

# Wysokość progresywnej fali regularnej ulegającej załamaniu przed morską budowlą hydrotechniczną

Dr hab. inż. Waldemar Magda, prof. nadzw. PG  
Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Zjawisko załamania fali progresywnej (zarówno regularnej, jak i wiatrowej) może wystąpić w dowolnych warunkach głębokościowych, a tym samym może dotyczyć falowania głębokowodnego oraz falowania, którego zachowanie jest uzależnione od głębokości wody. Umiejętność właściwego określenia parametrów załamania fali nabiera szczególnego znaczenia w sytuacji konieczności ilościowej oceny oddziaływania załamującej się fali na morskie budowle (konstrukcje) hydrotechniczne, w tym przede wszystkim na grawitacyjne falochrony pionowosłupowe posadowione na podsypce o stosunkowo niewielkiej miąższości lub na fundamencie narzutowym o znacznej wysokości (tak zwane falochrony mieszane).

W opisach i analizach zjawiska załamania fali progresywnej wykorzystywane są najczęściej następujące trzy parametry bezwymiarowe:

- stromość graniczna fali

$$\delta_{\max} = \left( \frac{H}{L} \right)_{\max} = \delta_b = \frac{H_b}{L_b} \quad (1)$$

- wskaźnik wysokości fali załamującej się (ang. *breaker height index*)

$$\Omega_b = \frac{H_b}{H'_0} \quad (2)$$

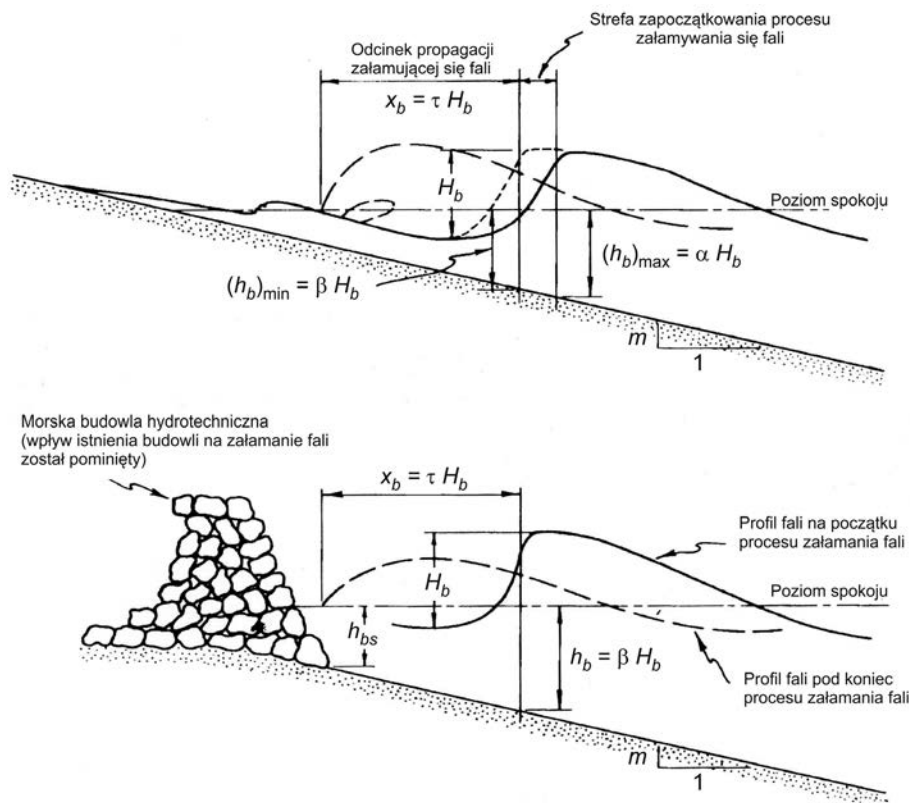
- wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali (ang. *breaker depth index*)

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} \quad (3)$$

gdzie:

- $\delta_{\max}$  – stromość graniczna fali ( $\delta_{\max} = \delta_b$ ) [-],
- $\Omega_b$  – wskaźnik wysokości fali załamującej się [-],
- $\gamma_b$  – wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali [-],
- $H$  – wysokość fali [m],
- $H_b$  – wysokość fali załamującej się [m],
- $H'_0$  – wysokość równoważna fali głębokowodnej [m],
- $L$  – długość fali [m],
- $L_b$  – długość fali załamującej się [m],
- $h_b$  – głębokość wody w miejscu załamania fali [m].

Wysokość fali załamującej się  $H_b$  oznacza wysokość fali w strefie zapoczątkowania zjawiska załamania fali, natomiast głębokość wody w miejscu załamania fali  $h_b$  to głębokość odpowiadająca miejscu, w którym fala osiąga wysokość  $H_b$ . Tego rodzaju uściślenie jest konieczne, zważywszy na fakt, że zjawisko załamania fali ma charakter rozwojowy i zachodzi na pewnym odcinku  $x_p$  (rys. 1), na którym w trakcie propagacji załamującej się fali wysokość fali ulega stopniowemu zmniejszeniu. Początek zjawiska załamania fali zwykle określa się chwilą i miejscem, w których wysokość fali jest największa i równa  $H_b$ . Według innych definicji początek załamania fali utożsamia się z uformowa-



Rys. 1. Schematy definiujące geometrię fali załamującej się (według [29])

niem się pionowej płaszczyzny fragmentu czoła załamującej się fali (w przypadku załamania przelewowego) lub z pojawieniem się piany na szczycie fali (w przypadku załamania spływowego).

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na poprawność stosowanego nazewnictwa. W pracy [27] można spotkać określenie „wysokość załamania fali” w odniesieniu do parametru  $H_b$ . Określenie to należy uznać za niepoprawne, gdyż w stosunku do załamania fali jako zjawiska fizycznego, nie można operować konkretnym parametrem ilościowym, np. wysokością. Załamanie fali może być opisywane tylko w sposób jakościowy (załamanie może być silne lub łagodne, może mieć charakter na przykład załamania przelewowego). Termin „wysokość” może odnosić się wyłącznie do fali, a nie do załamania fali. Określenie „wysokość załamania fali” mogłoby również mylnie sugerować, że chodzi o wysokość nad dnem morskim, czyli głębokość wody, a dokładniej głębokość wody, przy której następuje załamanie fali. Zatem, zamiast błędnego określenia „wysokość załamania fali” należy używać jedynie poprawnego terminu „wysokość fali załamującej się”.

Michell [15] określił graniczną wartość stromości fali głębokowodnej, charakteryzującą wystąpienie zjawiska załamania fali. Wartość ta wynosi (dolny indeks „b” oznacza załamanie fali)

$$\delta_b = \left( \frac{H_0}{L_0} \right)_b = 0,142455 \cong \frac{1}{7} \quad (4)$$

gdzie:

$\delta_b$  – stromość graniczna; stromość fali w chwili zainicjowania jej załamania [-],  
 $H_0$  – wysokość fali głębokowodnej [m],  
 $L_0$  – długość fali głębokowodnej [m].

Dodatkowo, Michell [15] stwierdził wpływ efektów nieliniowych na długość fali załamującej się w warunkach głębokowodnych i wykazał następujący związek:

$$(L_0)_b = 1,2L_0 = 1,2 \frac{gT^2}{2\pi} \quad (5)$$

gdzie:

$(L_0)_b$  – długość fali załamującej się w warunkach głębokowodnych [m],  
 $L_0$  – długość fali głębokowodnej, określona na podstawie liniowej teorii falowania (teorii Airy’ego) [m],  
 $T$  – okres fali [s],  
 $g$  – przyspieszenie ziemskie ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

Po podstawieniu zależności (5) do wzoru (4) i wykonaniu prostego przekształcenia otrzymuje się jeszcze jeden rodzaj wskaźnika załamania fali głębokowodnej [8]

$$\frac{H_b}{gT^2} = 0,0272 \quad (6a)$$

który, po wymnożeniu przez  $g$  i wyrażeniu w jednostkach anglosaskich, nazywany jest wskaźnikiem załamania fali głębokowodnej według teorii Michella [15] i wynosi [22]

$$\frac{H_b}{T^2} = 0,0272 \quad (6b)$$

gdzie tym razem  $H_b$  wyrażone jest w stopach [ft] ( $1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$ ).

Miche [14], korzystając z kinematycznego warunku załamania fali oraz liniowej teorii falowania (teorii Airy’ego), a także wykorzystując graniczną wartość stromości fali głębokowodnej (4), zaproponował wzór (nazywany wzorem Miche’a) pozwalający wyznaczyć graniczną wartość stromości fali w warunkach ograniczonej głębokości wody

$$\delta_b = \frac{H_b}{L_b} = \frac{1}{7} \operatorname{tgh}(k_b h_b) \quad (7)$$

gdzie:

$\delta_b$  – stromość graniczna fali [-],  
 $H_b$  – wysokość fali załamującej się [m],  
 $L_b$  – długość fali w chwili jej załamania [m],  
 $k_b$  – liczba falowa dla fali załamującej się ( $k_b = 2\pi/L_b$ ) [1/m],  
 $h_b$  – głębokość wody w miejscu załamania fali [m].

Współczynnik liczbowy podany we wzorze (7) jest bardzo zbliżony do wartości podanej w pracy Miche’a [14], gdzie wynosił 0,140 (różnica pomiędzy wartościami 0,140 i 1/7 jest równa tylko około 2%). W przypadku warunków głębokowodnych, dla których ( $k_b h_b \gg 1$  oraz  $\operatorname{tgh}(k_b h_b) \rightarrow 1$ , wzór (7) można uprościć do postaci

$$\delta_b = \frac{H_b}{L_b} \cong \frac{1}{7} \quad (8)$$

która jest identyczna z wzorem (4). Zatem, wartość graniczna stromości fali jest największa w przypadku fali głębokowodnej. Biorąc zaś pod uwagę warunki falowania przy ograniczonej głębokości wody, dla których ( $k_b h_b \ll 1$  oraz  $\operatorname{tgh}(k_b h_b) \rightarrow k_b h_b$ , wzór (7) można przekształcić do postaci

$$\delta_b = \frac{H_b}{L_b} \cong \frac{2\pi h_b}{7L_b} \quad (9)$$

W wyniku prostego przekształcenia wzoru (9) otrzymuje się wyrażenie opisujące tak zwany wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali (patrz wzór (3))

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} \cong \frac{2\pi}{7} = 0,897598 \cong 0,9 \quad (10a)$$

którego wartość pozostaje w dobrej zgodności z wartościami uzyskiwanymi w badaniach laboratoryjnych zjawiska załamania fali nad dnem poziomym [10]. Wartość ta jest zwykle oceniana jako górne ograniczenie wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali, a typowe wartości wskaźnika zawierają się w przedziale od 0,6 do 0,8 [1]. Według innych autorów wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali może przyjmować wartości z zakresu od 0,8 do 1,2 [19], co zachodzi szczególnie w przypadku pochyłego dna morskiego. W przypadku fal wiatrowych stwierdzono występowanie warunku  $H_s/h \cong 0,5$  (gdzie  $H_s$  oznacza wysokość znaczną fali, a  $h$  oznacza głębokość wody) w chwili załamania fali [1].

Niektórzy autorzy, na przykład [1, 8], powołując się na pracę Miche’a [4], podają minimalnie mniejszą wartość wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali osiąganą w warunkach płytkowodnych ( $k/h \ll 1$  [8] lub  $h/L \leq 0,05$  [1]) i przy poziomym dnie morskim, która wynosi

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} = 0,88 \quad (10b)$$

Posługując się teorią fali samotnej, McCowan [12] podał jeszcze inną wartość wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali w warunkach płytkowodnych i dla poziomego dna morskiego, a mianowicie

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} = 0,78 \quad (10c)$$

natomiast Yamada i inni [24] skorygowali wartość podaną przez McCowana [12], przedstawiając [18]

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} = 0,8261 \quad (10d)$$

W skrajnie teoretycznym przypadku „pionowego dna morskiego” ( $m = \text{tg } \theta = \infty$ , gdzie  $m$  oznacza nachylenie dna morskiego, a  $\theta$  oznacza kąt nachylenia dna morskiego do poziomu) zakłada się, że maksymalna wartość wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali jest równa dwukrotnej wartości (fala padająca i w pełni odbita) podanej przez McCowana [12], czyli

$$(\gamma_b)_{m=\infty} = \left( \frac{H_b}{h_b} \right)_{m=\infty} = 1,56 \quad (10e)$$

Istnieją również wzory opisujące wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali z uwzględnieniem wpływu nachylenia dna morskiego. Bardzo szerokiego i wartościowego przeglądu licznych zależności  $\gamma_b = H_b / h_b$  dokonano w pracy [18]. Jako przykłady nowo opracowanych zależności dla przypadku fal regularnych można podać empiryczny wzór Gody [5], skorygowany przez Rattanapitikona i Shibayamę [17], a zaczerpnięty z pracy [6]

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} = 0,17 \frac{L_0}{h_b} \left\{ 1 - \exp \left[ -1,5 \frac{\pi h_b}{L_0} (1 + 11 \text{tg}^{4/3} \theta) \right] \right\} \quad (11a)$$

lub empiryczny wzór Gody [4], także skorygowany przez Rattanapitikona i Shibayamę [17], niestety błędnie podany w pracy [2]; poprawny wzór ma postać

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} = 0,17 \frac{L_0}{h_b} \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{\pi h_b}{L_0} (16,21m^2 - 7,07m - 1,55) \right] \right\} \quad (11b)$$

gdzie:

- $\gamma_b$  – wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali [-],
- $H_b$  – wysokość fali załamującej się [m],
- $h_b$  – głębokość wody w miejscu załamania fali [m],
- $L_0$  – długość fali głębokowodnej [m],
- $\theta$  – kąt nachylenia dna morskiego do poziomu [°] (lub [rad]).

## WSKAŹNIK GŁĘBOKOŚCI WODY W MIEJSCU ZAŁAMANIA FALI – NOMOGRAMY

### Załamanie fali nad pochyłym dnem morskim przy braku morskiej budowli hydrotechnicznej

W praktyce inżynierskiej do dnia dzisiejszego wykorzystywany jest nomogram do odczytu wartości odwrotności wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali

$$\frac{1}{\gamma_b} = \frac{h_b}{H_b} \quad (12a)$$

gdzie:

- $\gamma_b$  – wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali [-],
- $h_b$  – głębokość wody w miejscu załamania fali [m],
- $H_b$  – wysokość fali załamującej się [m],

w zależności od bezwymiarowego parametru

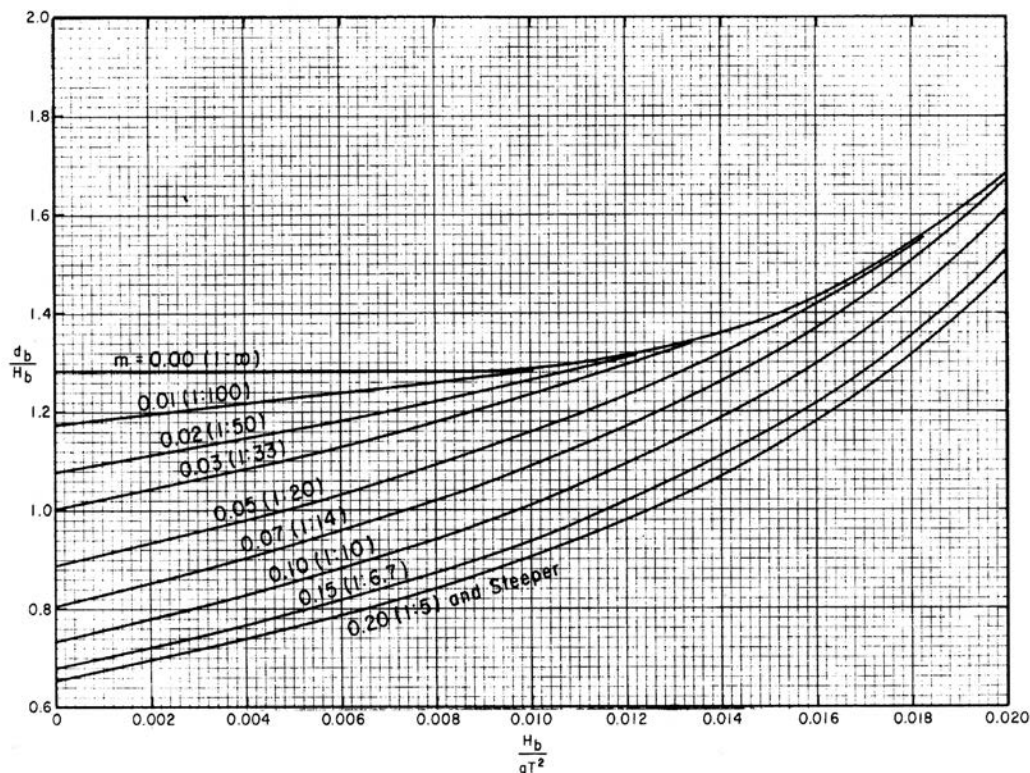
$$\frac{H_b}{gT^2} \quad (12b)$$

oraz nachylenia dna morskiego

$$m = \text{tg } \theta \quad (12c)$$

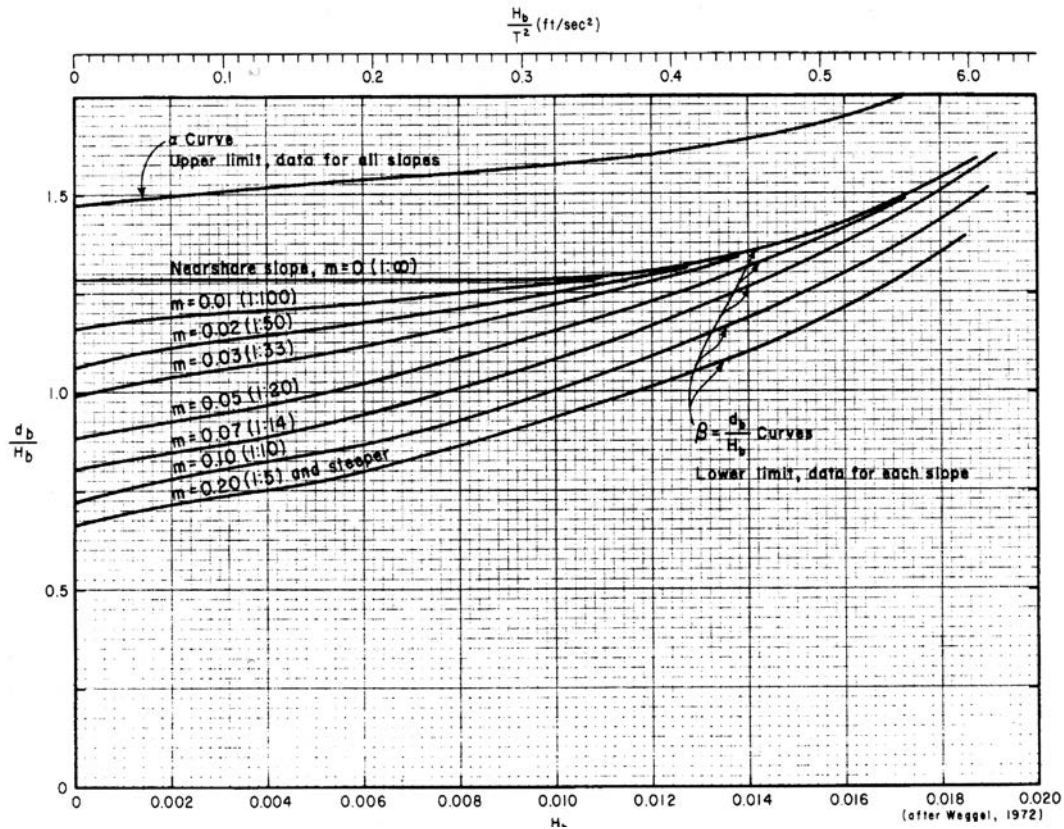
gdzie:

- $T$  – okres fali ulegającej załamaniu [s],
- $g$  – przyspieszenie ziemskie ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ),
- $m$  – nachylenie dna morskiego [-],
- $\theta$  – kąt nachylenia dna morskiego do poziomu [°] (lub [rad]).



Rys. 2. Względna (minimalna) głębokość wody  $h_b / H_b$ , przy której może wystąpić załamanie fali [29] [uwaga: nomogram oryginalny (Figure 2-73),  $d_b = h_b$ ]



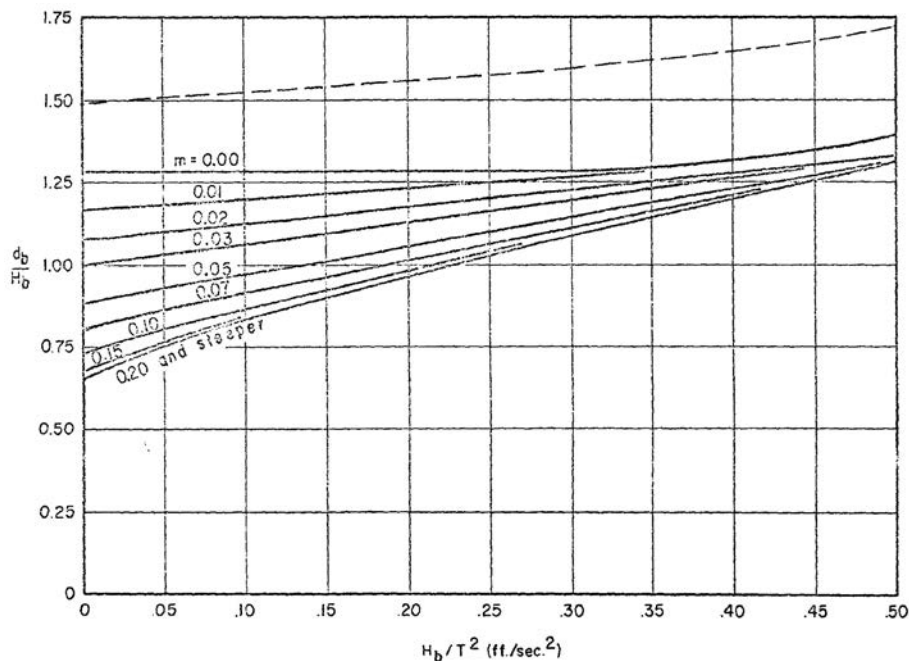


Rys. 3. Względne głębokości wody: minimalna  $(h_b)_{\min}/H_b$  oraz maksymalna  $(h_b)_{\max}/H_b$ , wyznaczające zakres głębokości wody, przy której zapoczątkowane zostaje załamanie fali [29] [uwaga: nomogram oryginalny (Figure 7-2),  $d_b = h_b$ ]

W pracy [29] podano dwie bardzo zbliżone do siebie wersje takiego nomogramu, a mianowicie: rys. 2 oraz rys. 3. Na rys. 3 przedstawiono te same zależności, co na rys. 2, w postaci dolnego ograniczenia dla różnych nachyleń dna morskiego (patrz rys. 1)

$$\beta = \frac{(h_b)_{\min}}{H_b} \quad (13a)$$

oraz dodatkowo w postaci górnego ograniczenia (bez względu na nachylenie dna morskiego)



Rys. 4. Względna głębokość wody  $h_b/H_b$ , przy której następuje załamanie fali [22] [uwaga: nomogram oryginalny (Figure 3),  $d_b = h_b$ ]

$$\alpha = \frac{(h_b)_{\max}}{H_b} \quad (13b)$$

gdzie  $(h_b)_{\min}$  i  $(h_b)_{\max}$  oznaczają odpowiednio minimalną i maksymalną głębokość wody, przy której zapoczątkowany zostaje proces załamania się fali.

Jak podano w pracy [29], oba nomogramy sporządzono na podstawie empiryczno-analitycznego rozwiązania zaproponowanego przez Weggela [22]. Oryginalny nomogram Weggela przedstawiono na rys. 4.

Według Weggela [22] wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali opisany jest liniową zależnością

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} = b - a \frac{H_b}{T^2} \quad (14a)$$

w której:

$$a = 1,36 (1,0 - e^{-19,0m}) \quad (14b)$$

$$b = \frac{1}{0,64 (1,0 + e^{-19,5m})} \quad (14c)$$

przy czym należy pamiętać, że parametry wyrażono w anglosaskich jednostkach miar, odpowiednio:  $H_b$  i  $h_b$  w stopach [ft] oraz  $a$  w sekundach do kwadratu na stopy [ $s^2/ft$ ]. Zastępując parametr  $H_b/T^2$  wygodniejszym do prezentacji wyników parametrem bezwymiarowym  $H_b/(gT^2)$  oraz stosując jednostki międzynarodowego układu metrycznego (SI), wzór (14a) można przetransformować odpowiednio do postaci

$$\gamma_b = \frac{H_b}{h_b} = b - a \frac{H_b}{gT^2} \quad (15a)$$

w której

$$a = 43,7717 (1,0 - e^{-19,0m}) \quad (15b)$$

a wzór (14c) może oczywiście pozostać bez zmian lub też może być przedstawiony w równoważnej postaci

$$b = \frac{1,5625}{1,0 + e^{-19,0m}} \quad (15c)$$

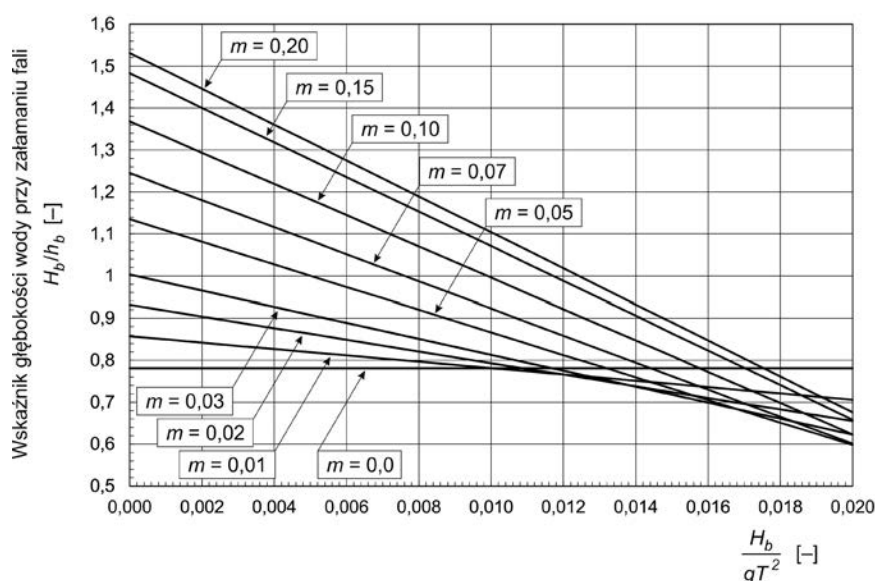
Wzory od (15a) do (15c), ewentualnie z niemającymi praktycznego znaczenia drobnymi zaokrągleniami współczynników liczbowych, podano w wielu pracach, np. [2, 8, 18, 25]. Autorzy prac [10, 29] przedstawili przedmiotowe rozwiązanie, zastępując wzór na  $\gamma_b$  (15a) wzorem na odwrotność tego parametru, czyli

$$\frac{1}{\gamma_b} = \frac{h_b}{H_b} = \frac{1}{b - a \frac{H_b}{gT^2}} \quad (16)$$

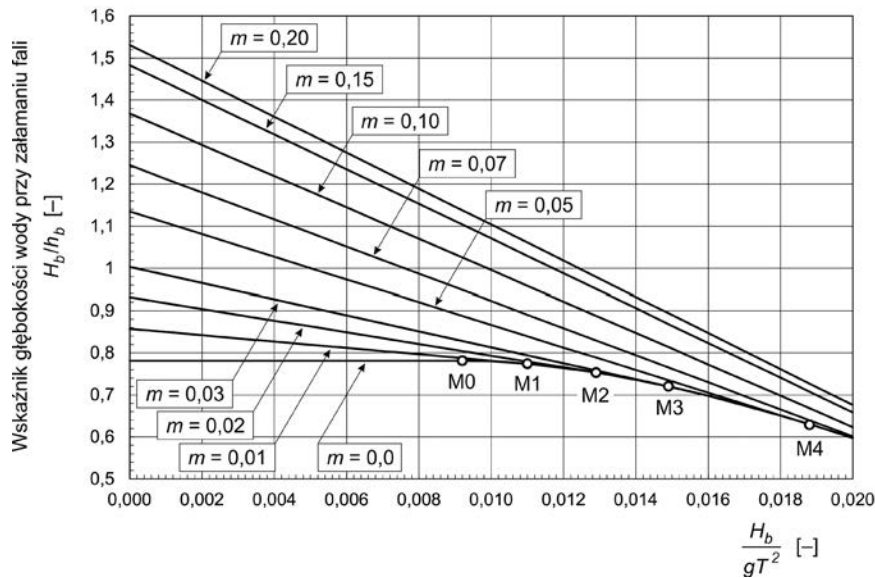
Rozwiązanie Weggela [22] powinno być stosowane w przypadkach łagodnie nachylonego dna morskiego ( $m = \tan \theta \leq 0,105$  [22],  $m = \tan \theta \leq 0,1$  [8, 25] lub  $0,02 < m = \tan \theta \leq 0,2$  [18]) oraz dla  $H'_0/L_0 \leq 0,06$ .

W przeciwieństwie do wzorów (11a) i (11b) obliczenie  $H_b$  z wzoru (15a), przy znanych wartościach  $h_b$  i  $m$ , wymaga zastosowania metody numerycznej do rozwiązywania równań nieliniowych. Na podstawie wyżej zapisanych wzorów od (15a) do (15c) sporządzono nomogram do odczytu wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali  $\gamma_b$ , który przedstawiono na rys. 5.

Pomijając fakt zamiany prezentowanego parametru z  $1/\gamma_b$  (rys. 2, 3 i 4) na  $\gamma_b$  (rys. 5), z porównania przedstawionych nomogramów wynika, że rozwiązania w przypadku różnych nachyleń dna morskiego, pokazane na rys. 2, 3 i 4, są nieliniowe w porównaniu do rozwiązania wynikającego z bezpośredniego zastosowania wzorów od (15a) do (15c) i zaprezentowanego na rys. 5. Jeżeli na rys. 2, 3 i 4 rzeczywiście przedstawiono rozwiązanie empiryczno-analityczne Weggela [22], to nieliniowość wykresów dla mniejszych wartości współczynnika bezwymiarowego  $H_b/(gT^2)$  jest niezrozumiała i nie została w żaden sposób skomentowana przez autorów prac [22, 29]. Nieliniowość wykresów na rys. 2, 3 i 4 dla większych wartości współczynnika bezwymiarowego  $H_b/(gT^2)$  dokładnie wytłumaczono w pracy [22] i wynika ona z dodatkowego uwzględnienia pewnego ograniczenia strefy załamania fali, zastosowanego do rozwiązania liniowego ujętego wzorami od (15a) do (15c). Ograniczenie to nazwano w pracy Weggela [22] tak zwaną linią przejścia, stanowiącą nieliniowe połączenie rozwiązania opisanego warunkiem McCowana [12] załamania fali w strefie ograniczonej głęboko-



Rys. 5. Wskaźnik głębokość wody w miejscu załamania fali  $\gamma_b = H_b/h_b$ , dla różnych nachyleń dna morskiego



Rys. 6. Wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali  $\gamma_b = H_b/h_b$ , dla różnych nachyleń dna morskiego, po uwzględnieniu ograniczenia w postaci warunku stromości granicznej fali na ograniczonej głębokości wody

ści wody (patrz wzór (10c)) z rozwiązaniem określonym warunkiem Michella [15] załamania fali w strefie głębokowodnej (patrz wzór (6a)). Autor pracy [22] podaje, że przebieg linii przejścia może być symulowany rozwiązaniem zgodnie z wzorem Miche'a [14] (patrz wzór (7)), opisującym stromość graniczną w warunkach ograniczonej głębokości wody.

Uzyskanie efektu wpływu stromości granicznej  $\delta_b$ , na rozwiązanie Weggela [22] dla wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali  $\gamma_b$ , polega na znalezieniu nowego rozwiązania dla  $\gamma_b$ , tym razem jednak biorąc pod uwagę układ równań (15a) oraz (7), co z matematycznego punktu widzenia nie jest jednak sprawą prostą. Ten sam efekt można uzyskać, znajdując dolną obwiednię (w postaci krzywej gładkiej) rozwiązań liniowych dla różnych nachyleń dna morskiego. Poszukiwanie obwiedni dla funkcji parametrycznej polega na:

- zapisie funkcji w postaci ( $m$  jest parametrem)

$$f(x, y, m) = 0 \quad (17a)$$

- znalezieniu funkcji pochodnej (względem parametru  $m$ )

$$f'_m(x, y, m) = 0 \quad (17b)$$

- rozwiązaniu układu równań (17a) i (17b) ze względu na  $x$  i  $y$ .

Rozpatrywana funkcja (15a), zapisana według ogólnego wzoru (17a), przyjmie postać

$$f\left(\frac{H_b}{h_b}, \frac{H_b}{gT^2}, m\right) = \frac{H_b}{h_b} - b + a \frac{H_b}{gT^2} = 0 \quad (18)$$

Po wykonaniu różniczkowania funkcji (18) względem parametru  $m$  otrzymano

$$f'_m\left(\frac{H_b}{h_b}, \frac{H_b}{gT^2}, m\right) = \frac{\partial f\left(\frac{H_b}{h_b}, \frac{H_b}{gT^2}, m\right)}{\partial m} = -\frac{\partial b}{\partial m} + \frac{\partial a}{\partial m} \frac{H_b}{gT^2} = 0 \quad (19)$$

Funkcję (19) można zapisać w postaci

$$\frac{H_b}{gT^2} = \frac{\partial b}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial a} = \frac{\partial b}{\partial m} \frac{1}{\frac{\partial a}{\partial m}} \quad (20)$$

Znajomość wzorów (15b) i (15c) pozwala obliczyć następujące pochodne:

$$\frac{\partial b}{\partial m} = 30,46875 \frac{\exp(-19,5m)}{[1,0 + \exp(-19,5m)]^2} \quad (21a)$$

oraz

$$\frac{\partial a}{\partial m} = 831,6623 \exp(-19,0m) \quad (21b)$$

Po podstawieniu wzorów (21a) i (21b) do wzorów (20) i (15a) otrzymano ostatecznie wyrażenia na odcięta i rzędna obwiedni rodziny prostych, do której poszczególne proste są styczne:

$$\left(\frac{H_b}{gT^2}\right)_M = 0,036636 \frac{\exp(-0,5m)}{[1,0 + \exp(-19,5m)]^2} \quad (22a)$$

oraz

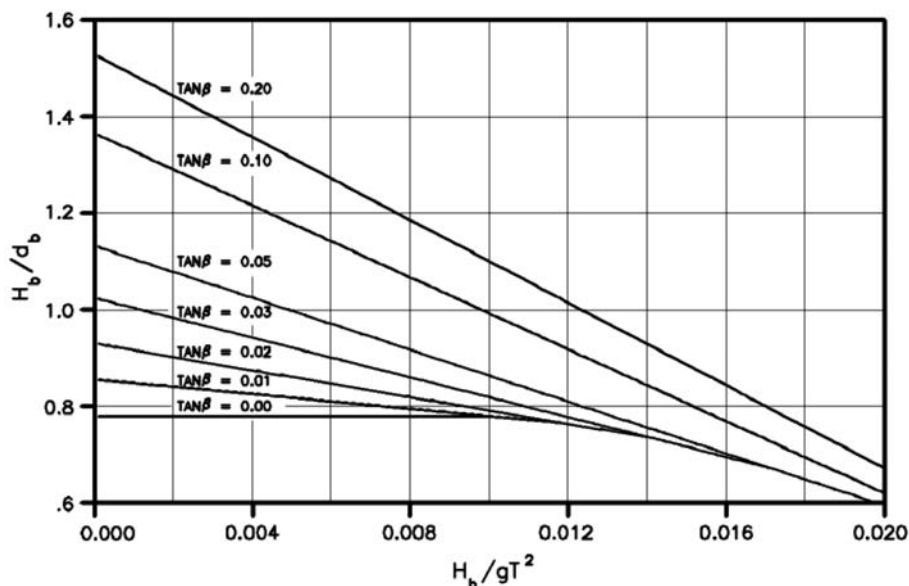
$$\left(\frac{H_b}{h_b}\right)_M = \frac{Z}{[1,0 + \exp(-19,5m)]^3} \quad (22b)$$

w którym

$$Z = 1,5625 - 1,6036 \exp(-0,5m) + 4,7286 \exp(-19,5m) - 1,6036 \exp(-20,5m) + 3,1662 \exp(-39,0m) \quad (22c)$$

Wartości obliczone z wzoru (22a) dla danego nachylenia dna morskiego  $m$  są jednocześnie maksymalnymi wartościami parametru  $H_b/(gT^2)$ , dla którego obowiązuje zależność liniowa dana wzorem (15a). Punkt M o współrzędnych  $\{[H_b/(gT^2)]_M, [H_b/h_b]_M\}$  jest punktem styczności prostej, stanowiącej rozwiązanie dla danego nachylenia  $m$ , z gładką krzywoliniową obwiednią rodziny krzywych dla wszystkich rozpatrywanych nachyleń dna morskiego. Dalej poszczególne proste przechodzą





Rys. 7. Wskaźnik głębokości wody w miejscu załamania fali  $\gamma_b = H_b/h_b$ , dla różnych nachyleń dna morskiego, z uwzględnieniem strefy przejściowej [25] [uwaga: rysunek oryginalny (Figure II-4-2),  $d_b = h_b$ ,  $\beta = \theta$ ]

w obwiednię rodziny prostych. Początkiem krzywoliniowego odcinka obwiedni jest punkt M0 leżący na prostej będącej rozwiązaniem dla poziomego dna morskiego ( $m = 0,0$ ).

W celu wyznaczenia współrzędnych dowolnego punktu obwiedni, którego odcięta spełnia warunek  $H_b/(gT^2) \geq [H_b/(gT^2)]_M$ , należy rozwiązać nieliniowe równanie (22a) ze względu na  $m$  i tak obliczoną wartość  $m$  należy podstawić do wzoru (22b). W tabl. 1 przedstawiono współrzędne punktów styczności poszczególnych prostych z obwiednią rodziny prostych dla rozpatrywanych nachyleń dna morskiego.

Tabl. 1. Współrzędne punktów styczności prostych  $H_b/h_b = f[H_b/(gT^2), m]$  z obwiednią rodziny krzywych dla różnych wartości nachylenia dna morskiego

Nachylenie dna morskiego $m$ [-]	Punkt styczności	Odcięta punktu styczności $[H_b/(gT^2)]_M$ [-]	Rzędna punktu styczności $[H_b/h_b]_M$ [-]
0,00	M0	0,0092	0,7812
0,01	M1	0,0110	0,7741
0,02	M2	0,0129	0,7532
0,03	M3	0,0149	0,7204
0,05	M4	0,0188	0,6288
0,07	M5	0,0224	0,5220
0,10	M6	0,0267	0,3737

Zgodnie z opisanym algorytmem działań wykonano obliczenia, których wynik przedstawiono w postaci graficznej na rys. 6. Identyczny rysunek (rys. 7), zawierający rozwiązania dla nieco mniejszej liczby nachyleń dna morskiego, można odszukać w pracy [25].

### Załamane fali nad pochyłym dnem morskim przed morską budowlą hydrotechniczną

Parametr głębokości wody, który występuje we wskaźniku głębokości wody w miejscu załamania fali  $\gamma_b$  (patrz wzór (15a)),

oznacza głębokość, przy której rozpoczyna się zjawisko załamania fali (patrz rys. 1). Jeżeli załamane fali zostało zainicjowane w pewnej odległości od morskiej konstrukcji hydrotechnicznej, to w trakcie propagacji załamującej się fali na odcinku  $x_b$  (od miejsca zainicjowania załamania do odmorskiej ściany budowli) wysokość fali ulegnie pewnemu zmniejszeniu w porównaniu z wysokością w miejscu zapoczątkowania procesu załamania fali. Podstawowy związek geometryczny dla głębokości wody ma postać

$$h_s = h_b - mx_b \quad (23a)$$

gdzie:

$h_s$  – głębokość wody tuż przed morską budowlą hydrotechniczną [m],

$h_b$  – głębokość wody w miejscu zapoczątkowania procesu załamania fali [m],

$m$  – nachylenie dna morskiego ( $m = \tan \theta$ ) [-],

$\theta$  – kąt nachylenia dna morskiego do poziomu [ $^\circ$ ] (lub [rad]),

$x_b$  – odległość, jaką przebywała fala w trakcie trwania procesu załamania fali, [m].

W celu ułatwienia prowadzenia dalszych operacji matematycznych równanie (23a) można także podzielić obustronnie przez wysokość załamującej się fali  $H_b$ , uzyskując tym samym równanie w postaci bezwymiarowej

$$\frac{h_s}{H_b} = \frac{h_b}{H_b} - m \frac{x_b}{H_b} \quad (23b)$$

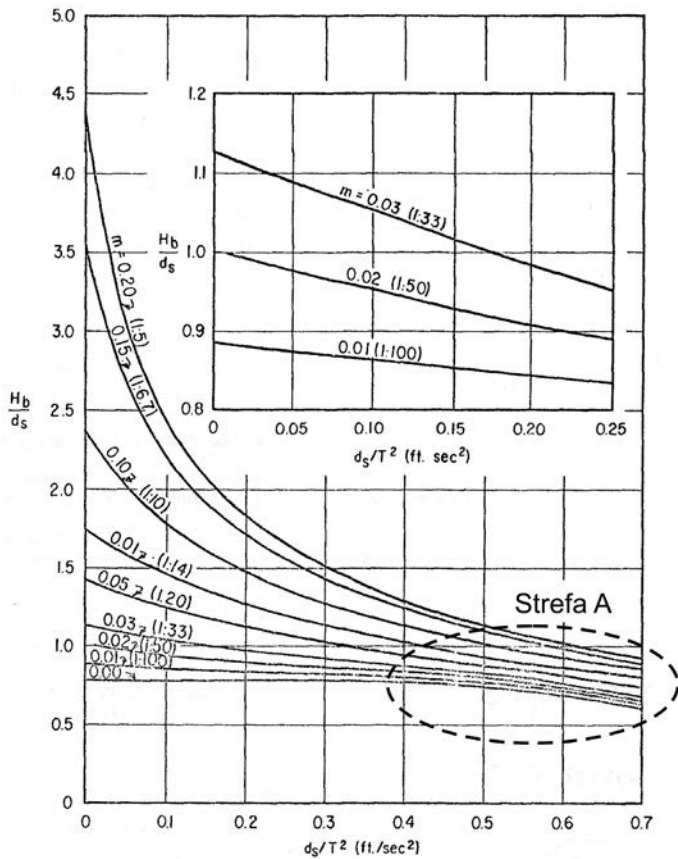
lub jeszcze inaczej

$$\gamma_{bs} = \frac{H_b}{h_s} = \frac{1}{\frac{1}{H_b} - m \frac{x_b}{H_b}} \quad (23c)$$

gdzie:

$\gamma_{bs}$  – wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną [-].

Warto zauważyć, że w nazwach obu wskaźników,  $\gamma_b$  i  $\gamma_{bs}$ , występują różne parametry – raz pojawia się głębokość wody w miejscu załamania fali ( $h_b$  w przypadku  $\gamma_b$ ), a raz wysokość fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną ( $H_b$  w przypadku  $\gamma_{bs}$ ). Bierze się to stąd, że parametr występujący w nazwie danego wskaźnika jest zwykle niewiadomą, którą

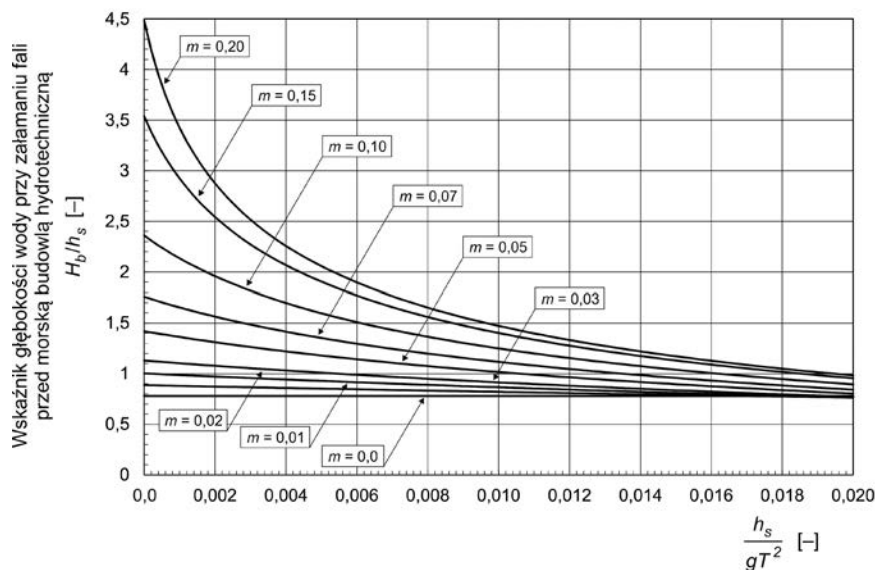


Rys. 8. Wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną  $H_b/h_s$  w zależności od nachylenia dna morskiego  $m$  [uwaga: według rysunku oryginalnego (Figure 4) [22],  $d_s = h_s$ ]

oblicza się po obliczeniu lub odczytaniu z nomogramu wartości danego wskaźnika.

Na podstawie obserwacji długości odcinka, na którym fala ulegała załamaniu przelewowemu, Galvin [3] zaproponował następujący wzór

$$\tau = \frac{x_b}{H_b} = 4,0 - 9,25m \quad (24)$$



Rys. 9. Wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną  $\gamma_{bs} = H_b/h_s$  w zależności od nachylenia dna morskiego

Rozwiązując układ równań (14a) (wraz z (14b) i (14c)) oraz (23c) (wraz z (24)), Weggel [22] przedstawił następujące rozwiązanie dla wskaźnika wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną (parametry wymiarowe są wyrażone w jednostkach anglosaskich)

$$\gamma_{bs} = \frac{H_b}{h_s} = \frac{1}{ma(18,5m-8,0)} \left[ c - \sqrt{c^2 - \frac{4,0mba}{h_s} (9,25m-4,0)} \right] \quad (25a)$$

w którym

$$c = a + \frac{1}{h_s} (1,0 + 9,25m^2b - 4,0mb) \quad (25b)$$

wraz z jego graficzną ilustracją przedstawioną na rys. 8.

Niestety, jak łatwo wywnioskować, rozwiązanie Wegella nie jest do końca poprawne, gdyż nie pozwala na obliczenie wskaźnika  $\gamma_{bs}$  dla przypadku poziomego dna morskiego ( $m = 0$ ), a to ze względu na dzielenie przez  $m$  w pierwszym członie wzoru (25a). Dodatkowo wzór (25a) nie daje możliwości obliczenia wartości wskaźnika  $\gamma_{bs}$  dla  $h_s/T^2 = 0$ . Chociaż z praktycznego punktu widzenia wartość  $h_s/T^2 = 0$  jest mało interesująca (przed budowlą znajduje się przecież akwen morski o niezerowej głębokości wody), to jednak z matematycznego punktu widzenia warto byłoby otrzymać pełne rozwiązanie, dające również możliwość obliczenia początkowej wartości  $\gamma_{bs}$  dla poszczególnych nachyleń dna morskiego. Trudno powiedzieć, z czego wynikają wspomniane niedociągnięcia w rozwiązaniu Wegella [22].

Autorskie rozwiązanie układu równań (15a) (wraz z (15b) i (15c)) oraz (23c) (wraz z (24)) doprowadziło do sformułowania następującego równania nieliniowego

$$b \left( \frac{h_s}{H_b} \right)^2 + \left( mb\tau - a \frac{h_s}{gT^2} - 1 \right) \frac{h_s}{H_b} - ma\tau \frac{h_s}{gT^2} = 0 \quad (26)$$

którego dodatni pierwiastek jest opisany wzorem



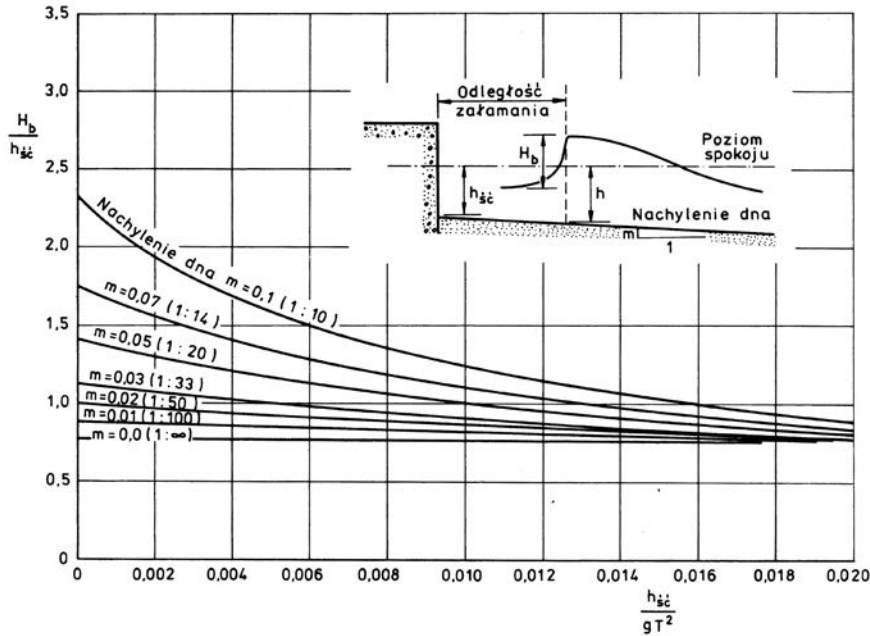
$$\frac{h_s}{H_b} = \frac{-\left(m b \tau - a \frac{h_s}{g T^2} - 1\right) + \sqrt{\Delta}}{2 b} \quad (27a)$$

Zatem, poszukiwane rozwiązania dla wskaźnika wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną ma następującą postać

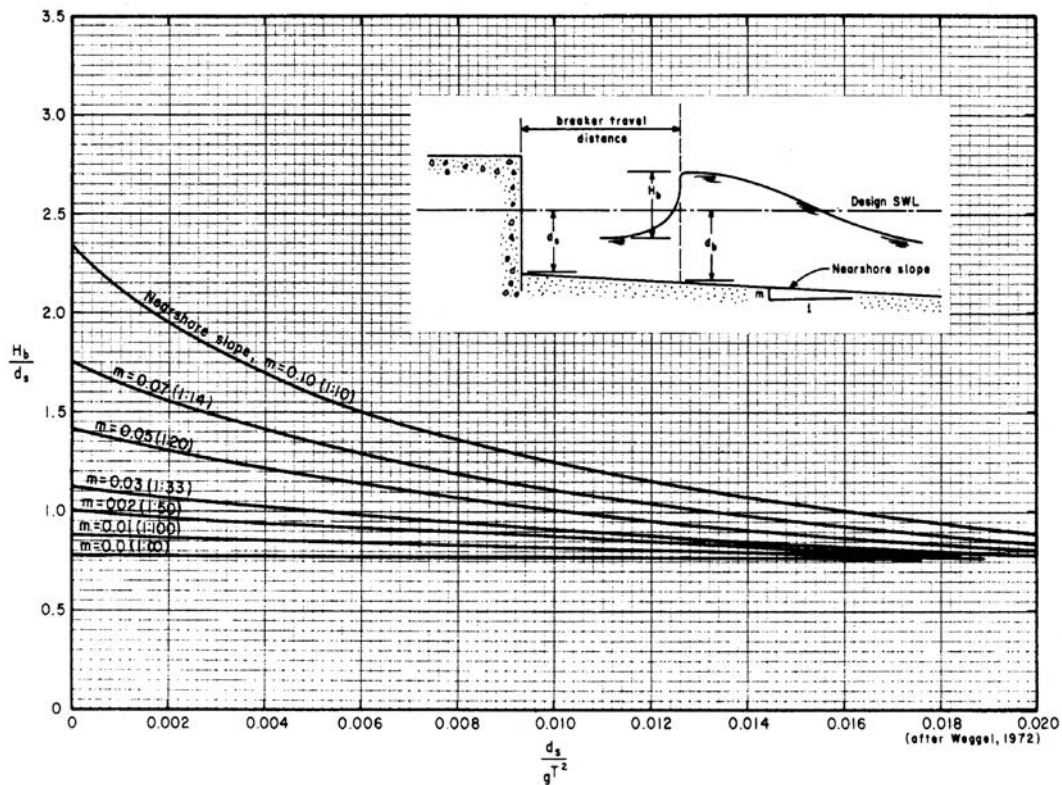
$$\gamma_{bs} = \frac{H_b}{h_s} = \frac{2 b}{-\left(m b \tau - a \frac{h_s}{g T^2} - 1\right) + \sqrt{\Delta}} \quad (28)$$

w którym

$$\Delta = \left(m b \tau - a \frac{h_s}{g T^2} - 1\right)^2 + 4 b m a \tau \frac{h_s}{g T^2} \quad (27b)$$



Rys. 10. Wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną  $\gamma_{bs} = H_b/h_s$  w zależności od nachylenia dna morskiego  $m$  [27]  
[uwaga: rysunek oryginalny (Rys. 4.12),  $h_{sc} = h_s$ ]



Rys. 11. Wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną  $\gamma_{bs} = H_b/h_s$  w zależności od nachylenia dna morskiego  $m$  [29]  
[uwaga: rysunek oryginalny (Figure 7-4),  $d_s = h_s$ ]

Rozwiązanie zgodne z wzorem (28) dla kilku przykładowych nachyleń dna morskiego, łącznie z przypadkiem płaskiego dna morskiego ( $m = 0$ ), zilustrowano graficznie na rys. 9.

Podobny nomogram przedstawiono w pracy [27] (rys. 10). Niestety podano w niej niepoprawne nazwisko autora oryginału (jest: Wiegel, a powinno być: Weggel), a także nie podano cytowania odnoszącego się do oryginału (należało zacytować pracę [22]). Oczywiście zawsze istnieje dowolność, jeśli chodzi o wybór symboli i oznaczeń parametrów fizycznych stosowanych w tekstach artykułów i książek. Jedynym warunkiem jest niezmiennosc przyjętej na początku tekstu konwencji oznaczeń. Z oczywistych względów należy jednak unikać dziwnych oznaczeń, takich jak na przykład  $h_{ic}$  na rys. 10, zaczerpniętego z pracy [27], które mogłoby wskazywać na skłonność autora do błędnej pod względem ortograficznym pisowni słowa „ściana”.

Porównując oryginalny nomogram Wegella [22] (patrz rys. 8) z nomogramem autorskim (patrz rys. 9) lub z nomogramami z prac [27] (patrz rys. 10) oraz [29] (patrz rys. 11), daje się zauważyć pewne różnice w przebiegu krzywych, występujące przy większych wartościach parametru  $h_s / (gT^2)$  (rys. 9 i 10) lub  $h_s / T^2$  (rys. 8). Fragment krzywych na rys. 8, różniących się w swoim przebiegu od krzywych na rys. 9, 10 i 11, zaznaczono linią przerywaną i opisano jako „Strefa A”.

Niestety nie jest prawdą, jak pisze autor pracy [22], że na nomogramie przedstawionym na rys. 8 znajdują się krzywe wynikające wyłącznie z rozwiązania (25). Okazuje się, że aby uzyskać postać nomogramu analogiczną do tej, jaką zaprezentowano w oryginalnej pracy [22], należy jeszcze wykonać dodatkową operację matematyczną, o czym autor pracy [22] z niewiadomych powodów zapomniał poinformować czytelnika. Operacja ta polega na wprowadzeniu pewnej korekty rozwiązania dla  $\gamma_{bs}$ , polegającej na dodatkowym uwzględnieniu ograniczenia w postaci warunku stromości granicznej fali przy ograniczonej głębokości wody (patrz wzór (7)). Można to uczynić na wzór przekształcenia, jakie zastosowano wcześniej w niniejszym artykule przy opracowywaniu nomogramu dla wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali  $\gamma_b$  (patrz rys. 5 i 6). Byłoby to jednak bardzo kłopotliwe z matematycznego punktu widze-

nia. Dlatego zastosowano alternatywny i przy tym bardzo prosty sposób postępowania, polegający na wykonaniu dwóch następujących kroków obliczeniowych:

- skorzystaniu z wzoru (23c), a następnie
- wykorzystaniu wartości  $\gamma_b = H_b / h_b$ , obliczonych już w pierwszej części artykułu (patrz rys. 6), i podstawieniu ich właśnie do wzoru (23c).

Należy jednak przy tym pamiętać, że wskaźnik głębokości wody przy załamaniu fali  $\gamma_b = H_b / h_b$  był zapisany w funkcji bezwymiarowego parametru  $H_b / (gT^2)$ , natomiast wskaźnik wysokości fali załamującej się przed budowlą  $\gamma_{bs} = H_b / h_s$ , jest przedstawiany w funkcji również bezwymiarowego, ale już innego parametru  $h_s / (gT^2)$ . W celu uzyskania zgodności prezentacji nomogramów dla obu parametrów  $\gamma_b$  i  $\gamma_{bs}$ , należy dla każdej wartości  $\gamma_b = H_b / h_b$  (z nomogramu na rys. 6) podstawianej do wzoru (23c) obliczyć nową wartość parametru  $h_s / (gT^2)$  na osi odciętych.

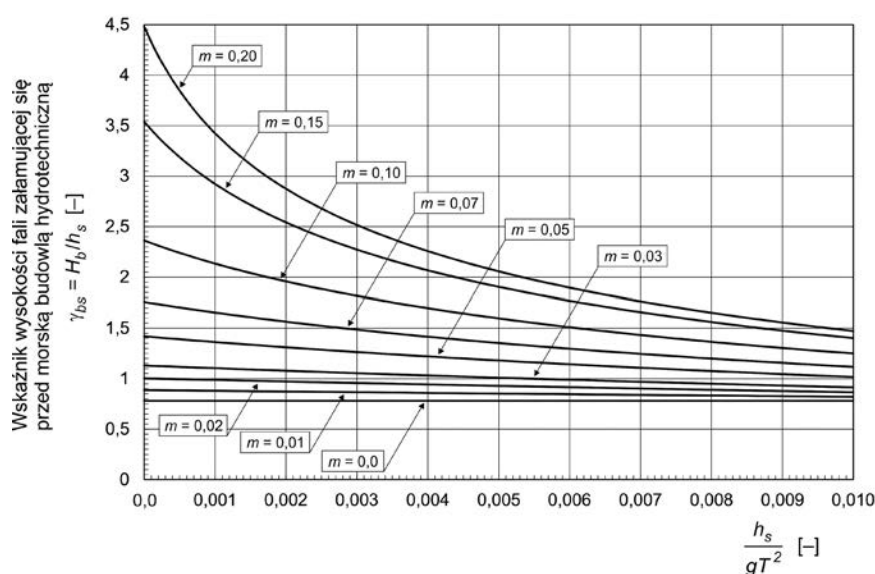
Parametr bezwymiarowy  $H_b / (gT^2)$  można przekształcić do postaci

$$\frac{H_b}{gT^2} = \frac{H_b}{gT^2} \frac{h_s}{h_s} = \frac{h_s}{gT^2} \frac{H_b}{h_s} \quad (29)$$

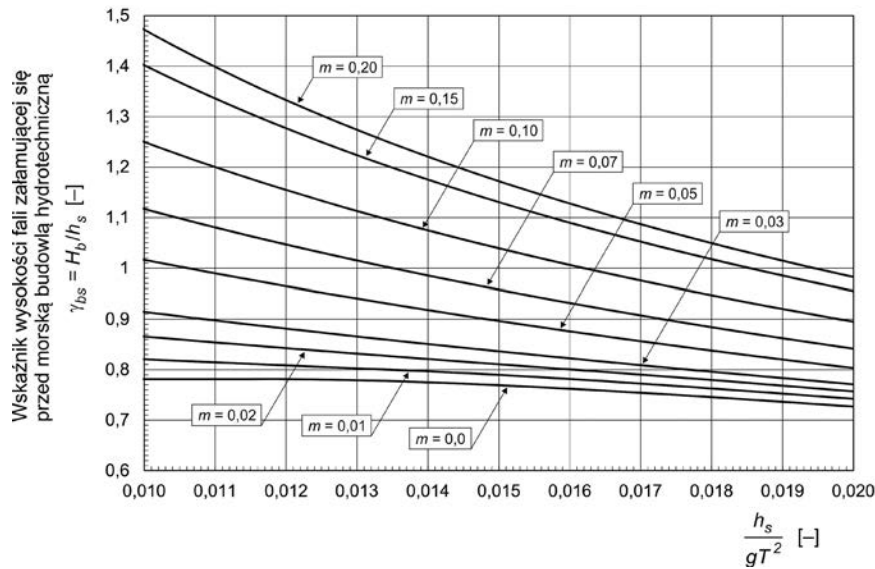
Zatem, nową wartość odciętej dla nomogramu przedstawiającego zmienność wskaźnika wysokości fali załamującej się przed budowlą  $\gamma_{bs}$  należy obliczać zgodnie z wzorem

$$\frac{h_s}{gT^2} = \frac{H_b}{gT^2} \frac{h_s}{H_b} \quad (30)$$

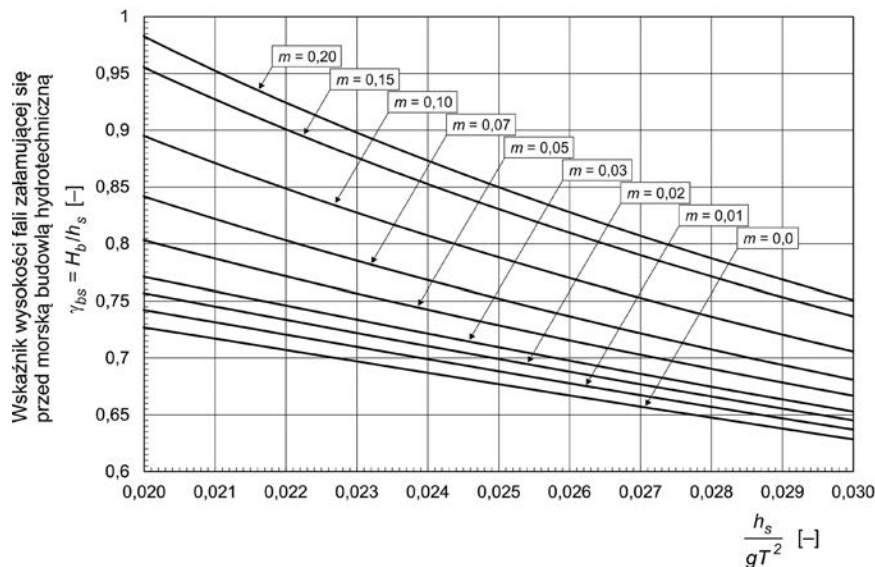
Na podstawie przedstawionego algorytmu wykonano odpowiednie obliczenia, a ich wynik – w celu dokładniejszego zobrazowania przebiegu krzywych zależności  $\gamma_{bs} = f[h_s / (gT^2)]$  – zaprezentowano dla trzech stycznych z sobą zakresów wartości parametru bezwymiarowego:  $0 \leq h_s / (gT^2) \leq 0,01$  (rys. 12),  $0,01 \leq h_s / (gT^2) \leq 0,02$  (rys. 13) oraz  $0,02 \leq h_s / (gT^2) \leq 0,03$  (rys. 14). Tym samym odczyt wartości wskaźnika wysokości fali załamującej się przed budowlą  $\gamma_{bs}$  może być znacznie bardziej dokładny. Wpływ ograniczenia rozwiązaniem warunkiem stro-



Rys. 12. Wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną  $\gamma_{bs} = H_b / h_s$  w zależności od nachylenia dna morskiego oraz dla  $0 \leq h_s / (gT^2) \leq 0,01$  (z uwzględnieniem warunku Miche'a granicznej stromości fali przy ograniczonej głębokości wody (7))



Rys. 13. Wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną  $\gamma_{bs} = H_b/h_s$  w zależności od nachylenia dna morskiego oraz dla  $0,01 \leq h_s/(gT^2) \leq 0,02$  (z uwzględnieniem warunku Miche'a granicznej stromości fali przy ograniczonej głębokości wody (7))



Rys. 14. Wskaźnik wysokości fali załamującej się przed morską budowlą hydrotechniczną  $\gamma_{bs} = H_b/h_s$  w zależności od nachylenia dna morskiego oraz dla  $0,02 \leq h_s/(gT^2) \leq 0,03$  (z uwzględnieniem warunku Miche'a granicznej stromości fali przy ograniczonej głębokości wody (7))

mości granicznej fali przy ograniczonej głębokości wody (patrz wzór (7)) jest na rys. 13 i 14 wyraźnie widoczny.

W pracy [27] podano, że dla  $h_s/(gT^2) > 0,02$  należy przyjmować  $\gamma_{bs} = H_b/h_s = 0,775$  niezależnie od nachylenia dna  $m$ . Zalecenie to wynikało prawdopodobnie z faktu, że nomogram przedstawiony w pracy [27] (patrz rys. 10), będący kopią nomogramu podanego w pracy [29] (patrz rys. 11), nie daje możliwości odczytania wartości wskaźnika wysokości fali załamującej się przed budowlą  $\gamma_{bs}$  dla parametru  $h_s/(gT^2) > 0,02$ . Zbieżność krzywych dla większych wartości parametru  $h_s/(gT^2)$  oraz brak uwzględnienia warunku stromości granicznej w rozwiązaniu Weggela i na nomogramie przedstawionym dodatkowo w niewystarczającej skali, było pewnego rodzaju usprawiedliwieniem przyjęcia stałości wskaźnika wysokości fali załamującej się przed budowlą  $\gamma_{bs} = H_b/h_s = 0,775$  dla  $h_s/(gT^2) > 0,02$ . Rozwią-

zanie przedstawione w niniejszym artykule, a w szczególności na nomogramie pokazanym na rys. 14, wyraźnie wskazuje, że założenie stałości parametru  $\gamma_{bs} = H_b/h_s$  jest zbyt dużym uproszczeniem nawet w praktyce inżynierskiej. Nomogram przedstawiony na rys. 14 umożliwia bezproblemowe odczytywanie poprawnych wartości wskaźnika wysokości fali załamującej się przed budowlą  $\gamma_{bs} = H_b/h_s$  dla parametru  $h_s/(gT^2)$  w zakresie nawet do 0,03 i dla nachylenia dna morskiego w zakresie od  $m = 0$  (poziome dno morskie) do  $m = 0,2$ .

## PODSUMOWANIE

W artykule omówiono wpływ transformacji fali w strefie brzegowej na podstawowy parametr fali, jakim jest jej wyso-



kość. Dokonano przeglądu literatury ze względu na wzory opisujące warunki załamania fali. Dokładnej analizie poddano opublikowane w literaturze fachowej nomogramy służące określeniu wartości:

- wskaźnika głębokości wody w miejscu załamania fali nad pochyłym dnem morskim  $\gamma_b$ ,
- wskaźnika wysokości fali załamującej się nad pochyłym dnem morskim tuż przed morską konstrukcją hydrotechniczną  $\gamma_{bs}$ .

Dokonano korekty wzoru na  $\gamma_{bs}$  zaproponowanego w pracy [22], przedstawiając jego poprawną postać i zapisując go w układzie metrycznym SI. Zaprezentowano krok po kroku algorytm pozwalający na konstrukcję nomogramu opisującego zmienność parametru  $\gamma_{bs}$  z jednoczesnym uwzględnieniem warunku Miche'a [13] stromości granicznej fali przy ograniczonej głębokości wody. Zastosowanie algorytmu pozwoliło na pokazanie dokładniejszej postaci nomogramu opisującego zmienność wskaźnika wysokości fali załamującej się nad pochyłym dnem morskim tuż przed morską konstrukcją hydrotechniczną  $\gamma_{bs}$  w porównaniu z nomogramami prezentowanymi w literaturze fachowej (np. [27, 29]), często wykorzystywanej w praktyce projektowej związanej z inżynierią brzegową.

## LITERATURA

1. Andersen T. L., Frigaard P.: Lecture Notes for the Course in Water Wave Mechanics, Department of Civil Engineering, Aalborg University, DCE Lecture notes, No. 24, 2011.
2. Camenen B., Larson M.: Predictive formulas for breaker depth index and breaker type. *Journal of Coastal Research*, Vol. 23, No. 4, July 2007, West Palm Beach, Florida, 1028-1041.
3. Galvin Jr. C. J.: Breaker type classification on three laboratory beaches. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 73, No. 12, 1968, 3651-3659.
4. Goda Y.: A synthesis of breaker indices. *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol. 2, Part 2, 1970.
5. Goda Y.: New wave pressure formulae for composite breakwaters. *Proc. of the 14th International Conference on Coastal Engineering*, Copenhagen, Denmark, June 24–28, 1974, ASCE, 1702-1720.
6. Goda Y.: *Random Seas and Design of Maritime Structures*, Advanced Series on Ocean Engineering – Vol. 33, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
7. Holmes P.: *Coastal Processes: Waves*, Chapter 5 in a Course in Coastal Defense Systems I, Professional Development Programme: Coastal Infrastructure Design, Construction and Maintenance, The University of the West Indies, St. Lucia, West Indies, July 18–21, 2001.
8. Hudspeth R. T.: *Waves and Wave Forces on Coastal Ocean Structures*, Advanced Series on Ocean Engineering – Vol. 21, World Scientific, 2006.
9. Komar P. D., Gaughan M. K.: Airy wave theory and breaker height prediction. *Proc. of the 13th International Conference on Coastal Engineering*, Vancouver, British Columbia, Canada, 10–14 July 1972, ASCE, 405-418.
10. McCormick M. E.: *Ocean Engineering Mechanics: With Applications*, Cambridge University Press, 2010.
11. McCormick M. E., Cerquetti J.: Empirical formula for the breaking wave index. *Ocean Engineering International*, Engineering Committee on Oceanic Resources (ECOR), Vol. 7, No. 2., 2002.
12. McCowan J.: On the highest wave of permanent type. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 5, Vol. 38, 1894, 351-358.
13. Miche M.: Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante (ang. Undulatory Movements of the Sea in Constant or Decreasing Depth). *Annales de Ponts et Chaussées, École nationale des ponts et chaussées*, Vol. 19, 1944, 25-78 (cz. 1), 270-292 (cz. 2); 369-406 (Part 3).
14. Miche M.: Le pouvoir réfléchissant des ouvrages maritimes exposés à l'action de la houle. *Annales de Ponts et Chaussées, École nationale des ponts et chaussées*, Vol. 121, May–June 1951, 285-319.
15. Michell J. H.: The highest waves in water. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 5, Vol. 36, July–December 1893, 430-437.
16. Munk W. H.: The Solitary Wave Theory and Its Application to Surf Problems. *Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. 51, Art. 3, 1944, 343-572.
17. Rattanapitikon W., Shibayama T.: Verification and modification of breaker height formulas. *Coastal Engineering Journal*, Vol. 42, No. 4, 2000, 389-406.
18. Robertson B., Hall K., Zytner R.: Breaking waves: Review of characteristic relationships. *Coastal Engineering Journal*, Vol. 55, No. 1, 2013.
19. Sorensen R. M.: *Basic Wave Mechanics: For Coastal and Ocean Engineers*, John Wiley & Sons, 1993.
20. Stokes G. G.: On the theory of oscillatory waves. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, Part 4, 1847, 441-455.
21. Stokes G. G.: On the theory of oscillatory waves (Appendix and Supplement). *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 1, 1880, Appendix, 219-229; Supplement, 314-326.
22. Weggel J. R.: Maximum breaker height for design. *Proc. of the 13th Conference on Coastal Engineering*, July 10–14, 1972, Vancouver, Canada, Vol. I, 419-432.
23. Wilton J.: On the highest waves in deep water. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 6, Vol. 26, July–December 1913, 1053-1058.
24. Yamada O., Kimura G., Okabe J.: Precise determination of the solitary waves of extreme height on water of uniform depth. *Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University*, Vol. XVI, No. 52, 1968, 15-32.
25. *Coastal Engineering Manual*, EM 1110-2-1100 (Part II), Chapter 4: Surf Zone Hydrodynamics, 31 July 2003 (Change 1), Department of the Army, U.S. Army Corps of Engineers, Washington, DC.
26. *Morskie budowle hydrotechniczne. Zalecenia do projektowania i wykonywania Z 1 – Z 45*, Zespół Roboczy Zasad Projektowania Budowli Morskich, wydanie V, Fundacja Promocji Przemysłu Okrętowego i Gospodarki Morskiej, Gdańsk 2008.
27. *Poradnik hydrotechnika. Obciążenia budowli hydrotechnicznych wywołane przez środowisko morskie*, pod redakcją S. Massela, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk, 1992.
28. *Recommendations of the Committee for Waterfront Structures, Harbours and Waterways (EAU 1996)*, 7<sup>th</sup> English Edition, English Translation of the 9<sup>th</sup> German Edition, Issued by the Committee for Waterfront Structures of the Society for Harbour Engineering and the German Society for Soil Mechanics and Foundation Engineering, Ernst & Sohn, Berlin 2000.
29. *Shore Protection Manual, Part II, Chapter 7: Structural design – physical factors*, Department of the Army, Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, Mississippi, 1984.
30. <http://users.bestweb.net/~quenell/pubpdf/envelope.pdf>