliczeniowymi [Szymkiewicz, 2012]. Ze względu na prostotę oraz stabilność rozwiązania w niniejszej rozprawie doktorskiej zastosowana została metoda niejawna Eulera ( $\Theta = 1$ ).

## Rozwiązanie układów równań nieliniowych

Zastosowanie niejawnej metody Eulera do równań (3.34) i (3.33) powoduje uzyskanie układu nieliniowych równań algebraicznych dla kroku czasowego  $n+1$ , który można zapisać w następującej formie:

$$F(u^{n+1}) = \begin{bmatrix} P^1 u^{n+1} \\ \vdots \\ P^{N_u} u^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

gdzie  $N_u$  to liczba niewiadomych,  $u$  to wektor niewiadomych wartości węzłowych w kolejnym kroku czasowym,  $P^i$  to nieliniowe funkcje algebraiczne. Dla równania Richardsa liczba niewiadomych równa jest liczbie węzłów:

$$P = \begin{bmatrix} P_R^1 \\ \vdots \\ P_R^{N_n} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} p_w^1 \\ \vdots \\ p_w^{N_n} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Dla modelu dwufazowego liczba niewiadomych będzie dwukrotnie większa od liczby węzłów:

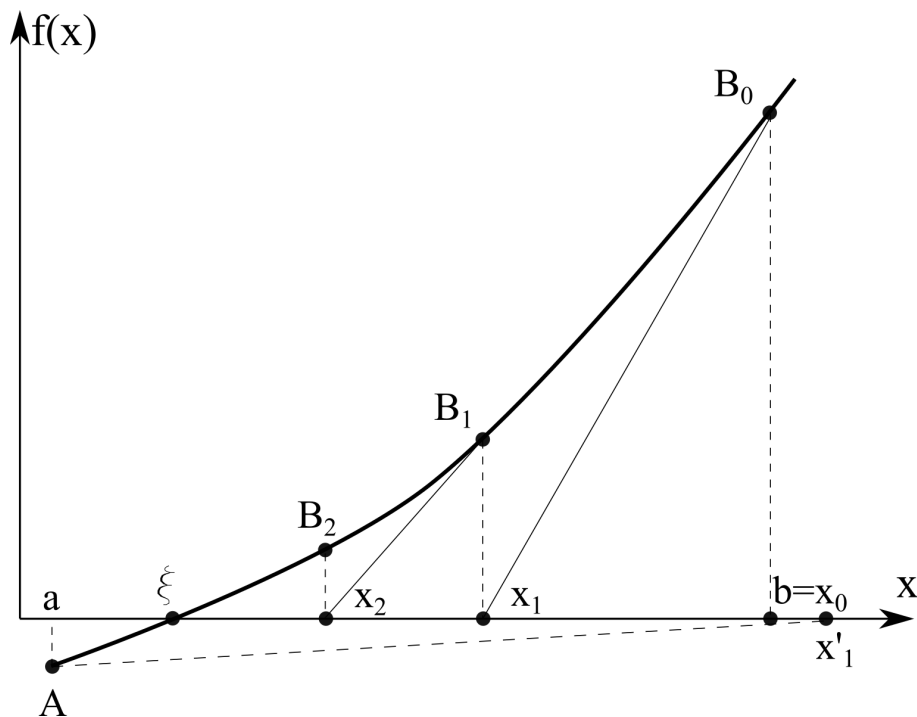
$$P = \begin{bmatrix} P_w^1 \\ P_a^1 \\ \vdots \\ P_w^{N_n} \\ P_a^{N_n} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} p_w^1 \\ S_w^1 \\ \vdots \\ p_w^{N_n} \\ S_w^{N_n} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Otrzymany układ równań musi być rozwiązany iteracyjnie. W tym celu najczęściej używanymi metodami są metoda Newtona oraz Picarda. Jako, że wszystkie programy, w których wykonane zostały obliczenia wykorzystują metodę Newtona, poniżej zawarto jej szczegółowy opis. W zależności od modelu, za pomocą którego analizuje się problem przepływu rozwiązujemy równanie nieliniowe (Richards) lub układ równań nieliniowych (model dwufazowy).

$$\underbrace{n \frac{\partial \rho_\alpha S_\alpha}{\partial t} - \nabla \left\{ \rho_\alpha \frac{k_s k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g) \right\}}_{f(x)} - q_\alpha = 0. \quad (3.43)$$

Podstawę metody stanowi interpolacja funkcji  $f(x)$  za pomocą stycznej prowadzonej w punkcie  $B(x_k, f(x_k))$ . Kolejne przybliżenia są odciętymi punktu przecięcia stycznej z osią  $x$  rys. 3.8. Metoda Newtona posiada zbieżność kwadratową, co oznacza, że przy spełnionych założeniach (punkty poniżej) błąd maleje kwadratowo wraz z liczbą iteracji. Aby dla dowolnego  $x_k$  funkcja posiadała rozwiązanie na przedziale  $\langle a, b \rangle$  muszą być spełnione następujące warunki:

- funkcja  $f(x)$  jest określona i ciągła w przedziale  $-\infty < x < +\infty$ ,
- $f(a)f(b) < 0$ ,
- $f'(x) \neq 0$  dla  $a \leq x \leq b$ ,
- $f''(x)$  istnieje w przedziale  $(-\infty, +\infty)$  i nie zmienia znaku.



Rysunek 3.8: Ilustracja działania metody Newtona.

Dla funkcji liniowej jesteśmy w stanie wyznaczyć rozwiązanie wprost. W przypadku, kiedy  $f(x)$  jest nieliniowa (3.43), funkcję można rozwinąć w szereg Taylora, aby uzyskać wystarczające przybliżenie w pobliżu punktu  $x_0$ :

$$f(x_k + \Delta x) = f(x_k) + \Delta x \frac{df}{dx} \Big|_{x_k} + (\Delta x)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_k} + \dots \quad (3.44)$$

Podstawiając za  $\Delta x = x_{k+1} - x_k$  oraz biorąc tylko dwa wyrazy rozwinięcia, otrzymamy:

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k) . \quad (3.45)$$

Niech  $f(x_{k+1}) = 0$ , wtedy kolejne przybliżenia dla równania  $f(x) = 0$  możemy wyznaczyć z wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} . \quad (3.46)$$

Dla układu  $n$  równań nieliniowych o  $n$  ilości zmiennych rzeczywistych postaci  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ogólna postać funkcji prezentuje się następująco:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} . \quad (3.47)$$

Wybieramy wektor rozwiązań początkowych  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Następnie obliczamy macierz pochodnych cząstkowych funkcji składowych (Jakobian):

$$J(X) = \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Kolejne kroki są analogiczne jak w przypadku rozwiązywania z jednym równaniem (zamiast argumentu skalarne  $x$  mamy wektor  $X$ ):

$$X_{k+1} = X_k - [J(X_k)]^{-1} F(X_k). \quad (3.49)$$

### Dobór kroku czasowego

W większości analiz zastosowanie stałego kroku czasowego jest stosunkowo nieefektywne [Szymkiewicz, 2012]. Dlatego dobranie kroku czasowego w analizie numerycznej powinno odbywać się w trakcie symulacji na drodze dopasowania. Kiedy warunki brzegowe nie ulegają zmianie możemy zastosować duży krok czasowy, natomiast w przypadku zmiany warunków w trakcie zadania konieczne jest mały krok czasowy. Powszechnie stosuje się dwie strategie doboru kroku czasowego [Szymkiewicz, 2012], kierując się wydajnością lub dokładnością metody iteracyjnej [Kavetski et al., 2001]. W pierwszym przypadku wymagane jest, aby liczba iteracji zawierała się w przedziale  $\langle N_{it}^{min}, N_{it}^{max} \rangle$  celem osiągnięcia zbieżności dla każdego z kroków czasowych. Jeśli liczba iteracji potrzebnych do przejścia do następnego kroku czasowego jest większa od maksymalnej możliwej ( $N_{it} > N_{it}^{max}$ ), to kolejny krok czasowy jest zredukowany współczynnikiem  $C_{it}^{dec} < 1$ . Jeśli sytuacja jest odwrotna, a więc  $N_{it} < N_{it}^{min}$ , krok czasowy należy zwiększyć za pomocą współczynnika  $C_{it}^{inc} > 1$ . Dla kroków czasowych posiadających względnie stałą długość oba współczynniki są zwykle zbliżone do 1. Aby utrzymać krok czasowy w pewnym konkretnym przedziale, definiuje się parametr  $\delta t$ .

Alternatywną metodą służącą do doboru kroku czasowego jest wyznaczenie tzw. błędu obciążenia metody numerycznej (ang. *truncation error*), który jest proporcjonalny do  $(\Delta t^p)^n$ , gdzie  $n$  to poziom dokładności metody. Błąd ten powodowany jest najczęściej użyciem przybliżonej formuły zamiast pełnej operacji matematycznej przy obliczaniu sum nieskończonych szeregów, czy obliczaniu wielkości będącymi granicami całki. Otrzymane wartości można porównać z tolerancją błędu wymaganą dla danego problemu, a wielkość kroku czasowego dostosowywana jest w taki sposób, że spełnione jest kryterium tolerancji.

### Rozwiązanie układów równań liniowych

Dla każdej iteracji wykonanej metodą Newtona otrzymuje się układ równań liniowych, który należy rozwiązać, aby otrzymać korektę wartości węzłowych. Układ jest najczęściej rzadką macierzą pasmową.

Rozwiązanie układu liniowych równań algebraicznych może być wykonane za pomocą metod iteracyjnych lub bezpośrednich. Metody bezpośrednie pozwalają na uzyskanie dokładnego rozwiązania przy skończonej liczbie przekształceń układu wejściowego. Ich dokładność ograniczona jest błędem zaokrąglenia, który może powodować niestabilności rozwiązania. Metody bezpośrednie zazwyczaj bazują na eliminacji Gaussa, wzorach Cramera, czy macierzy odwrotnej.



Są one efektywne zazwyczaj dla macierzy pełnych, które uzyskiwane są dla dyskretyzacji jednowymiarowych równań przepływu. Przy dużych rozmiarach macierzy uzyskiwanych dla bardziej skomplikowanych problemów, metoda ta jest zdecydowanie mniej efektywna, ponieważ rozwiązanie takiego algorytmu wymaga zaabsorbowania sporej pamięci komputera z uwagi na liczbę równań oraz niewiadomych.

Zastosowanie metod iteracyjnych wymaga wykonania serii iteracji, rozpoczynających się od pierwszego przybliżenia, które jest sukcesywnie aktualizowane. Jeśli rozwiązanie jest zbieżne, to staje się ono rozwiązaniem układu. Główną zaletą metody iteracyjnej jest możliwość wykorzystania rzadkiej struktury macierzy, krótszy czas obliczeń oraz zaangażowanie zdecydowanie mniejszej pamięci komputera. W związku z tym metoda iteracyjna bardziej nadaje się do rozwiązywania problemów z dużą liczbą niewiadomych. Jednakże nie gwarantuje ona uzyskania zbieżności. Kolejne iteracje mogą bardzo długo osiągać zbieżność lub nie osiągać jej w ogóle.

Zbieżność liniowych metod iteracyjnych zależy bezpośrednio od macierzy współczynników, która powinna być pasmowa (największe wartości w każdym z wierszy powinny znajdować się na głównej przekątnej). Macierze takie uzyskujemy dla równania Richardsa [Szymkiewicz, 2012]. Natomiast dla przepływu dwufazowego największe współczynniki leżą najczęściej poza główną przekątną. Właściwości macierzy mogą być poprawione poprzez wstępną kalibrację, czyli pomnożenie przez specjalnie wyselekcjonowaną macierz obu stron równania, co spowoduje lepszy układ macierzy do rozwiązania. Obszerniejsze rozważania na temat metod iteracyjnych można znaleźć np. w [Saad, 2003].

### 3.4 Przykłady programów numerycznych

Testowe obliczenia na potrzeby niniejszej pracy wykonywane były w różnych programach obliczeniowych, do których należą: VS2DTI, FlexPDE, DuMu<sup>x</sup> oraz autorski program Promotora. Jednak z uwagi na ograniczone możliwości w definicji warunków brzegowych, rozwiązywanie tylko przepływu jednofazowego, czy oscylacji numerycznych pojawiających się w trakcie obliczeń, wszystkie symulacje przedstawione w niniejszej rozprawie wykonano w programie Promotora, opartym na algorytmie opisanym w pracy [Szymkiewicz, 2012].

Poza wymienionymi aplikacjami dostępnych jest również wiele innych programów, umożliwiających modelowanie przepływu np. Tough2, Hydrus 2D/3D, Plaxis, Abaqus, czy Comsol Multiphysics. Poniżej został przedstawiony opis kilku z nich.

#### VS2DTI

Program VS2DTI jako jedyny z wymienionych programów bazuje na metodzie różnic skończonych. Dodatkowo posiada on możliwość graficznego kreślenia, dzięki czemu użytkownik ma bieżący podgląd na tworzoną geometrię. Siatka numeryczna generowana jest automatycznie z możliwością ręcznego dogęszczenia w wybranych miejscach. Program posiada wbudowaną bazę parametrów gruntowych oraz warunków brzegowych, która dostosowana jest do problemów związanych z przepływem oraz transportem. Niestety VS2DTI pozwala na obliczanie tylko przepływu jednofazowego.

Weryfikacja programu została wykonana w pracy [McCord i Goodrich, 1994], gdzie wyniki porównano z rozwiązaniami analitycznym w przestrzeni jedno i dwuwymiarowej oraz innymi

programami rozwiązującymi równanie Richardsa (np. VAM2D, VSAFT2). Przeprowadzone zostały 3 testy. Pierwszy oraz drugi polegały na modelowaniu infiltracji wody w gruncie w stanie suchym przy różnych wartościach ssania. Trzeci test przedstawiał przepływ wody w gruncie w warunkach ustalonych. VS2DTI dla wszystkich przykładów wykazał lepszą zgodność z rozwiązaniem analitycznym oraz kończył obliczenia szybciej niż pozostałe testowane programy. Autorzy [McCord i Goodrich, 1994] zalecają używanie aplikacji szczególnie w przypadkach, w których mamy do czynienia z problematyką drenażu grawitacyjnego, histerezą, anizotropią oraz transportem.

## FlexPDE

FlexPDE jest środowiskiem numerycznym pozwalającym na rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych rzędów pierwszego i drugiego w przestrzeni jedno, dwu oraz trójwymiarowej. W związku z tym, że program nie posiada biblioteki gotowych rozwiązań, użytkownik implementuje równania samodzielnie. Dzięki temu zyskuje kontrolę nad formą równań oraz całym procesem numerycznym. Zapisywane równania mogą być zarówno liniowe jak i nieliniowe, do których rozwiązania automatycznie stosowana jest metoda Newtona-Raphsona. Wersja bezpłatna pozwala na obliczenia do 1000 węzłów, natomiast komercyjna nie posiada tego ograniczenia, tak więc jedynym limitem są tylko i wyłącznie możliwości obliczeniowe komputera. Oprócz analizy naprężeń i mechaniki płynów, program można wykorzystywać do modelowania szeregu innych zagadnień naukowych np. przepływu ciepła, czy dyfuzji. Przykłady użycia tego programu można znaleźć w np. [Vu i Fredlund, 2004, Sterpejkowicz-Wersocki i Bolt, 2007].

Weryfikacja programu została wykonana w pracy [Pentland et al., 2001], gdzie analizowano przykład polegający na infiltracji wody w wale przeciwpowodziowym w przestrzeni dwu i trójwymiarowej. Wyniki porównane zostały z oprogramowaniem firmy GeoStudio (Seep/W, Temp/W). W obu przypadkach uzyskano bardzo dobrą zgodność między aplikacjami. Niewielkie rozbieżności spowodowane były innym rodzajem dyskretyzacji przestrzennej przyjętej przez wspomniane programy. Jednak symulacje wykonane w pracy [Tisler i Szymkiewicz, 2014] wskazują na problemy związane z oscylacjami pojawiającymi się w trakcie obliczeń.

## DuMu<sup>x</sup>

DuMu<sup>x</sup> jest znacznie bardziej rozbudowanym programem pozwalającym na modelowanie wielofazowych procesów przepływu oraz transportu. Jego największą zaletą jest fakt, że można korzystać z niego bezpłatnie. Ponadto w porównaniu do FlexPDE, oferuje on zdecydowanie szybszy czas obliczeń, co jest szczególnie istotne w problemach związanych z przepływem dwufazowym. Aplikacja ta została napisana w C++ z wykorzystaniem możliwości programowania obiektowego. Proces rozwiązywania równań oraz tworzenia geometrii zbudowany jest na bazie DUNE - środowiska numerycznego stworzonego do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych za pomocą metod siatkowych. Oprócz MES umożliwia on również użycie pozostałych metod dyskretyzacji przestrzennej. Podobnie jak DuMu<sup>x</sup> jest on darmowy, a jego mechanizm działania zapewnia efektywność oraz wysoką wydajność obliczeń numerycznych. Więcej na temat DUNE można znaleźć w [Flemisch et al., 2011]. Pierwsza wersja programu DuMu<sup>x</sup> powstała w 2007 r. i do tej pory jest ona regularnie rozbudowywana oraz aktualizowana. Aplikacja posiada szereg

przygotowanych rozwiązań dla różnych modeli (np. Richards, czy 2PH), które można edytować, dopasowując do problemów, które znajdują się w obszarze zainteresowań użytkownika. Natomiast przygotowanie własnego modelu wymaga szczegółowego zapoznania się ze strukturą programu. Przyczyną jest skomplikowany zapis wynikający z obiektowego zorientowania kodu oraz interakcji głównego programu z wieloma innymi tzw. podprogramami, opisującymi warunki materiałowe, geometrię, równania itp.

Walidacja programu DuMu<sup>x</sup> została wykonana w szeregu publikacji np. [Flemisch et al., 2007], [Flemisch et al., 2011]. Wyniki porównywano zarówno z rozwiązaniem analitycznym jak i rezultatami z innych programów w tym MoReSa, który był poprzednikiem DuMu<sup>x</sup>-a. Modelowe zagadnienie dotyczyło infiltracji w ośrodku gruntowym przy założeniu zerowej wartości ciśnienia kapilarnego. Stan ustalony porównano z równaniem Darcy (2.29), natomiast stan nieustalony z równaniem Buckley-Leveretta [Flemisch et al., 2011]. W obu przypadkach zarówno propagacja ciśnienia jak i nasycenia posiadały bardzo dobrą zgodność z wynikami analitycznymi. Ponadto charakteryzowały się lepszą zgodnością niż program MoReS, które można tłumaczyć stosowaniem metody różnic skończonych do dyskretyzacji przestrzennej.

## UN2PH - autorski program Promotora

Najwięcej obliczeń zostało wykonanych w autorskim programie Promotora, który bazuje na CVFE. Aplikacja podobnie jak DuMu<sup>x</sup> nie posiada interfejsu, a całość zadania zapisywana jest w pliku tekstowym. Program ukierunkowany jest w szczególności na rozwiązywanie problemów związanych z przepływem jedno i dwufazowym w ośrodkach porowatych. Posiada rozbudowane opcje odnoszące się do warunków brzegowych. Jednym z nich jest możliwość zastosowania w określonym punkcie warunku Neumanna i Dirichleta dla tej samej fazy. W trakcie symulacji na podstawie wartości węzłowej program wybiera, który z warunków brzegowych ma zastosować. Umożliwia to poprawne odzwierciedlenie wielu procesów fizycznych, których przykładem jest prawidłowe opisanie krawędzi przesiąkania (ang. *seepage face*) w wale przeciwpowodziowym.

Do rozwiązywania układów równań liniowych został wykorzystany program UMFPACK. Aplikacja jest zbiorem procedur rozwiązujących liniowe układy równań w postaci macierzowej  $Ax = b$ , gdzie  $A$  nie musi być macierzą symetryczną. Solver wykorzystywany jest również w innych popularnych programach naukowych np. Matlab, Scilab, PythonXY. Więcej na temat aplikacji można znaleźć w [Davis, 2003]. Szczegółowy opis działania programu UN2PH można znaleźć w [Szymkiewicz, 2012].

W pracy [Szymkiewicz, 2012] zawartych zostało kilka przykładów numerycznych, które celem weryfikacji programu zostały porównane z rozwiązaniem analitycznym [Tracy, 2006]. Jednym z nich jest symulacja infiltracji wody do nienasyconego ośrodka porowatego o wymiarach 1x1 m, przy założeniu różnych wariantów obliczania jego przepuszczalności. Symulacje wykonano dla siatek złożonych z trójkątów i prostokątów, zakładając różne wymiary elementów (2 i 10 cm). Mapy oraz wykres przedstawiający profil ciśnienia wody okazały się jednoznaczne z wynikami uzyskanymi za pomocą rozwiązania analitycznego.

## TOUGH2

Program TOUGH2 (ang. *transport of unsaturated groundwater and heat*) jest symulatorem wielowymiarowego strumienia ciepła, wody, gazów w nienasyconych i nasyconych skałach porowatych i spękanych. Program oferuje ponadto możliwości obliczania przepływu mieszanin wody ze znacznikami, wody z powietrzem, dwutlenkiem węgla, wodorem lub lotnymi związkami organicznymi, w warunkach zmiennych termicznie [Pruess, 1991].

W numerycznym modelowaniu wykorzystuje się dyskretyzację przestrzeni i czasu. W opisywanym programie geometria modelu jest określona poprzez zdefiniowanie odpowiedniej liczby elementów o zadanych objętościach oraz połączeń między elementami o zadanych powierzchniach i w zadanych odległościach od środków połączonych elementów. Pozwala to tworzyć regularne i nieregularne siatki obliczeniowe w jednym, dwóch i trzech wymiarach.

Rodzaje ośrodka tworzącego poszczególne elementy modelu, określane są mianem domen. Charakteryzują się one specyficznymi własnościami dowolnie ustalonymi przez użytkownika, co pozwala na modelowanie zmienności litologicznej modelu. Ponadto możliwe jest określenie gęstości właściwej, porowatości, absolutnej przepuszczalności zdefiniowanej w trzech kierunkach dla skał anizotropowych, współczynnika przewodzenia ciepła oraz właściwej pojemności cieplnej. Wtórna porowatość ośrodka skalnego jest określana poprzez system spękań o dowolnie dobieranych parametrach. Ilość zdefiniowanych domen jest nieograniczona [Pruess, 1991].

Program TOUGH2, poza zastosowaniem w geotermice, stosowany jest również w określaniu hydrogeologicznych warunków składowania odpadów radioaktywnych, w modelowaniu transportu wilgoci w inżynierii kopalnianej, w geochemicznych badaniach zanieczyszczeń środowiska oraz w hydrogeologicznych badaniach stref nasyconych i nienasyconych. [Battistelli et al., 1997].

## Hydrus 2D/3D

Program Hydrus podobnie jak TOUGH2 służy do symulacji dwu oraz trójwymiarowych procesów przepływu wody, ciepła oraz wielu innych substancji rozpuszczonych w nienasyconym ośrodku porowatym. W odniesieniu do przepływu wody algorytm bazuje na równaniu Richardsa zarówno dla gruntów nasyconych jak i nienasyconych. Analizowane problemy mogą składać się z obszarów o dowolnym stopniu lokalnej anizotropii. Przepływ i transport mogą być rozpatrywane zarówno w płaszczyźnie pionowej, jak i poziomej oraz w trójwymiarze. Program posiada również szereg zaimplementowanych warunków brzegowych, takich jak: krawędź przesiąkania (*seepage face*), atmosferyczny warunek brzegowy, drenaż. Zarówno warunki brzegowe jak i wartości przepływu mogą być definiowane uwzględniając ich zmienność w czasie. Parametry hydrauliczne dla gruntów nienasyconych opisane są za pomocą najpopularniejszych funkcji analitycznych: van Genuchtena, Brooks-Corey'a, Durnera, czy Kosugi'ego. Hydrus pozwala również na uwzględnienie histerezy przy założeniu, że krzywe skalujące odpowiedzialne za osuszanie i nawadnianie są skalowane na podstawie głównych krzywych osuszania i nawadniania [Simunek et al., 2006, Simunek i van Genuchten, 2008].

Równania rozwiązywane są przy pomocy metody Galerkin dla elementów trójkątnych. Dyskretyzacja w czasie zarówno dla gruntów nasyconych jak i nienasyconych wykonywana jest z wykorzystaniem metody niejawniej. Powstały układ równań rozwiązywany jest iteracyjnie,

korzystając z linearyzacji oraz eliminacji Gaussa dla macierzy pasmowych, metody gradientów sprzężonych dla macierzy symetrycznych oraz metody Orthomina dla układów asymetrycznych.

Niestety z uwagi na używanie równania Richardsa do opisu przepływu w strefie nienasyconej, program Hydrus nie może być stosowany do problemów, w których konieczne jest uwzględnienie mobilności więcej niż jednej fazy ośrodka gruntowego.

## Plaxis

Plaxis w porównaniu do wspomnianych wcześniej programów jest zdecydowanie najbardziej przyjazny użytkownikowi dzięki swojemu bardzo intuicyjnemu interfejsowi. Bazuje na metodzie elementów skończonych i używany jest głównie do analizy deformacji oraz stateczności konstrukcji geotechnicznych. Jego podstawowa wersja pozwala na analizę zmian zachodzących w szkieletie gruntowym przy zastosowaniu stosunkowo dużej liczby modeli konstytutywnych. Niestety w odniesieniu do przepływu pozwala na prowadzenie obliczeń tylko w stanie ustalonym. Aby wykonywać symulacje w stanie nieustalonym konieczne jest pobranie dodatkowego modułu PlaxFlow. Poza prowadzeniem obliczeń w stanie ustalonym i nieustalonym PlaxFlow pozwala na definicję zmiennych w czasie warunków brzegowych np. opadów deszczu, czy zmian ciśnienia wynikających z podnoszenia i opadania zwierciadła wody.

Podstawowym modelem wykorzystywanym do opisu zachowania się gruntów nienasyconych jest model van Genuchtena. Dodatkowo program posiada również bazę krzywych retencji w oparciu o różne systemy klasyfikacji gleb lub w razie potrzeby umożliwia manualną implementację użytkownikowi. Dostępny jest również zestaw warunków brzegowych np. wartość przepływu, drenaż, czy przesiąkanie. W stosunku do wcześniej omawianych programów posiada bardzo rozbudowane możliwości symulacji mechaniki gruntu połączonych z przepływem. Niestety jednak nie ma możliwości wykonywania obliczeń modelem 2PH [Babu i Singh, 2009, Brinkgreve et al., 2012].

## 4 Znaczenie przepływu powietrza w strefie nienasyconej

Równanie Richardsa jest szeroko stosowanym modelem opisującym ruch wody w strefie nienasyconej gruntów oraz skał. Jednak nie może być ono stosowane w sytuacjach, w których istotne jest oddziaływanie i obecność powietrza. Znajdująca się w gruncie faza gazowa ma znaczny wpływ dwie pozostałe fazy (ciekłą i stałą), jak również sama stanowi istotny składnik procesów przepływu zachodzących w gruncie i poza nim. Niniejszy rozdział rozprawy ma na celu omówienie oraz klasyfikację problemów, w których spotykamy się z przepływem powietrza. Zagadnienia te, możemy podzielić na trzy grupy, rys. 4.1. Pierwszą grupę stanowią procesy bezpośrednio związane z przepływem powietrza. Druga grupa obejmuje oddziaływanie powietrza na przepływ wody. W trzeciej grupie znalazły się problemy dotyczące mechaniki ośrodka gruntowego.

Podstawowym założeniem równania Richardsa jest przyjęcie nieskończonej mobilności powietrza. W rzeczywistości jednak, faza gazowa posiada skończoną mobilność, która jest 50 do 60 razy większa od mobilności wody. Numeryczny eksperyment wykonany przez [Tegnander, 2001] pokazał, że zgodność między modelami można uzyskać tylko jeśli lepkość powietrza będzie ponad 100 razy większa od lepkości wody. Zatem, nawet jeśli powietrze w porach jest połączone z atmosferycznym, wciąż mogą pojawiać się rozbieżności między oboma modelami związane z ograniczoną mobilnością powietrza. Należy również mieć na uwadze fakt, że mobilność płynu zależy nie tylko od lepkości, ale również od względnej przepuszczalności. Dodatkowy spadek mobilności powietrza w stosunku do mobilności wody może być uzyskany jeśli względna przepuszczalność powietrza będzie zdecydowanie mniejsza od względnej przepuszczalności wody. Z takim zjawiskiem mamy do czynienia, kiedy nasycenie powietrzem zbliża się do wartości rezydualnej [Forsyth, 1988].

Mobilność fazy gazowej może być również ograniczona poprzez warunki brzegowe np. intensywne opady deszczu, powódzie, nawadnianie obszarów rolnych. Problem ten jest szczególnie istotny, kiedy zwierciadło wody znajduje się blisko powierzchni gruntu, a infiltracja zachodzi na dużym obszarze. Powoduje to wzrost ciśnienia powietrza w porach, które znacząco spowalnia proces infiltracji. Dochodzi wtedy do sytuacji, w której ogromne ilości powietrza zostają częściowo zamknięte między zwierciadłem wody gruntowej a infiltrującą od poziomu gruntu wodą. Obecna w ten sposób w faza gazowa ulatuje do atmosfery w postaci pęcherzyków lub rozpuszcza się w wodzie spowalniając proces infiltracji. Proces ten zbadano doświadczalnie oraz numerycznie w pracach m. in. [Hammecker et al., 2003, Wang et al., 1998].

Do zamknięcia powietrza dochodzi również w sytuacji, kiedy w gruncie znajdują się niejednorodności. Problem ten dotyczy zarówno inkluzji grubo i drobnoziarnistych w zależności od warunków przepływu (drenaż/infiltracja). Odseparowane w ten sposób powietrze nie ma kontaktu z atmosferycznym, a więc nie spełnione jest jedno z założeń równania Richardsa. W gruntach naturalnych efekt zamykania powietrza odbywa się na poziomie porów oraz strukturalnym, który to zachodzi najczęściej w strefie wahań zwierciadła wody lub przyległej strefie podciągu kapilarnego. Tworząca się strefa częściowego nasycenia jest coraz częściej uznawana za kluczową dla np. transportu zanieczyszczeń oraz wielu procesów biochemicznych zachodzących w gruncie [Berkowitz et al., 2004, Silliman et al., 2002, Yakirevich et al., 2010].

Zamknięcie powietrza oprócz wpływu na proces infiltracji przyczynia się również do zmian zachodzących w szkielecie gruntowym. Problem ten dotyczy szczególnie dużych konstrukcji

ziemnych takich jak wały i zbocza. Wskutek infiltracji spowodowanej np. gwałtownym podniesieniem się zwierciadła wody lub intensywnymi opadami deszczu dochodzi do zamknięcia znacznych ilości powietrza. Jeśli dojdzie do przelania się wody przez koronę, faza gazowa otoczona będzie z każdej strony przez wodę, która wraz z upływem czasu będzie infiltrować coraz głębiej. Spowoduje to wzrost ciśnienia powietrza, które po osiągnięciu pewnej progowej wartości będzie opuszczało obszar w postaci pęcherzyków. Proces ten może powodować spękania, deformację oraz utratę stateczności [Leśniewska et al., 2007].

Podobne problemy występują również podczas wstrząsów sejsmicznych. Prawidłowa ocena zagrożenia ściśle wiąże się z ilością fazy gazowej obecną w konstrukcji podczas wstrząsów. Brak uwzględnienia fazy gazowej prowadzi do otrzymania zaniżonych wyników ciśnienia wody w porach, nasylenia oraz przemieszczeń, które to w tego typu problemach odgrywają kluczową rolę.

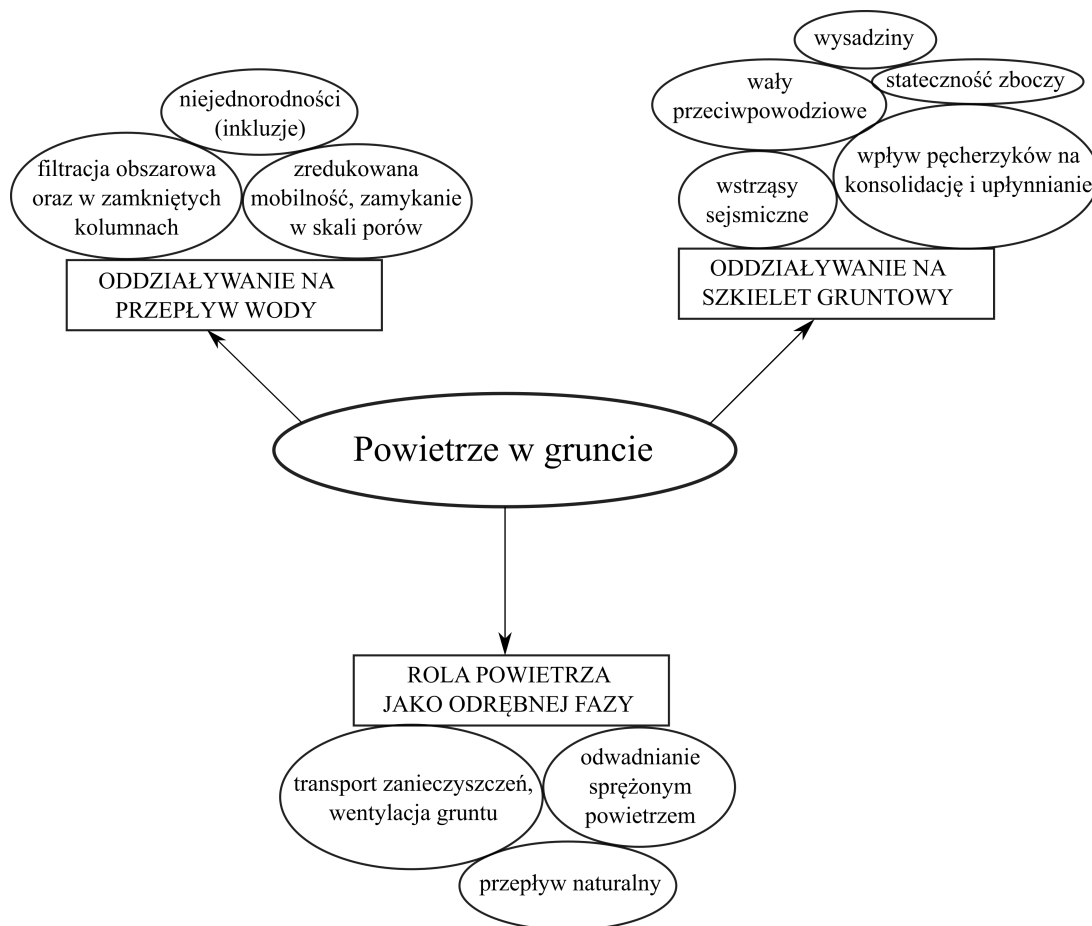
Spękania oraz wysadziny mogą pojawiać się również w sytuacji, kiedy górna warstwa gruntu posiada niską przepuszczalność. Zagadnienie to jest szczególnie istotne dla problemów występujących w strefie przybrzeżnej. Gwałtowne podnoszenie się wody gruntowej powoduje, że w powietrzu znajdującym się między zwierciadłem a słaboprzepuszczalną warstwą (np. nawierzchnia betonowa lub asfaltowa) gwałtownie wzrasta ciśnienie. Skutkiem są wysadziny oraz nierówności pojawiające się w nawierzchni [Parker, 1989].

Uwzględnienie w obliczeniach powietrza odgrywa istotną rolę również w przypadku konsolidacji, która oprócz warunków laboratoryjnych, ma miejsce praktycznie w większości problemów geotechnicznych. Zakładając, że konsolidowana próbka składałaby się tylko i wyłącznie ze szkieletu gruntowego, moglibyśmy założyć że zachowuje się ona sprężysto [Gawin et al., 1995]. Gdyby wprowadzić do próbki wodę, która wypełniłaby wszystkie pory, model stałby się całkowicie nasycony. Taki układ przy założeniu braku odpływu wody jest nieściśliwy. Natomiast w warunkach z drenażem, zmiana objętości próbki zależeć będzie od ilości wody, która została z niej wydrenowana. Jeśli jednak w próbce obecna jest również faza gazowa (stan niepełnego nasylenia), założenie to nie jest prawdziwe, ponieważ w trakcie konsolidacji próbka zmniejszyłaby swoją objętość o sumę objętości obu tych płynów [Gawin et al., 1995].

Powietrze oprócz wpływu na pozostałe dwie fazy ośrodka gruntowego, samo w sobie jest również istotnym składnikiem procesów zachodzących w przyrodzie lub generowanych przez człowieka. Do najważniejszych z nich z pewnością można zaliczyć stosowanie sprężonego powietrza, które obok wykonywania studni odwodnieniowych często wykorzystywane jest do osuszania podłoża lub obniżania zwierciadła wody gruntowej.

Transport wielu zanieczyszczeń w strefie aeracji odbywa się nie tylko w fazie ciekłej, ale również gazowej. Dotyczy to przede wszystkim lotnych substancji organicznych (ang. *VOC*) oraz fazy gazowej znajdującej się w gruncie jak i poza nim. Powietrze może zostać skażone zarówno poprzez substancje ciekłe, jak i stałe oraz gazowe. Zanieczyszczenie tej fazy jest szczególnie niebezpieczne z uwagi na bardzo dużą mobilność gazu. Skażeniu mogą ulegać zarówno gleba, rośliny, wody jak i ludzie wdychający szkodliwe substancje przenoszone drogą lotną. Do modelowania tego typu problemów konieczne jest wówczas użycie modelu dwufazowego, który w przeciwieństwie do równania Richardsa, bierze pod uwagę fazę gazową.

Naturalnymi czynnikami, które mogą powodować przepływ powietrza są temperatura, fronty atmosferyczne, czy ruchy powietrza. W zależności od przyczyny wartość ciśnienia może



Rysunek 4.1: Problemy inżynierskie związane z przepływem powietrza w gruncie.

zmieniać się od kilku dziesiątych do kilku kPa. Zmiany w poziomie ciśnienia zachodzące na powierzchni Ziemi, powodują również zmiany pod jej powierzchnią. Zależą one od przepuszczalności danego gruntu i wynoszą od kilku do nawet kilkunastu metrów w przypadku skał spękanych.

Poniżej omówione zostały najważniejsze z problemów, których bezpośrednio dotyczy rozprawa doktorska.

#### 4.1 Przepływ naturalny

Ciśnienie powietrza panujące na powierzchni Ziemi, nie posiada jednej ściśle określonej wartości. Średnio wynosi ono 101.325 kPa (w warunkach normalnych) [Kuang et al., 2013]. Wartość ta zmienia się w czasie i powodowana jest następującymi czynnikami: oscylacją ruchów powietrza, dobowymi wahaniami temperatury, frontami atmosferycznymi przesuwanymi się nad powierzchnią Ziemi oraz globalnym ociepleniem/oziębieniem klimatu [Wu et al., 2006]. Najmniejsze wahania powodują dobowe zmiany temperatur oraz oscylacje powietrza z powodu, których ciśnienie rośnie lub maleje o 0.1 kPa w stosunku do swojej wartości średniej. Większe przyrosty ciśnienia możemy zaobserwować dla frontów atmosferycznych, które w zależności od długości trwania oraz intensyfikacji (np. ilość opadów przypadająca na  $m^2$  powierzchni) powodują różnice ciśnień na poziomie od 1 do 3 kPa. Wartość przestrzennej zmiany ciśnienia



Tablica 4.1: Wahania ciśnienia atmosferycznego w zależności od powodującego je czynnika (na podstawie [Kuang et al., 2013]).

	<i>Oscylacje powietrza</i>	<i>Dobowe wahania temperatur</i>	<i>Fronty atmosferyczne</i>	<i>Ocieplenie/oziębienie klimatu</i>
<i>Poziom wahania ciśnienia</i>	<i>Mniej niż 0.1 kPa</i>	<i>0.1 kPa</i>	<i>1 – 3 kPa</i>	<i>0.5 – 3 kPa</i>

atmosferycznego w zależności od przyczyny prezentuje tabela 4.1.

Uzyskane wartości są stosunkowo niewielkie i wynoszą zaledwie 0.1% w stosunku do standardowego poziomu ciśnienia nad powierzchnią Ziemi. W związku z tym można przyjąć, że ciśnienie atmosferyczne nie posiada stałej ściśle określonej wartości, jednak z powodu bardzo małych wahań możemy uznać je za równomierne [Massmann i Farrier, 1992].

Z wahaniami ciśnienia powietrza spotykamy się również pod powierzchnią gruntu. Zjawisko to, jako pierwszy opisał Buckingham w 1904 r. [Buckingham et al., 1904]. Celem jego analizy było określenie zmian wartości ciśnienia powietrza na dowolnej głębokości, które wywołane są wahaniami ciśnienia zachodzącymi przy powierzchni Ziemi. W pracach m. in. [Buckingham et al., 1904, Wu et al., 2006, Ning i Likos, 2004] kontynuowano badania Buckinghama i zaobserwowano, że różnice między ciśnieniami są zmienne w czasie oraz w sytuacji, kiedy osłabia się amplituda ciśnienia. Obie przyczyny zbadano oraz opisano w szeregu publikacji [Nilson et al., 1991, Rohay, 1996, Stephens, 1995] zauważając, że kiedy ciśnienie atmosferyczne spada, faza gazowa obecna w gruncie wypływa do atmosfery. Głębokość, do jakiej powietrze jest w stanie penetrować ośrodek porowaty zależy od jego przepuszczalności oraz struktury. W gruncie jednorodnym może ona wynosić nawet od kilku do nawet kilkunastu metrów [Auer et al., 1996]. W gruncie niejednorodnym, w którym przy powierzchni znajduje się warstwa słabo przepuszczalna propagacja ciśnienia jest jeszcze większa [Tillman Jr i Smith, 2005, Nilson et al., 1991, Elberling et al., 1998]. W modelu numerycznym wykonanym przez [Elberling et al., 1998], założono strefę 10 – 12 m gruntu nienasyconego, aby dokładniej zbadać to zjawisko. Okazało się, że dobowe wahania ciśnienia atmosferycznego powodowały ruchy powietrza na głębokość ponad 10 m. Z największą penetracją fazy gazowej spotykamy się w gruntach spękanych. Powstałe pionowe szczeliny są pewnego rodzaju ścieżkami, którymi powietrze może się swobodnie poruszać nawet w całym zakresie pęknięcia [Ahlers et al., 1999].

## 4.2 Transport zanieczyszczeń, wentylacja gruntu

W gruntowej strefie nienasyconej zachodzi wiele procesów hydrologicznych takich jak infiltracja, parowanie, podciąganie wody przez rośliny, czy erozja. Z uwagi na specyfikę wyżej wymienionych zjawisk oraz swoje umiejscowienie, strefa aeracji jest w pewnym sensie łącznikiem między powierzchnią gruntu a zwierciadłem wody gruntowej, w którym odbywa się ciągły transport fazy ciekłej oraz gazowej.

Wodę, która znajduje się w strefie nienasyconej należy traktować, jako roztwór różnych substancji. Najczęściej jest ona mieszaniną trzech faz, z których składa się ośrodek gruntowy: ciekłej, gazowej oraz rozpuszczonych cząstek szkieletu gruntowego. Ponadto mogą się w niej

znajdować substancje, które przeniknęły z zewnątrz do ośrodka gruntowego. Przy charakteryzowaniu związków zanieczyszczających wodę gruntową stosowane są różne klasyfikacje, które operują zazwyczaj kilkoma kryteriami. Ważniejsze dotyczą genezy substancji, stanu fizycznego, składu chemicznego, czy oddziaływania na organizm człowieka. Przy bardzo ogólnym i schematycznym podziale można wyróżnić zanieczyszczenia biologiczne, czyli bakterie, wirusy, organizmy roślinne i zwierzęce, a także chemiczne, które dzielimy na związki organiczne i nieorganiczne. Bez względu na pochodzenie każda z substancji znajduje się w jednym z trzech stanów skupienia: stałym, płynnym lub lotnym. Ocena stanu fizycznego zanieczyszczenia jest bardzo istotna z uwagi na możliwości mieszania się z wodą, rozpuszczalność, czy łatwość dysocjacji. Stan skupienia decyduje również o możliwości wnikania określonej substancji do wód podziemnych oraz o sposobie jej migracji w cieczy. Zanieczyszczenia stałe np. odpady przemysłowe, komunalne, czy rolnicze mogą powodować powstawanie słabo przepuszczalnych stref, które ograniczać będą infiltrację wód opadowych. Nieczystości płynne to głównie różnego rodzaju ścieki, które najłatwiej przenikają do wód podziemnych. Natomiast zanieczyszczenia lotne to z reguły nieczystości przemysłowe, które przenikają do wód podziemnych wraz z infiltrującymi opadami deszczu. Zanieczyszczenie wód gruntowych substancjami łatwo przechodzącymi w stan gazowy jest szczególnie niebezpieczne w obszarach krasowych, gdzie gazy wydzielające się z zanieczyszczonych wód podziemnych mogą gromadzić się w pustkach skalnych. Problem dotyczy wielu chemicznych związków organicznych takich jak: benzen, chlorek metylenu, toluenu, ksylenu, czy węglowodorów alifatycznych [Macioszczyk i Dobrzyński, 1987].

Lotne związki organiczne uaktywniają się w wielu procesach przemysłowych jako produkty uboczne i stanowią jedno ze źródeł zanieczyszczenia środowiska. Zaliczamy do nich dużą grupę substancji, zawierających atomy tlenu, wodoru, fluoru, chloru, siarki, azotu, czy bromu. Dodatkowo bardzo łatwo przechodzą one ze stanu ciekłego w gazowy i są trudno rozpuszczalne w wodzie.

Proces migracji zachodzi również w fazie powietrznej. W ośrodku gruntowym znajdować się może wiele typów gazów, jednak ich stosunki ilościowe są bardzo zróżnicowane. W strefie aeracji znajdują się głównie dwutlenek węgla, azot i tlen oraz domieszki argonu i innych gazów szlachetnych, a ponadto metanu i wodoru [Macioszczyk i Dobrzyński, 1987]. Uwzględniając rozpuszczalność gazów możemy podzielić je na dwie grupy: łatwo ( $CO_2$  i  $H_2S$ ) i trudno rozpuszczalne (głównie gazy szlachetne). Te pierwsze łatwo wchodzi w reakcję z wodą i tworzą silnie dysocjujące związki. Drugie natomiast występują w wodzie w formie roztworów cząsteczkowych. W trakcie krążenia wód w ośrodku gruntowym (głównie w strefie aeracji) często zaobserwować można przesycenie gazami, czego skutkiem może być ich wydzielanie z powierzchni gruntu.

Wśród technologii oczyszczania gruntów koncentrujących się na usuwaniu zanieczyszczeń z strefy nienasyconej wyróżnia się metody polegające na ich odparowaniu lub desorpcji pod wpływem obniżonego ciśnienia. Klasycznym przykładem takiego rozwiązania jest metoda desorpcji próżniowej zanieczyszczeń (ang. *Soil vapor extraction-SVE*). Działanie metody SVE opiera się na zastępowaniu zanieczyszczonego powietrza gruntowego powietrzem atmosferycznym. Proces odbywa się za pomocą studni odsysających (perforowanych rur) do czasu, aż usunięte zostaną wszystkie zanieczyszczenia obecne w gruncie. Usunięte powietrze z wnętrza gruntu oczyszczane jest w instalacjach znajdujących się na powierzchni np. poprzez adsorpcję na węglu aktywnym,

spalanie lub utlenianie katalityczne [Kawała et al., 2002].

### 4.3 Odwadnianie sprężonym powietrzem

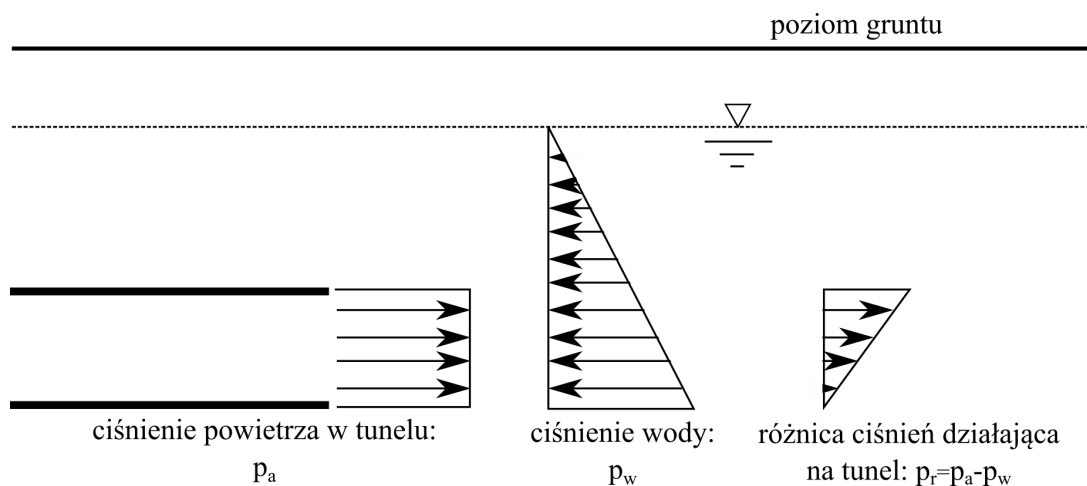
W artykule [Oetl et al., 2004] przedstawiono opis wykorzystania metody osuszania sprężonym powietrzem podczas wykonania tunelu poniżej poziomu wody gruntowej. Przy tego typu pracach konieczne jest, aby obniżyć i utrzymać wysokość zwierciadła wody w bezpiecznej odległości od miejsca, w którym prowadzone są roboty budowlane. Typową technologią jaką stosuje się dla takich robót jest wykonywanie studni odwodnieniowych [Oetl et al., 2004]. Jednak to metoda aplikacji sprężonego powietrza posiada więcej zalet. Największą z ich jest wpływ na zdecydowanie mniejszą powierzchnię gruntu, co ma szczególne znaczenie w przypadku wykonywania tunelu umiejscowionego znacznie poniżej zwierciadła wody. Po drugie powoduje powstawanie mniejszych przemieszczeń w gruncie, ponieważ siły oporu wynikające z przepływu powietrza w pewnym stopniu przeciwdziałają deformacji spowodowanej odwodnieniem [Oetl et al., 2004].

Zastosowanie metody polega na aplikacji sprężonego powietrza wewnątrz tunelu celem wywołania odpływu wody. Rezultatem jest wysuszenie gruntu znajdującego się powyżej tunelu, co daje możliwość wykonywania wykopu w suchych warunkach. Wykorzystywanie sprężonego powietrza posiada jednak ograniczenie wynikające z przedziału przewodności hydraulicznej oscylującego między  $10^{-4}$  a  $10^{-8}$  m/s. Do obliczania wymaganego poziomu ciśnienia powietrza można stosować różne formuły, bazujące między innymi na średnicy tunelu ( $D$ ), czy poziomie wody gruntowej ( $H$ ), np:

$$p_a = \gamma_w \left( H + \frac{2}{3} D \right) . \quad (4.1)$$

Inne, bardziej rozbudowane propozycje można znaleźć np. w [Snee i Javadi, 1996]. Nie uwzględniają one jednak możliwości wystąpienia uwarstwionego gruntu, szybkości tunelowania, czy strat ciśnienia występujących w trakcie osuszania, których określenie jest najistotniejsze w trakcie obliczeń. Najważniejszymi czynnikami wpływającymi na ponoszone straty są: przepuszczalność gruntu, ciśnienie powietrza wewnątrz tunelu oraz wymiary tunelu (długość i przekrój poprzeczny). Wielkość strat jest tym większa, im większe jest aplikowane ciśnienie oraz wymiary tunelu. Uzyskaną wartość ciśnienia powietrza powiększoną o straty aplikuje się w tunelu przyjmując założenie, że równoważą ono ciśnienie wody znajdujące się przy jego dolnej krawędzi, rys. 4.2. Przy górnej natomiast, pojawia się nadciśnienie, które powoduje że woda wypierana jest z gruntu. Rosnący poziom ciśnienia powietrza w gruncie sprawia, że zmniejsza się wartość naprężenia netto ( $\sigma - p_a$ ), a zwiększa wartość ssania ( $p_a - p_w$ ). Wpływa to bezpośrednio na wytrzymałość na ścinanie, która wzrasta w osuszonym obszarze. Zaniedbanie strat ciśnienia powietrza doprowadziłoby do uzyskania stanu, w którym ciśnienie wody gruntowej byłoby większe niż ciśnienie powietrza, czego efektem mogłoby być przesiąkanie wody do tunelu.

W pracy [Oetl et al., 2004] zaprezentowano model numeryczny tunelu znajdującego się w miejscowości Essen (Austria). W związku z tym, że osuszanie wykonywane jest za pomocą sprężonego powietrza, do symulacji wykorzystano model trójfazowy. Aby poprawnie odwzorować proces odwadniania, problem podzielono na trzy części: określenie stanu początkowego, odwadnianie oraz usunięcie gruntu. W całym tunelu ciśnienie aplikowanego powietrza posiadało stałą wartość na poziomie 1.4 bara, natomiast ciśnienie wody rosło liniowo wraz z głębokością.



Rysunek 4.2: Schemat działania odwodnienia sprężonym powietrzem.

Wynika z tego, że wraz ze zmniejszającą się odległością do korony tunelu zwiększa się różnica między wspomnianymi wyżej ciśnieniami. Powoduje to przepływ sprężonego powietrza przez powierzchnię tunelu oraz gruntu znajdującego się w jego sąsiedztwie (czas trwania to 24 godziny). Z otrzymanych wyników nasycenia wody oraz ciśnienia powietrza wynika, że wartości te zmieniają się tylko i wyłącznie w najbliższym otoczeniu tunelu, nie powodując żadnych zmian w bardziej oddalonych strefach gruntu. Efektem aplikacji sprężonego powietrza oraz odpływu wody, było osunięcie się szkieletu gruntowego w kierunku górnej powierzchni tunelu pod koniec procesu odwadniania. W miejscach, gdzie ciśnienie wody przekraczało wartość ze stanu początkowego dochodziło również do obniżenia naprężeń efektywnych.

Po osuszeniu nastąpił ostatni etap symulacji, czyli usunięcie gruntu. Efektem czego otrzymano znaczne przemieszczenia bezpośrednio przy ścianach tunelu zmieniające się od 0 przy koronie do prawie 10 cm przy dnie. Wykonanie wykopu spowodowało kolejny spadek naprężeń efektywnych w okolicy korony tunelu, natomiast wzrost przy narożach. Porównanie z badaniami in-situ wykazało, że końcowe przemieszczenie spowodowane wykopem oraz pozostałymi etapami można ograniczyć o 2.8 cm w porównaniu do odwodnienia w postaci studni.

Analizując przedstawiony przez [Oettl et al., 2004] przykład, należy zwrócić szczególną uwagę na optymalny dobór modelu obliczeniowego. Wykorzystany model pozwalał na równoległe obliczenie zarówno przepływu, jak i deformacji ośrodka gruntowego. Uwzględnienie w symulacji wszystkich faz ośrodka gruntowego pozwoliło na prawidłowe odzwierciedlenie analizowanego zjawiska. Z perspektywy problemu było to ważne zarówno pod kątem uwzględnienia ciśnienia aplikowanego powietrza jak i deformacji szkieletu gruntowego, która jest bardzo istotna w analizie zagadnień związanych z obniżaniem zwierciadła wody w gruntach niespoistych.

#### 4.4 Zredukowana mobilność fazy gazowej, zamykanie powietrza w skali porów

Modelując przepływ wody w gruncie za pomocą równania Richardsa należy być świadomym ograniczeń, które wiążą się z jego założeniami. Jednym z nich jest przyjmowanie nieskończenie dużej mobilności powietrza. Warunek ten, sprawia że faza ciekła, która infiltruje ośrodek

gruntowy nie napotyka żadnego oporu ze strony fazy gazowej. Problem występuje nawet wtedy, kiedy powietrze obecne w porach może swobodnie (bez ograniczeń wynikających z warunków brzegowych) połączyć się z atmosferycznym. Chcąc więc poprawnie odzwierciedlić powyższy problem należałoby użyć modelu dwufazowego, który pozwala na uwzględnienie mobilności płynu oraz gazu wypełniającego pory. Numeryczny eksperyment wykonany przez [Tegnander, 2001] wykazał, że zgodność między równaniem Richardsa a modelem dwufazowym można uzyskać tylko jeśli lepkość powietrza będzie ponad 100 razy większa od lepkości wody. W rzeczywistości jednak, wartości te różnią się około 50 do 60 razy. Należy również mieć na uwadze fakt, że mobilność płynu zależy nie tylko od lepkości, ale również od względnej przepuszczalności. Dodatkowy spadek mobilności powietrza w stosunku do mobilności wody może być uzyskany jeśli względna przepuszczalność powietrza będzie zdecydowanie mniejsza od względnej przepuszczalności wody. Z takim zjawiskiem mamy do czynienia, kiedy nasycenie powietrza zbliża się do wartości końcowej [Forsyth, 1988].

Zdecydowanie większe różnice między równaniem Richardsa a modelem dwufazowym otrzymamy, kiedy wpływ na mobilność gazu oprócz jego cech fizycznych będą miały warunki brzegowe. Wiele z nich np. intensywne opady deszczu, powódzie, czy nawadnianie obszarów rolnych, powoduje że powietrze obecne w porach nie ma już swobodnego kontaktu z powietrzem atmosferycznym. Problem ten jest oczywiście tym większy, im większego procentu krawędzi brzegowych dotyczy. W skrajnych sytuacjach, kiedy wypływ powietrza jest niemożliwy przez którąkolwiek z krawędzi, faza gazowa zostaje zamknięta w przestrzeni porów. Ma to miejsce np. w czasie zatapania wałów przeciwpowodziowych, czy infiltracji w zamkniętych kolumnach. W wymienionych sytuacjach infiltrująca woda sprawia, że powietrze jest kompresowane, a jego ciśnienie cały czas rośnie. Wraz z upływem czasu osiąga ono na tyle dużą wartość, że pozwala na przedostanie się powietrza w formie pęcherzyków do atmosfery. Mechanizm ten w literaturze anglojęzycznej często określany jest jako ang. *breathing mechanism* [Yiqi i Zhou, 2010]. Część fazy gazowej, która nie wydostała się z przestrzeni porów jest rozpuszczana w wodzie lub pozostaje w gruncie w formie odizolowanych od siebie pęcherzyków. Objętość tą definiuje się jako rezydualną zawartość powietrza. Innymi słowy jest to pewna część fazy gazowej znajdująca się w gruncie, która nie może być wyparta poprzez infiltrującą wodę. Jej wielkość zależy głównie od prędkości nawadniania danego obszaru oraz struktury gruntu. Powolny proces infiltracji, małe i wąskie pory oraz wysokie gradienty ciśnienia powodują, że rezydualna zawartość powietrza będzie osiągać mniejsze wartości. W przeciwnym wypadku będzie ona rosła. Problemy te zbadano doświadczalnie oraz numerycznie w pracach m. in. [Hammecker et al., 2003, Wang et al., 1998].

Przy wysokich wartościach stopnia nasycenia powietrze zamknięte jest w formie odizolowanych od siebie małych pęcherzyków. Nie jest to jednak jedyna forma niepełnego nasycenia, jaka występuje w gruntach. Czasami dochodzi do sytuacji, kiedy gaz wytwarzany poprzez rozkład materii organicznej wywiera ciśnienie na szkielet tak duże, że tworzą się pęcherze powietrza znacznie większe niż pory gruntu. Taką postać częściowego nasycenia definiujemy jako "*gassy soil*" [Pande i Pietruszczak, 2015].

W równaniu Richardsa w związku z rozpatrywaniem tylko przepływu fazy ciekłej, nie jest możliwe uwzględnienie obecności powietrza w gruncie. Efektem jest np. spowolnienie procesu infiltracji, czy uzyskanie pełnego nasycenia bez względu na strukturę gruntu.

## 4.5 Infiltracja na dużych obszarach oraz w zamkniętych kolumnach

Poruszony w poprzednim podrozdziale aspekt ograniczonej mobilności i zamykania powietrza spowodowany warunkami brzegowymi dotyczy szerokiej gamy problemów, wśród których znajdują się infiltracja na dużych obszarach oraz przepływ w zamkniętych kolumnach. O ile model zamkniętej kolumny spotykany jest zazwyczaj w laboratorium, to z nawadnianiem dużych obszarów spotykamy się w procesie krążenia wód w przyrodzie, czy rolnictwie. Część opadów, która nie zostaje wchłonięta przez glebę spływa po powierzchni gruntu do zbiorników wodnych. W trakcie spływu w strefie nienasyconej dochodzi do wcześniej omówionego zjawiska określanego jako ang. *breathing mechanism*. Opady deszczu powodują również, że górna część gruntu staje się trudno nieprzepuszczalna dla powietrza. Taki warunek spowoduje, że założenie o ciągłości między powietrzem w porach a powietrzem atmosferycznym nie będzie spełnione. Przykład takiej symulacji można znaleźć w pracach [Touma i Vauclin, 1986, Touma et al., 1984, Vachaud et al., 1973], gdzie wykonano model kolumny gruntu z zamkniętym i nieprzepuszczalnym dnem.

Modelując tego rodzaju problem należy mieć na uwadze, że ciśnienie powietrza znajdującego się w porach sinusoidalnie zmienia się w czasie. Rośnie ono do pewnej wartości, przy której faza gazowa przenika przez fazę ciekłą wydostając się w formie pęcherzyków na powierzchnię gruntu, a następnie spada do poziomu ciśnienia atmosferycznego, aby ponownie wzrosnąć. Maksymalna wartość ciśnienia dla jakiej powietrze uchodzi do atmosfery określana jest w literaturze jako ang. *air-breaking value* ( $p_{break}$ ), natomiast wartość przy której proces ten się kończy to ang. *air-cloasing value* ( $p_{close}$ ) [Wang et al., 1998]. Wspomniany mechanizm wykorzystano do symulacji numerycznej w artykule [Delfs et al., 2013], który jest również nawiązaniem do eksperymentu wykonanego przez [Smith i Woolhiser, 1971]. Polegał on na symulacji przepływu powierzchniowego wody po górnej krawędzi próbki gruntu (pozostałe były szczelnie zamknięte). W trakcie wykonywania doświadczenia można było zaobserwować 3 główne etapy: infiltracja wody aż do osiągnięcia pełnego nasycenia, rozpoczęcie wypływu z koryta oraz kontynuacja wypływu z koryta przy malejącej infiltracji. Wyniki przedstawiające stosunek eksperymentalnych wartości wypływu porównano z równaniem Richardsa. W pierwszych dwóch etapach otrzymano bardzo dobrą zgodność, natomiast w trzecim uzyskano znaczące różnice. Powodem było kompresowanie fazy gazowej w porach gruntu, spowodowane brakiem możliwości swobodnego opuszczenia przez nią obszaru. Rosnący poziom ciśnienia doprowadził do wydostawania się powietrza przez fazę wodną w formie pęcherzyków, co zaobserwowano w eksperymencie.

W modelu [Delfs et al., 2013] przepływ wody i powietrza w gruncie sprzężono z przepływem wody na powierzchni terenu. Zastosowano szczególną postać warunku brzegowego dla fazy gazowej pozwalającą na regulowanie tworzącej się nadwyżki ciśnienia. Aby uwzględnić w obliczeniach wspomniany wyżej efekt, zastosowano model 2PH. Dla górnej krawędzi użyto warunku brzegowego trzeciego rodzaju opisującego wymianę masy odpowiednich faz pomiędzy poszczególnymi powierzchniami granicznymi:

$$\begin{aligned} q_c^1 &= -\rho^1 \lambda^1 (p^H + (p^c - p_e^g) |_{\Gamma_c}) \\ q_c^g &= \rho^g \lambda^g p_e^g |_{\Gamma_c} \\ q_c^H &= q_c^1 \end{aligned} \quad , \quad (4.2)$$

gdzie  $p_e^g |_{\Gamma_c}$  i  $p^c |_{\Gamma_c}$  to odpowiednio ciśnienie fazy gazowej oraz kapilarne na powierzchni gra-

nicznej  $\Gamma_c$ . Całkowity strumień  $q_c^1$  oraz  $q_c^g$  określają równania (4.2).  $\lambda$  jest parametrem odpowiedzialnym za określenie przesiąkania:

$$\lambda^\alpha = \frac{k_c^\alpha |\Gamma_c|}{\mu^\alpha a^\alpha}, \quad (4.3)$$

gdzie,  $a$  - grubość powierzchni granicznej,  $\alpha$  - odpowiednia faza (woda lub gaz). Założenie przyjęte w równaniu (4.2) pozwoliło na zmianę warunków brzegowych w zależności od wartości ciśnienia. Dla fazy gazowej waha się ono między  $p_{break}$  i  $p_{close}$  - ciśnienie zbliżone do atmosferycznego. Osiągnięcie  $p_{break}$  daje możliwość swobodnego wypływu powietrza przez grunt oraz wodę znajdującą się na powierzchni. Po obniżeniu ciśnienia, górna krawędź ponownie staje się nieprzepuszczalna dla fazy gazowej. Cała procedura sterowana jest parametrem  $f_{break}$  zmieniającym się od 0 do 1, szerszy opis można znaleźć w [Delfs et al., 2013].

W artykule [Delfs et al., 2013] wykonano również analizę pod kątem optymalnego rozmiaru powierzchni granicznej między oboma fazami. Dotyczyła ona grubości, która waha się od 10 do  $10^{-5}$  m odpowiednio co jeden rząd wielkości. Dla powierzchni granicznych mniejszych od 1 m wartość przepływu dla obu faz tylko nieznacznie się zmienia. Jednak w przypadku założenia dużej powierzchni granicznej (większej od 1 m) wartość przepływu różni się nawet o połowę. Liczne wykresy przedstawione w [Delfs et al., 2013] pokazują, że założenie powierzchni granicznej równej  $10^{-3}$  m lub mniejszej powoduje uzyskanie tych samych wyników.

Równanie Richardsa, za pomocą którego początkowo wykonano obliczenia, nie posiada możliwości manipulacji ciśnieniem fazy gazowej z uwagi na jedno z jego podstawowych założeń mówiące o swobodnym przepływie między powietrzem w porach a atmosferycznym. W przypadku niejednorodnego gruntu oraz braku możliwości swobodnego wypływu nie jest ono w stanie poprawnie przedstawić wyników otrzymanych eksperymentalnie. Kluczowym dla dokładnego przedstawienia fizyczności opisywanego zjawiska okazało się zastosowanie modelu dwufazowego pozwalającego na uwzględnienie zmienności ciśnienia powietrza.

#### 4.6 Niejednorodności w ośrodku gruntowym

Kolejnym czynnikiem ograniczającym zastosowanie równania Richardsa jest niejednorodna struktura gruntu. Szczególnym przypadkiem różnicy między modelem 2PH a równaniem Richardsa jest występowanie tzw. bariery ciśnienia wejścia powietrza (ang. *air-entry barriers* lub AEB). AEB's są regionami występującymi w materiale drobnoziarnistym, które pozostają całkowicie lub prawie całkowicie nasycone, nawet w przypadkach kiedy ciśnienie wody jest znacząco poniżej 0. Eksperyment opisany w [Silliman et al., 2002] pokazał, że z gruboziarnistych inkluzji gruntu znajdujących się w strefie kapilarnej nie drekuje się woda, z uwagi na materiał drobnoziarnisty, w którym się znajdowały. Podobne badanie przeprowadzili [Kuang et al., 2011] pokazując, że drenaż z kolumny wypełnionej piaskiem grubym jest utrudniony z uwagi na obecność cienkiej warstwy piasku drobnego w górnej warstwie modelu. Strefa ta pozostała prawie całkowicie nasycona oraz charakteryzowała się bardzo niską przepuszczalnością dla powietrza. Spowodowało to opóźniony drenaż z gruboziarnistych inkluzji przy wartości ssania zdecydowanie wyższej niż wynikałoby z krzywej retencji gruntu.

Inne prace, w który skupiano się na analizie gruntów niejednorodnych zawierających gru-

boziarniste inkluzje otoczone piaskami drobnoziarnistymi, to np. [Dunn, 2005, Dunn i Silliman, 2003, Haberer et al., 2015, Szymańska et al., 2016, Vasin et al., 2008]. Analizując przypadek, w którym mamy do czynienia z kilkoma odseparowanymi od siebie inkluzjami, można zauważyć dwa ciekawe zjawiska. Po pierwsze, jeśli niejednorodny grunt podlega drenażowi ze stanu pełnego nasycenia, inkluzje pozostaną nasycone dopóki ssanie osiągnie wartość ciśnienia wejścia powietrza otaczającego je materiału, które może być zdecydowanie większe od ich własnego. Po drugie, w trakcie infiltracji materiał drobnoziarnisty zostanie całkowicie lub prawie całkowicie nasycony przy względnie dużym ujemnym ciśnieniu, co odpowiadać będzie mniejszemu nasyceniu w materiale gruboziarnistym. Jednakże, kiedy pory otaczającego inkluzje materiału są całkowicie nasycone wodą, powietrze zamknięte w gruboziarnistych inkluzjach nie jest w stanie uciec, nawet jeśli ciśnienie wody w obszarze jest dodatnie (większe niż atmosferyczne), inkluzje pozostaną nienasycone. Oba typy zachowań gruntu zostały potwierdzone badaniami eksperymentalnymi oraz symulacjami numerycznymi [Dunn i Silliman, 2003, Dunn, 2005, Vasin et al., 2008, Szymańska et al., 2016]. Można je również zaobserwować dla innych par płynów np. woda-NAPL, czy woda- $CO_2$  [Dunn i Silliman, 2003, Saadatpoor et al., 2009, Szymkiewicz et al., 2011]. Jeśli ośrodek gruntowy będzie zawierał dużą ilość inkluzji, możliwe jest stworzenie uśrednionego modelu z parametrami efektywnymi, które opisywane będą przez krzywe retencji oraz funkcje przepuszczalności odpowiednich faz [van Duijn et al., 2007, Szymkiewicz et al., 2011, Szymkiewicz et al., 2012, Szymkiewicz, 2012, Mikelic et al., 2002].

Podobną sytuację możemy zaobserwować kiedy materiał jest częściowo nasycony i zawiera niewielkie ilości powietrza. Wówczas drobnoziarnisty grunt, jakim jak piasek, można traktować jako prawie nieprzepuszczalny dla powietrza (w odpowiedniej skali czasowej). Podczas drenażu powietrze może swobodnie przemieszczać się z materiału drobnego do grubego tylko, kiedy wymagana granica ciśnienia wejścia powietrza zostanie osiągnięta. Znaczący to, że piasek gruboziarnisty jest całkowicie nasycony nawet jeśli ciśnienie kapilarne w obszarze odnosi się do mniejszej wartości nasycenia w piasku drobnoziarnistym. Opisany efekt możemy łatwo odwzorować używając modelu 2PH, ponieważ równanie Richardsa zakłada, że powietrze w porach jest połączone z atmosferycznym. Szczegółowa analiza tego zjawiska przedstawiona została w rozdziałach nr 5 i 6.

#### 4.7 Wpływ pęcherzyków powietrza na proces konsolidacji

Podstawy teorii konsolidacji opublikowane przez Carla von Terzaghi'ego sformułowane zostały dla gruntów nasyconych. W rzeczywistości, większość problemów geotechnicznych dotyczy jednak gruntów nienasyconych. Przykładem są chociażby zapory ziemne, pasy startowe lotnisk, czy autostrady pod które stosuje się nasypy z nienasyconych i zagęszczonych gruntów.

Proces konsolidacji polega na odkształceniu gruntu wskutek przyłożonego obciążenia, które odbywa się równocześnie z rozpraszaniem nadwyżki ciśnienia wody w porach. Gdyby konsolidowana próbka składała się tylko ze szkieletu gruntowego i wody (całkowite nasycenie), a wpływ byłby niemożliwy to układ taki jest nieściśliwy (zakładając brak ściśliwości faz ośrodka gruntowego). Oznacza to, że wzrost obciążenia ściskającego nie spowoduje odkształceń próbki. Natomiast w warunkach z drenażem próbka będzie ściśliwa, a jej zmiana objętości zależy bezpośrednio od ilości wydrenowanej wody. W gruntach nienasyconych w porach gruntu oprócz



fazy ciekłej znajduje się jeszcze faza gazowa, dlatego zmiana objętości próbki w tym przypadku zależy będzie od sumy objętości obu tych faz. Powietrze znajdujące się w porach ma również wpływ na mechaniczne zachowanie się gruntu, które możemy zdefiniować używając dwóch niezależnych zmiennych stanu naprężenia - naprężenia netto oraz ssania. Równania opisujące jednowymiarową konsolidację w gruncie nienasyconym prezentują się następująco [Fredlund i Hasan, 1979]:

$$d\varepsilon = m_1^s d(\sigma_z - p_a) + m_2^s d(p_a - p_w) , \quad (4.4)$$

$$d\Theta_w = m_1^w d(\sigma_z - p_a) + m_2^w d(p_a - p_w) , \quad (4.5)$$

$$d\Theta_a = m_1^a d(\sigma_z - p_a) + m_2^a d(p_a - p_w) , \quad (4.6)$$

gdzie  $m_1^\alpha$  i  $m_2^\alpha$  to współczynniki odpowiadające za zmianę objętości danej fazy w stosunku do naprężenia netto i ssania. Powyższe równania pozwalają na uwzględnienie przepływu zarówno wody jak i powietrza, a poniższy związek między parametrami  $m$  pozwala na przekształcenie równań (4.4)- (4.6) do postaci umożliwiającej opis gruntu nasyconego:

$$m_1^s = m_1^a + m_1^w \quad \text{oraz} \quad m_2^s = m_2^a + m_2^w . \quad (4.7)$$

Najprostszy test konsolidacji może być wykonany w edometrze. Jednak warunki jednoosiowe oraz brak możliwości pomiaru ciśnienia wody w porach sprawiają, że to badanie trójosiowego ściskania lepiej odzwierciedla warunki terenowe. Jedną z możliwości przeprowadzania testu jest zwiększanie naprężenia netto (najczęściej poprzez zwiększanie  $\sigma_3$ ), przy stałej wartości ssania. W trakcie ściskania próbki wzrośnie ciśnienie wody i powietrza w porach. Poziom do jakiego wzrosną oba ciśnienia zleżeć będzie od tempa z jakim przykładane jest naprężenie. Kiedy dzieje się to szybko tylko nadwyżka ciśnienia fazy gazowej zostanie rozproszona, natomiast ciśnienie fazy ciekłej rozpraszane będzie powoli. Powodem jest bardzo duża przepuszczalność powietrza w stosunku do przepuszczalności wody. W warunkach nasyconych również występuje problem dotyczący dysypacji nadmiaru ciśnienia wody w porach. Jego fizyka jest podobna, jednakże powstająca nadwyżka ciśnienia jest zdecydowanie większa niż w warunkach nienasyconych.

Często w warunkach terenowych dochodzi do sytuacji, w której budowla ziemna przechodzi ze stanu nasyconego w nienasycony i odwrotnie. Przykładem może być rdzeń wału przeciwpowodziowego, który wykonywany jest w stanie suchym. Kiedy poziom wody rośnie dokonuje się jego saturacja przy jednoczesnym nacisku od warstw gruntowych, które na nim spoczywają.

#### 4.8 Zamykanie powietrza w wałach przeciwpowodziowych

Przykładem awarii, w której decydujący wpływ miało zamknięte powietrze jest zniszczenie zapory Jupille (Belgia 1961). Wskutek znacznej ilości opadów, ciśnienie powietrza w porach zwiększało się, co doprowadziło do spadku wytrzymałości na ścinanie. Wynikiem tego było osunięcie się korony wału wykonanej z popiołów lotnych [Leśniewska et al., 2007].

Również szybko penetrująca nienasycony ośrodek gruntowy woda może spowodować zamknięcie powietrza. Zjawisko to może wystąpić na dwóch poziomach: porów oraz strukturalnym. W pierwszym przypadku małe pęcherze powietrza mieszają się z wodą i tworzą jednolity

ośrodek [Leśniewska et al., 2007]. W drugim przypadku dochodzi do utworzenia się relatywnie dużych nienasyconych obszarów gruntu otoczonych materiałem nasyconym. Wiąże się to z brakiem makroskopowej jednorodności, która jest szczególnie niepożądana w konstrukcjach ziemnych.

Z perspektywy zagrożenia dla środowiska to właśnie wały przeciwpowodziowe są kolejnym istotnym zagadnieniem, w którym zamykanie powietrza ma istotny wpływ na ich zachowanie się podczas katastrof. Ich awarie zachodzą najczęściej w sposób nagły i są bardzo trudne do przewidzenia. Tyczy się to zarówno konstrukcji powstałych w sposób naturalny jak i tych, które utworzone zostały przez człowieka. Mimo, że awaria przebiega w sposób nagły, to o zniszczeniu może decydować jeden czynnik, który wystąpił w sposób nagły lub wiele wolniejszych procesów o charakterze postępującym, które występują w obrębie konstrukcji bez żadnych wcześniejszych widocznych oznak zewnętrznych. Pomijając wystąpienie nagłej zmiany warunków zewnętrznych (np. obfity deszcz), często trudne jest podanie jednoznacznej przyczyny katastrofy. Dlatego bardzo ważna jest analiza oddziaływań panujących wewnątrz wału, które w dłuższej perspektywie mogłyby przyczynić się do jego zniszczenia.

Badania doświadczalne [Leśniewska et al., 2007] prowadzone na temat zjawiska filtracji zachodzącego w wałach przeciwpowodziowych, pokazują że krótkoterminowa infiltracja: intensywne opady deszczu, przelewanie wody przez koronę grobli itp., często pozostawiają zamknięte strefy nienasyconego powietrza wewnątrz wałów. Problem ten w warunkach in-situ jest bardzo trudny do wcześniejszego wychwycenia z uwagi na brak monitoringu pozwalającego na śledzenie nasycenia porów gruntu wodą. Natomiast przygotowując model 2D w warunkach laboratoryjnych proces nasycenia jest stosunkowo łatwy do śledzenia. Dodatkowo dokonać można pomiarów ciśnienia oraz objętości powietrza znajdującego się w porach gruntu, które w zależności od przeprowadzonego badania może powodować zaburzenia przepływu lub rozdzielenie faz [Zaradny, 1990, Lesniewska et al., 2009, Leśniewska et al., 2007, Szymańska et al., 2016].

Jednymi z pierwszych obserwacji potwierdzających uwalnianie z wałów przeciwpowodziowych przez pęcherzyków powietrza były prace [Free i Palmer, 1941, Youngs i Peck, 1964]. Stwierdzono w nich, że zamknięte powietrze może ulecieć jedynie w formie pęcherzyków, kiedy ciśnienie powietrza w porach jest wystarczająco duże, aby pokonać siły działające na powierzchni granicznej woda-powietrze. W pracy [Leśniewska et al., 2007] opisano serię doświadczeń polegających na przelewaniu się wody przez koronę początkowo nienasyconego wału. Celem było badanie związku między zamykaniem powietrza wewnątrz gruntu a pojawianiem się spękań. W trakcie eksperymentu, powietrze nie zdążyło opuścić korpusu wału i zostało zamknięte w strefie poniżej korony, co było zgodne z obserwacjami poczynionymi przez [Lesniewska et al., 2009]. W każdym stanowisku badawczym odnotowano gwałtowny wzrost lub skok ciśnienia w czujnikach znajdujących się w kierunku, w którym ulatywało powietrze. Wykonane pomiary wykazały, że różnica między ciśnieniem w inkluzjach a w pozostałych częściach modelu wynosiła średnio około 10 hPa (maksymalnie 25 hPa). Skutkiem otrzymanej różnicy ciśnień było pojawienie się pęcherzyków powietrza, które ulatywały w kierunku skarpy odpowietrznej wału oraz powstawanie miejscowych pęknięć w strukturze gruntu.

W zależności od badanego wału powietrze nie zawsze zdążyło całkowicie opuścić obszar. W niektórych przypadkach pęcherzyki powietrza uleciały bardzo szybko powodując lokalne po-

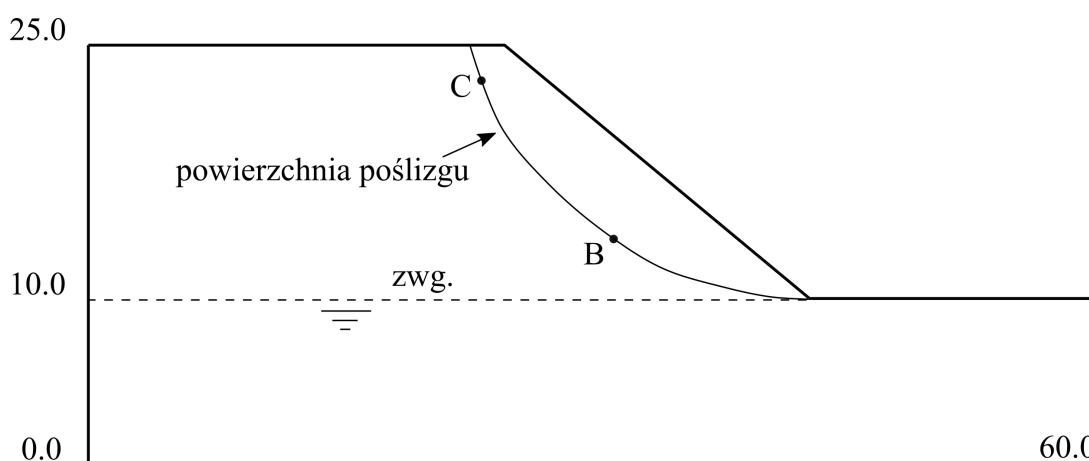
wierzchniowe zniszczenia gruntu. W pozostałych natomiast osiągnięto stan ustalony i powietrze zostało zamknięte aż do końca testu.

W pobliżu miejsc, w których znajdowało się zamknięte powietrze pojawiały się spękania, których największą ilość zaobserwowano na granicy między gruntem suchym a nasyconym. Uszkodzenie powstałe w ten sposób jest bardzo trwałe i może wystąpić nawet wtedy, kiedy powietrze opuściło już konstrukcję wału. Oprócz pęknięć w strefach tych występują również maksymalne przemieszczenia (nie dotyczy to modeli, w których powietrze zdążyło całkowicie opuścić wał). Strefy zamkniętego powietrza jak i powstałe w ten sposób spękania mogą mieć potencjalnie duży wpływ na późniejszą eksploatację wału. Stają się one bowiem często głównymi przyczynami poważniejszych awarii takich jak np. osuwanie się skarp.

#### 4.9 Wpływ fazy gazowej na stateczność zbocza

Problem stateczności zbocza jest jednym z podstawowych zagadnień geotechnicznych. Analiza tego problemu możliwa jest w wielu programach numerycznych np. PLAXIS, jednak najczęściej nie uwzględnia ona fazy gazowej, a jedynie przepływ wody i deformację szkieletu gruntowego. Siłami, które najczęściej wywołują utratę stateczności skarpy są ciężar zalegającej zabudowy oraz siły hydrodynamiczne wywołane przepływem wody przez grunt. Przyczyny ich wystąpienia mogą być różne np. podmycie, przeciążenie zbocza, czy obfite opady deszczu, które zawsze oddziałują niekorzystnie na stateczność niezależnie od kwestii powietrza.

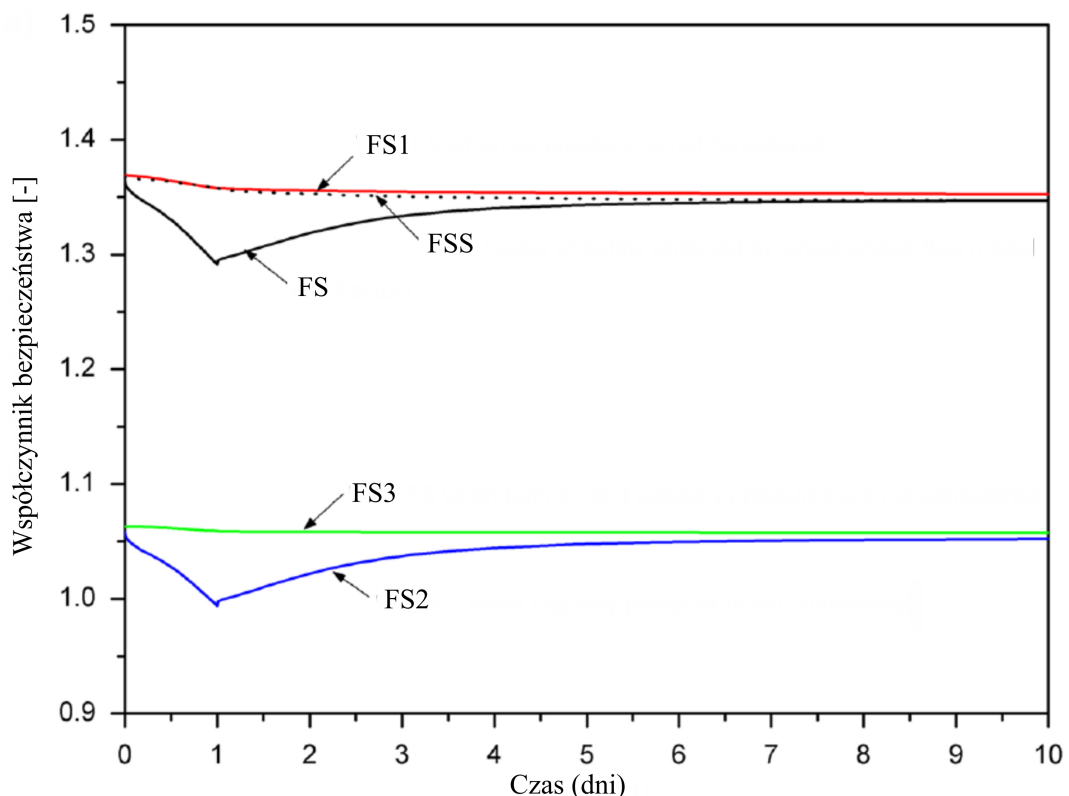
Praca [Sun et al., 2015] przedstawia porównanie modelu trójfazowego z dwufazowym oraz jednofazowym, celem oceny wpływu powietrza znajdującego się w porach gruntu na stateczność zbocza oraz proces infiltracji. Symulacje wykonano dla czasu wynoszącego 10 dni, zakładając że opad (5 mm/h) wystąpił tylko pierwszego dnia. Zwierciadło wody gruntowej założono tuż przy dnie zbocza. Oba punkty, w których dokonywano pomiaru znajdowały się na powierzchni poślizgu: B - cztery metry powyżej zwierciadła wody, C - metr poniżej górnej powierzchni terenu- rys. 4.3.



Rysunek 4.3: Geometria przyjęta w modelu [Sun et al., 2015].

W trakcie infiltracji spowodowanej opadami deszczu, powietrze znajdujące się w strefie nienasyconej popychane jest w głąb gruntu przez spływającą wodę. Na początku powoduje to

wzrost ciśnienia powietrza, które przy pewnej krytycznej wartości ponownie zaczyna spadać do wartości ciśnienia atmosferycznego (mechanizm ten opisano we wcześniejszych podrozdziałach). W zależności od położenia analizowanego punktu (B lub C) maksymalna wartość ciśnienia osiągnięta jest w innym czasie. W pkt. B szczytowa wartość odpowiada czasowi równemu 1.4 dnia. Dowodzi to, że nawet jeśli opady deszczu się skończyły, to ciśnienie fazy gazowej w gruncie nadal może rosnąć. Potwierdza to również przebieg ciśnienia kapilarnego dla punktu C, które dopiero po czasie większym od dwóch dni zaczyna wzrastać. Porównując zachodzącą w obu modelach zmianę wartości ciśnienia kapilarnego oraz ciśnienia wody w czasie można dostrzec, że faza gazowa obecna w porach wpływa na prędkość z jaką infiltrowała woda. Powoduje to otrzymanie płytszej strefy nasycenia oraz mniejszego ciśnienia kapilarnego dla tej samej głębokości.



Rysunek 4.4: Zmiana współczynnika bezpieczeństwa w zależności od wybranego modelu obliczeniowego [Sun et al., 2015].

Przepływ powietrza spowodowany opadami deszczu ma również bezpośredni wpływ na stateczność zboczy. Wykonane w pracy [Sun et al., 2015] obliczenia modelem trójfazowym (FS) pokazują, że współczynnik bezpieczeństwa dla danej powierzchni poślizgu spada w trakcie opadów osiągając najmniejszą wartość w momencie ich ustania, po czym rośnie, by ostatecznie osiągnąć stałą wartość. Aby dokładniej przyjrzeć się temu zjawisku wykonano trzy symulacje zakładające odpowiednio:  $p_a = 0$  (FS1),  $p_c = 0$  (FS2),  $p_a = 0$  i  $p_c = 0$  (FS3). Założenie ciśnienia powietrza równego 0 kPa powoduje, że otrzymujemy wyższy współczynnik stateczności niż w przypadku wyjściowej analizy. Jednak maksymalna rozbieżność pomiędzy poszczególnymi współczynnikami to zaledwie 0.07 i występuje ona w chwili, w której skończyły się już opady

deszczu. Największą różnicę obserwujemy dla modelu, w którym założono zerową wartość ciśnienia kapilarnego. Mimo, że zmiana współczynnika w czasie kształtuje się w podobny sposób, to otrzymany współczynnik bezpieczeństwa różni się od wyjściowego o ponad 0.3. Natomiast w ostatnim modelu przyjmując, że oba rozpatrywane ciśnienia są zerowe, otrzymujemy niemal stałą wartość współczynnika bezpieczeństwa, która podobnie jak krzywa (FS2) znacząco odbiega od krzywej uzyskanej dla modelu trójfazowego.

Analizując rys. 4.4 łatwo zauważyć, że kluczową wartością w perspektywie oceny stateczności zboczy jest ciśnienie kapilarne, które powoduje uzyskanie mniejszych współczynników bezpieczeństwa niż rzeczywiste. Wpływa ono jednak korzystnie, bowiem otrzymane wartości współczynników sprawiają, że dysponujemy większym zapasem bezpieczeństwa. Natomiast pominięcie fazy gazowej wpływa niekorzystnie na ocenę stabilności zboczy. Dodatkowo, wartości współczynnika otrzymane podczas analizy są bardzo zbliżone do tych, które otrzymano używając modelu jednofazowego (krzywa FSS).

#### 4.10 Wpływ wahań zwierciadła wody na powstawanie wysadzin

Wahania zwierciadła wody mogą być spowodowane wieloma czynnikami, które możemy podzielić na trzy główne grupy [Todd, 1980], są to: procesy zachodzące w przyrodzie (np. ewapotranspiracja), meteorologiczne (deszcz, wiatr, mróz) oraz pływy. Przyporządkowanie ich do konkretnego problemu zależy głównie od skali czasu. Z badań przeprowadzonych przez [Todd, 1980, Tillman Jr i Smith, 2005] wynika, że tylko krótkoterminowe wahania zwierciadła wody powinny być brane pod uwagę w rozważaniu przepływu powietrza. Natomiast w pracy [Parker, 1989] udowodniono, że znaczący przepływ powietrza możemy zaobserwować również w przypadku dużej częstości zmian położenia zwierciadła wody, które obserwuje się np. w obszarach przybrzeżnych. Pływy, bo o nich mowa, polegają na okresowych waniach poziomu morza powodowanych czynnikami grawitacyjnymi oraz oddziaływaniem księżyca. Na podstawie wysokości przyływów i odpływów w 24-godzinnym przedziale czasowym, zaproponowany został podział na trzy podstawowe rodzaje:

- dobowy,
- półdobowy,
- mieszany.

Ostatni z nich jest najczęściej spotykany i charakteryzuje się dużą nieregularnością zarówno w czasie jak i rozmiarze fali. Zjawisko przepływu wody w gruntach nienasyconych spowodowane pływami zarówno od strony numerycznej, jaki i doświadczalnej jest szeroko opisane w literaturze m. in. [Kuang et al., 2013, Guo i Jiao, 2008]. Zdecydowanie mniej publikacji można znaleźć w odniesieniu do przepływu powietrza [Kuang et al., 2013]. Ciśnienie powietrza w strefie aeracji zmienia się w odpowiedzi na przyływ, bądź odpływ fali. Podwyższone zwierciadło wody, powoduje wzrost ciśnienia powietrza, które propaguje w głąb gruntu wypychając z niego fazę gazową. Kiedy opada, cały proces odwraca się i powietrze napływa do ośrodka gruntowego. Mechanizm ten w rzeczywistości nie jest jednak tak wyraźny oraz często trudny do pomiarowej weryfikacji [Kuang et al., 2013]. Jednakże, jeśli górna warstwa gruntu posiada małą przepuszczalność lub mają miejsce znaczące opady deszczu równoczesne z szybkim przyływem wody

w ośrodku gruntowym, wymiana powietrza między strefą nienasyconą gruntu a atmosferą jest znacząco utrudniona. Efektem są osiągnięte bardzo niskie lub wysokie ciśnienia (w zależności od obniżenia lub podwyższenia poziomu zwierciadła) oscylujące w granicach  $-1$  do  $2$  kPa [Kuang et al., 2013]. Niewielkie ilości opadów lub ich brak, nie powodują większych trudności w przepływie powietrza nawet wtedy, kiedy tempo przyprływu/odprływu jest znaczne, ponieważ może ono swobodnie opuścić przestrzeń gruntu [Kuang et al., 2013]. W przypadku, kiedy górna warstwa wykonana jest z betonu lub asfaltu (lotniska, terminale, porty), możliwość opuszczenia gruntu przez powietrze jest jeszcze bardziej ograniczona. Często w tego typu nawierzchniach spotyka się wysadziny lub koleiny, które spowodowane są obecnością powietrza próbującego opuścić grunt. Wytworzone w ten sposób ciśnienie może być nawet do  $2 - 3$  razy większe niż w przypadku warunków deszczowych [Kuang et al., 2013].

#### 4.11 Oddziaływanie sejsmiczne na zapory ziemne

W literaturze wskazuje się również na istotną rolę powietrza w porach gruntu podczas wstrząsów sejsmicznych. W artykule [Khoei i Mohammadnejad, 2011] z uwagi na wpływ ciśnienia powietrza na wytrzymałość gruntu przedstawiono rozwiązanie, w którym w równaniach przepływu uwzględniono ciśnienie fazy gazowej. Aby jak najdokładniej opisać zachowanie się gruntu nienasyconego, całość sprzężono z modelem konstytutywnym Pastor'a-Zienkiewicza opisującym mechanikę ośrodka porowatego, uzyskując model trójfazowy.

Aby pokazać zastosowanie oraz możliwości modelu wykonano dwie symulacje przedstawiające zachowanie się zapór przeciwpowodziowych w warunkach sejsmicznych. Wyniki przedstawiono dla modelu trójfazowego oraz dwufazowego, zakładającego stałe ciśnienie fazy gazowej. Celem było sprawdzenie, czy standardowy model jest w stanie poprawnie przedstawić zachowanie się gruntu w odpowiedzi na działanie sejsmiczne. Trzęsienia Ziemi trwały od  $15$  s (San Fernando) do  $25$  s (Mahadab) w zależności od lokalizacji i w każdym z przypadków powodowały zniszczenie wału. Widoczne różnice można było również zaobserwować na mapach nasycenia obu modeli. Całkowity obszar nasycony w przypadku modelu dwufazowego był znacznie większy niż w modelu trójfazowym. Wiąże się to oczywiście z powstaniem zdecydowanie większych stref gruntu nienasyconego. Poziom zwierciadła wody w przypadku pominięcia w obliczeniach fazy gazowej zdecydowanie szybciej przybliżał się do skarpy odpowietrznej niż w przypadku jej uwzględnienia. Dla zapory Mahadab, posiadającej rdzeń z łu, zaobserwować można dużo większą różnicę. Wykonując obliczenia za pomocą modelu trójfazowego można zauważyć, że poziom zwierciadła wody spada gwałtownie w okolicy środka zapory, a następnie zmniejsza się stopniowo aż do osiągnięcia dolnej krawędzi nasyconej wodą. Zachowanie to tłumaczy rdzeń wykonany z gruntu o bardzo niskiej przepuszczalności, którego rzeczywistą pracę lepiej odzwierciedla model trójfazowy. Dodatkowo wartość ciśnienia powyżej granicy między strefami nasyconą a nienasyconą w przypadku założenia przepływu gazu osiąga zdecydowanie większą wartość (różnica o blisko  $150$  kPa). Dowodzi to, że model dwufazowy zaniża negatywne ciśnienie wody rosnące w częściowo nasyconych obszarach wału. Dodatkowo warto zaznaczyć, że w modelu trójfazowym znaczna część skarpy odpowietrznej znajduje się w strefie, gdzie nasycenie posiada cały czas wartości zbliżone do rezydualnego. Odzwierciedla to warunki gruntowe zbliżone do prawie suchych oraz odpowiada regionowi, w którym obliczone zostało maksymalne ciśnienie kapilarne.

Przemieszczenia wystąpiły głównie w dwóch strefach, od strony skarpy odwodnej i odpowietrznej, przy czym te pierwsze posiadały znacznie większe wartości. Kierunki przemieszczenia skierowane były na zewnątrz w stosunku do rdzenia zapory. Największy ich przyrost występował w czasie trzęsień i spadał aż do osiągnięcia stanu ustalonego. W przypadku każdej z analizowanych zapór, otrzymane przemieszczenia były większe dla modelu trójfazowego.

Wyniki przedstawione przez [Khoei i Mohammadnejad, 2011] pokazują, jak ważne w perspektywie wykonania modelu jest uwzględnienie fazy gazowej w obliczeniach. Pominięcie wpływu powietrza prowadzi do otrzymania zaniżonych wyników ciśnienia wody w porach, nasycenia oraz przemieszczeń, które w przypadku analizy zdarzeń sejsmicznych mają znaczny wpływ na ocenę stateczności zapór. Aby osiągnąć miarodajne wyniki i prawidłowo ocenić deformację ośrodka gruntowego oraz dokładnie określić położenie zwierciadła wody w wałach przeciwpowodziowych konieczne jest zastosowanie modelu trójfazowego.

## 5 Przykłady numeryczne

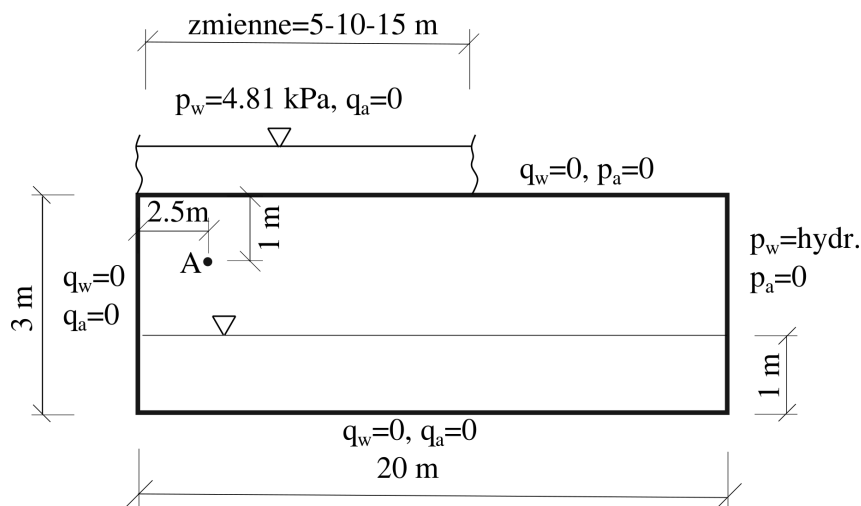
### 5.1 Infiltracja wody na dużych obszarach

W artykule [Hammecker et al., 2003] modelowano proces nawadniania pól ryżowych znajdujących się w Senegal. Schemat zakładał, że zwierciadło wody znajduje się dwa metry poniżej powierzchni gruntu, a infiltracja odbywa się na połowie analizowanego obszaru. Obliczenia wykonano programem Hydrus pozwalającym na użycie tylko równania Richardsa. Wyniki porównane z eksperymentem in-situ jednoznacznie pokazały, że bez uwzględnienia fazy gazowej nie da się poprawnie odzwierciedlić tego zjawiska. Najlepszy wynik uzyskano stosując model obliczeniowy Green-Ampt [Hammecker et al., 2003], który pozwolił na uwzględnienie zwiększającego się wraz z procesem infiltracji ciśnienia powietrza.

Jedną z konkluzji poczynionych przez autorów było zalecenie, aby powyższy problem rozwiązać modelem dwufazowym. Celem sprawdzenia, czy hipoteza wpływu ciśnienia powietrza na proces infiltracji jest poprawna, w niniejszej pracy wykonano serię symulacji numerycznych. Model oraz geometrię podobnego przykładu prezentuje rys. 5.1. Parametry gruntu znajdują się w tabeli 5.1.

Tablica 5.1: Parametry gruntu piasek drobny według [Carsel i Parrish, 1988].

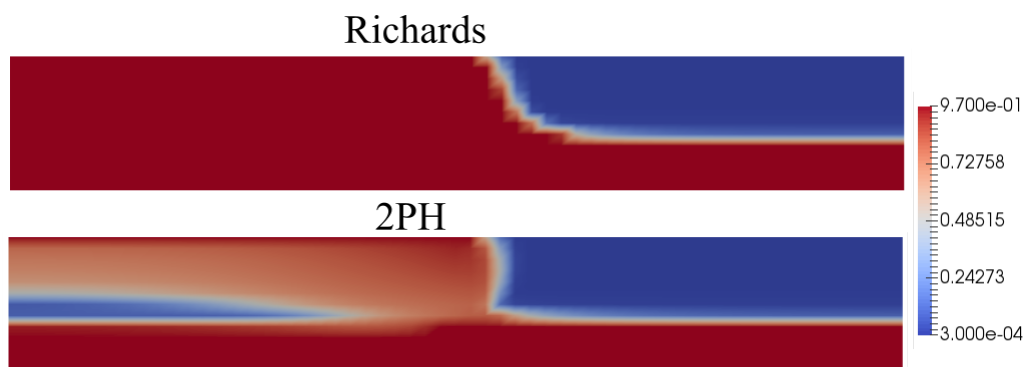
$S_{rw}$ [-]	$S_{ra}$ [-]	$p_g$ [Pa]	$n_g$ [-]	$m_g$ [-]	$k$ [ $m^2$ ]
0.06	0.03	1100	2.8	0.643	$14.45 \cdot 10^{-12}$



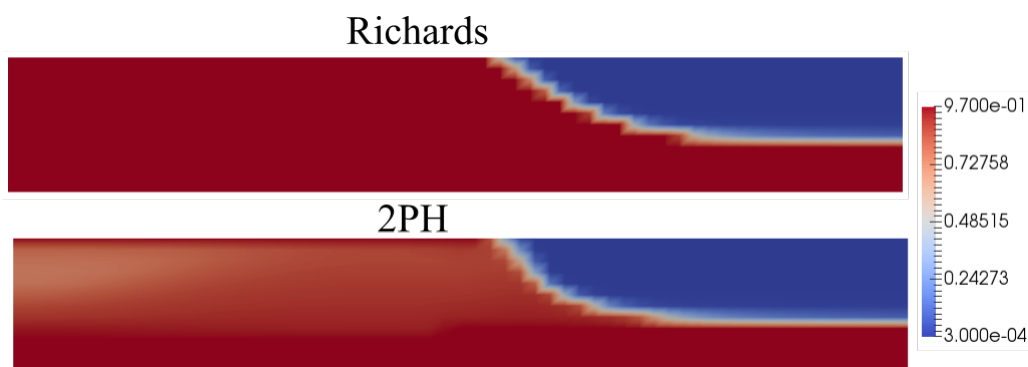
Rysunek 5.1: Geometria oraz warunki brzegowe.

Aby ocenić wpływ rozmiaru strefy nawadniania na wyniki obliczeń, wykonane zostały dodatkowe symulacje zakładające trzy warianty długości strefy infiltracji 5, 10 oraz 15 m. Na lewej połowie górnej krawędzi obszaru znajduje się zwierciadło wody na poziomie 0.5 m n. p. t., które odzwierciedla jego nawadnianie. Z prawej strony natomiast założony jest brak możliwości wypływu wody i atmosferyczne ciśnienie powietrza. Siatka dyskretyzacji przestrzennej modelu składa się z 1920 elementów i 2025 węzłów. Krok czasowy w zależności od używanego modelu





Rysunek 5.2: Nasycenie obszaru w czasie  $t=4800$  s.



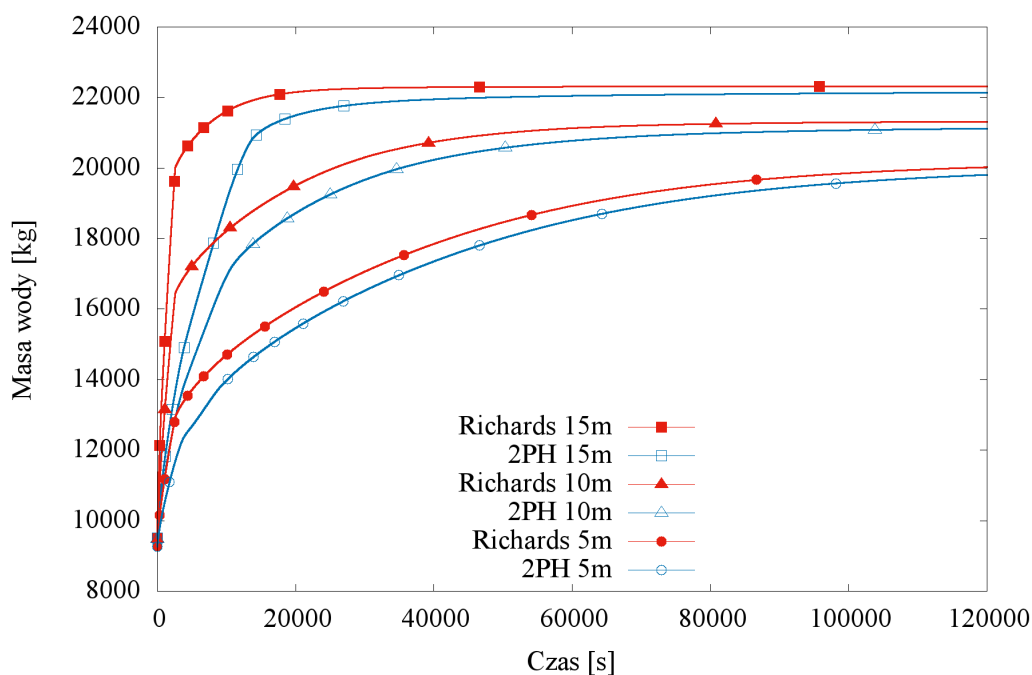
Rysunek 5.3: Nasycenie obszaru w czasie  $t=9600$  s.

zmieniał się od  $10^{-2}$  s do 150 s.

### Wyniki numeryczne

Wyniki uzyskane za pomocą modelu dwufazowego potwierdzają przypuszczenia wysunięte przez [Hammecker et al., 2003]. Proces infiltracji z uwagi na podwyższone ciśnienie powietrza odbywa się wolniej niż w przypadku równania Richardsa, co widoczne jest na rysunkach 5.4 i 5.5 oraz mapach nasycenia 5.2 i 5.3. Dodatkowo w modelu 2PH w początkowej fazie obliczeń dochodzi do zamknięcia powietrza, które koncentruje się w strefie między zwierciadłami wody. W późniejszym etapie symulacji dochodzi do uzyskania zbliżonego poziomu nasycenia w obu modelach. Jednak widoczna na rysunku 5.4 różnica między końcową masą wody sugeruje, że niewielka część powietrza wciąż pozostaje wewnątrz obszaru. Wraz z wydłużeniem strefy nawadniania rośnie również różnica między równaniem Richardsa a modelem dwufazowym. Spowodowane jest to odizolowaniem coraz to większego obszaru o niepełnym nasyceniu oraz ograniczeniem przestrzeni, w której powietrze obecne w porach może połączyć się z atmosferycznym.

Dla każdego z przypadków analizie podlegało również ciśnienie powietrza i nasycenie w punkcie A, który znajdował się pomiędzy górnym i dolnym zwierciadłem wody- rys. 5.1. W przypadku użycia równania Richardsa wartość nasycenia jest taka sama bez względu na długość krawędzi, na której odbywa się nawadnianie. Związane jest to z procesem infiltracji wody, która penetruje obszar równomiernie na całym odcinku. W przypadku obliczeń modelem dwu-

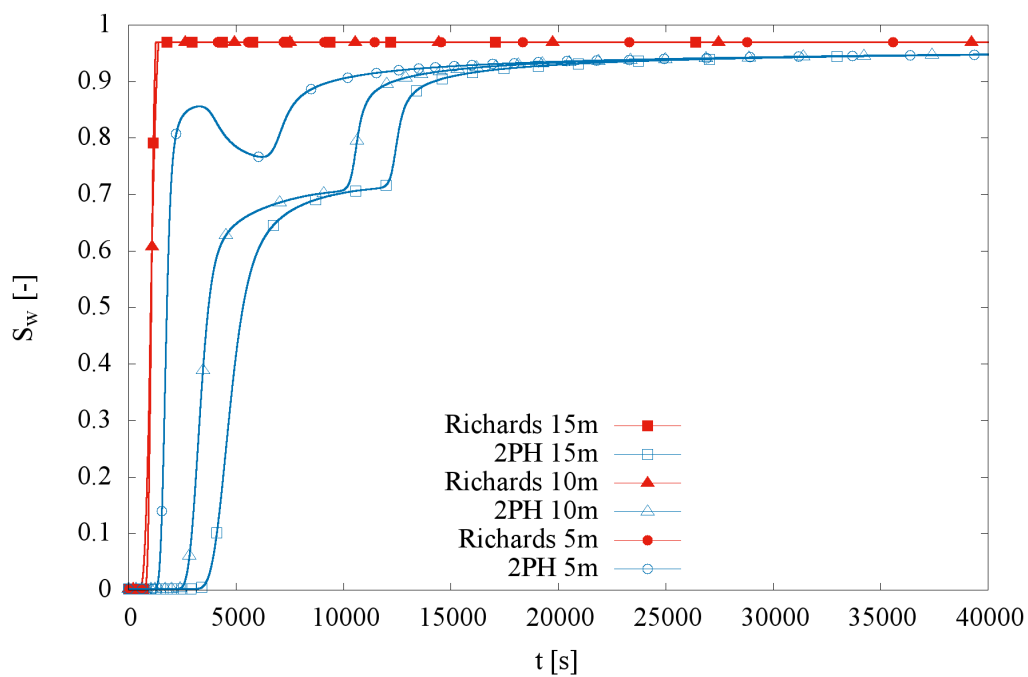


Rysunek 5.4: Masa wody znajdująca się w analizowanym obszarze w odniesieniu do czasu.

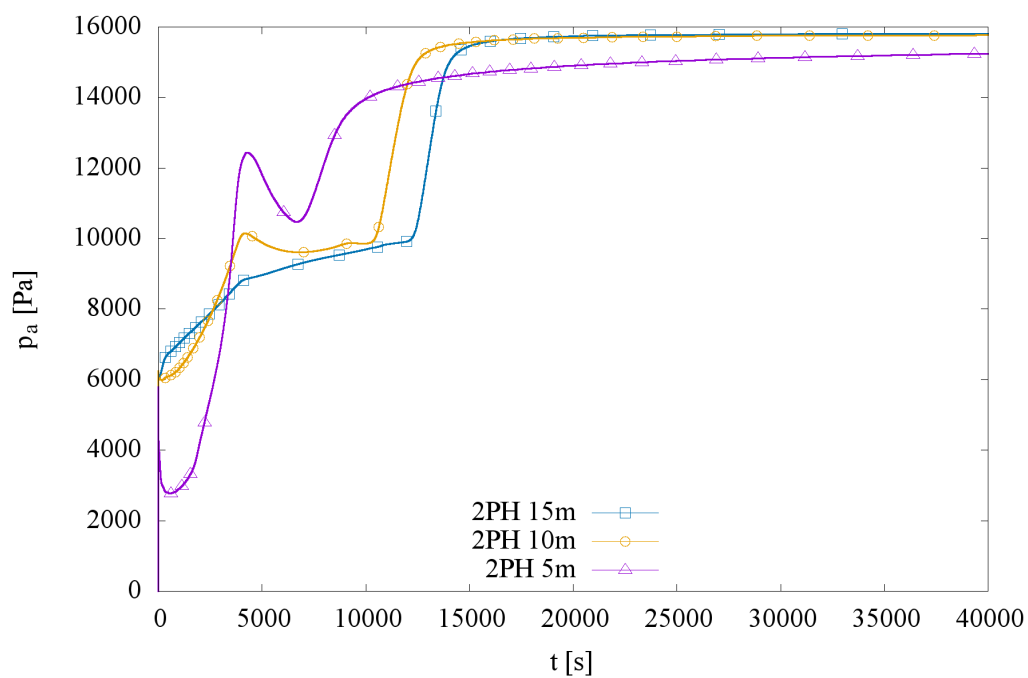
fazowym obserwujemy kilka zasadniczych różnic. Po pierwsze końcowa wartość nasycenia jest inna niż dla równania Richardsa. Ponadto czas jej osiągnięcia jest znacznie dłuższy i zależy od szerokości na jakiej znajduje się zwierciadło wody. Z kolei wykres 5.6 przedstawia zmianę ciśnienia powietrza podczas infiltracji. Dla najkrótszego odcinka nawadniania przebieg ciśnienia oraz jego końcowa wartość różnią się od pozostałych. Powodem jest infiltrująca woda, która łączy się ze zwierciadłem w pobliżu punktu A. W pozostałych dwóch przypadkach miejsce to jest stosunkowo odległe, a zatem proces wzrostu ciśnienia wydłuża się.

Modelując problem za pomocą równania Richardsa zakładamy, że powietrze znajdujące się w porach posiada nieskończenie wielką mobilność. W rzeczywistość jednak nie jest ona nieskończona a około 50 – 60 razy mniejsza niż mobilność wody. W pracy [Tegnander, 2001] wykazano, że zgodność między modelem dwufazowym a równaniem Richardsa uzyskuje się dla mobilności różniących się od siebie ponad 100 krotnie. Zależność ta dotyczy jednak sytuacji, w której powietrze znajdujące się w porach ma swobodny kontakt z powietrzem atmosferycznym. W problemach związanych z infiltracją obszarową, z uwagi na ograniczoną strefę bezpośredniej wymiany powietrza między gruntem a atmosferą, dochodzi do sytuacji, w których ta założona różnica w mobilności może mieć kluczowe znaczenie dla otrzymanych wyników. Celem sprawdzenia tej tezy wykonano symulacje dla zasięgów infiltracji równych 10 oraz 15 m zakładając stosunek w lepkości fazy wodnej i gazowej wynoszący odpowiednio: 60, 80, 100, 120 oraz 1000. Wyniki porównano z równaniem Richardsa.

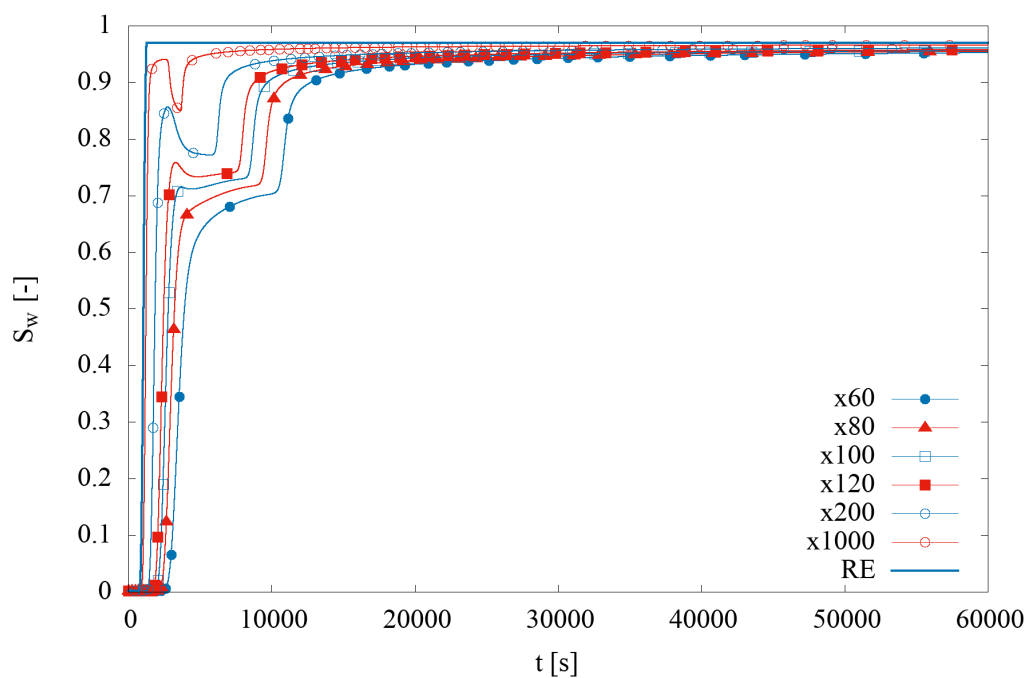
Na rysunku 5.5 przedstawiono zmianę nasycenia w punkcie A w zależności od długości infiltrującego strumienia. W symulacji założono, że stosunek między lepkościami wynosi 60. Zwiększając ją co 20 do poziomu deklarowanego przez [Tegnander, 2001] można zauważyć, że krzywa odpowiadająca za nasycenie zbliża się do wyników równania Richardsa, ale nadal cha-



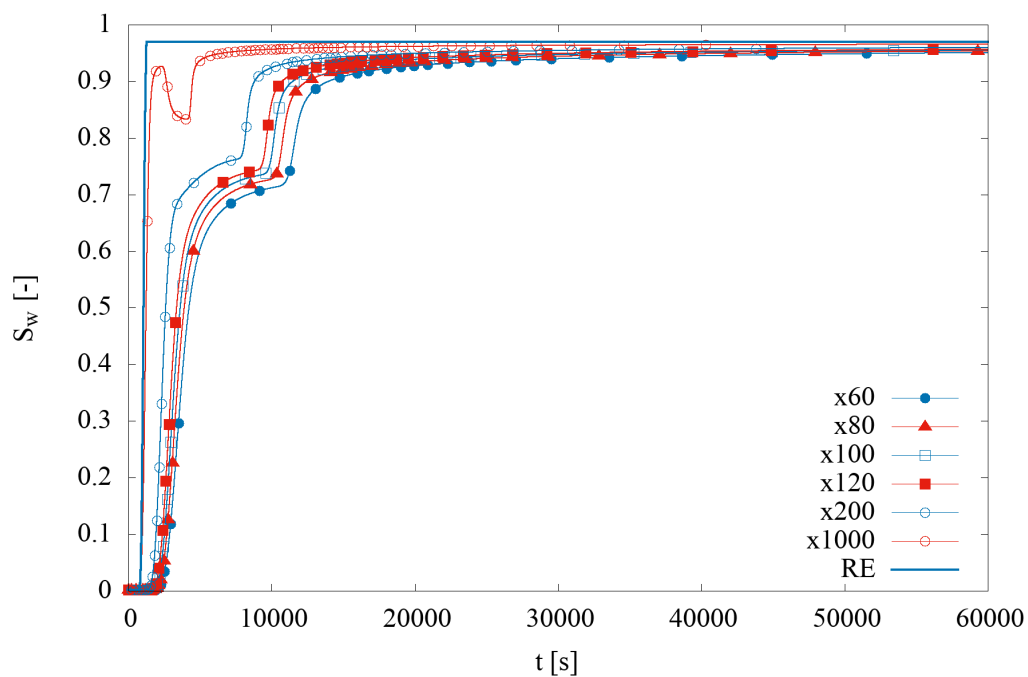
Rysunek 5.5: Zmiana nasycenia w punkcie A analizowanego obszaru.



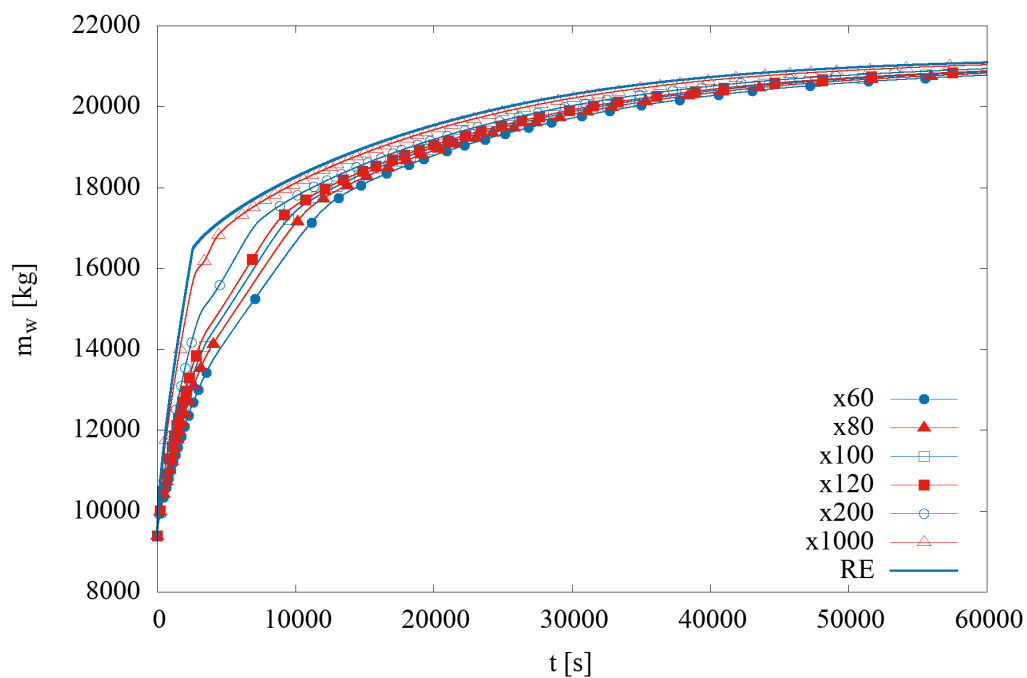
Rysunek 5.6: Zmiana ciśnienia powietrza w punkcie A analizowanego obszaru.



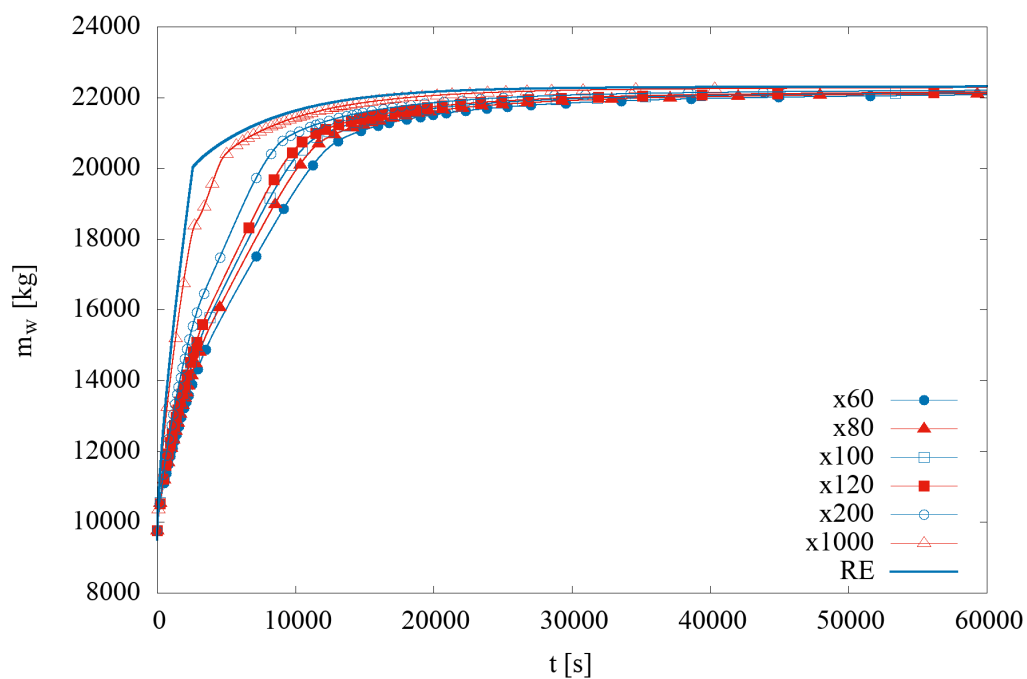
Rysunek 5.7: Zmiana nasycenia w punkcie A dla zasięgu infiltracji równego 10 m w zależności od stosunku  $\mu_w/\mu_a$ .



Rysunek 5.8: Zmiana nasycenia w punkcie A dla zasięgu infiltracji równego 15 m w zależności od stosunku  $\mu_w/\mu_a$ .



Rysunek 5.9: Zmiana masy wody w czasie dla zasięgu infiltracji równego 10 m w zależności od stosunku  $\mu_w/\mu_a$ .



Rysunek 5.10: Zmiana masy wody w czasie dla zasięgu infiltracji równego 15 m w zależności od stosunku  $\mu_w/\mu_a$ .

rakteryzuje się znacznymi różnicami, szczególnie w początkowym etapie infiltracji (rys. 5.7 oraz rys. 5.8). Podobne wnioski można wysunąć na podstawie rys. 5.9 oraz rys. 5.10, gdzie dla stosunku w lepkości między 60 a 120 obserwujemy podobne zachowanie się krzywych. Dopiero dla lepkości różniących się od siebie 1000-krotnie, model dwufazowy uzyskuje zbliżone wyniki do równania Richardsa.

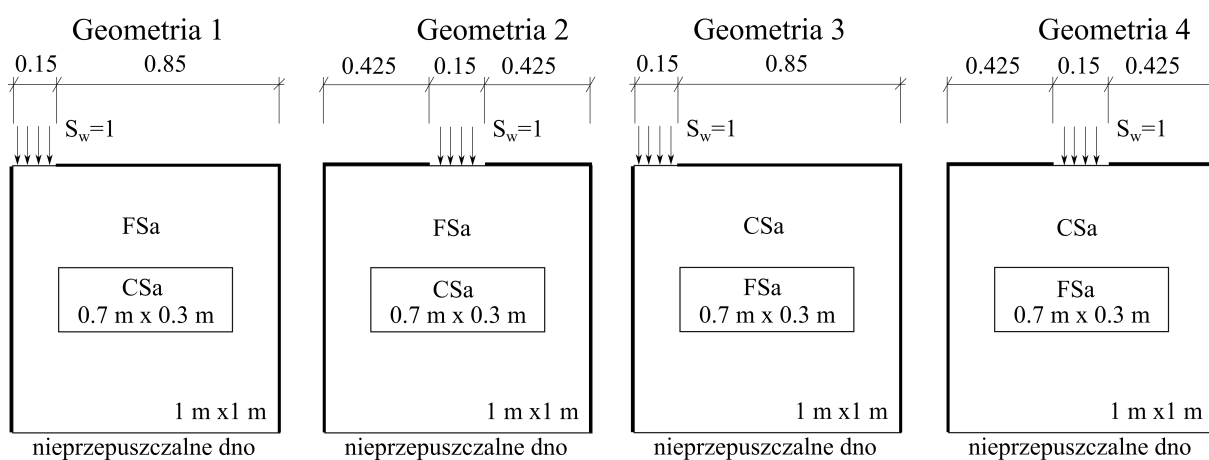
Wykonane modele obliczeniowe pokazują, jak ważny wpływ na infiltrację ma kompresja powietrza znajdującego się w strefie nienasyconej. Efekt ten jest tym większy im mniejsza jest strefa, przez którą powietrze może opuścić dany obszar. Dodatkowo problem ten związany jest z mobilnością powietrza, która nie jest nieskończona jak zakłada równanie Richardsa, a kilkadziesiąt razy mniejsza. Wykonane symulacje pokazują jednak, że w przypadku dużych obszarów, na których warunki brzegowe nie pozwalają na swobodną wymianę powietrza między gruntem a atmosferą, należy uwzględnić ograniczoną mobilność fazy gazowej.

## 5.2 Filtracja w ośrodkach niejednorodnych

W niniejszym rozdziale przedstawiono symulacje numeryczne przepływu wody i powietrza w gruncie niejednorodnym. Rozwiązania równania Richardsa porównano z modelem dwufazowym. Przedstawiona analiza wykonana została dla różnych warunków brzegowych oraz parametrów gruntowych.

W celu zilustrowania omówionego w rozdziale nr 4.6. problemu niejednorodności w gruntach nienasyconych, związanego z obecnością inkluzji, przygotowano szereg symulacji numerycznych. Każda wykonana została dla tej samej dyskretyzacji przestrzennej składającej się z 1600 elementów (40x40) oraz 1681 węzłów. Krok czasowy wynosił między  $10^{-2}$  s a 360 s. Przykłady numeryczne odnoszą się do sytuacji, w której mamy do czynienia z występowaniem inkluzji oraz infiltracją z różnych rejonów powierzchni gruntu (rys. 5.11). Dla wszystkich geometrii przygotowano zostały 3 warianty warunków brzegowych:

- 2PH-Z: model dwufazowy - pogrubione krawędzie na rys. 5.11 są nieprzepuszczalne dla wody i powietrza,
- 2PH-O: model dwufazowy - pogrubione krawędzie na rys. 5.11 są nieprzepuszczalne dla wody, ale przepuszczalne dla powietrza (na brzegi zadano  $p_a = 0$ ),
- RE, równanie Richardsa - pomijanie fazy gazowej w obliczeniach.



Rysunek 5.11: Geometria oraz warunki brzegowe przykładów obliczeniowych dla gruntu niejednorodnego.

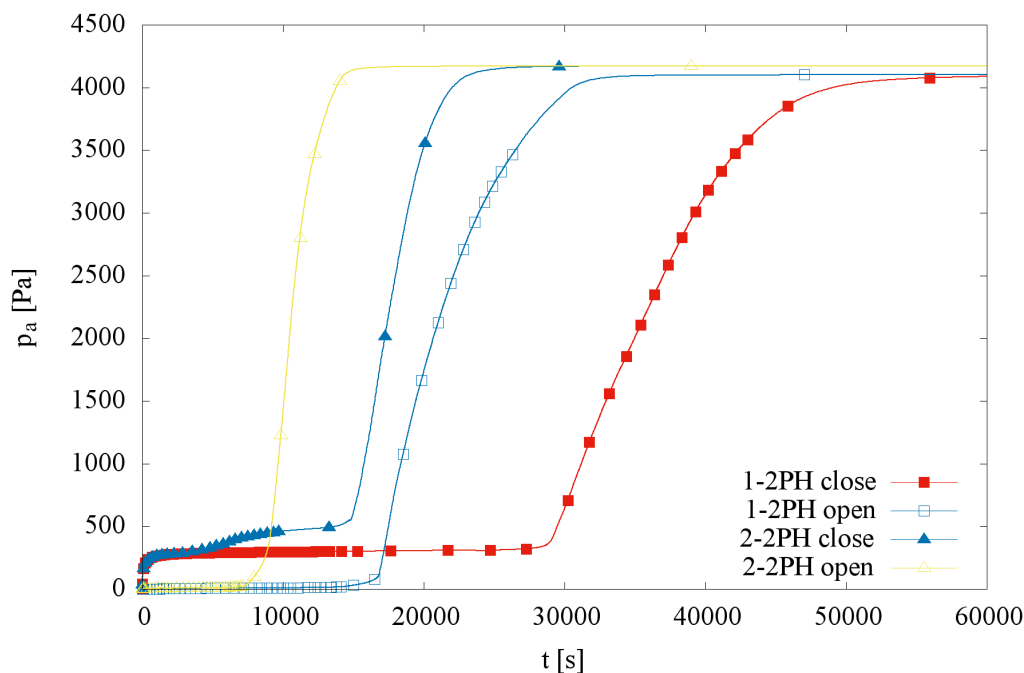
W związku z dużą ilością wykonanych symulacji ich lista została przedstawiona w tabeli 5.2. Tabela ta składa się z trzech kolumn, gdzie pierwsza to numer geometrii zgodny z rys. 5.11, druga to parametry gruntowe (podzielone na wersje A, B, C), natomiast trzecia to warunki brzegowe. W dalszej części pracy poszczególne symulacje będą identyfikowane numerem składającym się z trzech członów np. 1-A-2PH-Z, co oznacza geometrię nr 1, parametry gruntowe A oraz warunki brzegowe 2PH-Z.

W związku z pominięciem przez równanie Richardsa fazy gazowej w każdej z geometrii dochodzi do osiągnięcia pełnego nasycenia. Natomiast w modelu dwufazowym obserwujemy

Tablica 5.2: Warianty obliczeń dla których wykonane zostały symulacje.

Numer geometrii	wersja	grunt	Parametry						warunki brzegowe
			$S_{rw}$	$S_{ra}$	$p_g$ [Pa]	$n_g$	$m_g$	$k$ [m <sup>2</sup> ]	
1	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
1	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
1	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	RE
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
2	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
2	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
2	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	RE
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
1	B	FSa	0.16	0.02	800	2.8	0.643	$8.39 \cdot 10^{-12}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	600	4.0	0.75	$4.24 \cdot 10^{-12}$	
1	B	FSa	0.16	0.02	800	2.8	0.643	$8.39 \cdot 10^{-12}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	600	4.0	0.75	$4.24 \cdot 10^{-12}$	
1	B	FSa	0.16	0.02	800	2.8	0.643	$8.39 \cdot 10^{-12}$	RE
		CSa	0.18	0.02	600	4.0	0.75	$4.24 \cdot 10^{-12}$	
2	B	FSa	0.16	0.02	800	2.8	0.643	$8.39 \cdot 10^{-12}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	600	4.0	0.75	$4.24 \cdot 10^{-12}$	
2	B	FSa	0.16	0.02	800	2.8	0.643	$8.39 \cdot 10^{-12}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	600	4.0	0.75	$4.24 \cdot 10^{-12}$	
2	B	FSa	0.16	0.02	800	2.8	0.643	$8.39 \cdot 10^{-12}$	RE
		CSa	0.18	0.02	600	4.0	0.75	$4.24 \cdot 10^{-12}$	
1	C	FSa	0.16	0.02	1900	2.8	0.643	$7.8 \cdot 10^{-13}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
1	C	FSa	0.16	0.02	1900	2.8	0.643	$7.8 \cdot 10^{-13}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
1	C	FSa	0.16	0.02	1900	2.8	0.643	$7.8 \cdot 10^{-13}$	RE
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
2	C	FSa	0.16	0.02	1900	2.8	0.643	$7.8 \cdot 10^{-13}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
2	C	FSa	0.16	0.02	1900	2.8	0.643	$7.8 \cdot 10^{-13}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
2	C	FSa	0.16	0.02	1900	2.8	0.643	$7.8 \cdot 10^{-13}$	RE
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
3	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
3	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
3	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	RE
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
4	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - Z
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
4	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	2PH - O
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	
4	A	FSa	0.16	0.02	1100	2.8	0.643	$1.45 \cdot 10^{-13}$	RE
		CSa	0.18	0.02	300	4.0	0.75	$2.56 \cdot 10^{-11}$	



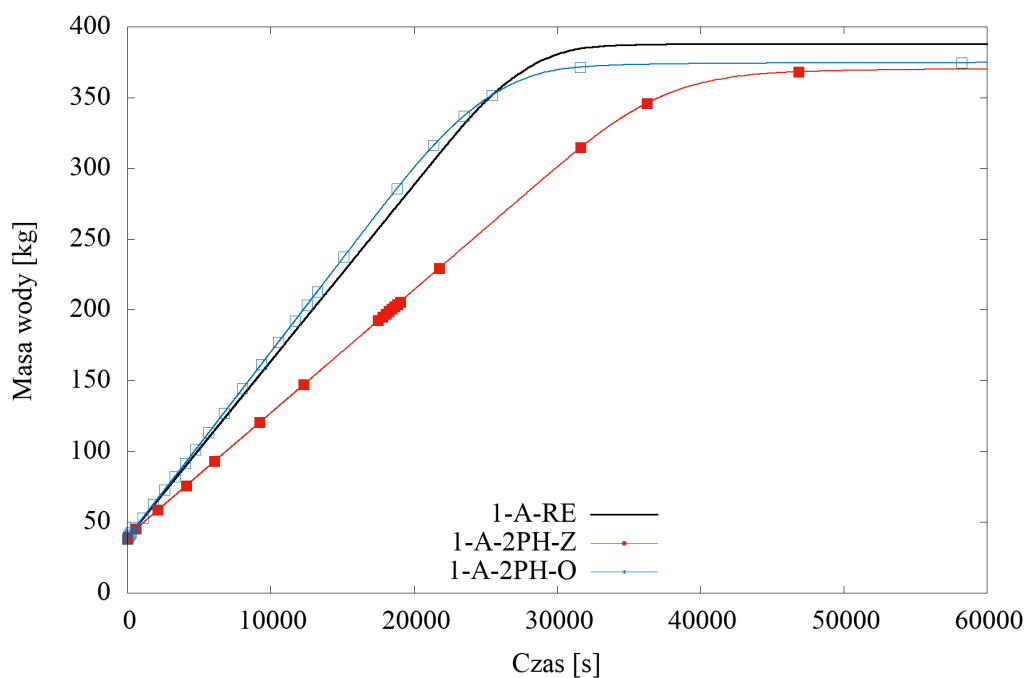


Rysunek 5.12: Wykres ciśnienia powietrza w czasie dla geometrii nr 1 i 2 (parametry A).

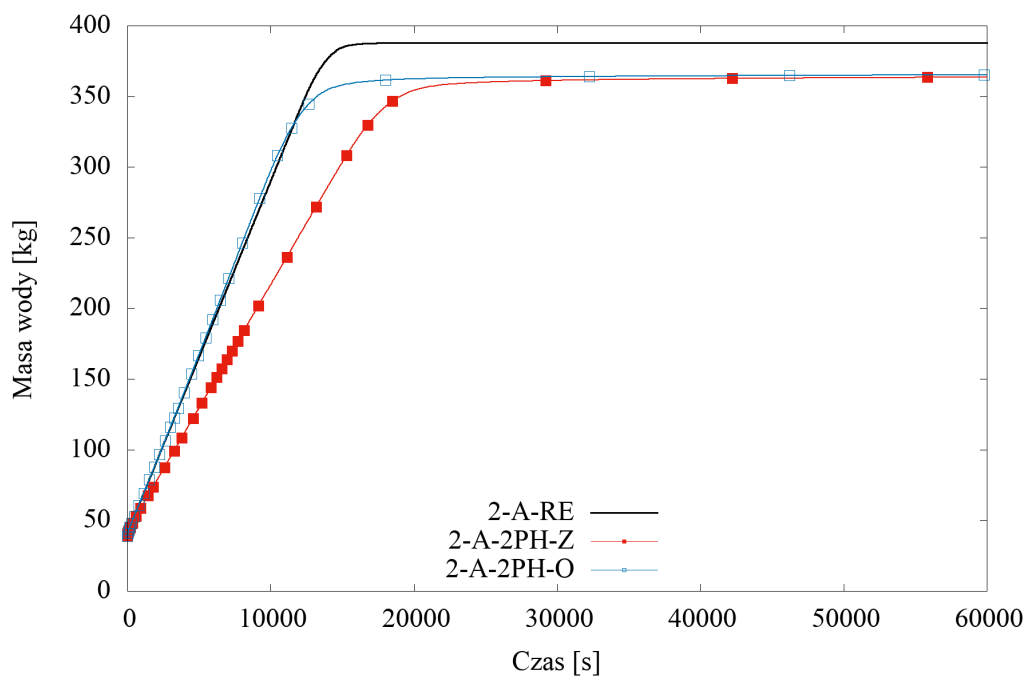
zamknięcie powietrza. Na jego ilość oraz umiejscowienie mają wpływ warunki brzegowe, położenie strumienia wody oraz rodzaj inkluzji. Różnica między objętością zamkniętego powietrza jest zdecydowanie bardziej widoczna w przypadku, kiedy infiltracja odbywa się ze środka górnej krawędzi rys. 5.14. Takie umiejscowienie strumienia infiltracji powoduje, że woda już od samego początku opływa inkluzję i sprawia, że powietrze znajdujące się w dolnych partiach obszaru nie ma możliwości swobodnego wypływu. W przypadku infiltracji z naroża, woda spływa wzdłuż lewej krawędzi pozwalając fazie gazowej na opuszczenie obszaru rys. 5.13. Różnice możemy zaobserwować również na wykresie ciśnienia powietrza wykonanego dla punktu znajdującego się w środku modelu (rys. 5.12). Dla warunków typu  $2PH - Z$  z uwagi na brak możliwości wypływu powietrza, ciśnienie wzrasta od samego początku, jednak osiągnięcie maksymalnej wartości odbywa się później niż w warunkach  $2PH - O$ . Spowodowane jest to spowolnioną infiltracją wody, która aby przepływać musi wypchnąć powietrze znajdujące się w porach.

Kolejnym istotnym spostrzeżeniem jest zamknięcie małych ilości powietrza w pobliżu górnej krawędzi modelu  $2PH - Z$  rys. 5.15, kiedy dla całego obszaru zastosowany został warunek brzegowy uniemożliwiający wypływ fazy gazowej. Dodatkowo w tym modelu ilość zamkniętego powietrza jest dwukrotnie większa niż w przypadku infiltracji z naroża krawędzi górnej. Wykresy nasycenia dla omówionych modeli przedstawia rys. 5.15.

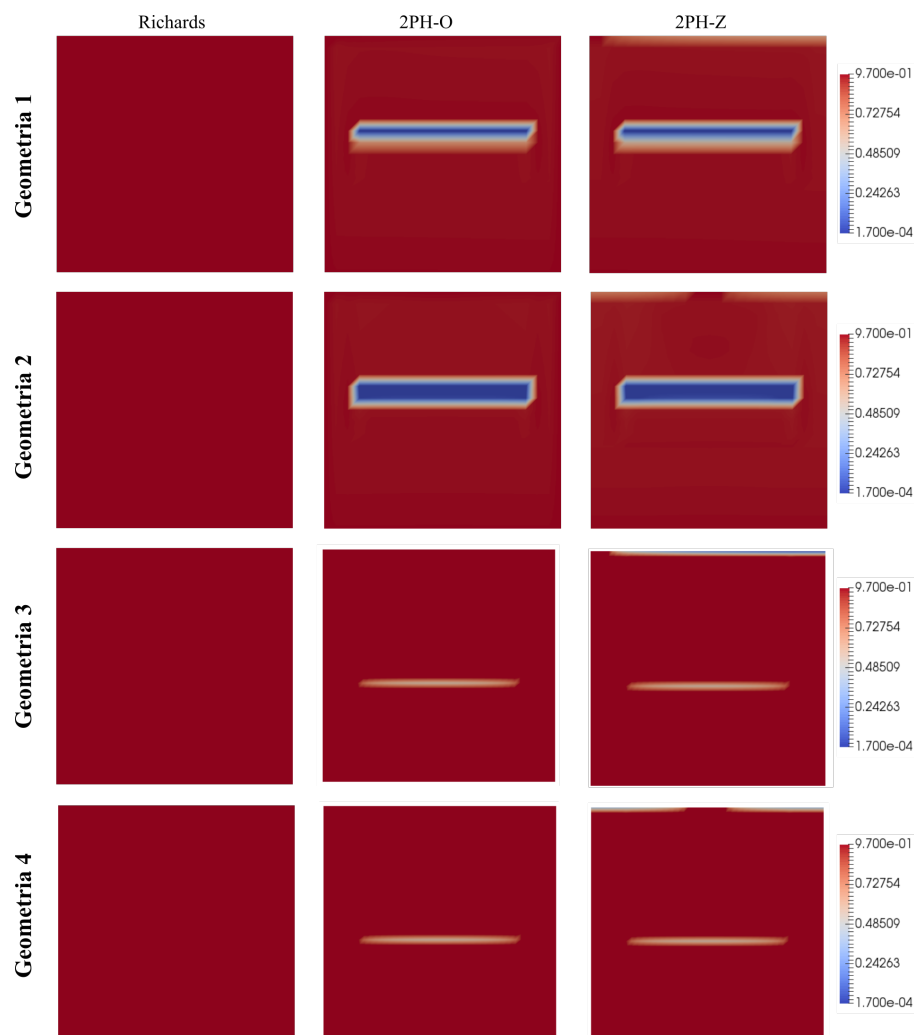
Celem oceny wpływu zmiany ciśnienia skalującego na wyniki obliczeń wykonano dodatkowe symulacje zakładając, że wartości  $p_g$  w obu gruntach są do siebie zbliżone lub znacząco się różnią 5.2 (odpowiednio parametry  $B$  i  $C$ ). Aby uwzględnić zmianę przepuszczalności związaną ze spadkiem lub wzrostem ciśnienia skalującego została ona przeliczona używając formuły Leveretta [Nam i Kaviany, 2003]:



Rysunek 5.13: Wykres masy wody w stosunku do czasu dla geometrii nr 1 i parametrów A.



Rysunek 5.14: Wykres masy wody w stosunku do czasu dla geometrii nr 2 i parametrów A.

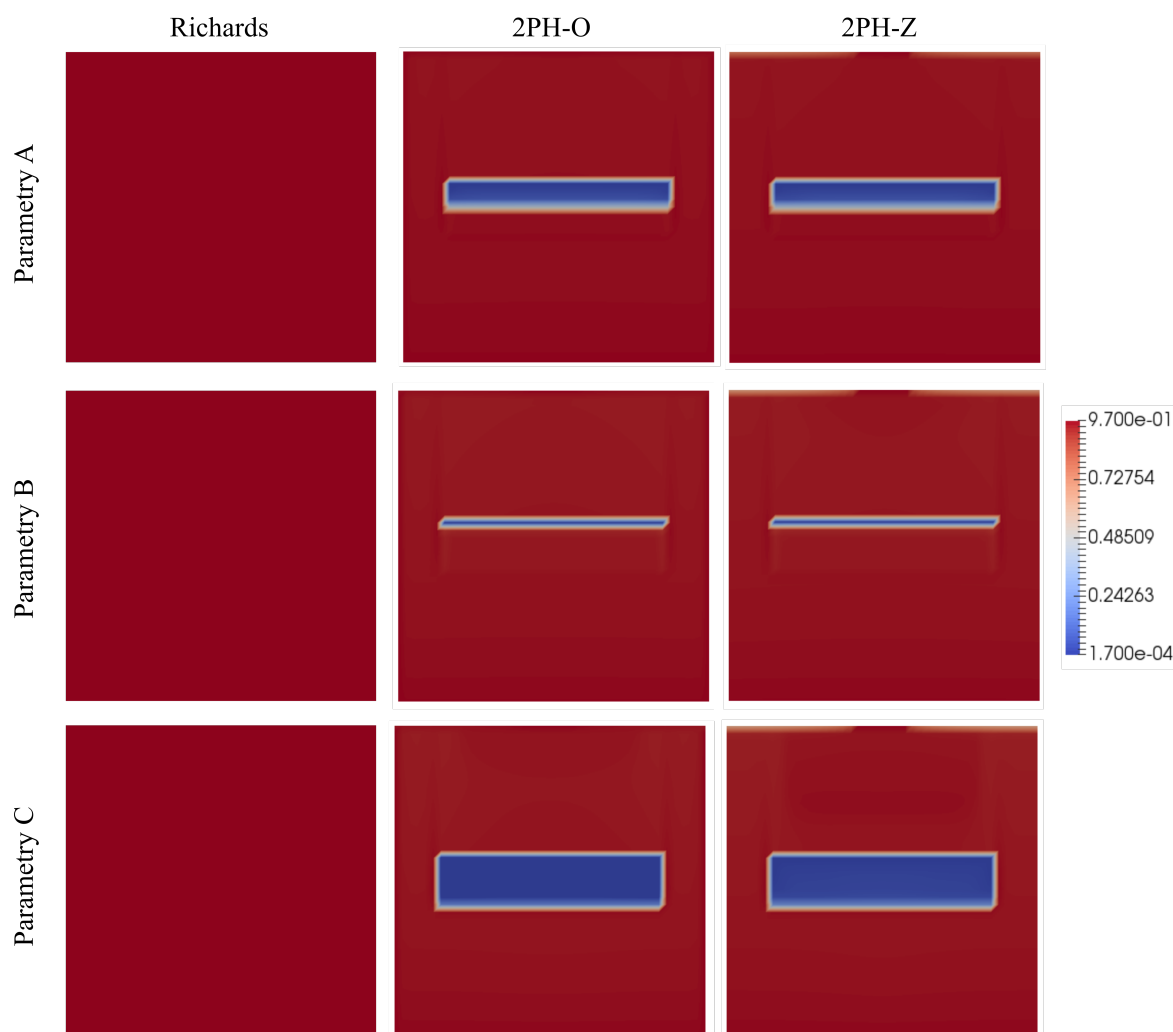


Rysunek 5.15: Mapy nasycenia analizowanych obszarów na koniec obliczeń.

$$J(S_w) = \frac{p_c(S_w) \sqrt{\frac{k}{n}}}{\sigma_w \cos(\psi)}. \quad (5.1)$$

Rysunek 5.16 przedstawia mapy nasycenia dla geometrii nr 2 w zależności od przyjętych warunków gruntowych. Wraz ze wzrostem różnicy między ciśnieniem skalującym zwiększa się również strefa zamkniętego powietrza w piasku gruboziarnistym. Efekt występuje zarówno, kiedy rozpatrujemy krawędzie zewnętrzne jako przepuszczalne jak i nieprzepuszczalne dla powietrza. Warto podkreślić, że mimo iż na końcu symulacji nie ma większych różnic między warunkami  $2PH - Z$  a  $2PH - O$  to są one bardzo widoczne we wcześniejszych krokach obliczeniowych 5.17. Dotyczy to w szczególności parametrów  $C$  dla których masa powietrza w czasie  $t = 2 \cdot 10^5$  s jest dwukrotnie większa dla warunków  $2PH - Z$  niż dla  $2PH - O$ .

Analogiczny wniosek można wysnuć rozpatrując wykres ciśnienia wody wykonany dla punktu znajdującego się w środku obszaru. Przy niewielkich różnicach między wartościami  $p_g$  wykresy dla równania Richardsa oraz warunków  $2PH - O$  praktycznie się nakładają. Większe oscylacje pojawiają się wraz ze wzrostem poziomu ciśnienia skalującego w piasku drobnym.



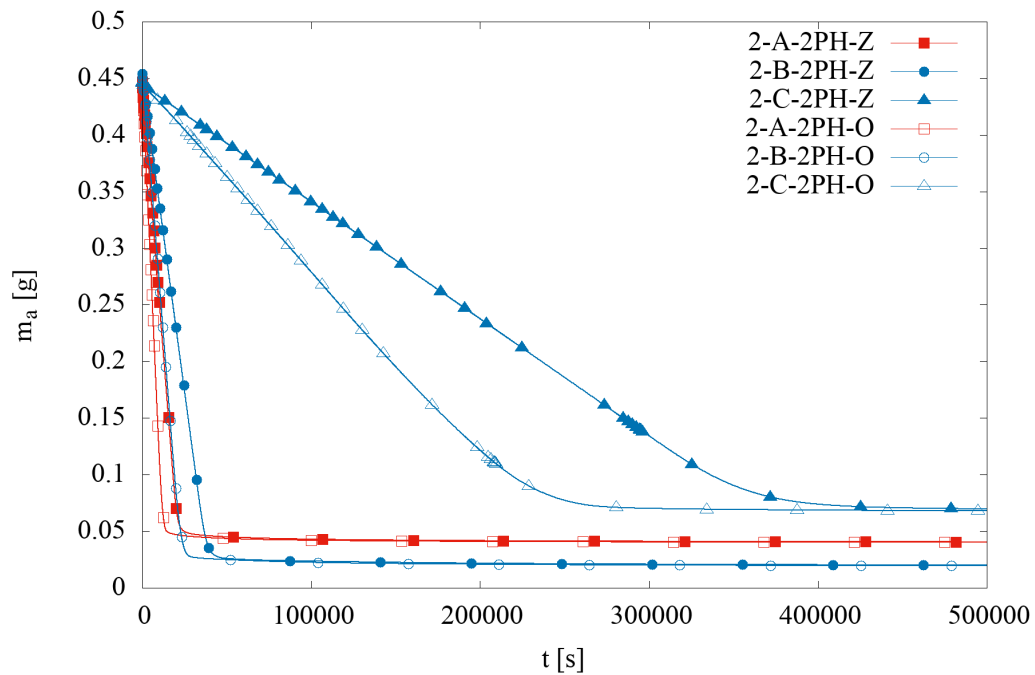
Rysunek 5.16: Mapy nasycenia w zależności od przyjętych parametrów gruntowych.

Kiedy stosujemy równanie Richardsa ciśnienie wody rośnie wolniej oraz osiąga mniejszą wartość końcową niż dla  $2PH - O$ . Spowodowane jest to brakiem infiltracji wody w inkluzji z piasku grubego dla parametrów  $C$ . W kombinacjach  $A$  oraz  $B$  inkluzja osiągnęła częściowe nasycenie i analizowany punkt znalazł się całkowicie poniżej zwierciadła wody. Spowodowało to, że proces infiltracji mimo różnych warunków brzegowych ( $RE$  i  $2PH - Z$ ) przebiegał w bardzo podobny sposób.

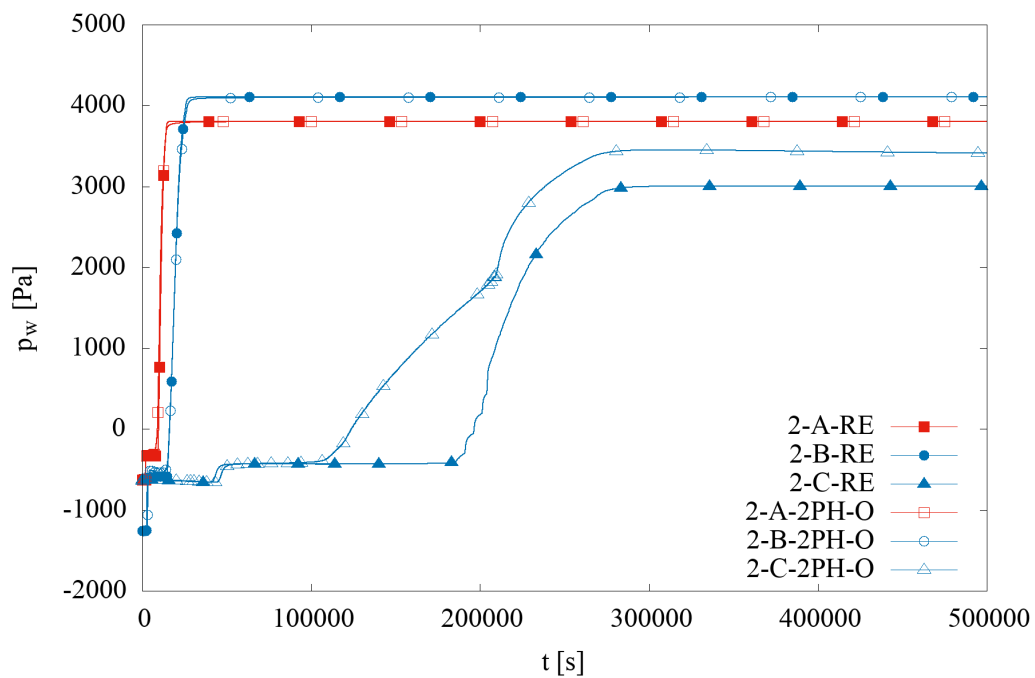
W przypadku, kiedy inkluzje zamienione są miejscami (geometrie 3 oraz 4), efekt zamykania powietrza jest zdecydowanie mniejszy (rys. 5.16). Związane jest to z większym współczynnikiem filtracji oraz mniejszym ciśnieniem wejścia powietrza w gruntach gruboziarnistych. Większe pory w gruncie gruboziarnistym powodują również, że powietrze może swobodniej przemieszczać się wewnątrz porów, a co za tym idzie szybciej ulecieć do atmosfery. W przypadku geometrii 1 i 2 obserwujemy różnice między ilością zamkniętego powietrza pod koniec symulacji (rys. 5.15 oraz 5.17), co nie występuje dla geometrii 3 oraz 4 (rys. 5.19).

Z wykresów (5.20) oraz (5.21) zaobserwować można również, że w początkowej fazie nasycenia różnice między warunkami  $2PH - Z$  a  $2PH - O$  są słabiej widoczne dla geometrii 3 oraz 4. Potwierdza to również rys. 5.22, gdzie wszystkie krzywe, zarówno dla modelu dwufazowego

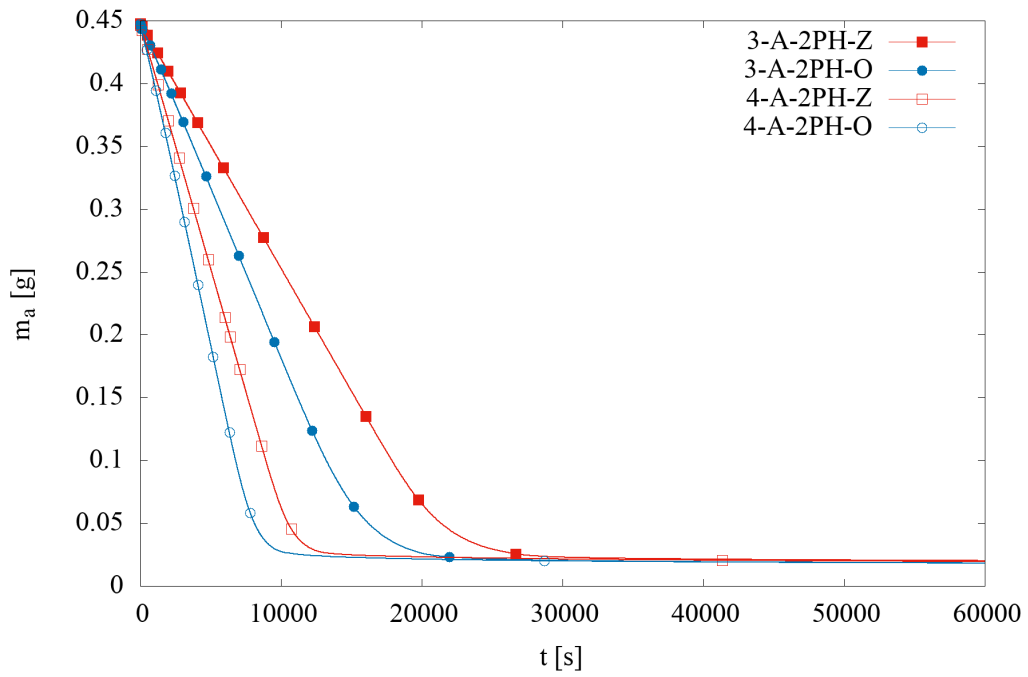
jak i Równania Richardsa są do siebie mocno zbliżone. Natomiast kiedy inkluzja jest gruboziarnista punkt znajdujący się w środku obszaru nasycy się aż 10000 s później niż w pozostałych modelach.



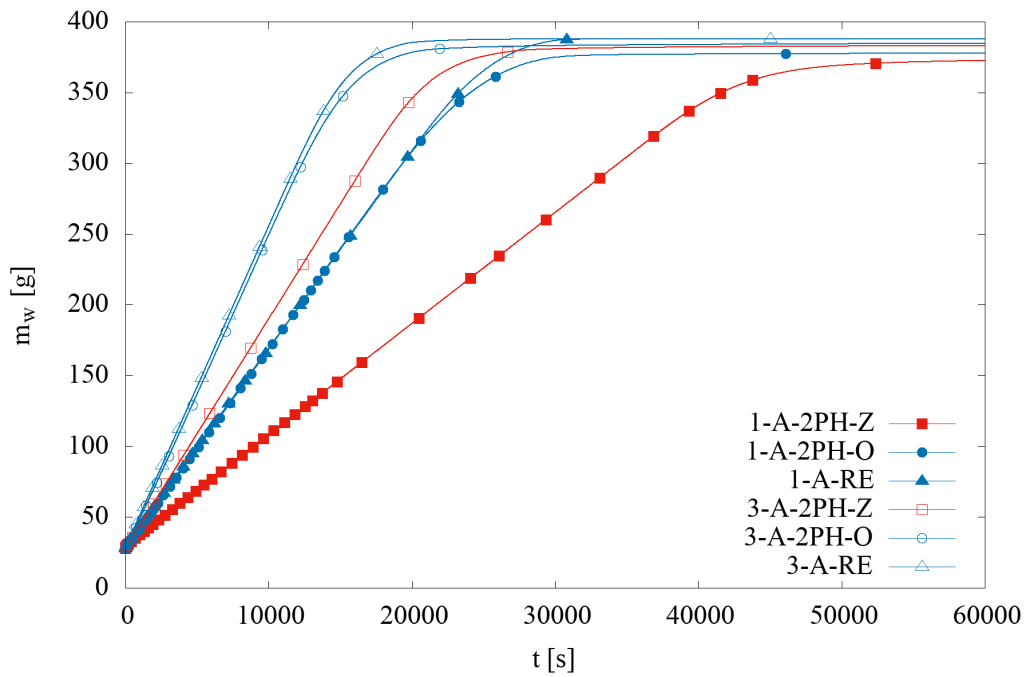
Rysunek 5.17: Zmienność masy powietrza w czasie



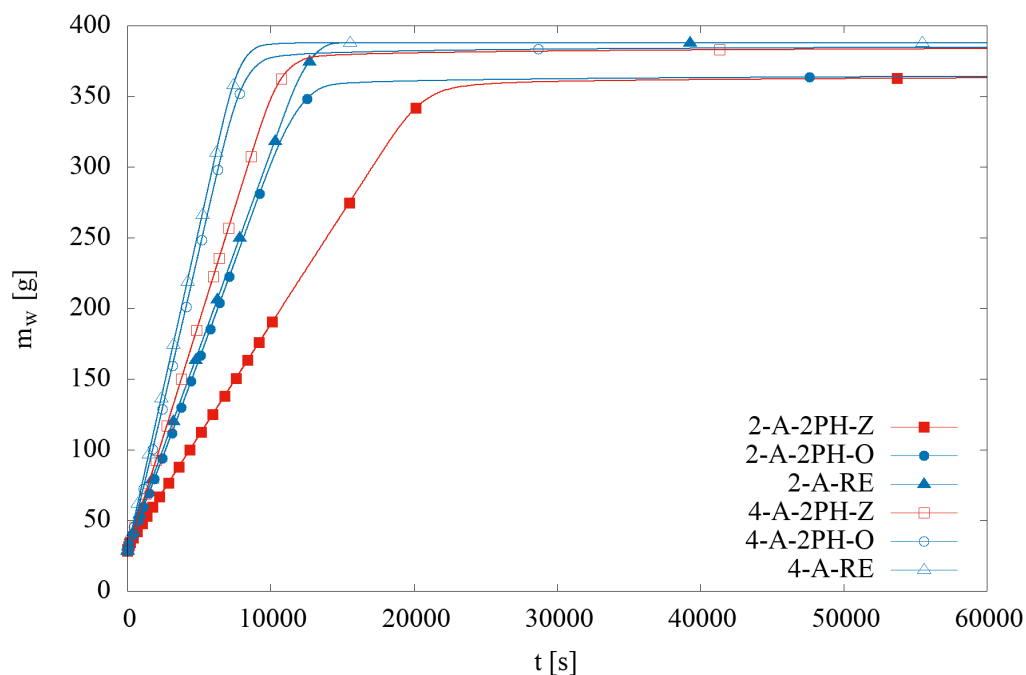
Rysunek 5.18: Zmiana ciśnienia powietrza w środku analizowanego obszaru



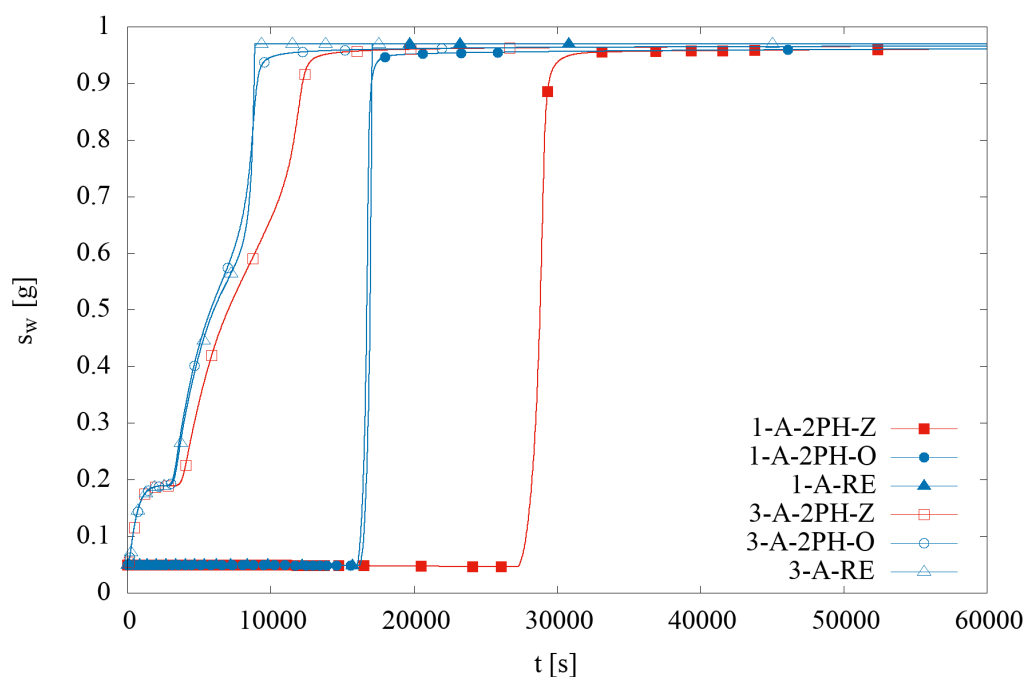
Rysunek 5.19: Zmiana nasycenia w zależności od układu inkluzji.



Rysunek 5.20: Zmiana masy wody w zależności od układu inkluzji.



Rysunek 5.21: Zmiana masy wody w zależności od układu inkluzji.



Rysunek 5.22: Zmiana nasycenia w środku obszaru w zależności od układu inkluzji.

Omówiony problem dowodzi, że modelowanie gruntów w których znajdują się inkluzje jest bardzo złożonym zagadnieniem numerycznym. Po pierwsze kluczowy wpływ na wyniki ma model numeryczny, który w zależności od skomplikowania bazuje na przepływie jednej lub dwóch faz. Dodatkowo w tego typu problemach zawsze dochodzi do zamknięcia fazy gazowej. Jej ilość

zależna jest od układu i rozmiarów inkluzji, prędkości infiltracji oraz parametrów hydraulicznych opisujących krzywą retencji. Liczne wykresy przedstawione w rozdziale udowadniają, że zjawisko zamykania powietrza jest znacznie bardziej istotne, kiedy inkluzją jest materiał gruboziarnisty. W przeciwnym wypadku efekt również występuje, jednak ma on znikomy wpływ na nasycenie danego obszaru.

### 5.3 Filtracja w wałach przeciwpowodziowych

Całkowita długość wałów przeciwpowodziowych na terenie Polski wynosi około 8500 km [KZGW, 2010]. Chronią one obszary o powierzchni ponad miliona ha [NIK, 2012]. Z danych przedstawionych na rok 2015 wynika, że aż 41% z nich wymaga naprawy bądź odbudowy. Konieczność modernizacji związana jest najczęściej ze zmianą wymagań stawianych obiektom gospodarki wodnej, dlatego problem ten dotyka głównie wałów zbudowanych w latach 30. i 40. oraz wzniesionych ponad 100 lat temu (9% całości). W powodzi z 2010 r. bardzo często dochodziło do przerwania wałów, w wyniku czego woda zalała ponad pół miliona ha powierzchni. W roku 1997 r. podczas powodzi tysiąclecia zginęły 53 osoby, uszkodzeniu uległo 72 tys. budynków, 14 tys. km dróg, 4 tys. mostów, 3 mln ha gruntów [CETCO, 2016]. Według prognoz IMGW katastrofy powodziowe będą występować coraz częściej, w związku z czym problem ochrony przeciwpowodziowej nabiera szczególnej wagi [CETCO, 2016].

#### Przyczyny występowania awarii

Wśród głównych przyczyn powodzi mających miejsce w Polsce wymienia się wystąpienie większych opadów deszczu niż zakładają normy projektowe dla danej konstrukcji [KZGW, 2010]. Kiedy poziom zwierciadła za skarpą odwodną jest na tyle duży, że sięga korony wału, dochodzi do przelania się wody i w konsekwencji jego zatopienia. Powodem tego są wzmożone opady deszczu, zmniejszenie chłonności wody danej skarpy wskutek rozprzestrzeniającej się roślinności, podpiętrzenie wody przez lód, czy roztopy.

Oprócz przelania się wody przez koronę wału do zalania może dojść również z powodu przesiąków. Zjawisko to występuje, kiedy w podłożu lub korpusie wału powstają uprzywilejowane drogi filtracji. W korpusie są, to najczęściej źle zabezpieczone przepusty lub przewody, źle zagęszczony nasyp oraz nory zwierząt. Z przesiąkami w podłożu spotykamy się najczęściej w wyniku źle przygotowanego podłoża (pozostawione gałęzie drzew). Ten rodzaj przesiąków najczęściej występuje w najstarszych wałach, których wiek przekracza 100 lat. Wynika to z zasad projektowania jakie obowiązywały w danym okresie oraz niewystarczającej wówczas wiedzy z dziedziny mechaniki gruntów.

Innymi powodami przerwania wałów są utrata stateczności skarpy odwodnej wywołana erozją powierzchniową, odkształcenia korpusu, czy pęknięcia podłużne i poprzeczne w okolicach korony [Leśniewska et al., 2007]. Dodatkowo, kiedy dochodzi do wezbrania powodziowego, korona wału służy jako droga dla pojazdów dowożących ciężki sprzęt, worki z piaskiem oraz inne wyposażenie ratownicze. Dlatego też konieczne jest wykonanie odpowiedniego zagęszczania oraz analizowanie obciążeń od działania sił skupionych oraz równomiernie rozłożonych już na etapie projektowania.



Tablica 5.3: Ustalenie klasy ważności obiektu (według [Środowiska, 2007]).

<i>Klasa ważności</i>	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>Obszar chroniony <math>F</math> [<math>km^2</math>]</i>	$F > 300$	$150 < F \leq 300$	$10 < F \leq 150$	$F \leq 10$

Tablica 5.4: Minimalna odległość między maksymalnym przewidywanym poziomem zwierciadła a koroną wału (według [Środowiska, 2007]).

<i>Klasa wału</i>	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>Bezpieczne wzniesienie korony <math>d</math> [m]</i>	1.3	1.0	0.7	0.5

## Konstrukcja wału i jego główne wymiary

Wszystkie przebudowywane oraz nowo wznaszane wały przeciwpowodziowe muszą spełniać wymagania określone w [Środowiska, 2007]. Główną cechą klasyfikującą obiekt jest wielkość obszaru jaką musi chronić (tab. 5.3). Poprzez obszar chroniony rozumiemy powierzchnię, która uległaby zatopieniu z prawdopodobieństwem  $P = 1\%$  (występujące raz na 100 lat). Wyjątkiem jest obecność zabytków lub strategicznych obiektów gospodarczych, w takim wypadku bez względu na wielkość chronionej powierzchni zawsze przydziela się klasę I.

Poziom na jakim powinna znajdować się korona definiowany jest przez maksymalny poziom wód na jaki projektuje się wał. Minimalną wysokość poniżej, której powinno znajdować się zwierciadło wody określa tabela 5.4. Dodatkowo należy rozważyć podniesienie korpusu wału, gdy [CETCO, 2016]:

- możliwe są zatory lodowe,
- międzywale może zarastać roślinnością,
- po koronie wału odbywać się może ruch samochodowy,
- obliczenia hydrologiczne wykonano na podstawie niepewnego materiału.

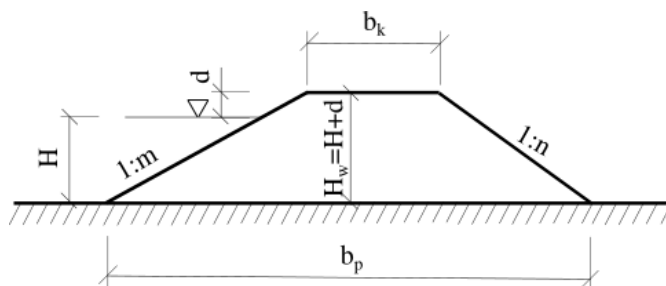
Założenie, na podstawie którego korona wału będzie wykorzystywana do komunikacji, oprócz obciążenia siłami musi wiązać się z nadaniem jej odpowiedniej szerokości. Według [Środowiska, 2007] powinna ona wynosić co najmniej 4 m i być pochylona w kierunku skarpy odwodnej. Dopuszczalne maksymalne nachylenie zależy od rodzaju gruntu, z którego zbudowany jest wał. Zebranie najważniejszych wymiarów oraz ich minimalne projektowe wartości przedstawia tabela 5.5.

Korpus wału wykonywany jest zazwyczaj z materiału jednorodnego. Najczęściej są to grunty niespoiste z uwagi na czas i możliwości realizacyjne robót oraz niski współczynnik filtracji. Jeśli zachodzi konieczność zastosowania więcej niż jednego materiału do wykonania np. rdzenia lub opaski, należy przestrzegać kilku zasad:

- materiały mniej przepuszczalne układamy w środku nasypu lub na skarpie odwodnej, natomiast materiały bardziej przepuszczalne bliżej skarpy odpowietrznej,
- materiały w nasypie nie mogą tworzyć soczewek ani warstw mogących ułatwić filtrację lub poślizg,

Tablica 5.5: Minimalne wymiary wałów w odniesieniu do rysunku 5.23 (według [Środowiska, 2007]).

Wysokość wału $H_w$ [m]	1.0	2.0	3.0	> 4.0
Skarpa odwodna – nachylenie 1 : m	1 : 2	1 : 2	1 : 2	1 : 2
Skarpa odpowietrzna – nachylenie 1 : n	1 : 1.5	1 : 1.5	1 : 2	1 : 2
Korona wału – szerokość $b_k$ [m]	1.0	1.5	2.0	3.0
Podstawa wału – szerokość $b_p$ [m]	4.5	8.5	14.0	19.0



Rysunek 5.23: Konstrukcja wału przeciwpowodziowego i jego główne wymiary [Dyka, 2013]

- grunty w sąsiadujących ze sobą miejscach nasypu powinny mieć takie uziarnienie, aby wskutek odkształceń nie powstała sufozja.

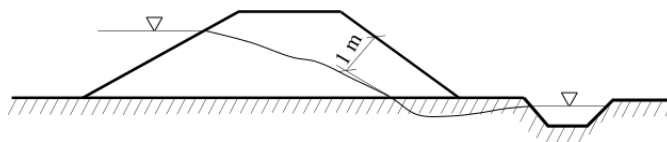
### Bezpieczeństwo wałów ze względu na filtrację

Konstrukcja wału oprócz zachowania określonej geometrii, powinna umożliwiać również szybki powrót wody z zawala w kierunku rzeki. W związku z czym nie jest konieczne zapewnianie całkowitej szczelności. Podczas okresowego podnoszenia zwierciadła wody filtracja może występować w charakterze ustalonym i nieustalonym. Z pierwszym mamy do czynienia, kiedy przepływ wody nie zmienia się w czasie. Przeciwnie jest w przypadku przepływu nieustalonego, kiedy występuje zmienność czasowa. Najczęściej sytuacja ta ma miejsce w trakcie podnoszenia zwierciadła wody.

Przeprowadzenie symulacji oceniającej intensywność filtracji pozwala na podjęcie decyzji o potrzebie uszczelnienia zapory oraz o jej ewentualnym rodzaju. Obliczenia dostarczają informacji, kiedy mogą wystąpić spodziewane przesiąki oraz jak wyglądać będzie krzywa depresji. Projektując budowlę należy pamiętać, że graniczna linia przepływu powinna być oddalona od skarpy odpowietrznej o głębokość przemarzania gruntu, ale nie powinna być mniejsza niż 1 m [CETCO, 2016]. Omówioną sytuację przedstawia rysunek 5.24. Zaniedbanie tego warunku może prowadzić do podpiętrzenia krzywej depresji wskutek napotkania przeszkody w postaci zamrożonego gruntu, co przyczynić się może do utraty stateczności konstrukcji.

Uszczelnienie korpusu wału jest konieczne, gdy [Borys, 2009]:

- czas, po którym wystąpi przesiąk na skarpie odpowietrznej wału w warunkach nieustalonych jest krótszy od czasu piętrzenia wody przez wał,
- gradient lub prędkość filtracji przez korpus wału, w strefie wypływu wody są zbliżone do dopuszczalnych,



Rysunek 5.24: Minimalna odległość krzywej depresji od skarpy wału

- stateczność ogólna jest mniejsza od wartości wymaganej dla danej klasy wału.

Uszczelnienie podłoża obwałowania, wykonujemy kiedy [Borys, 2009]:

- czas do momentu osiągnięcia przepływu ustalonego jest znacznie krótszy niż czas piętrzenia wody,
- wielkość filtracji ustalonej przez podłoże jest większa niż  $10 \text{ m}^3/(\text{dobę})$ ,
- gradient filtracji przez podłoże jest większy lub zbliżony do krytycznego,
- istnieje ryzyko przebicia hydraulicznego.

### Przesiákanie wody przez wał - model numeryczny

Celem oceny wpływu powietrza znajdującego się w wale przeciwpowodziowym na proces infiltracji zostały wykonane symulacje przedstawiające dwa różne warianty podnoszenia się zwierciadła wody znajdującego się tuż przy skarpie wału. Dla każdego z wariantów obliczenia wykonano za pomocą równania Richardsa zakładającego tylko przepływ wody oraz modelu dwufazowego, w którym oprócz fazy ciekłej pod uwagę bierzemy również powietrze obecne w porach gruntu. Założenie braku obecności powietrza w modelu Richardsa powoduje, że infiltrująca woda może penetrować ośrodek gruntowy bez żadnych utrudnień. Natomiast w modelu 2PH faza ciekła napotyka opór ze strony fazy gazowej, który spowalnia infiltrację. Dodatkowym problemem są zmieniające się warunki brzegowe, które w przypadku zalania wału przeciwpowodziowego uniemożliwiają powietrzu znajdującemu się w porach połączenie z powietrzem atmosferycznym. W efekcie jest ono kompresowane wewnątrz wału. Problem ten został szczegółowo opisany w rozdziale nr 4.8, a symulacje przedstawione poniżej mają za zadanie zilustrowanie omówionych tam zagadnień. Przedstawione wyniki bazują na wcześniej przygotowanych artykułach [Tisler i Szymkiewicz, 2014, Tisler i Szymkiewicz, 2017].

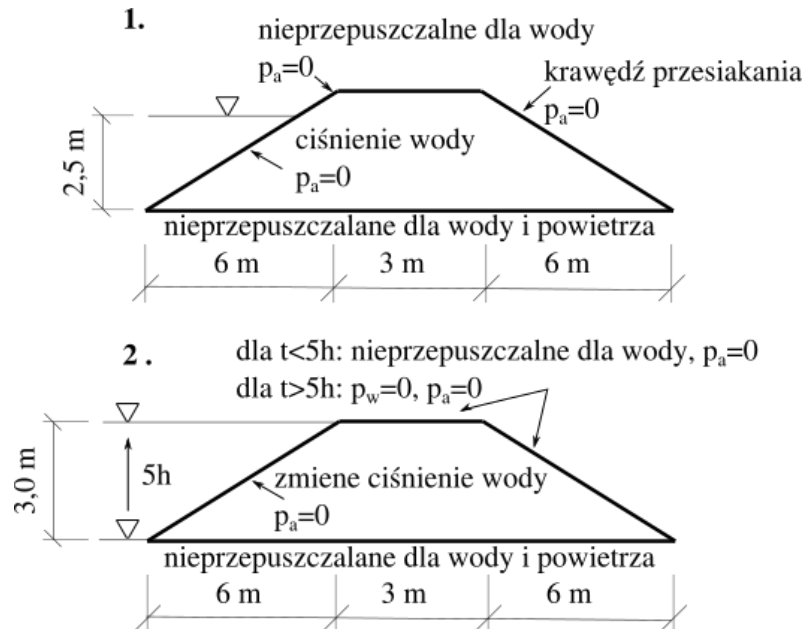
Pierwsze symulacje infiltracji w wałach przeciwpowodziowych wykonano programem FlexPDE [Tisler i Szymkiewicz, 2014]. Z uwagi na ograniczone możliwości implementacyjne wersji bezpłatnej (1000 węzłów), problemy z uzyskaniem zbieżności dla modelu dwufazowego oraz pojawiające się oscylacje, w trakcie obliczeń do dalszej pracy użyto programu napisanego przez Promotora, którego szerszy opis można znaleźć w [Szymkiewicz, 2012].

Pierwszy model przedstawia podnoszenie się zwierciadła wody znajdującego się przy krawędzi odwodnej począwszy od podstawy wału do wysokości 2.5 m - rys. 5.25. Parametry gruntowe przedstawia tabela 5.6.

Początkowo wał znajduje się w stanie nienasyconym z założeniem ujemnego ciśnienia wody przy koronie ( $-29.43 \text{ kPa}$ ), które spada do 0 przy jego dnie. W całym obszarze panuje atmosferyczne ciśnienie powietrza ( $0 \text{ kPa}$ ). Czas podnoszenia zwierciadła wody został przyjęty

Tablica 5.6: Parametry gruntu użyte w symulacji.

$S_{rw}$	$S_{ra}$	$p_g$	$n_g$	$m_g$	$n_0$	$\nu$	$E$	$p'_0$
0.16	0.02	1308 [Pa]	1.89	0.471	0.41	0.25	$5 \times 10^7$ [Pa]	0



Rysunek 5.25: Geometria oraz warunki brzegowe dla wałów użytych w symulacjach.

jako pomijalnie mały, więc założono, że znajduje się ono na wysokości 2.5 m już od początku obliczeń. Warunek brzegowy dla tej krawędzi przyjęto jako hydrostatyczny i waha się od 0 przy zwierciadle wody do 24.53 kPa przy dnie. Dla pozostałego fragmentu tej krawędzi, korony wału oraz skarpy odpowietrznej założony został swobodny wypływ powietrza. Woda natomiast może wypływać tylko z prawej strony zapory. Ta część obszaru rozważana jest jako krawędź swobodnego wypływu (ang. *seepage face*). Oznacza to, że jest ona nieprzepuszczalna dla wody dopóki jej ciśnienie na krawędzi jest ujemne. Kiedy osiąga wartość równą 0, umożliwiony jest wypływ, a warunek brzegowy zmienia się na  $p_w = 0$ . Zmiana warunku brzegowego z Neumanna ( $q_w = 0$ ) na Dirichleta ( $p_w = 0$ ) jest jedną z możliwości modelowania tego zjawiska. Alternatywą jest zastosowanie warunku trzeciego rodzaju (Robina). Pozwala on na balans między dwoma wcześniej wspomnianymi zagadnieniami. W pracy [Tisler i Szymkiewicz, 2014] do modelowania krawędzi przesiakania użyty został warunek Robina w postaci:

$$q' = A(p_w - p_b) + Bq_b \quad (5.2)$$

gdzie A oraz B to współczynniki zależące od czasu oraz lokalnej wartości ciśnienia wody ( $p_w$ ). Jeśli  $A=0$ , a  $B=1$ , to równanie (5.2) będzie sprowadzało się do konkretnej wartości przepływu na krawędzi  $q_b$  (warunek Neumanna). W przypadku, kiedy A będzie bardzo dużą liczbą, a  $B=0$ , to wymuszony zostanie warunek Dirichleta poprzez osiągnięcie przez równanie (5.2) wartości, która będzie zbliżona do  $p_b$ . Zastosowanie warunku Robina wiąże się z pewną niefizycznością warunku brzegowego. Dlatego w prezentowanych symulacjach przedstawione zostaną wyniki,

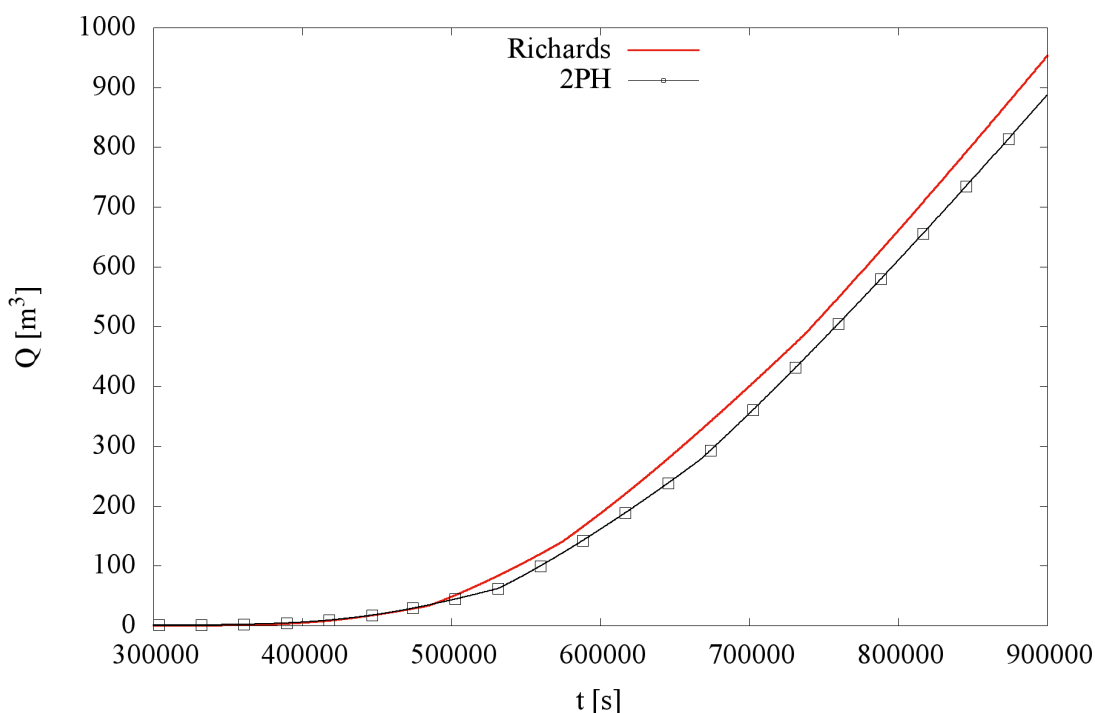
w których do implementacji zastosowane została procedura przełączania się między warunkiem Dirichleta i Neumanna.

Siatka numeryczna wykonana została z elementów czworobocznych z węzłami obliczeniowymi znajdującymi się w ich wierzchołkach (metoda *vertex-centred* opisana w rozdziale 3.2. Mapy oraz wykresy przedstawiają wyniki dla 800 elementów i 626 węzłów, ponieważ dla gęstszych siatek numerycznych nie uzyskano różnic w wynikach. Krok czasowy zmienia się od  $10^{-12}$  do 1000 s.

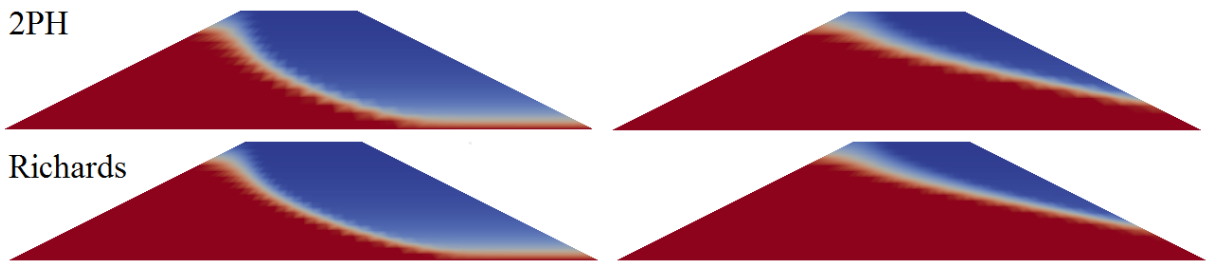
### Wyniki - przykład 1

Rysunek 5.27 przedstawia rozkład nasycenia w wale przeciwpowodziowym w fazie początkowej i końcowej. Kształt frontu nasycenia jest zbliżony bez względu na to jaki model został użyty do obliczeń. Różnice obserwowujemy dopiero pod koniec symulacji.

Wykres 5.26 prezentuje całkowity wypływ wody z krawędzi odpowietrznej. Początkowo wartość jest jednakowa dla obu modeli, co spowodowane jest procesem dotarcia wody do krawędzi przesiąkania. Z czasem jednak w modelu 2PH wypływ staje się zauważalnie mniejszy i w konsekwencji wynosi około 10% mniej niż w modelu Richardsa. Spowodowane jest to obecnością fazy gazowej w obszarze, która musi zostać wypchnięta przez wodę w czasie infiltracji. Procesu tego nie uwzględnia równanie Richardsa, dlatego infiltracja odbywa się szybciej oraz ilość wody jaka opuściła obszar jest większa.



Rysunek 5.26: Całkowity wypływ z krawędzi odpowietrznej wału.



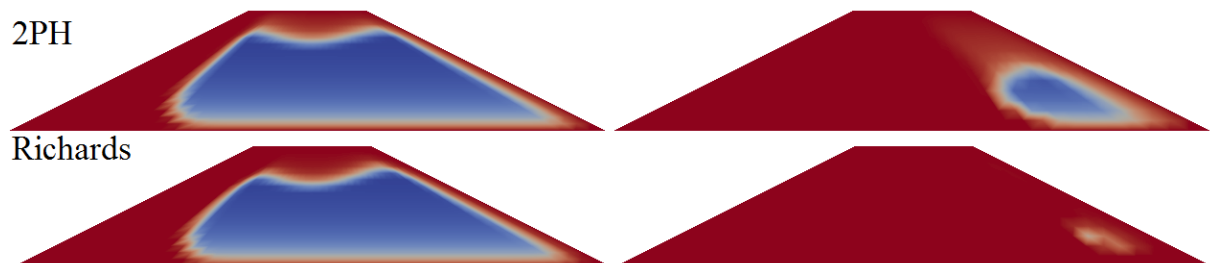
Rysunek 5.27: Rozkład nasycenia w czasach:  $2 \cdot 10^5$  i  $7 \cdot 10^5$ .

## Wyniki - przykład 2

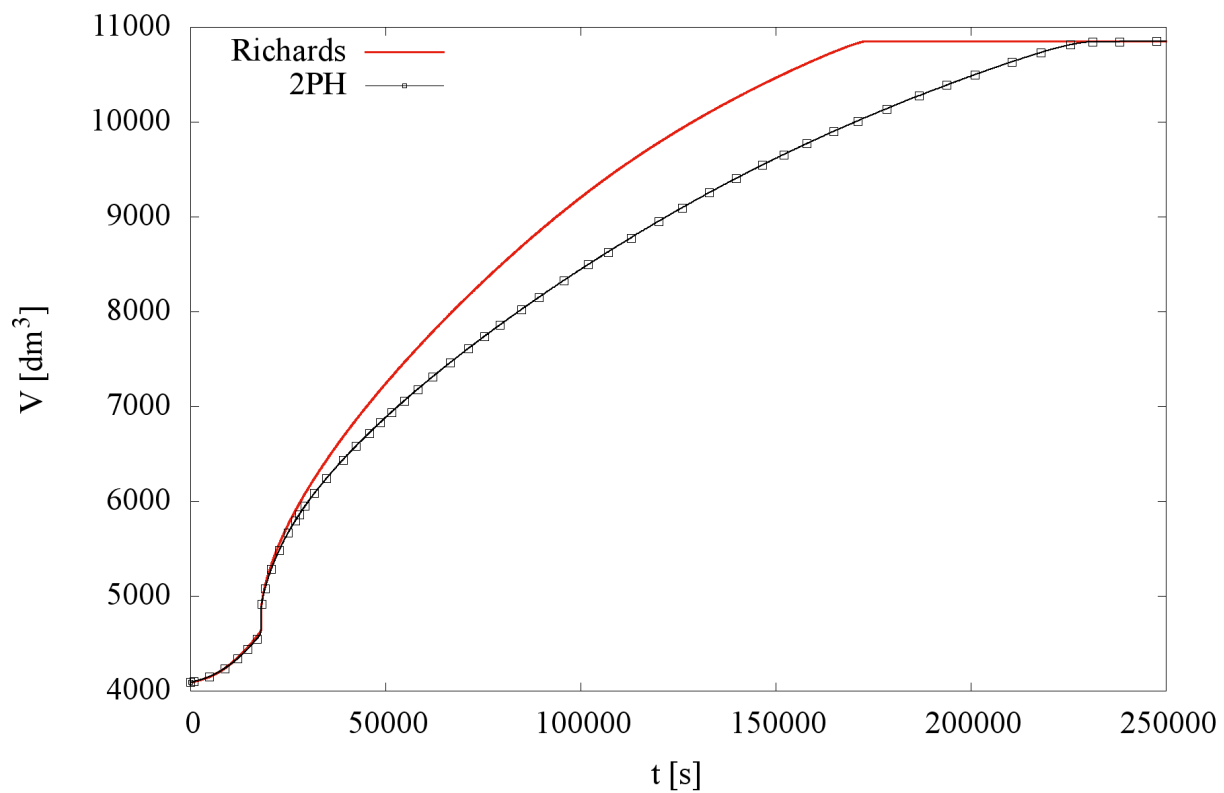
Druga symulacja przedstawia proces zatapiania wału (rys. 5.25-2). Sytuacja ta ma miejsce, kiedy woda znajdująca się przy skarpie odwodnej w wyniku wzmożonych opadów deszczu podnosi się aż do poziomu korony. Geometria, warunki brzegowe oraz materiałowe są identyczne jak w przykładzie nr 1. Jednakże tym razem założono, że czas wznoszenia zwierciadła wody wynosi 5 h oraz, że pozostaje ono na swoim miejscu do końca obliczeń. Początkowo korona oraz skarpa odpowietrzna traktowane są jako nieprzepuszczalne dla wody. Dopiero po rozpoczęciu procesu zatapiania warunek brzegowy zmienia się na  $p_w = 0$ . Ciśnienie powietrza podobnie jak w pierwszym przykładzie założono jako atmosferyczne (wynoszące  $p_a = 0$ ).

Rysunek 5.28 przedstawia proces infiltracji wody do wnętrza wału na krótko przed osiągnięciem nasycenia dla równania Richardsa. Kiedy dla modelu RE osiągnane jest pełne nasycenie, w modelu 2PH w okolicach dolnego naroża wału zaobserwować można spory nienasycony lub częściowo nasycony obszar. Sytuację tą potwierdza również wykres 5.29, na którym widać różnicę w ilości wody obecnej w obszarze.

W przykładzie nr 2 różnice między modelami są bardziej widoczne. Przyczyną tego są warunki brzegowe, które nie pozwalają na swobodną wymianę powietrza między gruntem a atmosferą. Zostaje ono zamknięte wewnątrz wału i kompresowane wskutek wody infiltrującej ze wszystkich stron. W równaniu Richardsa natomiast faza ciekła, która penetruje ośrodek gruntowy, nie napotyka żadnego oporu ze strony fazy gazowej, co powoduje nasycenie obszaru o 20 h szybciej.



Rysunek 5.28: Rozkład nasycenia w czasach:  $0.5 \cdot 10^5$  i  $1.7 \cdot 10^5$ .



Rysunek 5.29: Ilość wody znajdująca się w obszarze w zależności do czasu.

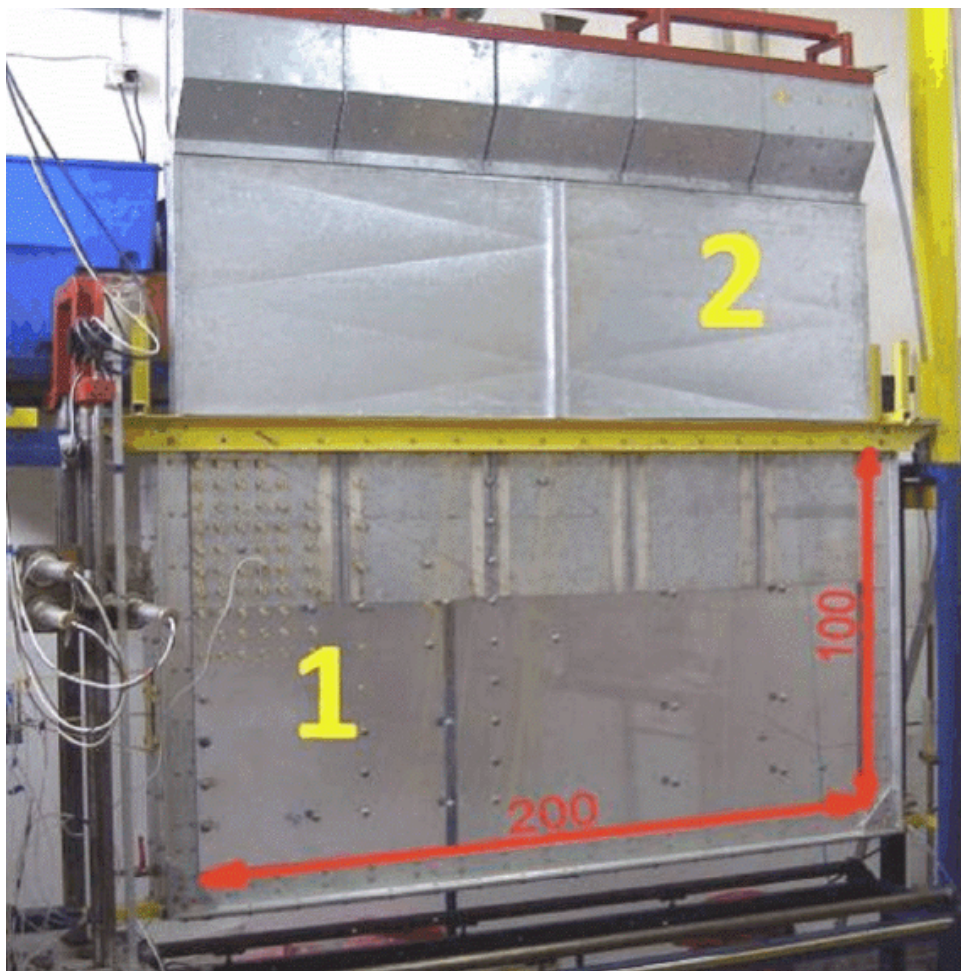
## 6 Porównania z eksperymentami

### 6.1 Mechanizm zamykania powietrza w wałach przeciwpowodziowych

Niniejszy rozdział pracy przedstawia porównanie eksperymentu przeprowadzonego w IBW PAN z rozwiązaniem numerycznym. Doświadczenie polegało na wykonaniu modelu wału przeciwpowodziowego w małej skali, na którym następnie wykonana została symulacja przelewania wody przez koronę zapory. Szczególną uwagę poświęcono procesowi zamykania powietrza w wałach. Rozdział opiera się na maszynopisie artykułu [Tisler et al., 2018].

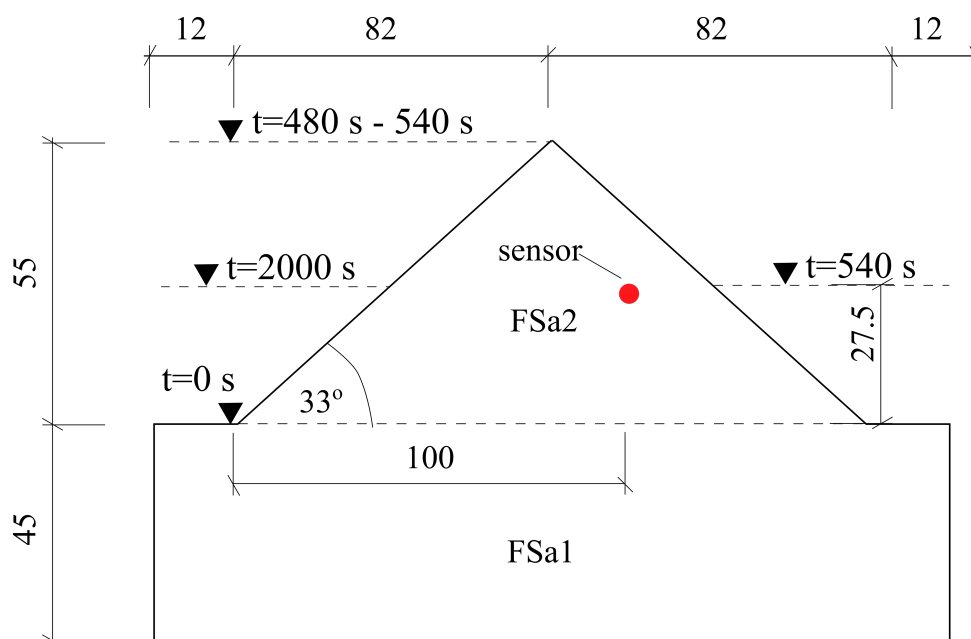
#### Geometria modelu i materiały

Stanowisko pomiarowe, na którym odbywał się eksperyment składało się ze skrzyni o wymiarach wewnętrznych 200 x 100 x 4.5 cm- rys. 6.1, a więc umożliwiało budowę tzw. modelu szczelinowego, w którym jeden z wymiarów (głębokość w kierunku prostopadłym do przekroju poprzecznego) jest znacznie mniejszy od pozostałych. Dzięki temu uzyskane zostały warunki płaskiego stanu odkształcenia.



Rysunek 6.1: Stanowisko badawcze, gdzie 1 - skrzynia doświadczalna, 2 - urządzenie do usypywania metodą deszczu piaskowego [Leśniewska, 2013].





Rysunek 6.2: Geometria modelu badawczego [cm] oraz warunki brzegowe w kolejnych etapach doświadczenia.

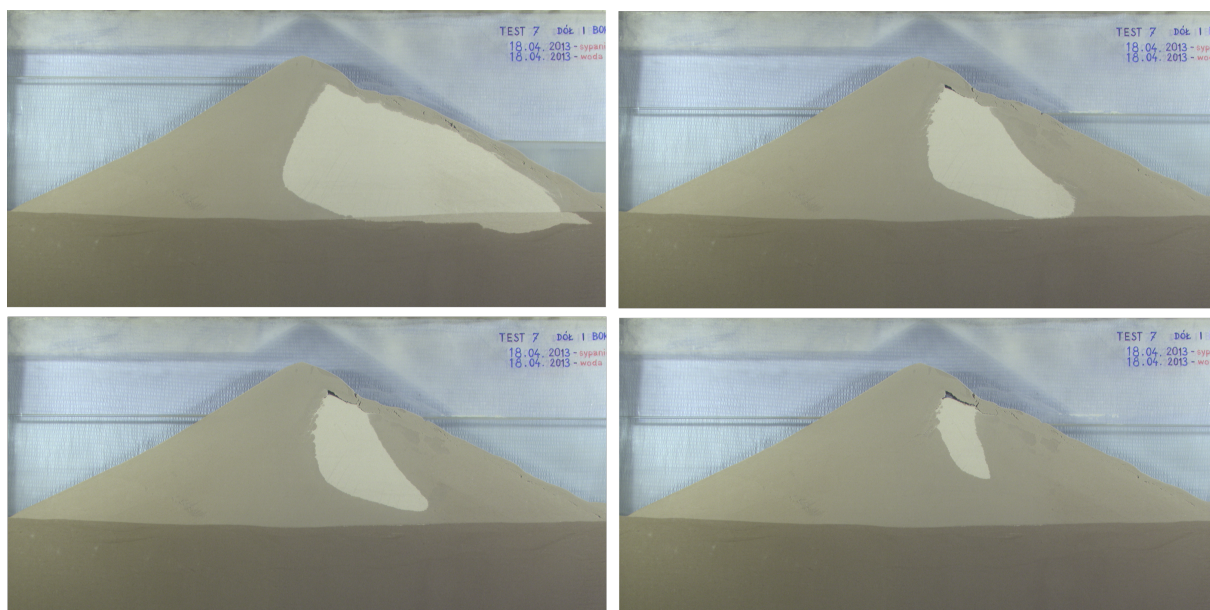
Tablica 6.1: Parametry piasków użyte w badaniu.

Parametr	Wartość	FSa1	FSa2
$d_{50}$	mm	0.25	0.125
$k_s$	cm/s	0.016	0.009
$w$	%	0.1	powietrzno suchy
$\gamma$	kN/m <sup>3</sup>	17.0	15.6
$\phi$	°	37	34

Kształt modelu oraz jego wymiary przyjęte do dalszej analizy przedstawia rysunek 6.2. Skarpy formowano za pomocą urządzenia przedstawionego na rys. 6.1, dzięki któremu uzyskano kąt nachylenia zbliżony do kąta tarcia wewnętrznego analizowanego gruntu ( $33^\circ$ ). Podłoże wału formowano przy użyciu piasku morskiego pobranego w Lubiawie (woj. pomorskie) oznaczanego dalej jako *FSa1*, natomiast korpus wykonano z piasku kwarcowego *FSa2*. Aby dokładnie określić zawartość poszczególnych frakcji wykonano analizę granulometryczną dla obu gruntów (kolejny podrozdział). Wyjściowe parametry obu piasków użytych w modelu przedstawia tabela 6.1.

### Przebieg eksperymentu

Pierwszym etapem badania było uzyskanie początkowego poziomu zwierciadła wody gruntowej w piasku znajdującym się w podstawie wału. Następnie wykonana została symulacja nagłego wezbrania fali powodziowej (480 s) poprzez podnoszenie zwierciadła po stronie odwodnej do momentu, w którym doszło do przelania wody przez koronę (ang. *overtopping*). Z powodu dużych przemieszczeń wału, aby nie dopuścić do zniszczenia skarpy odpowietrznej tuż po wystąpieniu przelania, z prawej strony utrzymywany był stały poziom wody. Kolejnym krokiem było wy-



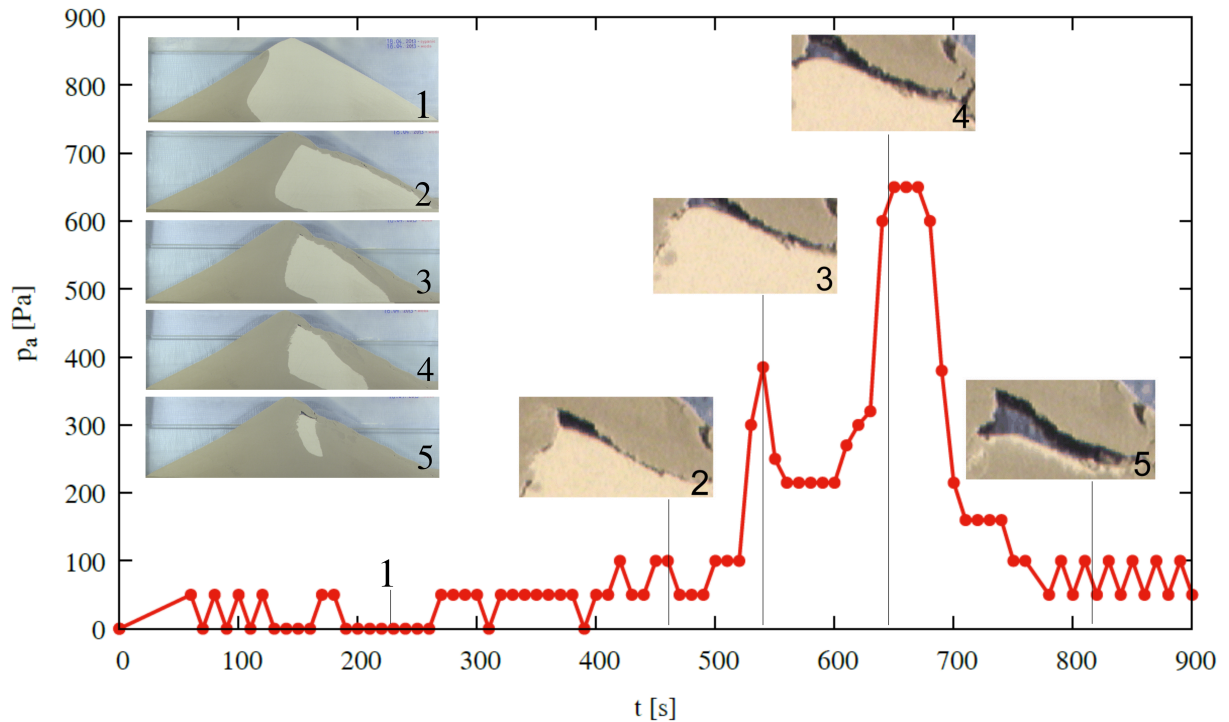
Rysunek 6.3: Zmiany w korpusie wału wywołane podnoszeniem zwierciadła wody.

równanie poziomów zwierciadła wody po obu stronach wału i utrzymywanie ich do momentu osiągnięcia stanu pełnego nasycenia. Zdjęcia z procesu nasycenia przedstawia rys. 6.3. Główne etapy doświadczenia, które zostały przyjęte jako podstawa do wykonania modelu obliczeniowego prezentuje rys. 6.2.

W wyniku zatopienia wału duża część powietrza została zamknięta między nasyconymi obszarami gruntu. Ciśnienie powietrza w strefie nienasyconej mierzone było za pomocą czujnika, którego położenie wyznaczono na podstawie wcześniejszych testów (rys. 6.2). Wykres przedstawiający zmianę ciśnienia w czasie (do momentu zniszczenia czujnika) wraz z zmianami nasycenia zachodzącymi w wale przedstawia rys. 6.4. Uzyskane skoki ciśnienia na wykresie spowodowane są pojawieniem się makro-pora na granicy między nasyconym, a nienasyconym obszarem gruntu. Jego objętość w trakcie symulacji zwiększa się wraz z zmniejszającym się obszarem nienasyconym w wale. Spowodowane jest to infiltrującą w głąb ośrodka gruntowego wodą, która wypycha fazę gazową w kierunku górnej krawędzi prawej skarpy. Obszar nienasycony zmniejsza się, zwiększając przy tym wartość ciśnienia powietrza. Dzieje się tak, dopóki nie zostanie przekroczona wytrzymałość gruntu lub utracony zostanie kontakt z powietrzem atmosferycznym. Po osiągnięciu wartości krytycznej faza gazowa opuszcza obszar gruntu w postaci pęcherzyków i tworzy makro-pora. Jego objętość początkowo rośnie, a następnie stabilizuje się. Od tego momentu panujące wewnątrz ciśnienie wzrasta, aby przy osiągnięciu kolejnej wartości krytycznej ulecieć do atmosfery. W efekcie prowadzi to do zniknięcia makro-pora oraz całej strefy nienasyconej znajdującej się wewnątrz konstrukcji. Pozostałością po makro-porze są drobne spękania znajdujące się w okolicy górnej części krawędzi odowietrznej.

Opisany w poprzednim akapicie model kształtowania się makro-pora odpowiada zmianom zachodzącym na rys. 6.4. W ósmej minucie testu w momencie, kiedy woda przelewa się przez koronę wału obserwujemy wzrost ciśnienia powietrza spowodowany utratą połączenia między fazą gazową znajdującą się w porach a powietrzem atmosferycznym. Dalsza infiltracja prowadzi



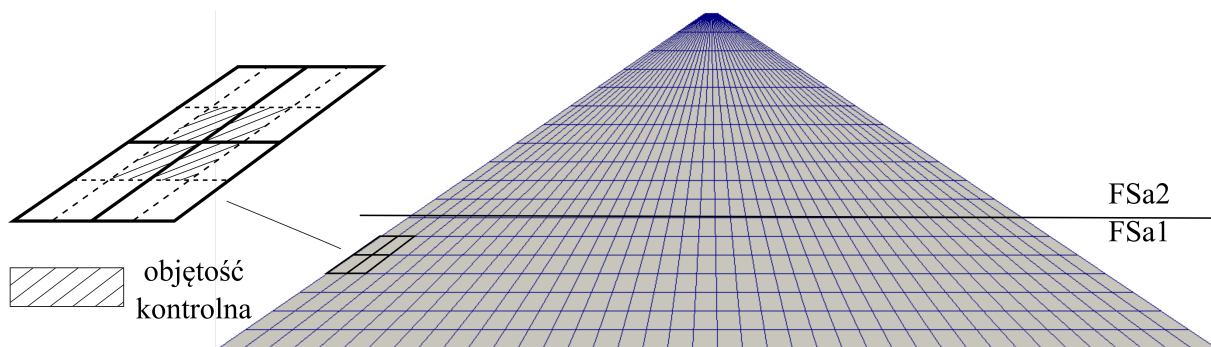


Rysunek 6.4: Zmiana ciśnienia powietrza w czasie: 1- przed zalaniem wału, 2- tuż po zalaniu, 3- osiągnięcie maksymalnego ciśnienia tuż przed powstaniem makro-pora, 4 i 5 - spadek ciśnienia spowodowany powstaniem makro-pora.

do zmniejszenia objętości makro-pora i wzrostu ciśnienia, które osiągnęło niecałe 400 Pa w około dziewiątej minucie testu. Kilkanaście sekund później zaobserwowano powstanie sieci kanalików wydrążonych w nasyconej warstwie gruntu znajdującej się przy skarpie odpowietrznej. Dzięki nim powietrze w porach połączyło się z atmosferycznym, a poziom ciśnienia w wale znacznie się obniżył osiągając wartość 200 Pa (wartość ciśnienia atmosferycznego założona na poziomie 0 Pa). Z powodu ciągłej infiltracji wody z obu stron wału zamknięte zostały kanalikami, którymi ulatniało się powietrze. Ciśnienie powietrza zaczęło ponownie się podnosić, żeby osiągnąć maksimum w jedenastej minucie. Dokładnie w tym momencie doszło również do utraty ciągłości ośrodka gruntowego w formie wąskiego pęknięcia, którego objętość rośnie przy spadającej wartości ciśnienia (rys. 6.4).

### Równania oraz warunki początkowo-brzegowe

Do rozwiązania problemu numerycznego został użyty model dwufazowy oraz równanie Richardsa. Oba modele szczegółowo omówiono w rozdziale 2.6. Równania zostały uzupełnione o krzywe retencji, które opisano modelami van Genuchtena oraz Brooksa-Corey'a (rozdział 2.2.). Przepuszczalność względna dla wspomnianych modeli opisana została odpowiednio za pomocą równania Genuchtena-Mualemę oraz Brooksa-Corey'a-Burdine'a (rozdział 2.3.). Wszystkie symulacje numeryczne wykonane w niniejszym rozdziale zakładały te same sposoby dyskretyzacji zarówno modelu 2PH jak i RE, co prezentuje rys. 6.5. Siatka numeryczna zawierała 779 węzłów, ponieważ dla gęstych dyskretyzacji wyniki nie zmieniały się. Algorytm bazuje na metodzie elementów objętościowych i rozwiązywany jest metodą niejawną. Każdy model dyskretyzowany jest



Rysunek 6.5: Dyskretyzacja przestrzenna rozpatrywanego modelu.

zbiorem nieliniowych równań, które muszą być rozwiązane w odniesieniu do głównych niewiadomych reprezentujących wartości węzłowe określonych parametrów. Dla równania Richardsa jest to ciśnienie wody w porach, dla modelu 2PH oprócz ciśnienia wody dochodzi również stopień wilgotności. Układ równań rozwiązywany został metodą Newtona-Raphsona z krokiem czasowym dobieranym automatycznie i oscylującym między  $6.2 \cdot 10^{-4}$  a 3.147 s.

Warunki brzegowe obrazujące zmienność zwierciadła wody w czasie prezentuje rys. 6.2. Dno wału rozpatrywane było jako nieprzepuszczalne dla wody i powietrza przez cały okres symulacji. Warunki początkowe zostały opisane w postaci ciśnienia wody zmieniającego się od 5.39 kPa przy dnie do  $-4.14$  kPa na koronie wału.

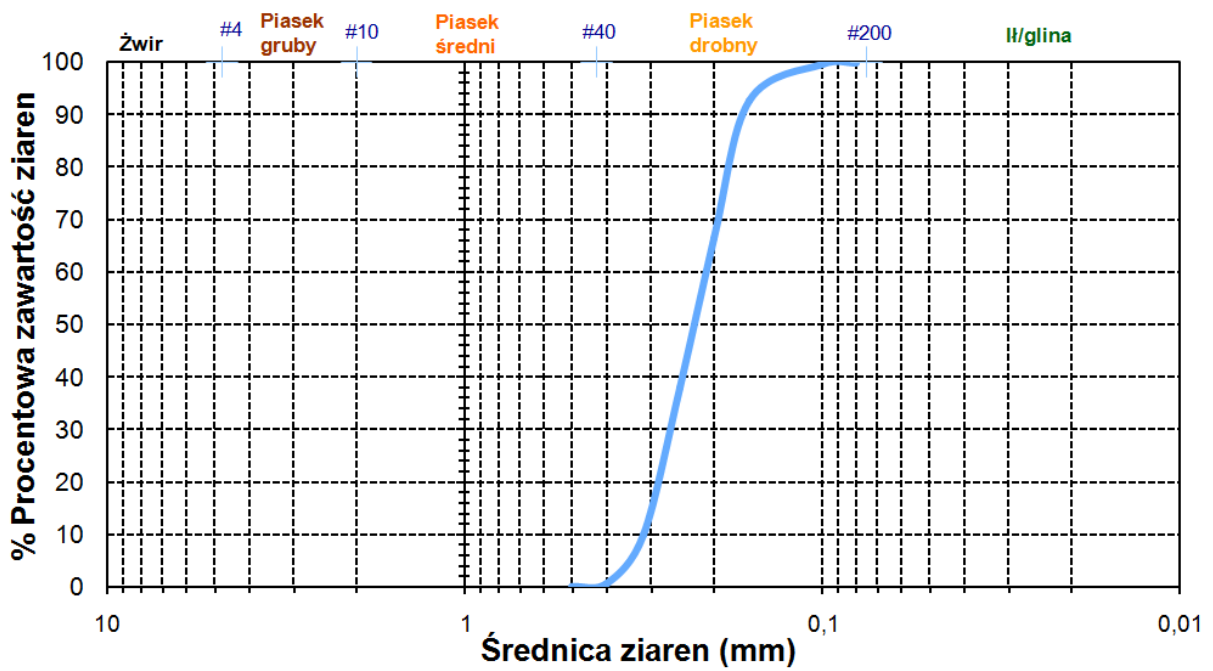
### Obliczanie parametrów materiałowych

Oba grunty, które użyte zostały w eksperymencie poddano stosunkowo niewielu badaniom. Dlatego konieczne było przeliczenie parametrów hydraulicznych korzystając z krzywych przesiewu. Sposób ten, mimo że jest stosunkowo niedokładny, jest szeroko opisywany w literaturze np. [Aubertin et al., 2003, Svensson, 2014, Lopez et al., 2015, Kovács, 2011]. Równania te nazywane inaczej funkcjami pedotransferu pozwalają na wyznaczenie m. in. przepuszczalności względnej na podstawie średnicy miarodajnej ziarna, czy porowatości. W pracy został użyty zmodyfikowany model Kovacsa przedstawiony w artykule [Aubertin et al., 2003] oraz w rozdziale 2.4.

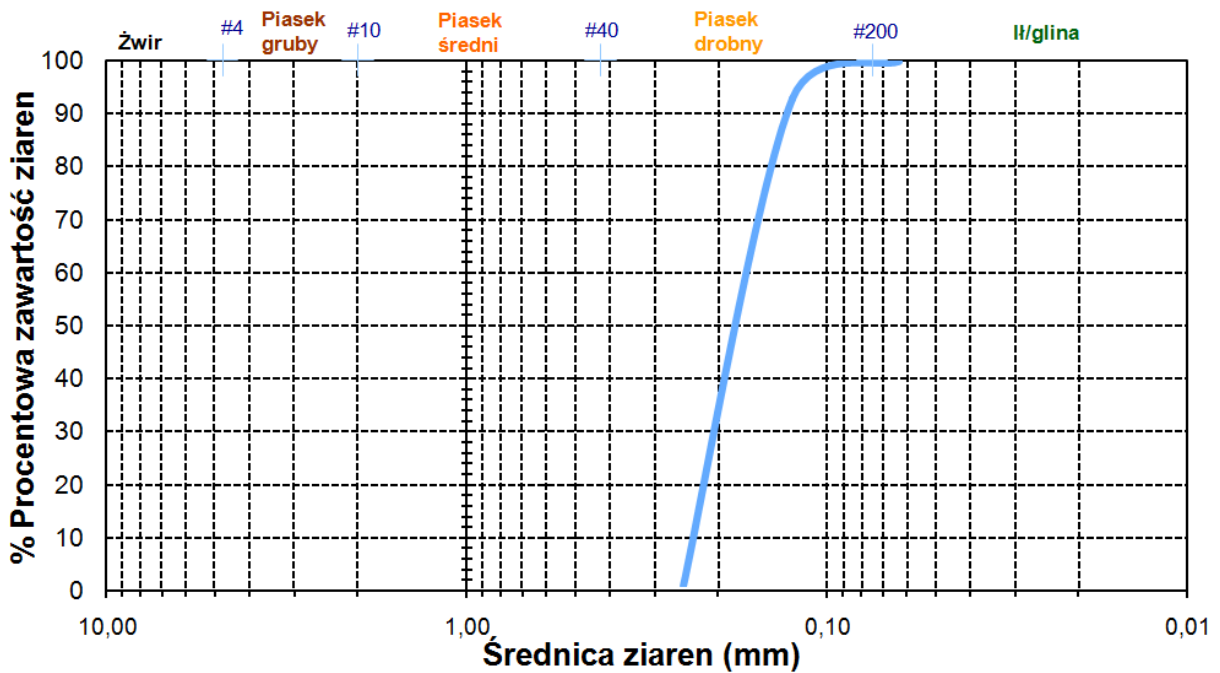
Aby wyznaczyć krzywe granulometryczne dla każdego z piasków zostały wykonane 3 niezależne badania, każde na próbce o masie 1000 g. Oba piaski, które wykorzystano w badaniu były dobrze przesiane, w związku z czym otrzymano bardzo strome krzywe przesiewu rys. 6.7 oraz rys. 6.6. W tabeli 6.2 znajdują się parametry obliczone na podstawie modelu [Aubertin et al., 2003].

Podstawiając parametry obliczone w tab. 6.2 do równań (2.56)- (2.58) otrzymamy związek między nasyceniem a ssaniem. Aby dopasować te dane do najczęściej używanych funkcji opisujących krzywe retencji użyty został program RETC. Uzyskane w ten sposób parametry odpowiadające modelowi van Genuchtena i Brooksa-Corey'a prezentuje tabela 6.3. Celem porównania otrzymanych wyników wykonane zostało również przeliczenie według [Parker i Lenhard, 1987]:

Bazując na wielkościach z tab. 6.3 można wykreślić krzywe retencji dla obu gruntów. Prezentują je rysunki 6.8 oraz 6.9. Rozwiązanie analityczne zostało dobrze odwzorowane przez oba modele. Jednak lepszą zgodność w zakresie wysokich wartości nasycenia wykazuje model van



Rysunek 6.6: Krzywa uziarnienia dla piasku FSa1.



Rysunek 6.7: Krzywa uziarnienia dla piasku FSa2.

Tablica 6.2: Parametry piasków użyte obliczone według [Aubertin et al., 2003].

<i>Parametr</i>	<i>Jednostka</i>	<i>FSa2</i>	<i>FSa1</i>
$d_{10}$	<i>cm</i>	0.013	0.018
$d_{60}$	<i>cm</i>	0.016	0.021
$C_U$	-	1.23	1.16
$D_H$	<i>cm</i>	0.0143	0.0194
$h_c$	<i>cm</i>	47.44	35.12
$\psi_r$	<i>cm</i>	88.28	61.55

Tablica 6.3: Parametry piasków uzyskane z programu RETC oraz według [Parker i Lenhard, 1987].

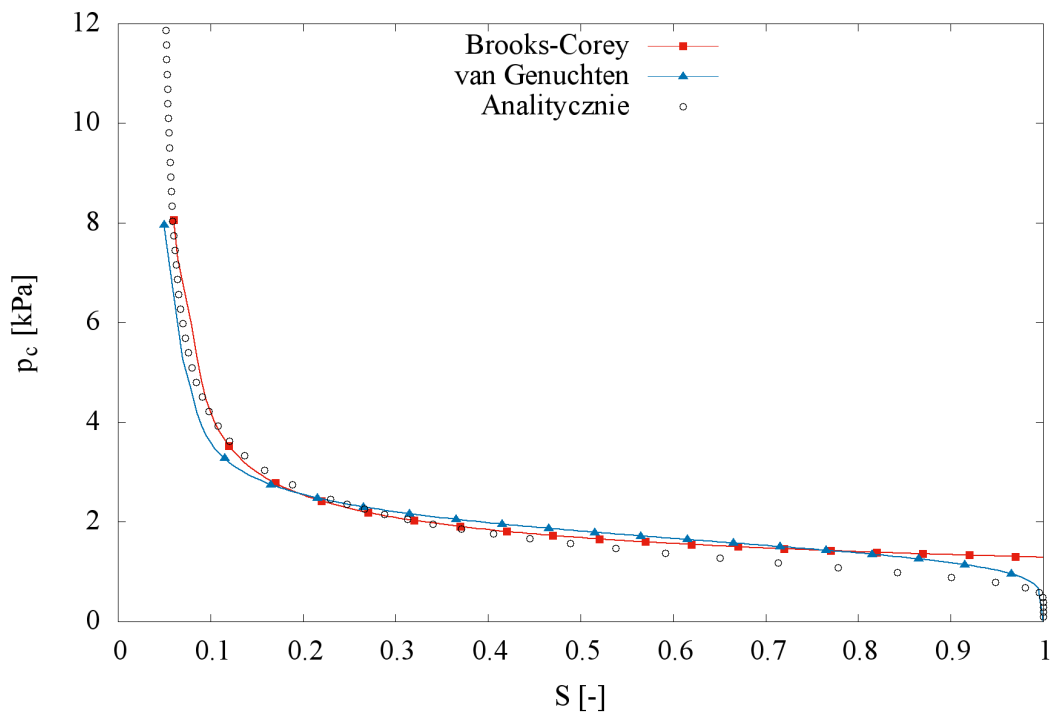
<i>FSa2</i>			<i>FSa1</i>		
<i>van Genuchten</i>					
$n_g$	-	5.47	$n_g$	-	5.22
$p_g$	<i>Pa</i>	1672	$p_g$	<i>Pa</i>	1380
<i>Brooks – Corey</i>					
$\lambda (n_b)$	-	2.92	$\lambda (n_b)$	-	3.43
$p_e$	<i>Pa</i>	1293	$p_e$	<i>Pa</i>	1032
<i>według Lenharda</i>					
$\lambda (n_b)$	-	2.55	$\lambda (n_b)$	-	2.42
$p_e$	<i>Pa</i>	1388.6	$p_e$	<i>Pa</i>	1135

Genuchtena. Spowodowane jest to parametrem ciśnienia wejścia powietrza ( $p_e$ ), który wykorzystuje funkcja Brooksa-Corey’a.

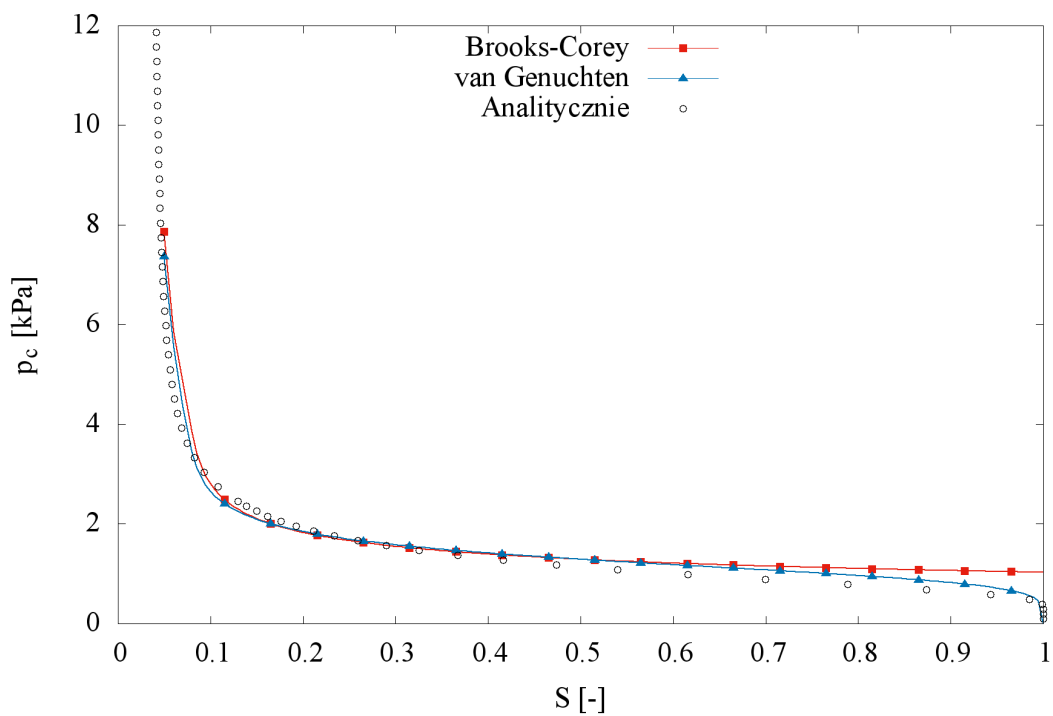
Ostatnią konieczną do obliczenia wartością jest współczynnik filtracji. Podobnie jak w przypadku krzywej retencji zostanie on wyznaczony w oparciu o analizę granulometryczną. W literaturze możemy znaleźć wiele modeli pozwalających na wyznaczenie tego parametru, których przegląd można znaleźć w [Vuković i Soro, 1992, Chapuis, 2012, Szymkiewicz i Kryczka, 2011]. Jednakże każda z metod ma swoje ograniczenia związane np. rodzajem analizowanego gruntu lub przedziałami porowatości. Artykuł przeglądowy przygotowany przez [Szymkiewicz i Kryczka, 2011] przedstawia najpopularniejsze z równań oraz dzieli je na 3 główne grupy:

- Kozeny’ego-Carmana (KC) oraz pokrewne,
- Hazena oraz pokrewne,
- Amerykańskie i pokrewne.

Wzory z grupy pierwszej zależą głównie od porowatości oraz reprezentatywnej średnicy określonej na podstawie krzywej uziarnienia. Natomiast pozostałe dwie grupy opierają się na współczynniku korekcyjnym oraz średnicy reprezentatywnej odczytywanej z krzywej przesiewu. Na podstawie obliczeń wykonanych przez [Szymkiewicz i Kryczka, 2011] oraz deklarowanych zakresów stosowalności, do obliczenia współczynnika filtracji zostało wybranych 5 najpopularniejszych wzorów spośród wyżej wymienionych grup (trzy z gr. 1 i po jednym z pozostałych grup). Wszystkie równania zostały sprowadzone do jednej postaci ogólnej, celem uproszcze-



Rysunek 6.8: Krzywa retencji dla piasku drobnego użytego do wykonania konstrukcji wału (*FSa2*).



Rysunek 6.9: Krzywa retencji dla piasku drobnego użytego do wykonania podłoża wału (*FSa1*).

Tablica 6.4: Wzory oraz ich współczynniki przyjęte do obliczeń według [Szymkiewicz i Kryczalło, 2011] Parametry  $d_d^{(i)}$  oraz  $d_g^{(i)}$  to odpowiednio  $i$ -te dolne i górne ograniczenie frakcji.

	$k = C \cdot f(n) \cdot d_m^2$			<i>FSa2</i>	<i>FSa1</i>
<i>Autor</i>	$C$	$f(n)$	$d_m$ [mm]	$k$ [m/db]	
<i>Kozeny – Carman</i>	1200	$\frac{n^3}{(1-n)^2}$	$(d_d^{(i)})^{0.595} \cdot (d_g^{(i)})^{0.405}$	11.95	27.84
<i>Zunker</i>	910	$\left(\frac{n}{1-n}\right)^2$	$\frac{d_g^{(i)} \cdot d_d^{(i)} \cdot (\ln(d_g^{(i)}) - \ln(d_d^{(i)}))}{d_g^{(i)} - d_d^{(i)}}$	18.32	41.4
<i>Zamarin</i>	4100	$\frac{n^3(1.275-1.5n)^2}{(1-n)^2}$	$\frac{d_g^{(i)} - d_d^{(i)}}{\ln(d_g^{(i)}) - \ln(d_d^{(i)})}$	12.55	35.83
<i>Hazen</i>	1200	1	$d_{10}$	20.28	38.88
<i>Amerykański</i>	311	1	$d_{20}$	6.09	11.22

nia zapisu. Wartości współczynnika  $C$  dobrano tak, aby przy średnicy ziaren  $d$  w  $mm$  wynik otrzymać [m/db]. Postać ogólna wzoru prezentuje się następująco:

$$k = C \cdot f(n) \cdot d_m^2. \quad (6.1)$$

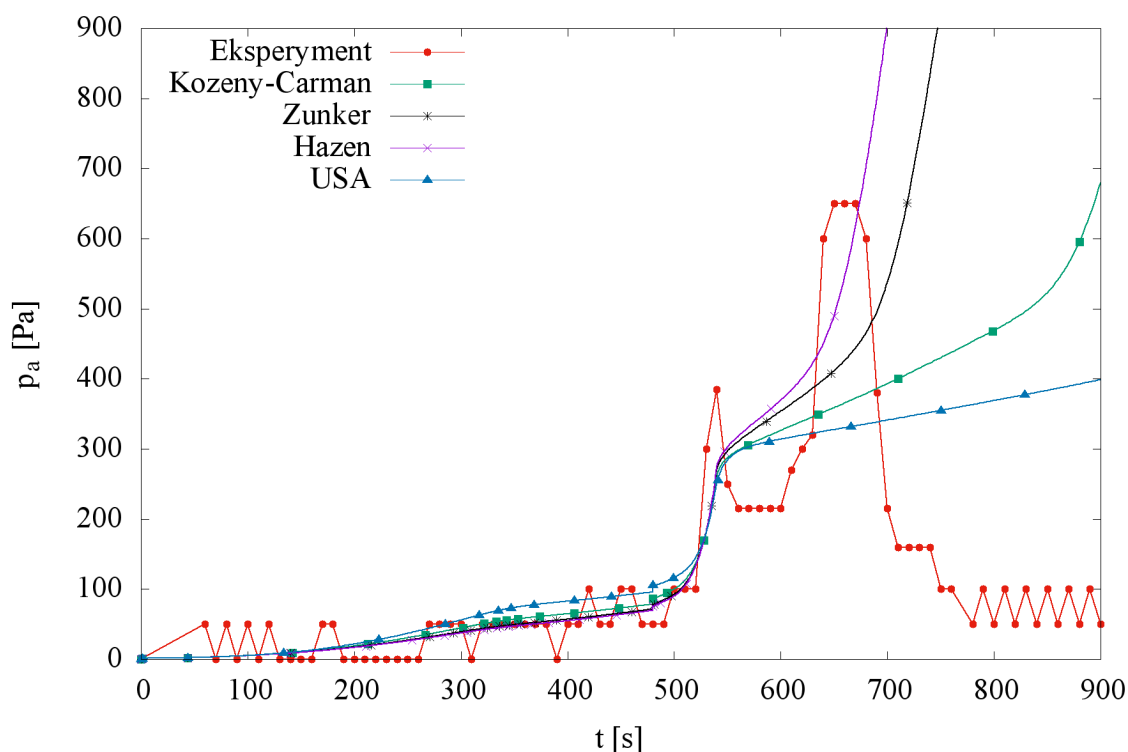
Parametr  $C$ , w zależności od wzoru, dobierany jest tabelarycznie lub na podstawie zaleceń autora (szerszy opis można znaleźć w [Szymkiewicz i Kryczalło, 2011]). Funkcja uzależniona jest najczęściej od porowatości lub wskaźnika porowatości. Natomiast średnicę miarodajną oblicza się analitycznie lub odczytuje na podstawie krzywej przesiewu. Zestawienie wzorów użytych do obliczeń oraz otrzymane współczynniki filtracji przedstawia tabela 6.4. Dla obu gruntów możemy zaobserwować rozbieżności między wynikami, których rozrzut wynosi od 14 do 27 m/db w zależności od rodzaju piasku. Wzór Amerykański dla każdego z gruntów charakteryzuje się najmniejszą wartością, która znacznie odbiega od pozostałych. Natomiast rozwiązanie podające najwyższy współczynnik filtracji różni się w zależności od analizowanego gruntu.

## Wyniki numeryczne

Aby dokładniej przyjrzeć się zjawisku zamykania powietrza w inkluzji, wykonano szereg symulacji numerycznych. Głównym ich zadaniem była ocena wpływu współczynnika filtracji oraz parametrów krzywej retencji na wyniki obliczeń. Początkowe symulacje wykonane były dla wszystkich wyznaczonych wielkości z tab. 6.4, aby sprawdzić wrażliwość rozwiązania na błędne oszacowanie współczynnika filtracji. W związku z uzyskanymi niedużymi rozbieżnościami między wynikami otrzymanymi z wzorów Kozeny’ego-Carmana i Zamarina na wykresach przedstawione jest jedynie rozwiązanie pierwszego z nich. Dodatkowo, sprawdzono wpływ sposobu obliczania funkcji kapilarnych modelami van Genuchtena i Brooksa-Corey’a (parametry uzyskane z programu RETC).

Krzywe retencji przedstawione na rysunku 6.8 oraz 6.9 świadczą o dobrej zgodności między modelem van Genuchtena i Brooksa-Corey’a, która została również potwierdzona na wykresach poniżej (6.10 i 6.11). Oba rozwiązania charakteryzują się dobrym dopasowaniem szczególnie w początkowym okresie, kiedy dochodzi do szybkiej infiltracji na lewej skarpie wału. W drugim



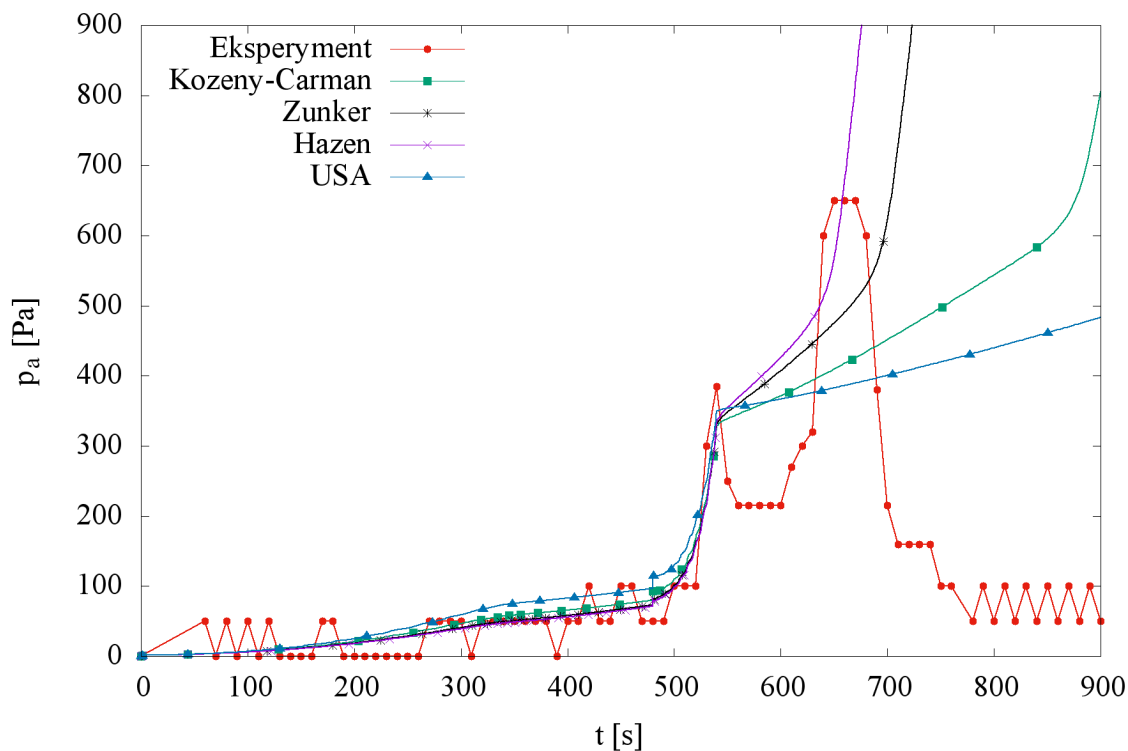


Rysunek 6.10: Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z założeniem modelu van Genuchtena.

etapie, kiedy nastąpiło przelanie wody przez koronę, lepiej prezentuje się model Brooksa-Corey'a. Bardzo dobrze oddaje on moment gwałtownego wzrostu ciśnienia w wale oraz jest bliżej wartości przy której doszło do spadku ciśnienia. Do tego momentu w wynikach nie obserwujemy również dużych różnic w odniesieniu do metod obliczeń współczynnika filtracji. Pojawiają się one dopiero w okolicach 540 s, kiedy zwierciadło wody zaczyna podnosić się na prawej skarpie. Infiltrująca woda powoduje, że powietrze znajdujące się w porach kompresowane jest do coraz to mniejszej objętości. Wynikiem czego jest rosnące ciśnienie zamkniętej fazy gazowej, które po przekroczeniu wartości krytycznej powoduje jego spadek oraz ucieczkę powietrza przez makro-por. Mechanizm ten nie jest odwzorowany przez model dwufazowy z uwagi na brak procedury ograniczającej pojawiające się oscylacje ciśnienia.

Od momentu pierwszego spadku ciśnienia wszystkie modele numeryczne odbiegają od wyników doświadczenia. Należy jednak zauważyć, że mimo iż nie uwzględnia się spadku ciśnienia powietrza, dochodzi do zmiany nachylenia wszystkich krzywych. Analizując dalszy przebieg wykresu obserwuje się różne tempo wzrostu ciśnienia powietrza zależne bezpośrednio od szybkości infiltracji. Dla największego współczynnika (formuła Hazena) otrzymano najlepszą zgodność z wynikami eksperymentu. Prowadzi ona jednak do uzyskania największej końcowej wartości ciśnienia (1605 Pa). Stosunkowo blisko rozwiązania jest również model Zunkera. Natomiast wyniki uzyskane za pomocą pozostałych współczynników znacznie odbiegają od wartości ciśnienia powietrza otrzymanych w badaniu. Tłumaczy to 2-3 krotne różnice między obliczonymi współczynnikami w tabeli 6.4.

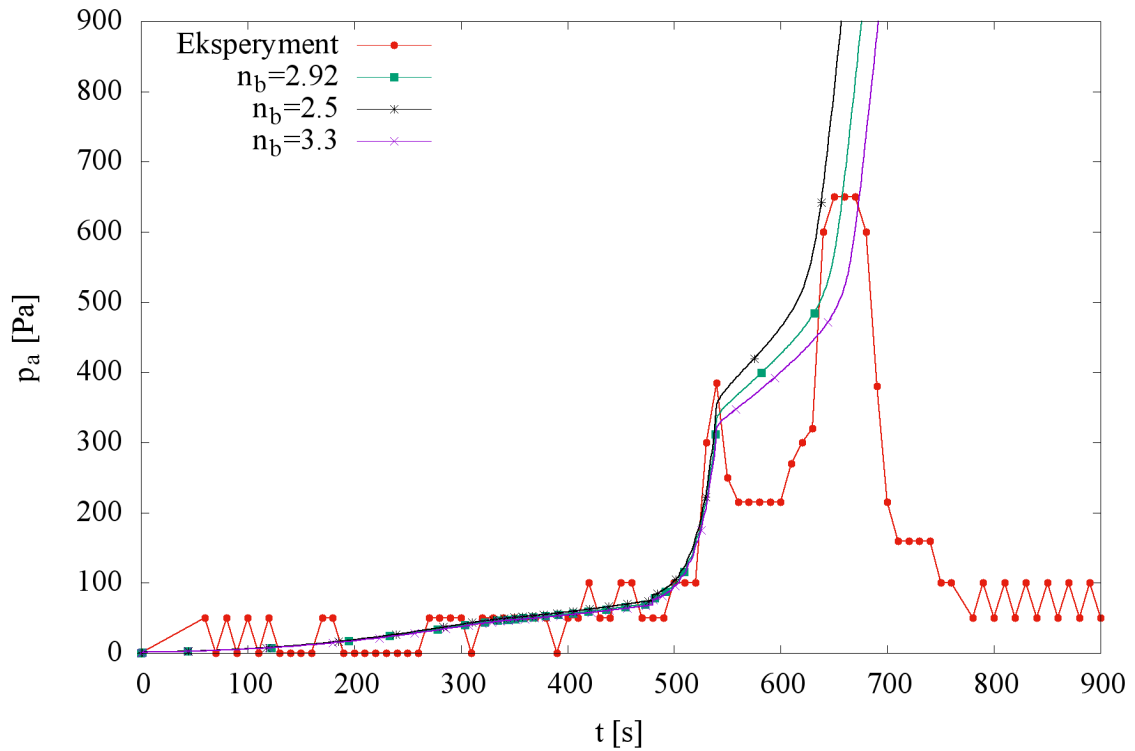
Celem oceny wpływu na rozwiązanie poszczególnych parametrów krzywych retencji modeli



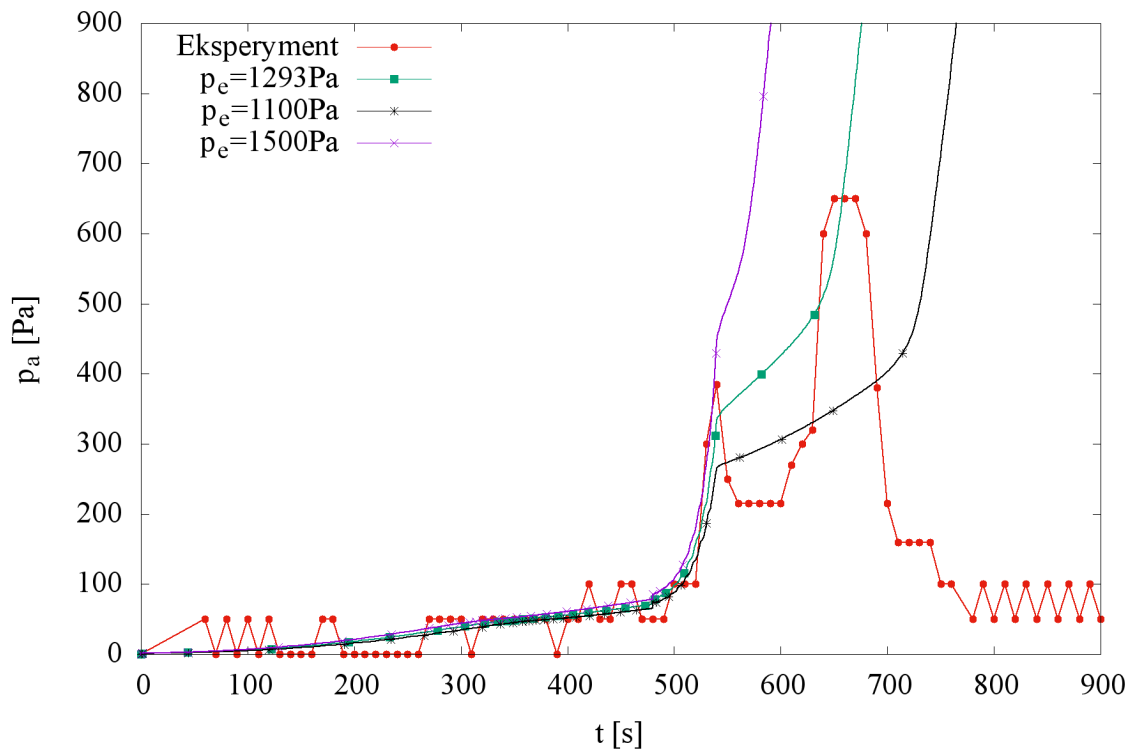
Rysunek 6.11: Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z założeniem modelu Brooksa-Corey'a.

van Genuchtena i Brooksa-Corey'a wykonano również analizę wrażliwości. Wyniki prezentują rys. 6.12-rys. 6.15. Analizując krzywe można zauważyć, że największy wpływ na wartości ciśnienia mają parametry skalujące. Wzrost  $p_e$  oraz  $p_g$  o odpowiednio 12% i 15% prowadzi do otrzymywania wyższych ciśnień w powstałym obszarze nienasyconym. Mimo że model van Genuchtena nie uwzględnia wartości ciśnienia wejścia powietrza, to uzyskane krzywe prezentują się w podobny sposób. W odróżnieniu do parametrów skalujących, parametry odpowiedzialne za kształt krzywych  $n_b(\lambda)$  i  $n_g$  nie mają znacznego wpływu na wyniki. Zmiany na poziomie 15% i 20% prowadzą tylko do nieznacznych odchyłeń.

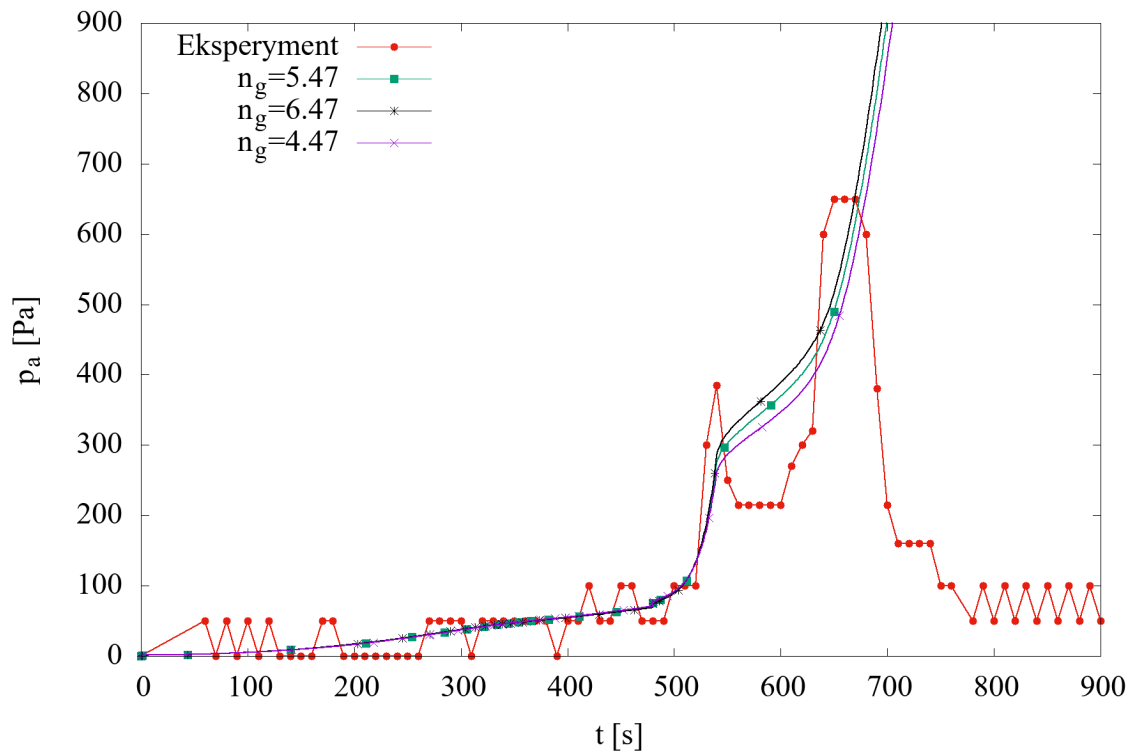
Celem porównania z równaniem Richardsa wykonany został dodatkowy model numeryczny (przewodność według równania Brooksa-Corey'a Burdine'a). Wyniki w czasie  $t=660$  s odpowiadające maksymalnemu ciśnieniu powietrza przedstawia rys. 6.16. Analizując go można zaobserwować stosunkowo dużą różnicę między obszarami nienasyconymi. Spowodowana jest ona pomijaniem fazy gazowej przez równanie Richardsa. Założenie to sprawia, że infiltrująca woda wypełnia pory bez napotykania oporu ze strony znajdującego się w nich powietrza. Model dwufazowy zdecydowanie lepiej pasuje do wyników doświadczenia, szczególnie jeśli chodzi o położenie oraz kształt strefy nienasyconej. Należy jednak zwrócić uwagę, że oba modele nie odwzorowały wąskiego nasyconego obszaru równoległego do prawej skarpy. Powodem tego może być nie uwzględnianie histerezy gruntu.



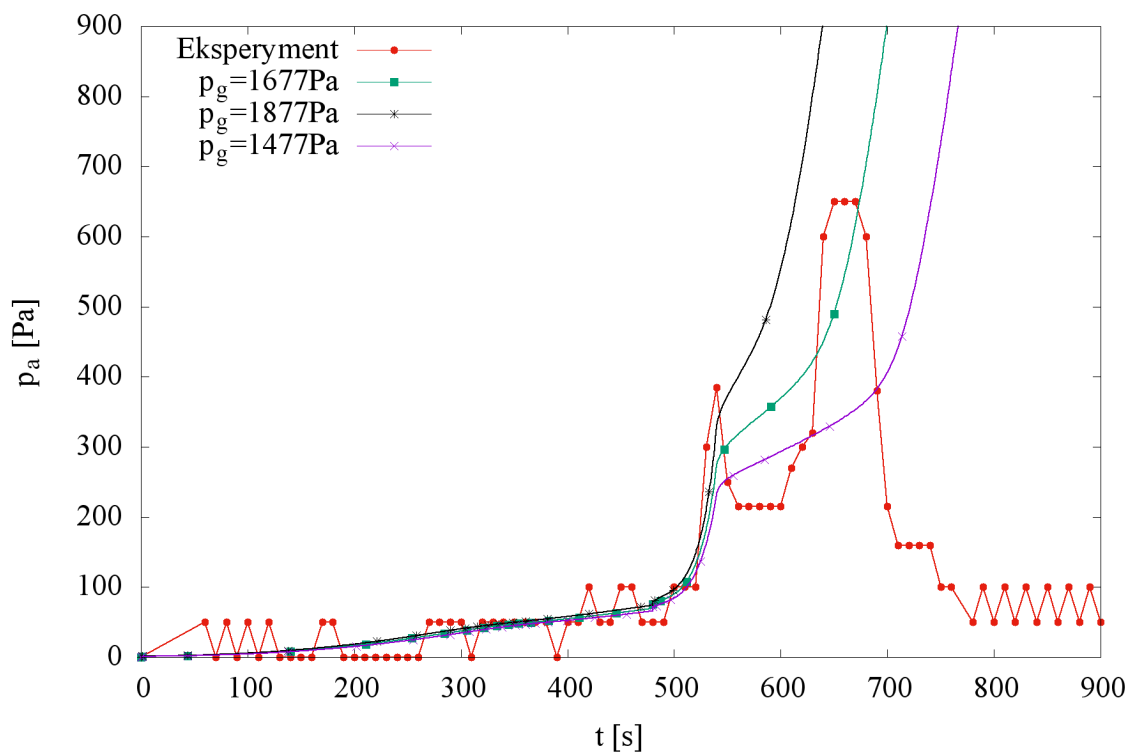
Rysunek 6.12: Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru  $n_b$  ( $\lambda$ ) w modelu Brooksa-Corey'a.



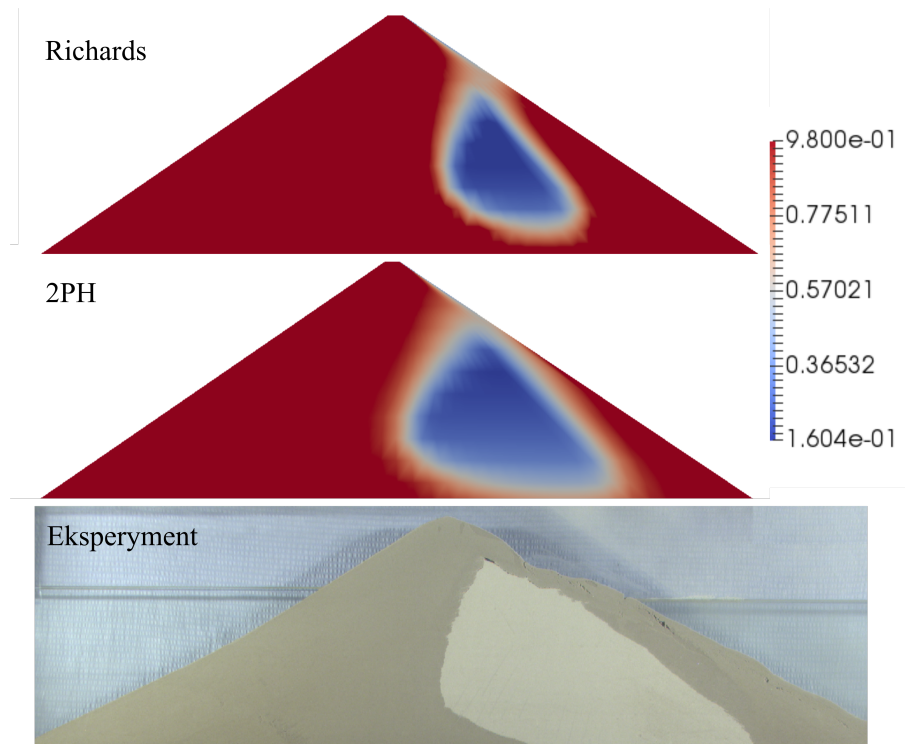
Rysunek 6.13: Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru  $p_e$  w modelu Brooksa-Corey'a.



Rysunek 6.14: Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru  $n_g$  w modelu van Genuchtena.



Rysunek 6.15: Porównanie wykresów ciśnienia powietrza z wynikami eksperymentalnymi z uwzględnieniem zmiany parametru  $p_g$  w modelu van Genuchtena.



Rysunek 6.16: Porównanie map nasycenia uzyskanych dla rozwiązań numerycznych z eksperymentem ( $t=660$  s).

## Wnioski

Przedstawione symulacje oraz porównania zawierają kilka spostrzeżeń odnośnie wpływu powietrza na proces zatapiania wałów oraz innych podobnych konstrukcji ziemnych. W eksperymencie podczas infiltracji duża część powietrza została zamknięta wewnątrz wału, co w efekcie doprowadziło do powstania makro-pora oraz spękań przy krawędzi odpowietrznej. Uzyskane wyniki oraz zachowanie się konstrukcji pod wpływem infiltrującej wody potwierdza wcześniejsze obserwacje przedstawione w pracach [Tisler i Szymkiewicz, 2014, Tisler i Szymkiewicz, 2017].

Wykonane symulacje miały za zadanie odzwierciedlenie procesu infiltracji zachodzącego w doświadczalnym wale przeciwpowodziowym przygotowanym w małej skali. W początkowym etapie symulacji model nie jest wrażliwy na oscylacje, które mogą pojawiać się z uwagi na błędne określenie współczynnika filtracji lub parametrów odpowiedzialnych za kształt krzywej retencji. W drugiej fazie, kiedy ciśnienie zaczyna gwałtownie wzrastać różnice są bardziej widoczne. Dotyczą one głównie wyboru między modelem van Genuchtena a Brooks-Corey'a oraz współczynnika filtracji, który obliczany był na podstawie krzywej przesiewu. Z przedstawionej analizy wynika, że w użytych funkcjach retencji zdecydowanie mniejszy wpływ na wyniki mają wartości parametrów  $n_g$  oraz  $n_b$  ( $\lambda$ ).

W trakcie eksperymentu dochodzi do zmiany ciśnienia powietrza, która ma znaczny wpływ na mechaniczne zachowanie się wału. Uwzględnienie go w obliczeniach możliwe jest tylko za pomocą modelu dwufazowego, który w porównaniu do równania Richarda charakteryzuje się również lepszą zgodnością z obserwowanym nasyceniem wału. Podkreśla to istotność modeli wielofazowych w kontekście analizy problemów związanych z modelowaniem przepływów zacho-

dzących w konstrukcjach ziemnych [Khoei i Mohammadnejad, 2011, Sun et al., 2015].

## 6.2 Efekt zamykania powietrza w gruboziarnistych inkluzjach

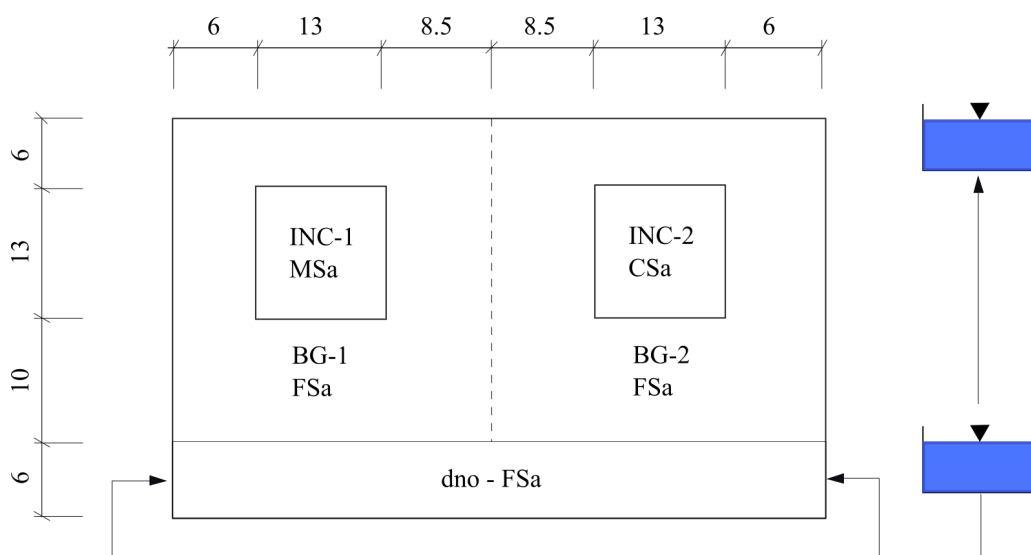
Niniejszy rozdział bazuje na artykule [Szymańska et al., 2016], w którym zaprezentowano wyniki eksperymentu polegającego na infiltracji wody w górę przez drobnoziarnisty grunt zawierający gruboziarniste inkluzje. Autor niniejszej pracy jest również współautorem artykułu, a jego udział polegał na wykonaniu symulacji numerycznych oraz dopasowaniu parametrów i porównaniu wyników z eksperymentem.

### Eksperyment

Eksperyment został wykonany w laboratorium Instytutu Mechaniki Płynów i Inżynierii Środowiska w Hanowerze. Użyto trzech rodzajów piasku: drobnego, średniego oraz grubego (parametry według tabeli 6.5). Całość znajdowała się w komorze z plexiglasu, co umożliwiło stworzenie warunków dla przepływu dwuwymiarowego; układ warstw przedstawia rys. 6.17. W związku z założeniami eksperymentu, zakładającymi filtrację w górę, woda aplikowana była przez dwa wloty znajdujące się u dołu komory. Dodatkowo, aby móc lepiej zobrazować proces nasycania obszaru, wodę zabarwiono na niebiesko. Wartości nasycenia otrzymano za pomocą analizy fotografii. W trakcie eksperymentu zdjęcia wykonywano w odstępach czasowych równych 10 s aparatem Nikon D90 umieszczonym przed komorą (rozdzielczość 4288x2848 pikseli). Na podstawie ilości pikseli zabarwionych na niebiesko obliczano stopień wilgotności dla każdego z trzech piasków.

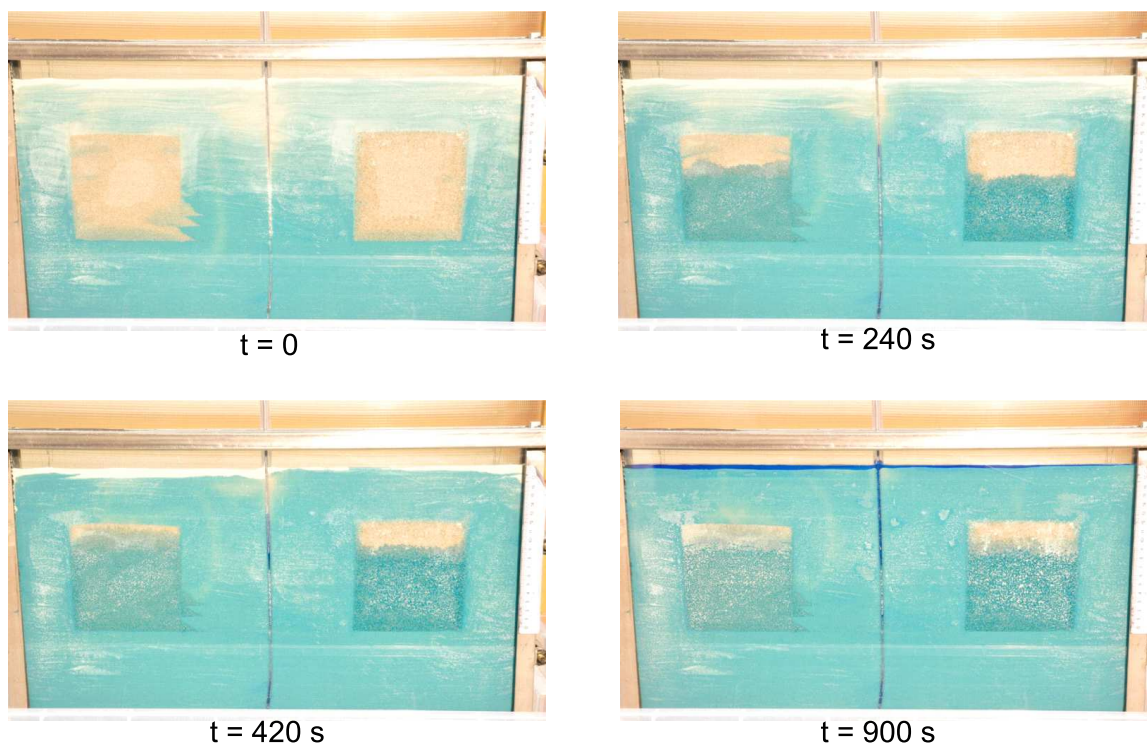
Tablica 6.5: Parametry piasków użyte w eksperymencie.

<i>Parametr</i>	<i>Jednostka</i>	<i>CSa</i>	<i>MSa</i>	<i>FSa</i>
$d$	<i>mm</i>	0.7 do 1.2	0.4 do 0.8	0.1 do 0.3
$\phi$	-	0.54	0.45	0.37
<i>Parametry otrzymane z pomiarów niezależnych</i>				
$\theta_{sw}$	-	-	0.36	0.28
$\theta_{rw}$	-	0.0	0.0	0.02
$p_{g;d}$	[Pa]	1143	1990	4004
$p_{g;i}$	[Pa]	565	-	-
$n_g$	-	6.07	4.86	3.35
$k_s$	[m <sup>2</sup> ]	$1.557 \cdot 10^{-11}$	$8.66 \cdot 10^{-12}$	$4.48 \cdot 10^{-12}$
<i>Parametry otrzymane z pierwszego dopasowania</i>				
$\theta_{sw}$	-	0.54	0.45	0.37
$\theta_{rw}$	-	0.0	0.0	0.0
$p_{e;i}$	[Pa]	338	746	1582
$\lambda$	-	2.86	2.25	1.47
$k_s$	[m <sup>2</sup> ]	$1.557 \cdot 10^{-11}$	$8.66 \cdot 10^{-12}$	$4.48 \cdot 10^{-12}$
<i>Parametry otrzymane z najlepszego dopasowania</i>				
$\theta_{sw}$	-	0.443	0.37	0.355
$\theta_{rw}$	-	0.0	0.0	0.0
$p_{e;i}$	[Pa]	300	500	1100
$\lambda$	-	4.0	4.0	2.8
$k_s$	[m <sup>2</sup> ]	$2.56 \cdot 10^{-11}$	$1.86 \cdot 10^{-11}$	$1.44 \cdot 10^{-11}$

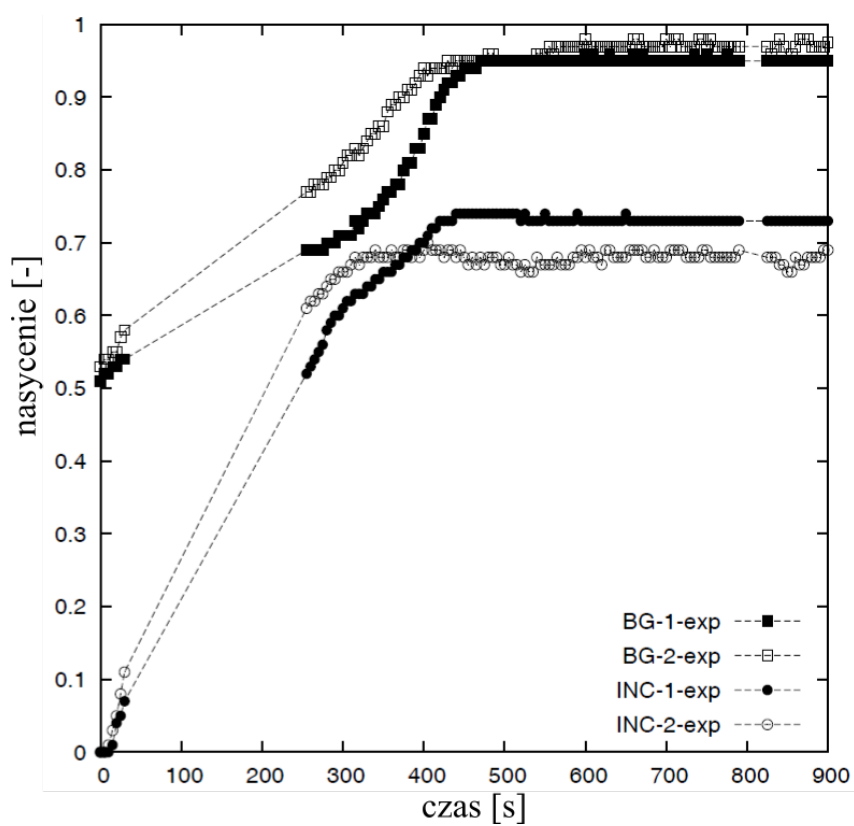


Rysunek 6.17: Schemat ułożenia warstw piasku w komorze wymiary w [cm] [Szymańska et al., 2016].

Początkowo dla całego obszaru panowały jednakowe warunki zakładające brak nasycenia. Po wypełnieniu dolnej komory, woda utrzymywana była na poziomie dna przez 12 godzin celem osiągnięcia stanu równowagi kapilarnej. W tym czasie zaobserwowano znaczący przyrost nasycenia w piasku drobnym, w przeciwieństwie do obu inkluzji, które pozostały nienasycone. Eksperyment rozpoczął się od podniesienia zewnętrznego zbiornika z wodą do górnej krawędzi piasku drobnego (proces trwał około 10 sekund). Rezultatem zmiany położenia zwierciadła wody był wzrost ciśnienia wody przy dnie, który spowodował filtrację w górę komory. Rozkład nasycenia ustabilizował się po około 600 s od momentu podniesienia zwierciadła co przedstawiają rysunki 6.18. Obserwacje kontynuowano przez kolejne 25 minut, jednak bez widocznych zmian w rozkładzie nasycenia. Po 15 minutach na górnej krawędzi piasku zaobserwowano cienką warstwę wody, co oznaczało osiągnięcie stanu równowagi z zewnętrznym, zasilającym komorę zwierciadłem wody. Analizując zdjęcie nr 6.18 można wywnioskować, że proces podciągania wody zachodzi głównie w piasku drobnym, gdzie siły kapilarne są większe. Natomiast nawadnianie inkluzji rozpoczyna się od ich dolnych krawędzi, gdzie ciśnienie wody jest wystarczająco wysokie, aby zapewnić wartość przewodności hydraulicznej niezbędną do rozpoczęcia procesu nasycenia. W strefie górnych krawędzi inkluzji można zauważyć wyraźną granicę między strefą nasyconą piasku drobnego, a suchym piaskiem średnim i grubym. Wynika z tego całkowity brak przepływu wody do inkluzji z ich górnej granicy, mimo że mają bezpośredni kontakt z piaskiem drobnym o wysokim nasyceniu. Obie inkluzje pozostały tylko częściowo nasycone aż do końca eksperymentu. Na rys. 6.18 obserwujemy znaczne nienasycone przestrzenie w górnych rejonach piasków średniego i grubego, jak również wiele pęcherzyków powietrza w ich dolnych strefach. Spostrzeżenia te są potwierdzeniem spodziewanego wystąpienia zamykania powietrza na poziomie porowym oraz strukturalnym (zjawiska te zostały omówione w rozdziale nr 4).



Rysunek 6.18: Rozkład nasycenia w korycie w zależności od czasu [Szymańska et al., 2016].



Rysunek 6.19: Zmiana nasycenia wody na wybranych krawędziach komory [Szymańska et al., 2016].



Rysunek 6.19 przedstawia przebieg procesu nasycenia w czasie. Wykres odnosi się do wartości średnich odpowiadających czterem strefom komory (rys. 6.17):

- piasek drobny otaczający inkluzje gruboziarniste BG-1
- piasek drobny otaczający inkluzje średnioziarniste BG-2
- inkluzja gruboziarnista
- inkluzja średnioziarnista

Uzyskane w ten sposób krzywe potwierdzają poczynione w trakcie eksperymentu obserwacje. W czasie  $t = 0$ , odnoszącym się do stanu równowagi kapilarnej nasycenie w piasku drobnym wynosi około 0.5, natomiast w inkluzjach pozostaje na poziomie zerowym. Po podniesieniu zwierciadła wody, nasycenie wzrasta w każdym z gruntów, jednak z wyższą tendencją dla inkluzji niż otaczającego je materiału. Ostatecznie tylko piasek drobny osiąga nasycenie zbliżone do pełnego, czyli 0.97. Natomiast inkluzje pozostają tylko częściowo nasycone, odpowiednio piasek średni oraz gruby 0.73 i 0.69. Wartości wynikowe należy traktować jako średnie, biorące pod uwagę zamykanie powietrza zarówno na poziomie porów jak i strukturalnym. Stan ustalony rozpoczyna się w około 600 s i trwa do końca eksperymentu.

## Model numeryczny

Omawiany problem został obliczony za pomocą modelu dwufazowego oraz równania Richardsa. Oba modele zostały szczegółowo omówione w rozdziale nr 2. Całkowity przepływ zdefiniowany został za pomocą prawa Darcy opisanego równaniem (2.29). Główne równania przepływu należy uzupełnić dodatkowymi związkami. Różnica pomiędzy ciśnieniem wody i powietrza nazywana jest ciśnieniem kapilarnym lub ssaniem i jest powiązana z nasyceniem wody poprzez krzywe retencji. Do symulacji zostały wykorzystane dwa najbardziej znane modele: Mualema - van Genuchtena oraz Brooks'a i Corey'a. Oba podejścia zostały opisane w rozdziale 2.3. Rozwiązanie BC daje możliwość opisu efektu zamykania powietrza. Zakłada ono nasycenie gruntu dopóki pewna określona wartość ciśnienia kapilarnego nie zostanie przekroczona. Natomiast w modelu van Genuchtena ciśnienie wejścia powietrza nie jest brane pod uwagę, pomimo że dla dużych wartości parametru  $n_g$  nasycenie zbliża się do jedności dla pewnego zakresu ciśnienia kapilarnego. Obliczenia wykonano w autorskim programie Promotora, opisanym w rozdziale 3 oraz książce [Szymkiewicz, 2012]. Wszystkie symulacje numeryczne wykonane w niniejszym rozdziale zakładały te same sposoby dyskretyzacji zarówno modelu 2PH jak i RE. Siatka składa się z kwadratów o wymiarze 1x1 cm. W przypadku sytuacji, w której węzeł jest wspólny dla różnych gruntów (sytuacja taka ma miejsce na całym obwodzie inkluzji), jako główną niewiadomą przyjęto ciśnienie wejścia powietrza o mniejszej wartości i na jego podstawie obliczono nasycenie.

## Wstępne oszacowanie parametrów materiałowych

Przed przystąpieniem do eksperymentu wykonane zostały badania w Helmholtz Centre for Environmental Research - UFZ Halle-Leipzig dla wszystkich użytych piasków. Wyznaczone zostały

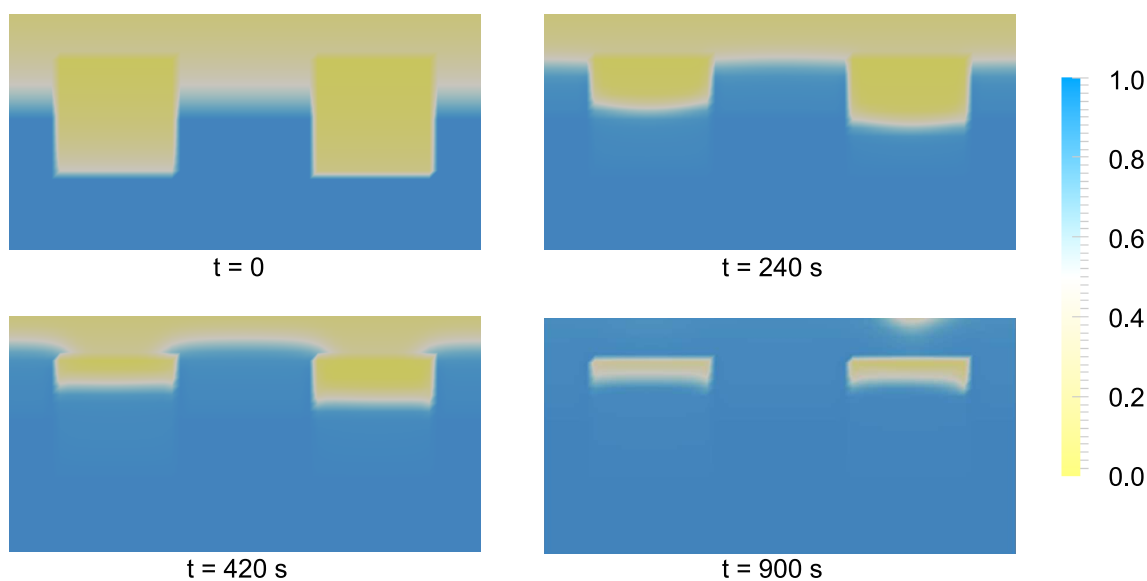
krzywe retencji oraz przewodności hydraulicznej za pomocą testu polegającego na desaturacji uprzednio nasyconej próbki. Do otrzymanych wyników dopasowano parametry modelu Mualem-van Genuchtena, których lista znajduje się w tabeli 6.5.

Zagęszczenie piasków w próbkach doświadczalnych różniło się od wykonanego w eksperymencie (inna wartość porowatości). Dodatkowo wykonany eksperyment polegał na infiltracji wody do gruntu w stanie nienasyconym, a przeprowadzone badania opierały się na mechanizmie do niego odwrotnym (drenaż nasyconej próbki). W związku ze zmiennością przebiegu krzywej retencji uzależnionego od charakteru zjawiska drenażu lub infiltracji, otrzymane parametry nie mogły zostać użyte bez odpowiedniej korekty.

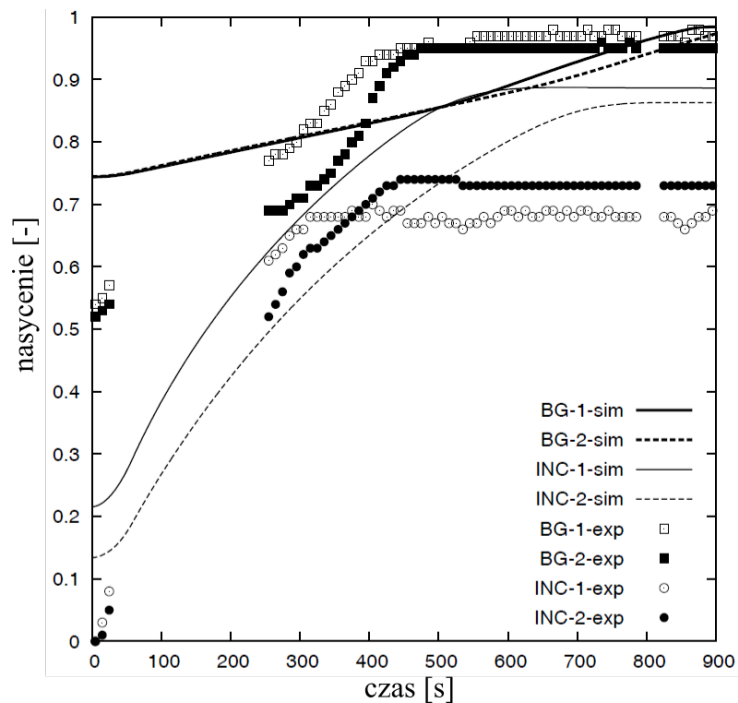
Dla symulacji wstępnej wykorzystane zostały parametry pochodzące z badań opisanych powyżej oraz bazujące na poniższych założeniach:

- Dla krzywej retencji van Genuchtena zarówno dla nawadniania jak i drenażu przyjęty został ten sam parametr  $n_g$ . Natomiast ciśnienie skalujące  $p_g$  w warunkach infiltracji jest dwa razy większe niż w przypadku drenażu, dlatego wstępnie przyjęto  $p_g = 2p_{g,d}$ , gdzie indeks  $d$  oznacza drenaż.
- W celu uwzględnienia ciśnienia wejścia powietrza, funkcja retencji van Genuchtena została przekształcona do funkcji Brooksa-Corey'a. Dodatkowo należy mieć na uwadze, że piasek w doświadczalnym korycie był zdecydowanie luźniej ułożony niż ten, na którym wykonywano badania. Wiąże się to z otrzymaniem większych porów w gruncie, co powoduje, że możemy oczekiwać mniejszych wartości wejścia powietrza niż otrzymane na etapie badań wstępnych.
- Założono rezydualną wartość nasycenia obu faz równą 0, co oznacza że wskaźnik nasycenia wodą równy jest porowatości.
- Funkcje przewodności hydraulicznej dla wody i powietrza dla wszystkich rodzajów piasku opisane zostały modelem Brooks'a-Corey'a-Burdine'a.
- Przepuszczalność wewnętrzna każdego z gruntów przyjęta została na podstawie badań testowych (podobnie jak w przypadku ciśnienia wejścia powietrza, w związku z luźniejszym ułożeniem frakcji można oczekiwać większych wartości).

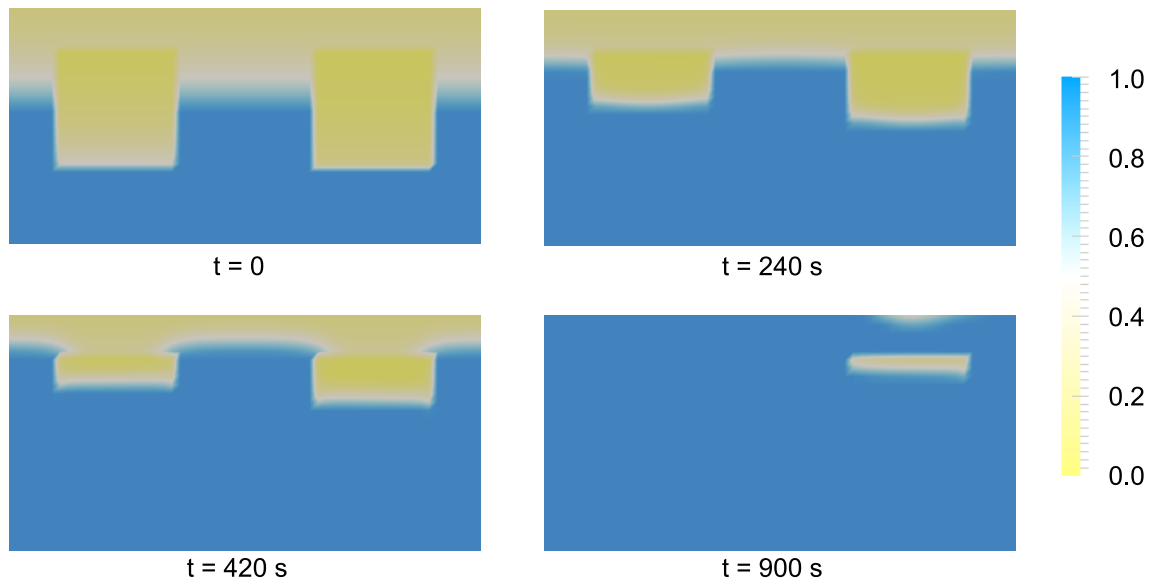
Lista parametrów znajduje się w tabeli 6.5 i nazywane będą w pracy jako model BCB - 1. Wyniki symulacji z założeniem modelu 2PH prezentują rysunki 6.20 i 6.21.



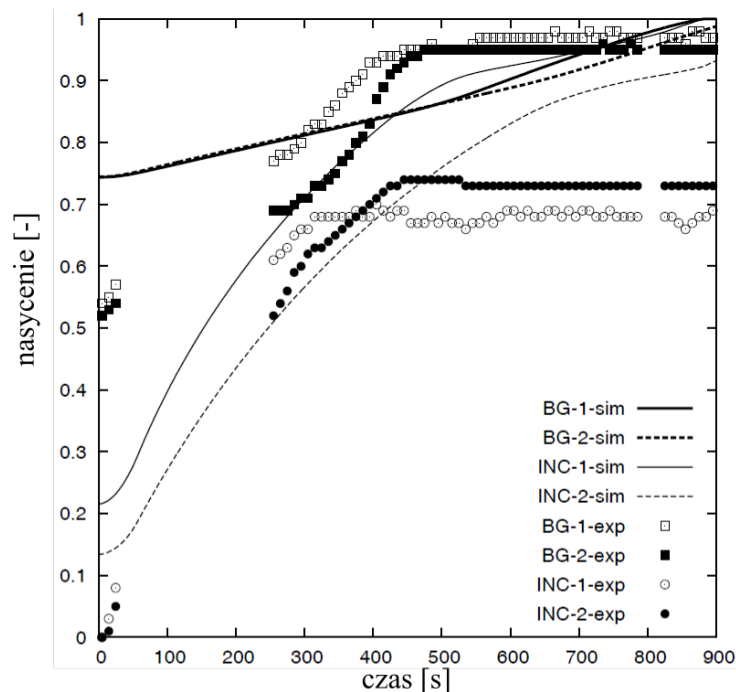
Rysunek 6.20: Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016].



Rysunek 6.21: Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016].



Rysunek 6.22: Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem Richardsa, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016].



Rysunek 6.23: Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem Richardsa, w którym wykorzystano parametry hydrauliczne z niezależnych badań [Szymańska et al., 2016].

Porównując nasycenie otrzymane w symulacji 6.20, do zaobserwowanego w eksperymencie, należy zwrócić uwagę na wystąpienie efektu zamknięcia powietrza w obu górnych strefach inkluzji. Zauważalną różnicą jest moment, w którym zostaje osiągnięty stan ustalony. W ekspe-

rymencie ma to miejsce w czasie  $t=900$  s, natomiast w symulacji pewna część powietrza wciąż opuszcza górną warstwę piasku. Kolejną rzeczą widoczną na wykresie 6.21 jest ciągła zmiana nasycenia w piasku drobnym, mimo że w eksperymencie został już osiągnięty stan ustalony. Z drugiej strony nasycenie w inkluzjach osiąga stan ustalony przed końcem symulacji, jednak dzieje się to później niż w doświadczeniu. Ilość powietrza zamkniętego w inkluzjach jest mniejsza w symulacji w porównaniu do zaobserwowanej w eksperymencie (około 12% do 30%). Parametry modelu BCB - 1, powodują również osiągnięcie wyższych poziomów nasycenia o około 5%. Zmiana nasycenia w przypadku inkluzji jest bardzo zbliżona zarówno w eksperymencie jak i symulacji, natomiast w przypadku piasku drobnego można zaobserwować zdecydowanie mniejszy przyrost nasycenia w początkowej fazie. Dla parametrów BCB - 1 wykonana została również symulacja modelem Richardsa, wyniki przedstawione są na rysunkach 6.22 i 6.23. Po czasie  $t=900$  s piasek drobny oraz średni są całkowicie nasycone. Piasek gruby wciąż pozostaje nienasycony, jednak na wykresie 6.23 widać ciągły wzrost jego nasycenia. Po czasie  $t=1200$  s cała komora jest w stanie pełnego nasycenia (wyniki te nie zostały pokazane). Dowodzi to faktu, że równanie Richardsa nie bierze pod uwagę nasycenia inkluzji wodą, które może rosnąć tylko w wypadku, kiedy występuje możliwość opuszczenia obszaru przez powietrze. W związku z tym, saturacja inkluzji rośnie, nawet wtedy kiedy inkluzje otoczone są ze wszystkich stron wodą. Warto jednak zauważyć, że w początkowym stanie infiltracji, przed wystąpieniem efektu zamykania powietrza ( $t=400$  s), wyniki zarówno modelu 2PH jak i równania Richardsa są do siebie bardzo zbliżone. Wstępna symulacja pozwala na sformułowanie kilku ważnych wniosków:

- Parametry otrzymane z badań na niezależnych próbkach nie prowadzą do otrzymania dokładnych wyników. Powodem może być np. różnica w porowatości próbek.
- Równanie Richarda nie jest w stanie uwzględnić efektu zamykania powietrza, w przeciwieństwie do modelu 2PH.

## Dopasowywanie parametrów

Celem osiągnięcie lepszej zgodności modelu 2PH z eksperymentem, parametry dostosowywane były metodą iteracyjną, przy następujących założeniach:

- w związku z większą porowatością w doświadczalnej komorze, przewodność hydrauliczna została zwiększona, a ciśnienie wejścia powietrza obniżone,
- parametr  $\lambda$  również został zwiększony, z uwagi na jednolite uziarnienie wszystkich piasków użytych w eksperymencie. Odpowiada to gwałtownemu spadkowi nasycenia mającemu miejsce tuż po przekroczeniu wartości ciśnienia wejścia powietrza,
- rezydualne nasycenie wszystkich gruntów założone zostało jako nie zerowe. Dodatkowo w obu inkluzjach miało większą wartość niż w piasku drobnym.

Na podstawie omówionych założeń, przeprowadzono wiele symulacji numerycznych, na podstawie których wybrano zestaw parametrów, który najlepiej odzwierciedlał wyniki eksperymentalne BCB - F 6.5. Ich wartości różnią się od początkowych danych, jednak różnice między

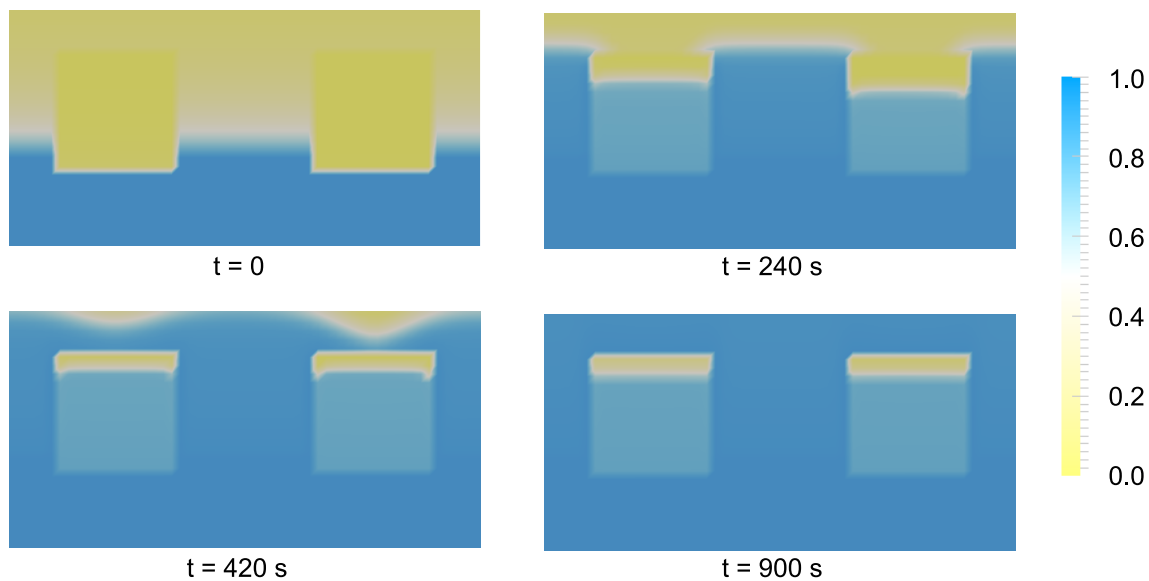
nimi wydają się do akceptacji w świetle wyżej wymienionych założeń. Przewodność hydrauliczna w stanie nasycenia wzrosła o około 4 razy dla piasku drobnego i około 2 razy dla inkluzji. Ciśnienie wejścia powietrza zmalało o około 30% dla każdego z gruntów.

Wyniki symulacji przeprowadzonej na parametrach BCB - F, zaprezentowane zostały na rysunkach 6.24 oraz 6.25. Widać na nich dobrą zgodność z wynikami otrzymanymi z doświadczenia. Parametry takie jak początkowe nasycenie, zmiana stopnia saturacji oraz osiągnięcie stanu ustalonego są bardzo dobrze odzwierciedlone. Niewielkie różnice można zaobserwować dla piasku średniego (INC1) oraz otaczającego go piasku drobnego (BG1). Ponadto w doświadczeniu (czas pomiędzy 200 a 300 s) nasycenie piasku drobnego otaczającego inkluzję z piasku średniego posiadało znacznie mniejszą wartość niż jego odpowiednik po drugiej stronie komory. Efekt ten nie był możliwy do odzwierciedlenia poprzez jakąkolwiek kombinację parametrów i najprawdopodobniej był spowodowany lokalnymi niejednorodnościami piasku lub nierównomiernym aplikowaniem wody.

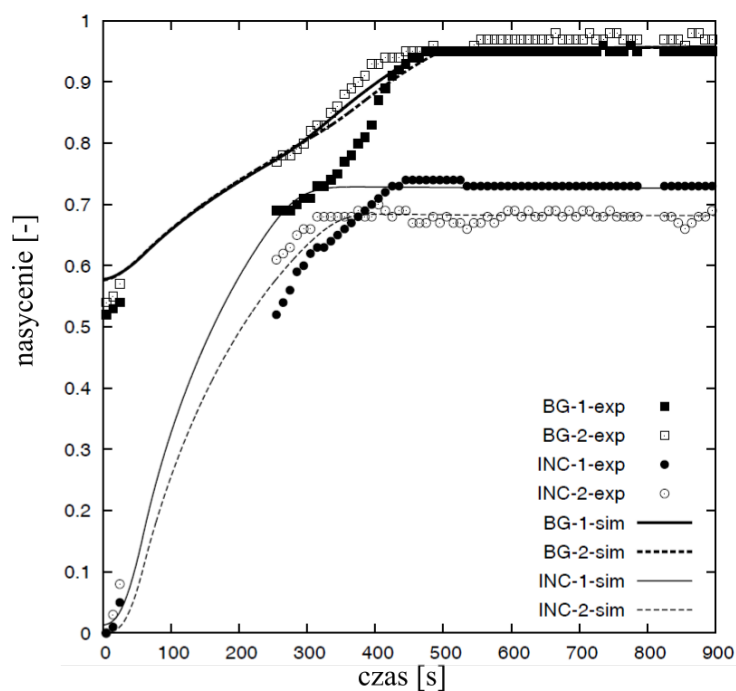
Ten sam zestaw parametrów został użyty do wykonania symulacji modelem Richardsa. Wyniki prezentują rysunki 6.26 oraz 6.27. W tym przypadku występuje tylko efekt zamknięcia powietrza na poziomie porów. W stanie ustalonym każda z inkluzji posiada jednakowy poziom nasycenia odpowiadający  $\theta_{sw}$  co nie jest zgodne z nierównomiernym rozkładem nasycenia mającym miejsce w eksperymencie. Z drugiej strony proces nasycenia komory wykazuje zgodność z wynikami doświadczalnymi, jednak końcowe wartości otrzymanego nasycenia inkluzji są wyższe niż zaobserwowane. Lepszą zgodność wyników można uzyskać zakładając większą rezydualną wartość nasycenia powietrza (nie zostało to pokazane na wykresach). Nie mniej jednak, nie wpływa to na rozkład nasycenia w inkluzjach, który jest wciąż jednakowy w przeciwieństwie do doświadczenia.

W celu określenia dalszych zależności pomiędzy efektami zamykania powietrza na poziomie strukturalnym a porowym wykonane zostały dodatkowe symulacje modelem 2PH wykorzystujące zmodyfikowany zestaw parametrów BCB - 1. Założono rezydualne nasycenia powietrza równe 0, dla wszystkich materiałów. Wyniki przedstawiono na rysunkach 6.28 oraz 6.29.

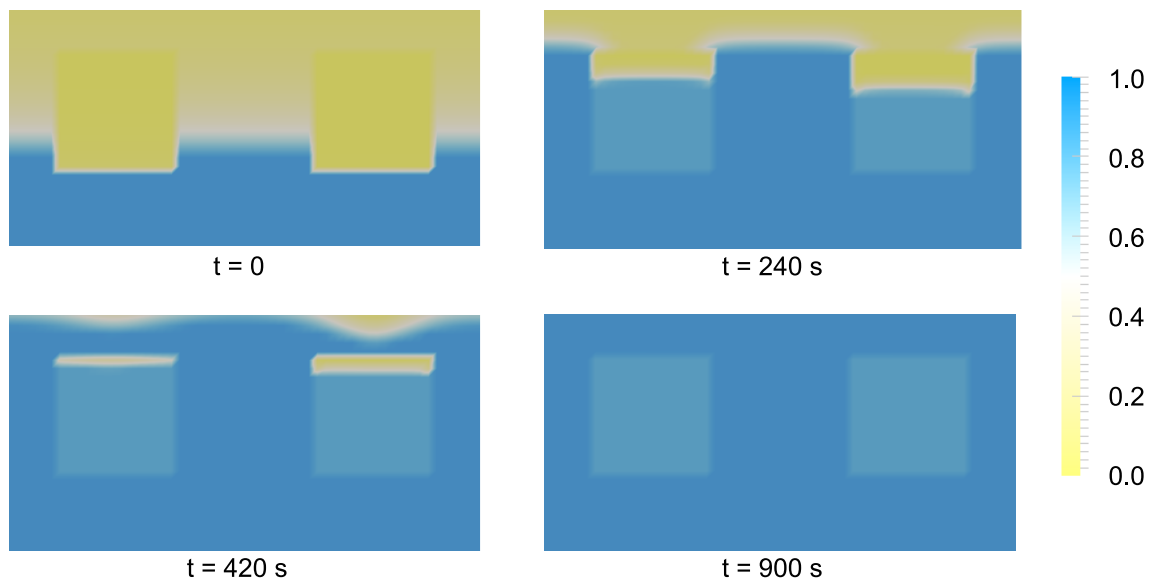
Taki dobór parametrów spowodował otrzymanie lepszej zgodności niż BCB - 1, ale gorszej niż BCB - F. Efekt strukturalnego zamykania powietrza został zdecydowanie lepiej odwzorowany, jednak uzyskana ilość zamkniętego powietrza była znacznie mniejsza niż w eksperymentach.



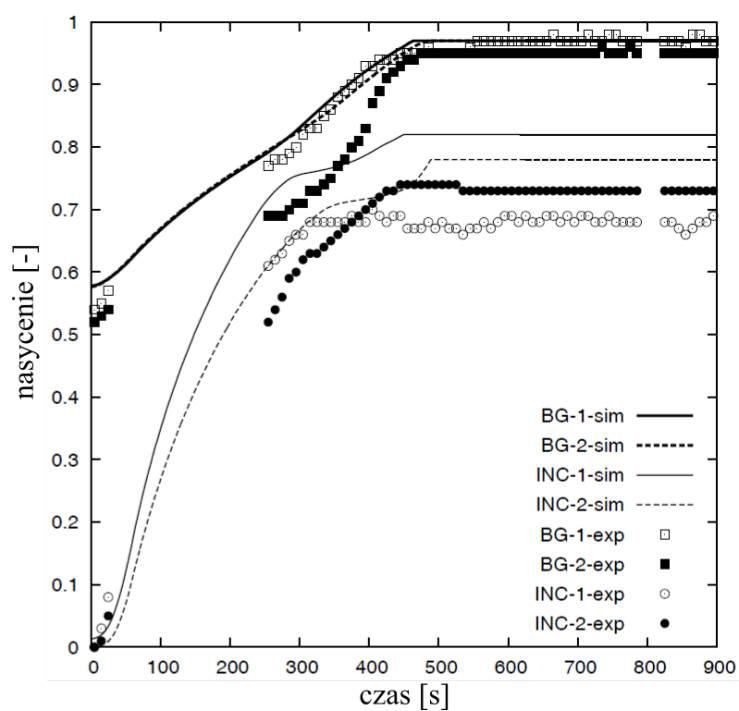
Rysunek 6.24: Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymańska et al., 2016].



Rysunek 6.25: Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymańska et al., 2016].

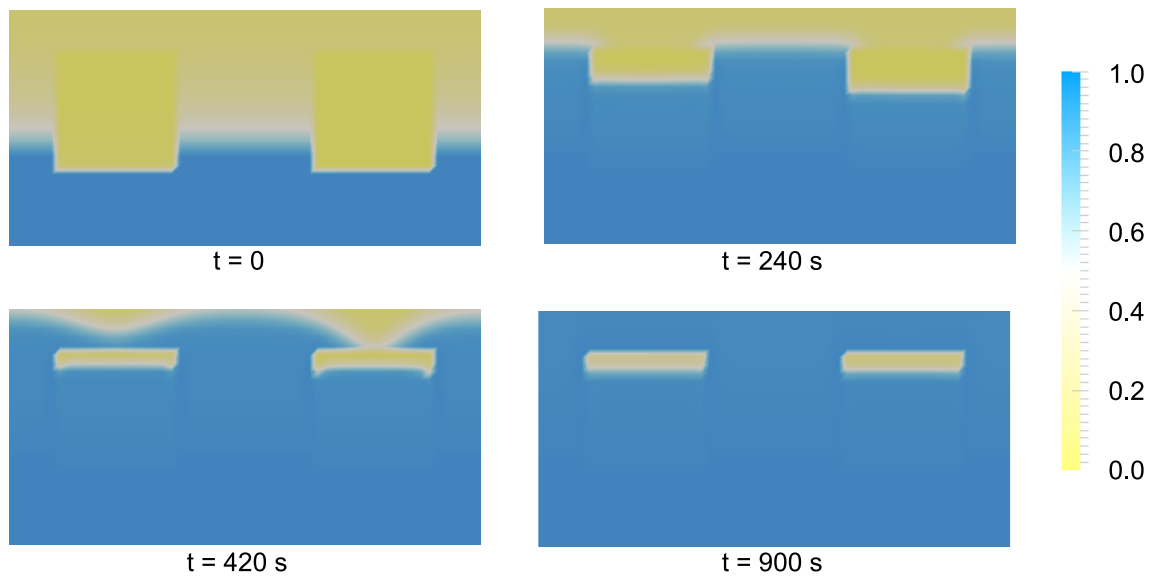


Rysunek 6.26: Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem RE, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymbańska et al., 2016].

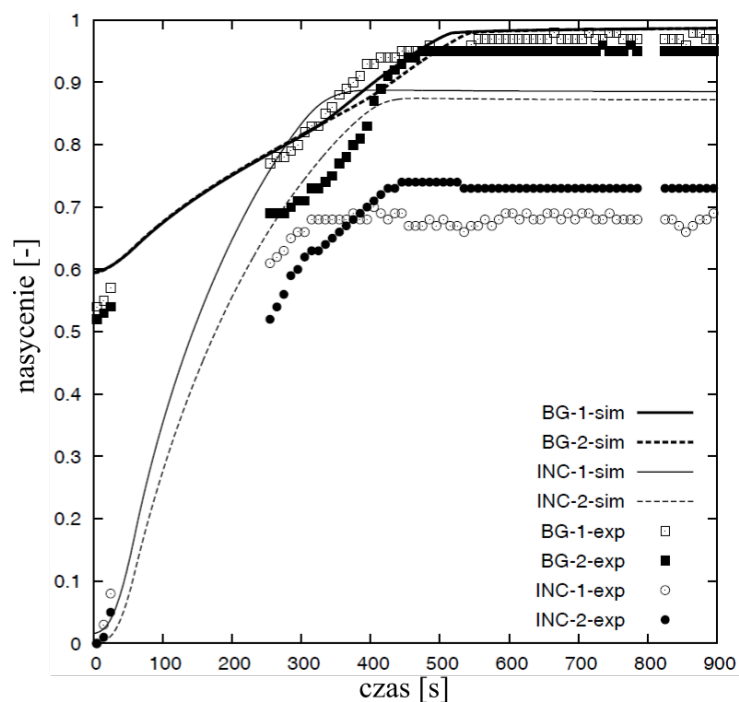


Rysunek 6.27: Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem RE, w którym wykorzystano parametry gruntowe po dopasowaniu [Szymbańska et al., 2016].





Rysunek 6.28: Rozkład nasycenia wody w korycie w zależności od czasu. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano doświadczalne parametry gruntowe z uwzględnieniem zerowej rezydualnej zawartości powietrza [Szymańska et al., 2016].



Rysunek 6.29: Przebieg nasycenia wody w czterech strefach komory. Symulacja wykonana modelem 2PH, w którym wykorzystano doświadczalne parametry gruntowe z uwzględnieniem zerowej rezydualnej zawartości powietrza [Szymańska et al., 2016].

## Wnioski

Przeprowadzony eksperyment pokazał interesujący problem związany z wpływem lokalnych niejednorodności gruntu na przepływ wody i powietrza w gruntach. Podczas infiltracji znacząca

ilość powietrza została zamknięta w gruboziarnistych inkluzjach w formie odizolowanych bąbelków oraz większych nienasyconych obszarów w ich górnych częściach. Wyniki te potwierdzają wcześniejsze eksperymenty wykonane w pracach [Dunn i Silliman, 2003], [Dunn, 2005] oraz analizy numeryczne [Szymkiewicz et al., 2012]. Wyniki eksperymentalne zostały powielone poprzez wykonanie szeregu symulacji numerycznych opierających się na przepływie dwufazowym oraz równaniu Richardsa. Wartości przyjęte w wyniku analizy porównawczej różniły się od tych otrzymanych na drodze doświadczalnej, jednak rząd ich różnicy był możliwy do akceptacji z uwagi na szereg poczynionych założeń związanych z różnicami w porowatości gruntów oraz warunkami przepływu (drenaż - infiltracja). Zadowalające wyniki osiągnięto tylko w przypadku uwzględnienia w modelu zarówno zamykania powietrza na poziomie porów, jak i strukturalnym. Wiąże się to ściśle z równaniem Richardsa, które z uwagi na brak możliwości uwzględnienia zamykania powietrza na poziomie strukturalnym, nie jest w stanie poprawnie odzwierciedlić przebiegu eksperymentu. Zamknięcie na poziomie porów można uzyskać obniżając poziom nasylenia w piasku grubym i średnim. Jednak z uwagi na obecność fazy gazowej tylko w górnej części inkluzji efekt ten był niemożliwy do odzwierciedlenia.

## 7 Wnioski i perspektywy dalszych badań

Przepływ wody w gruntach nienasyconych jest istotnym problemem obecnym w wielu dziedzinach nauki oraz inżynierii. Zjawisko to ma istotne znaczenie między innymi dla stateczności zboczy naturalnych oraz budowli ziemnych, nawadniania upraw oraz migracji zanieczyszczeń z powierzchni gruntu w kierunku warstw wodonośnych. Głównym celem niniejszej rozprawy doktorskiej było określenie, w jakim stopniu i w jakich przypadkach obecne w porach gruntu powietrze oddziałuje na przepływ wody. Znaczna część pracy została poświęcona identyfikacji problemów, w których należy uwzględnić przepływ fazy gazowej. Uzyskane w ramach pracy wyniki potwierdzają postawioną na wstępie tezę, iż powietrze znajdujące się w porach gruntu ma istotny wpływ na przepływ wody.

W rozdziale numer trzy przedstawiony został matematyczny opis przepływu wody i powietrza w gruncie. Zawiera on opis modelu dwufazowego, a także częścię stosowanego modelu Richardsa, który pomija obecność fazy gazowej, zakładając że jej ciśnienie równe jest ciśnieniu atmosferycznemu. W obu przypadkach równania opisujące przepływ są silnie nieliniowe, co spowodowane jest związkiem między nasyceniem a ciśnieniem oraz przebiegiem funkcji opisującej przepuszczalność obu płynów. Z uwagi na wymienione przyczyny przepływ w warunkach nienasyconych w większości przypadków rozwiązuje się numerycznie, co jest przedmiotem rozważań w rozdziale trzecim. Największą uwagę poświęcono w nim metodom dyskretyzacji przestrzennej: metodzie różnic skończonych, metodzie elementów skończonych oraz metodzie objętości skończonych, za pomocą której wykonano obliczenia w niniejszej pracy.

W celu analizy zjawiska przepływu wody i powietrza w gruntach nienasyconych oraz potwierdzenia tezy przedstawionej w rozprawie doktorskiej, w rozdziale numer cztery dokonano przeglądu literatury. Na jego podstawie zaproponowano klasyfikację problemów, w których powietrze ma znaczący wpływ na procesy zachodzące w gruncie. Zagadnienia te można podzielić na trzy grupy, które prezentuje rys. 4.1. Pierwsza z nich to procesy związane bezpośrednio z przepływem powietrza, czyli: transport lotnych zanieczyszczeń, odwanianie sprężonym powietrzem oraz ruch powietrza wywołany czynnikami naturalnymi. Druga grupa obejmuje oddziaływanie powietrza na przepływ wody, co jest szczególnie istotne w przypadku ograniczonej mobilności powietrza np. na skutek obecności barier nieprzepuszczalnych lub niejednorodnej struktury gruntu. Zagadnienia z tej grupy były głównym przedmiotem badań wykonanych w niniejszej rozprawie. Trzecią grupę stanowią problemy dotyczące mechaniki ośrodka gruntowego. Faza gazowa, która znajduje się w porach gruntu ma wpływ na stateczność zboczy, pracę zapór oraz wałów przeciwpowodziowych, powstawanie wysadzin, czy konsolidację oraz upłynnianie gruntu.

Wybrane zagadnienia zidentyfikowane w ramach przeglądu literatury zostały poddane szczegółowym analizom numerycznym w rozdziale numer pięć. Wzięto pod uwagę zjawiska infiltracji wody na dużych obszarach, zamykania powietrza w gruboziarnistych inkluzjach oraz zatapiania wałów przeciwpowodziowych. Dla każdego z wyżej wymienionych zagadnień przeprowadzono obliczenia za pomocą równania Richardsa oraz modelu dwufazowego, który uwzględnia mobilność obu faz. Pominięcie w obliczeniach wpływu powietrza powoduje, że ośrodek gruntowy bez względu na warunki brzegowe czy materiałowe (niejednorodności) osiąga pełne nasycenie. W modelu dwufazowym natomiast, wykresy oraz mapy nasycień dowodzą, że w przypadku infiltracji w gruntach niejednorodnych powietrze znajdujące się w gruboziarnistych inkluzjach zostaje

zamknięte, podczas gdy otaczający je materiał osiąga pełne nasycenie. Ilość zamkniętego powietrza zależy w dużej mierze od rozmiaru ziaren oraz parametrów hydraulicznych opisujących krzywą retencji. Ponadto model dwufazowy umożliwia uwzględnienie zamykania powietrza zarówno na poziomie porów jak i na poziomie strukturalnym. W przypadku gruntów jednorodnych, kiedy warunki brzegowe ograniczają wypływ powietrza, wspomniany model dwufazowy przewidyuje wyraźne wolniejsze tempo nasycania ośrodka wodą. Dodatkowo powietrze znajdujące się w porach jest kompresowane do wartości ciśnień znacząco większych niż wartość ciśnienia atmosferycznego, czego nie jest w stanie odzwierciedlić równanie Richardsa. Przedstawione przykłady dowodzą również, że nawet jeśli faza gazowa obecna w gruncie ma swobodny kontakt z powietrzem atmosferycznym, to założenie nieskończonej mobilności powietrza prowadzi do uzyskania rozbieżnych wyników w stosunku do modelu dwufazowego. Zgodność dla obu modeli uzyskuje się dopiero przy założeniu, że lepkość gazu jest mniejsza 1000 razy od lepkości cieczy, co dla wody i powietrza nie ma uzasadnienia fizycznego.

Wymienione różnice między równaniem Richardsa a modelem dwufazowym zostały potwierdzone również eksperymentalnie w rozdziale szóstym. Przebieg infiltracji w ośrodku zawierającym inkluzje gruboziarniste udało się odwzorować jedynie za pomocą modelu dwufazowego. Model ten poprawnie opisywał zarówno zjawisko zamykania powietrza w skali porów, jak i uwięzienie znaczących ilości powietrza w inkluzjach. Równanie Richardsa natomiast pozwalało odtworzyć jedynie pierwszy z wymienionych procesów. Kluczowe znaczenie miał tu fakt, że powietrze nie mogło opuścić inkluzji jeżeli różnica między ciśnieniem powietrza i wody była mniejsza od ciśnienia wejścia powietrza w otaczającym je materiale drobnoziarnistym.

Podobne wnioski dotyczące lepszego odwzorowania wyników eksperymentu modelem dwufazowym uzyskano również w przypadku zatapiania modelu wału, opisanego w rozdziale 5.3. Infiltrująca ze wszystkich stron konstrukcji woda spowodowała, że powietrze znajdujące się wewnątrz gruntu nie mogło połączyć się z powietrzem atmosferycznym. Znacząco spowolniło to proces nasycania wału, który to spowodowany jest koniecznością wypychania fazy gazowej przez infiltrującą wodę. Zjawiska tego nie obserwuje się w trakcie obliczeń za pomocą równania Richardsa z uwagi na całkowite pominięcie obecności powietrza w gruncie. Dla takich warunków woda może penetrować ośrodek gruntowy bez żadnych utrudnień ze strony fazy gazowej.

Zdaniem autora kilka problemów poruszonych w rozprawie doktorskiej stanowi punkt wyjściowy dla dalszych badań. Jednym z nich jest rozbudowa autorskiego programu Promotora o kolejne warunki brzegowe, czy też uwzględnienie w nim dodatkowych procesów fizycznych zachodzących w gruntach. Mowa tutaj o warunkach regulujących ciśnienie powietrza w ośrodku gruntowym, opadach deszczu, histerezie oraz uwzględnieniu deformacji szkieletu gruntowego. Szczególnie możliwość modelowania przepływu dwufazowego w odkształcalnym ośrodku porowatym byłaby bardzo istotna w perspektywie dalszych badań, ponieważ tylko nieliczne programy dostępne na rynku posiadają taką opcję.

## Literatura

- [Abbott i Basco, 1989] Abbott, M. B. i Basco, D. R. (1989). Computational fluid dynamics-an introduction for engineers. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 90:51377.
- [Ahlers et al., 1999] Ahlers, C. F., Finsterle, S., i Bodvarsson, G. S. (1999). Characterization and prediction of subsurface pneumatic response at yucca mountain, nevada. *Journal of Contaminant Hydrology*, 38(1):47–68.
- [Alonso et al., 1990] Alonso, E. E., Gens, A., Josa, A., et al. (1990). Constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 40(3):405–430.
- [Anagnostopoulos i Burlando, 2012] Anagnostopoulos, G. G. i Burlando, P. (2012). An object-oriented computational framework for the simulation of variably saturated flow in soils, using a reduced complexity model. *Environmental modelling & software*, 38:191–202.
- [Aubertin et al., 2003] Aubertin, M., Mbonimpa, M., Bussire, B., i Chapuis, R. (2003). A model to predict the water retention curve from basic geotechnical properties. *Canadian Geotechnical Journal*, 40(6):1104–1122.
- [Auer et al., 1996] Auer, L., Rosenberg, N., Birdsell, K., i Whitney, E. (1996). The effects of barometric pumping on contaminant transport. *Journal of Contaminant Hydrology*, 24(2):145–166.
- [Babu i Singh, 2009] Babu, G. i Singh, V. P. (2009). Simulation of soil nail structures using plaxis 2d. *Plaxis Bulletin*, 25:16–21.
- [Baker i Frydman, 2009] Baker, R. i Frydman, S. (2009). Unsaturated soil mechanics: Critical review of physical foundations. *Engineering Geology*, 106(1):26–39.
- [Battistelli et al., 1997] Battistelli, A., Calore, C., i Pruess, K. (1997). The simulator tough2/ewasg for modelling geothermal reservoirs with brines and non-condensable gas. *Geothermics*, 26(4):437–464.
- [Bear, 2013] Bear, J. (2013). *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation.
- [Berkowitz et al., 2004] Berkowitz, B., Silliman, S. E., i Dunn, A. M. (2004). Impact of the capillary fringe on local flow, chemical migration, and microbiology. *Vadose Zone Journal*, 3(2):534–548.
- [Binning, 1992] Binning, Celia, P. (1992). A mass conservative numerical solution for two-phase flow in porous media with application to unsaturated flow. *Water Resources Research*, 28(10):2819–2828.
- [Biot, 1941] Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12(2):155–164.
- [Bishop, 1960] Bishop, A. W. (1960). *The principles of effective stress*. Norges Geotekniske Institutt.

- [Bolzon et al., 1996] Bolzon, G., Schrefler, B., i Zienkiewicz, O. (1996). Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Géotechnique*, 46(2):279–289.
- [Borys, 2009] Borys, M. (2009). *Projektowanie i wykonawstwo ekranów przeciwiłtracyjnych z geomembran i mat bentonitowych w wałach przeciwpowodziowych i obwałowaniach małych zbiorników wodnych*. Instytut Melioracji i Użytków Zielonych.
- [Brinkgreve et al., 2012] Brinkgreve, R., Engin, E., Swolfs, W., Waterman, D., Chesaru, A., Bonnier, P., i Galavi, V. (2012). Plaxis 3d 2012. *Plaxis bv*.
- [Brooks i Corey, 1964] Brooks, R. H. i Corey, A. T. (1964). Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design. *Trans. ASAE*, 7(1):26–0028.
- [Buckingham et al., 1904] Buckingham, E. et al. (1904). Contributions to our knowledge of the aeration of soils.
- [Burdine et al., 1953] Burdine, N. et al. (1953). Relative permeability calculations from pore size distribution data. *Journal of Petroleum Technology*, 5(03):71–78.
- [Carsel i Parrish, 1988] Carsel, R. F. i Parrish, R. S. (1988). Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Water Resources Research*, 24(5):755–769.
- [CETCO, 2016] CETCO (2016). Poradnik projektanta: Modernizacja wałów przeciwpowodziowych. Technical report, CETCO Poland.
- [Chapuis, 2012] Chapuis, R. P. (2012). Predicting the saturated hydraulic conductivity of soils: a review. *Bulletin of engineering geology and the environment*, 71(3):401–434.
- [Chen et al., 2006] Chen, Z., Huan, G., i Ma, Y. (2006). *Computational methods for multiphase flows in porous media*. SIAM.
- [Darcy, 1856] Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application...* Victor Dalmont.
- [Davis, 2003] Davis, T. A. (2003). Umfpack version 4.1 user guide. *Department of Computer and Information Science and Engineering, University of Florida*.
- [De Neef i Molenaar, 1997] De Neef, M. i Molenaar, J. (1997). Analysis of dnapl infiltration in a medium with a low-permeable lens. *Computational Geosciences*, 1(2):191–214.
- [Delfs et al., 2013] Delfs, J.-O., Wang, W., Kalbacher, T., Singh, A. K., i Kolditz, O. (2013). A coupled surface/subsurface flow model accounting for air entrapment and air pressure counterflow. *Environmental earth sciences*, 69(2):395–414.
- [Dunn, 2005] Dunn, A. M. (2005). *Air and LNAPL entrapment in the partially saturated fringe: Laboratory and numerical investigations*. PhD thesis, Citeseer.
- [Dunn i Silliman, 2003] Dunn, A. M. i Silliman, S. E. (2003). Air and water entrapment in the vicinity of the water table. *Ground Water*, 41(6):729.

- [Dyka, 2013] Dyka, I. (2013). Projektowanie hydrotechnicznych obiektów inżynierskich.
- [Elberling et al., 1998] Elberling, B., Larsen, F., Christensen, S., i Postma, D. (1998). Gas transport in a confined unsaturated zone during atmospheric pressure cycles. *Water Resources Research*, 34(11):2855–2862.
- [Flemisch et al., 2011] Flemisch, B., Darcis, M., Erbertseder, K., Faigle, B., Lauser, A., Moshaf, K., Müthing, S., Nuske, P., Tatomir, A., Wolff, M., et al. (2011). Dumux: Dune for multi-{phase, component, scale, physics,...} flow and transport in porous media. *Advances in Water Resources*, 34(9):1102–1112.
- [Flemisch et al., 2007] Flemisch, B., Fritz, J., Helmig, R., Niessner, J., i Wohlmuth, B. (2007). Dumux: a multi-scale multi-physics toolbox for flow and transport processes in porous media. In *ECCOMAS Thematic Conference on Multiscale Computational Methods for Solids and Fluids*, pages 82–87.
- [Forsyth, 1988] Forsyth, P. A. (1988). Comparison of the single-phase and two-phase numerical model formulation for saturated-unsaturated groundwater flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69(2):243–259.
- [Fredlund i Houston, 2013] Fredlund, D. i Houston, S. (2013). Interpretation of soil-water characteristic curves when volume change occurs as soil suction is changed. In *Proceedings, 1st Pan-American conference on unsaturated soils. Cartagena de Indias, Colombia*, volume 1, pages 15–31.
- [Fredlund et al., 1978] Fredlund, D., Morgenstern, N. R., i Widger, R. (1978). The shear strength of unsaturated soils. *Canadian geotechnical journal*, 15(3):313–321.
- [Fredlund i Hasan, 1979] Fredlund, D. G. i Hasan, J. U. (1979). One-dimensional consolidation theory: unsaturated soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 16(3):521–531.
- [Fredlund i Xing, 1994] Fredlund, D. G. i Xing, A. (1994). Equations for the soil-water characteristic curve. *Canadian geotechnical journal*, 31(4):521–532.
- [Free i Palmer, 1941] Free, G. i Palmer, V. (1941). Interrelationship of infiltration, air movement, and pore size in graded silica sand. *Soil Science Society of America Journal*, 5(C):390–398.
- [Gardner, 1958] Gardner, W. (1958). Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil science*, 85(4):228–232.
- [Gawin et al., 1995] Gawin, D., Baggio, P., i Schrefler, B. A. (1995). Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *International Journal for numerical methods in fluids*, 20(8-9):969–987.
- [Gómez-Navarro et al., 2007] Gómez-Navarro, C., Weitz, R. T., Bittner, A. M., Scolari, M., Mews, A., Burghard, M., i Kern, K. (2007). Electronic transport properties of individual chemically reduced graphene oxide sheets. *Nano letters*, 7(11):3499–3503.

- [Guo i Jiao, 2008] Guo, H.-P. i Jiao, J. J. (2008). Numerical study of airflow in the unsaturated zone induced by sea tides. *Water resources research*, 44(6).
- [Haberer et al., 2015] Haberer, C. M., Rolle, M., Cirpka, O. A., i Grathwohl, P. (2015). Impact of heterogeneity on oxygen transfer in a fluctuating capillary fringe. *Groundwater*, 53(1):57–70.
- [Hammecker et al., 2003] Hammecker, C., Antonino, A., Maeght, J.-L., i Boivin, P. (2003). Experimental and numerical study of water flow in soil under irrigation in northern senegal: evidence of air entrapment. *European Journal of Soil Science*, 54(3):491–503.
- [Hassanizadeh i Gray, 1979] Hassanizadeh, M. i Gray, W. G. (1979). General conservation equations for multi-phase systems: 1. averaging procedure. *Advances in water resources*, 2:131–144.
- [Helmig et al., 1997] Helmig, R. et al. (1997). *Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems*. Springer-Verlag.
- [Ippisch et al., 2006] Ippisch, O., Vogel, H.-J., i Bastian, P. (2006). Validity limits for the van genuchten–mualem model and implications for parameter estimation and numerical simulation. *Advances in water resources*, 29(12):1780–1789.
- [Kalinowska, 2007] Kalinowska, M. (2007). Numeryczne rozwiązywanie dwuwymiarowego równania przenoszenia masy w rzekach.
- [Kavetski et al., 2001] Kavetski, D., Binning, P., i Sloan, S. (2001). Adaptive time stepping and error control in a mass conservative numerical solution of the mixed form of richards equation. *Advances in water resources*, 24(6):595–605.
- [Kawala et al., 2002] Kawala, Z., Dakiniewicz, P., Czerniak, H., i Araszkiwicz, M. (2002). Symulacja rozkładów cisnień i prędkości przepływu powietrza w procesie desorpcji próżniowej zanieczyszczeń z gruntu. *OCHRONA ŚRODOWISKA*, 3:86.
- [Khalili i Khabbaz, 1998] Khalili, N. i Khabbaz, M. (1998). A unique relationship of chi for the determination of the shear strength of unsaturated soils. *Geotechnique*, 48(5).
- [Khlosi et al., 2008] Khlosi, M., Cornelis, W. M., Douaik, A., van Genuchten, M. T., i Gabriels, D. (2008). Performance evaluation of models that describe the soil water retention curve between saturation and oven dryness. *Vadose Zone Journal*, 7(1):87–96.
- [Khoei i Mohammadnejad, 2011] Khoei, A. i Mohammadnejad, T. (2011). Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: a comparison between two-and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams. *Computers and Geotechnics*, 38(2):142–166.
- [Kosugi et al., 2002] Kosugi, K., Hopmans, J. W., i Dane, J. H. (2002). 3. 3. 4 parametric models. *Methods of Soil Analysis: Part 4 Physical Methods*, (methodsofsoilan4):728–757.
- [Kovács, 2011] Kovács, G. (2011). *Seepage hydraulics*, volume 10. Elsevier.



- [Kuang et al., 2013] Kuang, X., Jiao, J. J., i Li, H. (2013). Review on airflow in unsaturated zones induced by natural forcings. *Water Resources Research*, 49(10):6137–6165.
- [Kuang et al., 2011] Kuang, X., Jiao, J. J., Wan, L., Wang, X., i Mao, D. (2011). Air and water flows in a vertical sand column. *Water resources research*, 47(4).
- [Kutílek et al., 1994] Kutílek, M., Nielsen, D. R., et al. (1994). *Soil hydrology: textbook for students of soil science, agriculture, forestry, geocology, hydrology, geomorphology and other related disciplines*. Catena Verlag.
- [KZGW, 2010] KZGW (2010). Diagnoza aktualnego stanu gospodarki wodnej. *Załącznik I do Projektu Polityki wodnej państwa*, 2030.
- [Leij et al., 1997] Leij, F. J., Russell, W. B., i Lesch, S. M. (1997). Closed-form expressions for water retention and conductivity data. *Ground water*, 35(5):848–858.
- [Leong i Rahardjo, 1997a] Leong, E. C. i Rahardjo, H. (1997a). Permeability functions for unsaturated soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(12):1118–1126.
- [Leong i Rahardjo, 1997b] Leong, E. C. i Rahardjo, H. (1997b). Review of soil-water characteristic curve equations. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 123(12):1106–1117.
- [Leśniewska, 2013] Leśniewska, D. (2013). Mechanizm wewnętrznej erozji wałów przeciwpowodziowych w trakcie intensywnych powodzi. *Materiały Budowlane*.
- [Leśniewska et al., 2007] Leśniewska, D. et al. (2007). Integrated flood risk analysis and management methodologies. Technical report, T04-05-01, Task 4.
- [Lesniewska et al., 2009] Lesniewska, D., Zaradny, H., Bogacz, P., i Kaczmarek, J. (2009). Study of flood embankment behaviour induced by air entrapment.
- [Lewis i Schrefler, 1998] Lewis, R. W. i Schrefler, B. A. (1998). *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. John Wiley.
- [Likos et al., 2013] Likos, W. J., Lu, N., i Godt, J. W. (2013). Hysteresis and uncertainty in soil water-retention curve parameters. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 140(4):04013050.
- [Lopez et al., 2015] Lopez, O. M., Jadoon, K. Z., i Missimer, T. M. (2015). Method of relating grain size distribution to hydraulic conductivity in dune sands to assist in assessing managed aquifer recharge projects: Wadi khulays dune field, western saudi arabia. *Water*, 7(11):6411–6426.
- [Loret i Khalili, 2002] Loret, B. i Khalili, N. (2002). An effective stress elastic–plastic model for unsaturated porous media. *Mechanics of Materials*, 34(2):97–116.
- [Lu et al., 2010] Lu, N., Godt, J. W., i Wu, D. T. (2010). A closed-form equation for effective stress in unsaturated soil. *Water Resources Research*, 46(5).

- [Lu i Likos, 2006] Lu, N. i Likos, W. J. (2006). Suction stress characteristic curve for unsaturated soil. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 132(2):131–142.
- [Luckner et al., 1989] Luckner, L., Van Genuchten, M. T., i Nielsen, D. (1989). A consistent set of parametric models for the two-phase flow of immiscible fluids in the subsurface. *Water Resources Research*, 25(10):2187–2193.
- [Macioszczyk i Dobrzyński, 1987] Macioszczyk, A. i Dobrzyński, D. (1987). Hydrogeochemia, wyd. *Geologiczne, Warszawa*, page 451.
- [Massmann i Farrier, 1992] Massmann, J. i Farrier, D. F. (1992). Effects of atmospheric pressures on gas transport in the vadose zone. *Water resources research*, 28(3):777–791.
- [McCord i Goodrich, 1994] McCord, J. T. i Goodrich, M. T. (1994). Benchmark testing and independent verification of the vs2dt computer code. *Sandia National Labs Technical Report SAND91-1526*, 34.
- [Michalski, 2016] Michalski, S. (2016). *Modelowanie przepływu wody w gruntach zapadowych*.
- [Mikelic et al., 2002] Mikelic, A., Van Duijn, C., i Pop, I. S. (2002). Effective equations for two-phase flow with trapping on the micro scale. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(5):1531–1568.
- [Mualem, 1976] Mualem, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water resources research*, 12(3):513–522.
- [Mualem, 1978] Mualem, Y. (1978). Hydraulic conductivity of unsaturated porous media: generalized macroscopic approach. *Water Resources Research*, 14(2):325–334.
- [Nam i Kaviani, 2003] Nam, J. H. i Kaviani, M. (2003). Effective diffusivity and water-saturation distribution in single-and two-layer pemfc diffusion medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(24):4595–4611.
- [NIK, 2012] NIK (2012). Informacja o wynikach kontroli: Gospodarowanie rolniczymi zasobami wodnymi. *Załącznik I do Projektu Polityki wodnej państwa*, 2005.
- [Nilson et al., 1991] Nilson, R., Peterson, E., Lie, K., Burkhard, N., i Hearst, J. (1991). Atmospheric pumping: A mechanism causing vertical transport of contaminated gases through fractured permeable media. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 96(B13):21933–21948.
- [Ning i Likos, 2004] Ning, L. i Likos, W. J. (2004). Unsaturated soil mechanics. *Jhon Wiley & Sons Inc, New Jersey*.
- [Nitao i Bear, 1996] Nitao, J. J. i Bear, J. (1996). Potentials and their role in transport in porous media. *Water Resources Research*, 32(2):225–250.
- [Nuth i Laloui, 2008] Nuth, M. i Laloui, L. (2008). Effective stress concept in unsaturated soils: clarification and validation of a unified framework. *International journal for numerical and analytical methods in Geomechanics*, 32(7):771–801.

- [Oettl et al., 2004] Oettl, G., Stark, R., i Hofstetter, G. (2004). Numerical simulation of geotechnical problems based on a multi-phase finite element approach. *Computers and Geotechnics*, 31(8):643–664.
- [Ossowski i Sikora, 2004] Ossowski, R. i Sikora, Z. (2004). *Numeryczne modelowanie sondowania statycznego CPTU*. Politechnika Gdańska.
- [Pande i Pietruszczak, 2015] Pande, G. i Pietruszczak, S. (2015). On unsaturated soil mechanics—personal views on current research. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 37(3):73–84.
- [Parent et al., 2011] Parent, S.-É., Cabral, A. R., Abdolazadeh, A. M., i Nuth, M. (2011). *Hydraulic Conductivity and Water Retention Curve of Highly Compressible Materials-From a Mechanistic Approach through Phenomenological Models*. INTECH Open Access Publisher.
- [Parker, 1989] Parker, J. (1989). Multiphase flow and transport in porous media. *Reviews of Geophysics*, 27(3):311–328.
- [Parker i Lenhard, 1987] Parker, J. i Lenhard, R. (1987). A model for hysteretic constitutive relations governing multiphase flow: 1. saturation-pressure relations. *Water Resources Research*, 23(12):2187–2196.
- [Pentland et al., 2001] Pentland, J. S., Fredlund, D. G., et al. (2001). Use of a general partial differential equation solver for solution of mass and heat transfer problems in geotechnical engineering.
- [Philip, 1957] Philip, J.-R. (1957). The theory of infiltration: 1. the infiltration equation and its solution. *Soil science*, 83(5):345–358.
- [Pinder i Gray, 2008] Pinder, G. F. i Gray, W. G. (2008). *Essentials of multiphase flow in porous media*. John Wiley & Sons.
- [Pruess, 1991] Pruess, K. (1991). Tough2—a general-purpose numerical simulator for multiphase fluid and heat flow.
- [Radcliffe i Simunek, 2010] Radcliffe, D. E. i Simunek, J. (2010). *Soil physics with HYDRUS: Modeling and applications*. CRC press Boca Raton, FL.
- [Rohay, 1996] Rohay, V. (1996). Field tests of passive soil vapor extraction systems at the hanford site, washington. Technical report, Bechtel Hanford.
- [Saad, 2003] Saad, Y. (2003). *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM.
- [Saadatpoor et al., 2009] Saadatpoor, E., Bryant, S. L., i Sepehrnoori, K. (2009). Effect of capillary heterogeneity on buoyant plumes: A new local trapping mechanism. *Energy Procedia*, 1(1):3299–3306.
- [Sheng et al., 2008] Sheng, D., Fredlund, D. G., i Gens, A. (2008). A new modelling approach for unsaturated soils using independent stress variables. *Canadian Geotechnical Journal*, 45(4):511–534.

- [Silliman et al., 2002] Silliman, S. E., Berkowitz, B., Simunek, J., i Genuchten, M. T. (2002). Fluid flow and solute migration within the capillary fringe. *Ground Water*, 40(1):76–84.
- [Simunek i van Genuchten, 2008] Simunek, J. i van Genuchten, M. T. (2008). Modeling nonequilibrium flow and transport processes using hydrus. *Vadose Zone Journal*, 7(2):782–797.
- [Simunek et al., 2006] Simunek, J., Van Genuchten, M. T., i Šejna, M. (2006). The hydrus software package for simulating two-and three-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media. *Technical manual, version*, 1:241.
- [Smith i Woolhiser, 1971] Smith, R. E. i Woolhiser, D. A. (1971). Overland flow on an infiltrating surface. *Water Resources Research*, 7(4):899–913.
- [Snee i Javadi, 1996] Snee, C. i Javadi, A. (1996). Prediction of compressed air leakage from tunnels. *Tunnelling and underground space technology*, 11(2):189–195.
- [Sobieski, 2016] Sobieski, W. (2016). *Granularne orodki porowate*. Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wydział Nauk Technicznych UWM w Olsztynie.
- [Środowiska, 2007] Środowiska, R. M. O. (2007). Zasobów naturalnych i leśnictwa z dnia 20 grudnia 1996 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budowle hydrotechniczne i ich usytuowanie z dnia 20 kwietnia 2007r. *Dz. U*, (2007).
- [Stephens, 1995] Stephens, D. B. (1995). *Vadose zone hydrology*. CRC press.
- [Sterpejkowicz-Wersocki i Bolt, 2007] Sterpejkowicz-Wersocki, W. i Bolt, A. (2007). Stabilność strefy kontaktowej grunt-filtr syntetyczny. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, pages 281–291.
- [Sun et al., 2015] Sun, D.-m., Zang, Y.-g., i Semprich, S. (2015). Effects of airflow induced by rainfall infiltration on unsaturated soil slope stability. *Transport in Porous Media*, 107(3):821–841.
- [Svensson, 2014] Svensson, A. (2014). *Estimation of hydraulic conductivity from grain size analysis*. Chalmers University of Technology.
- [Szymańska et al., 2016] Szymańska, P., Tisler, W., Schütz, C., Szymkiewicz, A., Neuweiler, I., i Helmig, R. (2016). Experimental and numerical analysis of air trapping in a porous medium with coarse textured inclusions. *Acta Geophysica*, 64(6):2487–2509.
- [Szymkiewicz, 2012] Szymkiewicz, A. (2012). *Modelling water flow in unsaturated porous media: accounting for nonlinear permeability and material heterogeneity*. Springer Science & Business Media.
- [Szymkiewicz et al., 2011] Szymkiewicz, A., Helmig, R., i Kuhnke, H. (2011). Two-phase flow in heterogeneous porous media with non-wetting phase trapping. *Transport in porous media*, 86(1):27–47.
- [Szymkiewicz et al., 2012] Szymkiewicz, A., Helmig, R., i Neuweiler, I. (2012). Upscaling unsaturated flow in binary porous media with air entry pressure effects. *Water Resources Research*, 48(4).

- [Szymkiewicz i Kryczalło, 2011] Szymkiewicz, A. i Kryczalło, A. (2011). Obliczanie współczynnika filtracji piasków i żwirów na podstawie krzywej uziarnienia: przegląd wzorów empirycznych. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, pages 110–121.
- [Szymkiewicz et al., 2014] Szymkiewicz, A., Sikora, Z., Ossowski, R., i Tisler, W. (2014). Właściwości retencyjne, przewodność hydrauliczna i naprężenia efektywne w gruntach nienasyconych. *Inżynieria Morska i Geotechnika*.
- [Tegnander, 2001] Tegnander, C. (2001). Models for ground water flow: A numerical comparison between richards' model and the fractional flow model. *Transport in Porous Media*, 43(2):213–224.
- [Tillman Jr i Smith, 2005] Tillman Jr, F. D. i Smith, J. A. (2005). Site characteristics controlling airflow in the shallow unsaturated zone in response to atmospheric pressure changes. *Environmental Engineering Science*, 22(1):25–37.
- [Tisler et al., 2018] Tisler, W., Gorczewska-Langer, W., Leśniewska, D., Maciejewski, S., Ossowski, R., i Szymkiewicz, A. (2018). Simulations of air and water flow in a model dike during overflow experiments. *Computational Geosciences*.
- [Tisler i Szymkiewicz, 2014] Tisler, W. i Szymkiewicz, A. (2014). Numerical simulations of seepage in dikes using unsaturated and two-phase flow models.
- [Tisler i Szymkiewicz, 2017] Tisler, W. i Szymkiewicz, A. (2017). Influence of the air phase on the water flow in dikes.
- [Todd, 1980] Todd, D. (1980). Groundwater hydrology (p. 535). *New York: Jon Wiley & Sons Inc.*
- [Touma et al., 1984] Touma, J., Vachaud, G., i Parlange, J.-Y. (1984). Air and water flow in a sealed, ponded vertical soil column: Experiment and model. *Soil Science*, 137(3):181–187.
- [Touma i Vauclin, 1986] Touma, J. i Vauclin, M. (1986). Experimental and numerical analysis of two-phase infiltration in a partially saturated soil. *Transport in porous media*, 1(1):27–55.
- [Tracy, 2006] Tracy, F. (2006). Clean two-and three-dimensional analytical solutions of richards' equation for testing numerical solvers. *Water Resources Research*, 42(8).
- [Tuller et al., 1999] Tuller, M., Or, D., i Dudley, L. M. (1999). Adsorption and capillary condensation in porous media: Liquid retention and interfacial configurations in angular pores. *Water Resources Research*, 35(7):1949–1964.
- [Vachaud et al., 1973] Vachaud, G., Vauclin, M., Khanji, D., i Wakil, M. (1973). Effects of air pressure on water flow in an unsaturated stratified vertical column of sand. *Water Resources Research*, 9(1):160–173.
- [van Duijn et al., 2007] van Duijn, C. J., Eichel, H., Helmig, R., i Pop, I. S. (2007). Effective equations for two-phase flow in porous media: the effect of trapping on the microscale. *Transport in porous media*, 69(3):411–428.

- [Van Genuchten, 1980a] Van Genuchten, M. T. (1980a). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5):892–898.
- [Van Genuchten, 1980b] Van Genuchten, M. T. (1980b). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5):892–898.
- [Vanapalli et al., 1998] Vanapalli, S., Sillers, W., i Fredlund, M. (1998). The meaning and relevance of residual state to unsaturated soils. In *Proceedings of the 51st Canadian Geotechnical Conference, Edmonton, Alta*, pages 4–7.
- [Vasin et al., 2008] Vasin, M., Lehmann, P., Kaestner, A., Hassanein, R., Nowak, W., Helmig, R., i Neuweiler, I. (2008). Drainage in heterogeneous sand columns with different geometric structures. *Advances in water resources*, 31(9):1205–1220.
- [Vogel i Cislerova, 1988] Vogel, T. i Cislerova, M. (1988). On the reliability of unsaturated hydraulic conductivity calculated from the moisture retention curve. *Transport in porous media*, 3(1):1–15.
- [Vu i Fredlund, 2004] Vu, H. Q. i Fredlund, D. G. (2004). The prediction of one-, two-, and three-dimensional heave in expansive soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 41(4):713–737.
- [Vuković i Soro, 1992] Vuković, M. i Soro, A. (1992). *Determination of hydraulic conductivity of porous media from grain-size composition*. Water Resources Pubns.
- [Wang et al., 1998] Wang, Z., Feyen, J., Genuchten, M. T., i Nielsen, D. R. (1998). Air entrapment effects on infiltration rate and flow instability. *Water Resources Research*, 34(2):213–222.
- [Wu et al., 2006] Wu, Y.-S., Zhang, K., i Liu, H.-H. (2006). Estimating large-scale fracture permeability of unsaturated rock using barometric pressure data. *Vadose Zone Journal*, 5(4):1129–1142.
- [Yakirevich et al., 2010] Yakirevich, A., Gish, T., Šimunek, J., Van Genuchten, M. T., Pachepsky, Y., Nicholson, T., i Cady, R. (2010). Potential impact of a seepage face on solute transport to a pumping well. *Vadose Zone Journal*, 9(3):686–696.
- [Yiqi i Zhou, 2010] Yiqi, L. i Zhou, X. (2010). *Soil respiration and the environment*. Elsevier.
- [Youngs i Peck, 1964] Youngs, E. i Peck, A. (1964). Moisture profile development and air compression during water uptake by bounded porous bodies: 1. theoretical introduction. *Soil Science*, 98(5):290–294.
- [Zaradny, 1990] Zaradny, H. (1990). *Matematyczne metody opisu i rozwiązań zagadnień przepływu wody w nienasyconych i nasyconych gruntach [sic] i glebach*. Polska Akademia Nauk, Instytut Budownictwa Wodnego w Gdańsku.