

## METODY STROJENIA REGULATORÓW TYPU PID Z WYKORZYSTANIEM TECHNOLOGII SYNTEZY REGULATORÓW OD STANU

Mateusz CZYŻNIEWSKI, Rafał ŁANGOWSKI, Tomasz ZUBOWICZ

Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki,  
tel.: 58 348 6329

e-mail: mateusz.czyzniewski@pg.edu.pl, rafal.langowski@pg.edu.pl, tomasz.zubowicz@pg.edu.pl

**Streszczenie:** Układy sterujące typu PID są jednymi z najbardziej popularnych regulatorów wykorzystywanych w układach regulacji. W związku z tym znanych jest szereg metod doboru wartości ich parametrów (nastaw). Obok różnych metod inżynierskich czy analitycznych strojenia tego typu regulatorów, dostępne są również podejścia bazujące na optymalizacji. Wskaźnikiem jakości znajdującym w nich zastosowanie jest np. całka z kwadratu uchybu. W artykule przedstawiono alternatywny sposób wyznaczania nastaw regulatora z rodziny PID bazujący na rozwiązaniu liniowo-kwadratowego zadania optymalizacji wykorzystującego kryterium energetyczne. Uszczegóławiając, pokazano możliwość transformacji optymalnych nastaw regulatora bazującego na sprzężeniu zwrotnym od stanu obiektu w nastawy regulatora w klasycznym układzie regulacji. Jako aplikację wykorzystano nieliniowy matematyczny model dynamiki podwójnego odwróconego wahadła.

**Słowa kluczowe:** LQR, PID, strojenie regulatora.

### 1. WSTĘP

Rozwój teorii sterowania spowodował wypracowanie szeregu metod doboru wartości parametrów (nastaw) regulatorów z rodziny PID [1,2]. Począwszy od rozwiązań eksperymentalnych, poprzez analityczne oraz inżynierskie (oparte o koncepcje np. Zieglera-Nicholsa) wyznaczanie wartości parametrów regulatora, po metody bazujące na rozwiązywaniu zadań optymalizacji. Optymalne wyznaczanie nastaw może odbywać się przy pomocy różnych metod. Przykładowo, dla pewnych przypadków transmitancyjnych modeli obiektów znane są ogólne wzory wyznaczone na podstawie tożsamości Parsewala. Znany wskaźnik jakości tego typu jest całka z kwadratu uchybu regulacji [3]. Alternatywą może być metoda wykorzystująca optymalne wartości nastaw (wzmocnień) regulatora bazującego na informacyjnym sprzężeniu zwrotnym od stanu obiektu. Uszczegóławiając, strojenie regulatora typu PID opiera się o rozwiązanie liniowo-kwadratowego zadania optymalizacji. Wówczas, na bazie odpowiednich przekształceń otrzymuje się równanie macierzowe Riccatiego, którego rozwiązanie pozwala na wyznaczenie wzmocnień optymalnego regulatora liniowo-kwadratowego (ang. *linear quadratic regulator* - LQR) bazującego na sprzężeniu zwrotnym od stanu [4]. Następnie tak wyznaczone optymalne wartości wzmocnień transformowane są w nastawy regulatora w klasycznym układzie regulacji. Tego typu podejście znaleźć można w szeregu pozycji literaturowych, przede wszystkim w odniesieniu do danych aplikacji obiektów typu SISO (ang.

*single input single output*). Przykładowo, w [5] podejście to zastosowano dla uproszczonych modeli transmitancyjnych w postaci inercji z opóźnieniem transportowym, a w [6] dla potrzeb sterowania silnikiem prądu stałego opisanego modelem liniowym. Metodologia ta znalazła również zastosowanie w niniejszej pracy. Przy czym, w artykule przedstawiono ogólne rozważania poparte dowodem, umożliwiające użycie tej techniki dla pewnej klasy obiektów typu SIMO (ang. *single input multiple output*). Natomiast weryfikację przeprowadzono z użyciem dynamicznego, nieliniowego, matematycznego modelu podwójnego odwróconego wahadła. Model ten oraz część zaprezentowanych rozważań można znaleźć w [7].

### 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W ogólności, ze względu na możliwość pracy liniowego algorytmu sterowania w punkcie pracy procesu cechującego się nieliniowościami, koniecznym jest doprowadzenie nieliniowego modelu systemu do postaci afinicznej. Postać ta jest aproksymacją pola wektorowego w pewnym otoczeniu punktu  $P \triangleq P(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ , wzdłuż którego układają się krzywe całkowite rozpoczynające się w przyjętym punkcie początkowym. Można wskazać co najmniej dwa podejścia do budowy modelu afinicznego [8,9]. Pierwsze oparte o zmienne przyrostowe, polega na opracowaniu modelu liniowego, wokół punktu  $P$  wyrażonego poprzez macierze: stanu  $\mathbf{A}$  oraz wejść sterujących  $\mathbf{B}$ , a następnie przesunięciu wektorów zmiennych: stanu  $\mathbf{x}(t)$  i sterujących  $\mathbf{u}(t)$  o wektory  $\mathbf{x}_e$  oraz  $\mathbf{u}_e$ , co pozwala na „sztuczne” przesunięcie przestrzeni stycznej z początku układu współrzędnych do punktu pracy. Drugie podejście bazuje na rozwiązaniu zadania optymalizacji kwadratowej. Jeżeli  $P$  jest punktem zerowym, to oba ww. podejścia są równoważne. W dalszej części publikacji rozpatrywane jest podejście oparte o zmienne przyrostowe. Dodatkowo z uwagi na fakt, iż w kontekście stabilizacji obiektu w danym punkcie, którego wartość ze względu na przyjęcie postaci układu współrzędnych jest równa zero, do syntezy systemu sterowania rozpatruje się model liniowego, stacjonarnego, deterministycznego systemu dynamicznego typu SIMO, dalej oznaczanego przez  $\Sigma$ .

Ogólny model dynamiki, opisujący mechaniczną naturę obiektu, może zostać przedstawiony jako nieliniowe pole wektorowe, w postaci odwzorowania wyrażającego równania różniczkowe drugiego rzędu [8]:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) = -\mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\theta}}(t), \boldsymbol{\theta}(t)) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(t)) + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (1)$$

gdzie:  $(\dot{\cdot}), (\ddot{\cdot})$  – odpowiednio pierwsza i druga pochodna względem czasu zmiennej  $(\cdot)$ ,  $\boldsymbol{\theta}(t)$  – wektor przemieszczeń kątowych,  $\mathbf{C}(\cdot), \mathbf{g}(\cdot), \mathbf{Q}(\cdot)$  – w ogólności, nieliniowe funkcje zależne odpowiednio od stanu oraz od stanu i wejść.

Ich linearyzacja wokół punktu pracy (równowagi)  $P_{\theta} \triangleq P_{\theta}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_e, \mathbf{u}_e)$ , gdzie  $\boldsymbol{\theta}_e$  jest wartością przemieszczeń kątowych w punkcie pracy, a  $\boldsymbol{\theta}_e$  domyślną zerową wartością prędkości w punkcie pracy, pozwala na wyznaczenie liniowego modelu  $\Sigma$  aproksymującego dynamikę obiektu w tym punkcie. Wówczas, dla rozważanego systemu, w każdej chwili, dane są następujące sygnały:  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c}(t), \mathbf{c}_{ref}(t) \in \mathbb{R}^q$ , które oznaczają odpowiednio wektory: stanu, wejść sterujących oraz wyjść sterowanych i ich wartości zadanych. Ponadto należy zauważyć, iż wymiar przestrzeni stanu systemu  $n$  jest równy dwukrotności wymiaru wyjść sterowanych  $q$ . Wiedząc, że dla rozważanej klasy obiektów wektor stanu  $\mathbf{x}(t)$  jest zdefiniowany jako:

$$\mathbf{x}(t) \triangleq [\boldsymbol{\theta}(t) \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)]^T, \quad (2)$$

oraz przyjmując warunek początkowy  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , system  $\Sigma$  można opisać jako:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{q \times 1} \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{c}(t) &= \mathbf{E} \mathbf{x}(t) \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie:  $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{q \times 1}$  – odpowiednio, składowe macierzy stanu  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i wejść sterujących  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{0}^{q \times 1}$  – macierz o zerowych elementach,  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  – macierz wyjść sterowanych, postaci:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}^{q \times q}]^T, \quad (4)$$

gdzie:  $\mathbf{I}$  – macierz jednostkowa odpowiedniego wymiaru.

### 3. SYNTEZA REGULATORA

Zakładając sterowalność  $\Sigma$  możliwa jest synteza algorytmu sterowania opartego o sprzężenie zwrotne od stanu. Do realizacji tego celu definiuje się prawo sterowania:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{ref}(t) + \mathbf{u}_x(t), \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{u}_{ref}(t) = \mathbf{K}_{ref} \mathbf{c}_{ref}(t)$ ,  $\mathbf{u}_x(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$ .

Sygnał  $\mathbf{u}_x(t)$  ( $\forall t: \mathbf{u}_x(t) \in \mathbf{X}_{u_x} \subset \mathbb{R}$ ) zapewnia stabilność dynamiki wewnętrznej systemu. Dobierając wartości macierzy  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  dokonuje się alokacji biegunów systemu zamkniętego sprzężeniem od stanu [8]. Wówczas, dynamika wewnętrzna systemu cechuje się asymptotyczną stabilnością, której wynikiem jest to, że warunki początkowe zostają rozładowane do zera w czasie  $t \rightarrow \infty$ , co można zapisać jako:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_2 = 0, \quad (6)$$

gdzie:  $\|\cdot\|_2$  – oznacza normę euklidesową.

Macierz  $\mathbf{K}$  może zostać dobrana poprzez arbitralne założenie biegunów lub poprzez rozwiązanie odpowiedniego zadania optymalizacji. Jak już wspomniano zadanie takie może mieć postać liniowo-kwadratową. Wówczas, minimalizowana funkcja celu  $J(\cdot)$  jest skalarnym funkcjonałem kwadratowym, zawierającym w sobie  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{u}_x(t)$  oraz diagonalne macierze wag  $\mathbf{Q}_w \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i  $\mathbf{R}_w \in \mathbb{R}$  postaci [4]:

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_x(t)) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_w \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_x(t) \mathbf{R}_w \mathbf{u}_x(t)) dt \quad (7)$$

W tym przypadku wartości  $\mathbf{K}$  można wyznaczyć z (8) [4]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_w, \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{P}_w$  jest rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego:  $\mathbf{A}^T \mathbf{P}_w + \mathbf{P}_w \mathbf{A} - \mathbf{P}_w \mathbf{B} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_w + \mathbf{Q}_w = \mathbf{0}$ .

Natomiast sygnał  $\mathbf{u}_{ref}(t)$  ( $\forall t: \mathbf{u}_{ref}(t) \in \mathbf{X}_{u_{ref}} \subset \mathbb{R}$ ) umożliwia nadążanie za stałowartościową trajektorią referencyjną [2]. Jego realizacja wymaga dobrania macierzy wzmacnień  $\mathbf{K}_{ref} \in \mathbb{R}^{1 \times q}$  pozwalającej na:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_{ref}. \quad (9)$$

Macierz  $\mathbf{K}_{ref}$  można wyznaczyć z zależności (10) [2]:

$$\mathbf{K}_{ref} = -(\mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B})^{-1}. \quad (10)$$

Można zauważyć, iż działanie regulatora realizującego (5), a w szczególności liniowo-kwadratowego, da się porównać z działaniem szeregu regulatorów typu PD, które opisuje następujące prawo sterowania [1]:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}_p \mathbf{e}(t) + \mathbf{k}_d \dot{\mathbf{e}}(t), \quad (11)$$

gdzie:  $\mathbf{k}_p \in \mathbb{R}^{1 \times q}$ ,  $\mathbf{k}_d \in \mathbb{R}^{1 \times q}$  – odpowiednio, wektory wzmacnień członu proporcjonalnego i różniczkującego regulatora PD.

Natomiast  $\forall t: \mathbf{e}(t) \in \mathbf{X}_e \subset \mathbb{R}^q$  jest wektorem uchybu regulacji danym jako:

$$\mathbf{e}(t) = -\mathbf{c}(t) + \mathbf{c}_{ref}(t). \quad (12)$$

Podstawiając drugie równanie z (3) do (12), a następnie obustronnie różniczkując otrzymuje się:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = -\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{c}}_{ref}(t). \quad (13)$$

Jeżeli  $\mathbf{c}_{ref}(t)$  jest stałowartościowa, to uwzględniając powyższe, (11) można zapisać jako:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}_p \mathbf{c}_{ref}(t) - \mathbf{k}_p \mathbf{E} \mathbf{x}(t) - \mathbf{k}_d \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (14)$$

Następnie, uwzględniając (2) i (4), (14) przyjmuje postać:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}_p \mathbf{c}_{ref}(t) - [\mathbf{k}_p \quad \mathbf{k}_d] \mathbf{x}(t). \quad (15)$$

Porównując stronami (14) z (5) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ref} &= \mathbf{k}_p, \\ \mathbf{K} &= [\mathbf{k}_p \quad \mathbf{k}_d]. \end{aligned} \quad (16)$$

Powyższe rozważania dowodzą, iż możliwy jest dobór parametrów regulatora typu PD w oparciu o technologię syntezy regulatorów od stanu. Innymi słowy, w przypadku, gdy znana jest macierz  $\mathbf{K}$ , wartości jej elementów przenoszą się w nastawy regulatorów PD. Ponadto warto zauważyć, że jeżeli regulator bazujący na sprzężeniu od stanu będzie optymalny np. LQR, to równoważny mu regulator PD, również będzie posiadał tę cechę. Należy dodać, iż zgodnie z (16) zachodzi również transformacja odwrotna tzn. znając nastawy regulatora PD, można je bezpośrednio przenieść na regulator operujący na zmiennych stanu.

#### 4. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA

Matematyczny model dynamiki podwójnego odwróconego wahadła, w postaci (1), w przestrzeni stanu został szczegółowo wyprowadzony w [7]. Należy w tym miejscu dodać, iż praca ta jest publicznie dostępna w Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej pod adresem: <http://pbc.gda.pl/dlibra/docmetadata?id=77969>. Następnie model ten został przekształcony do postaci (3) umożliwiającej syntezę systemu sterowania. Opracowane zostały dwa algorytmy sterowania bazujące odpowiednio na: sprzężeniu zwrotnym od stanu (generacja sygnału sterującego zgodnie z (5)) oraz sprzężeniach zwrotnych od wyjść sterowanych (generacja sygnału sterującego zgodnie z (11)). Ponadto, w celu umożliwienia implementacji opracowanych rozwiązań na platformie sprzętowej, co zostało zrealizowane w [7], koniecznym była dyskretyzacja praw sterowania [10]. Z uwagi na fakt, iż (5) zawiera jedynie człony proporcjonalne, jego dyskretna postać jest następująca:

$$u(k) = \mathbf{K}_{ref} \mathbf{c}_{ref}(k) - \mathbf{K} \mathbf{x}(k), \quad (17)$$

gdzie:  $k$  – dyskretna chwila.

Natomiast implementacja rzeczywistego regulatora typu PD wymaga wprowadzenia pewnych modyfikacji w stosunku do jego modelu idealnego (11). Ze względu na występowanie szumów w torze pomiarowym zmiennej sterowanej, konieczne jest zastosowanie filtra dolnoprzepustowego, który ogranicza wysokie częstotliwości zawarte w sygnale, negatywnie wpływające na zachowanie się członu różniczkującego. Do sterowania wybrano klasyczny, rzeczywisty regulator PD, w strukturze równoległej.

W dziedzinie zespolonej  $s$ , jego równanie opisujące zależność między sygnałem sterującym  $u(s)$  a uchybem  $e(s)$  jest postaci [2]:

$$u(s) = k_p e(s) + \frac{k_d s}{T_b s + 1} e(s), \quad (18)$$

gdzie:  $T_b$  – stała czasowa inercji rzeczywistego członu różniczkującego.

Wartość  $T_b$  musi zostać dobrana tak, aby skutecznie filtrować wysokie częstotliwości sygnału uchybu oraz aby przesunięcie fazowe powstałe wskutek „dołożenia” inercji nie było znaczące [2]. Dla tak opisanego, danego regulatora PD, stosując transformatę Tustina postaci [2]:

$$s = \frac{2z-1}{T_s z+1}, \quad (19)$$

gdzie:  $T_s$  – okres próbkowania,

dokonano transformacji przestrzeni  $s \rightarrow z$ . Następnie podstawiając (19) do (18) i przyjmując oznaczenia:  $\alpha_1 \triangleq 2k_d$ ,  $\alpha_2 \triangleq 2T_b + T_s$  oraz  $\alpha_3 \triangleq T_s - 2T_b$  uzyskano dyskretny model wejście-wyjście postaci:

$$u(z)(\alpha_2 z + \alpha_3) = e(z) \left( (\alpha_1 + k_p \alpha_2) z + k_p \alpha_3 - \alpha_1 \right). \quad (20)$$

Stosując odwrotną transformatę  $Z$  na równaniu (20) otrzymuje się równanie różnicowe:

$$\alpha_2 u(k+1) + \alpha_3 u(k) = (\alpha_1 + k_p \alpha_2) e(k+1) + (k_p \alpha_3 - \alpha_1) e(k), \quad (21)$$

które po uporządkowaniu i przesunięciu próbek stanowi dyskretną postać (11) dla pojedynczego regulatora PD:

$$u(k) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 k_p) e(k) + (\alpha_3 k_p - 2k_d) e(k-1) - \alpha_3 u(k-1)}{\alpha_2}. \quad (22)$$

Wykorzystując przedstawioną w sekcji 3 metodologię, dla sprzętowej implementacji dyskretnych praw sterowania, dobrane zostały następujące wartości parametrów regulatorów umożliwiających stabilizację podwójnego odwróconego wahadła w górnym położeniu równowagi. Wzmocnienia regulatora bazującego na sprzężeniu od stanu wyznaczono jako:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10,00 & -246,21 & 301,11 & \dots \\ 11,35 & 0,17 & 25,82, \end{bmatrix} \quad (23)$$

co po transformacji w nastawy poszczególnych regulatorów PD dało następujące ich wartości:

$$\begin{aligned} PD_1: & \quad k_{p1} = 10,00, & \quad k_{d1} = 11,35, \\ PD_2: & \quad k_{p2} = -246,21, & \quad k_{d2} = 0,17, \\ PD_3: & \quad k_{p3} = 301,11, & \quad k_{d3} = 25,82. \end{aligned} \quad (24)$$

Konieczność doboru nastaw trzech regulatorów PD wynika z faktu, iż stabilizacji podlegają trzy wielkości sterowane (położenia elementów składowych podwójnego odwróconego wahadła), szczegóły można znaleźć w [7].

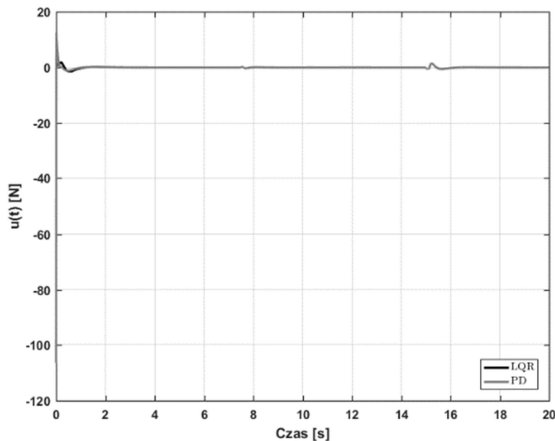
Wybrane wyniki symulacyjne zaprezentowano na rysunkach 1 i 2. Zostały one uzyskane przy arbitralnym przyjęciu warunków początkowych, w otoczeniu punktu pracy (górnego położenia równowagi), w postaci:

$$\mathbf{x}_0 = [0,1 \quad 0,1 \quad 0,08 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (25)$$

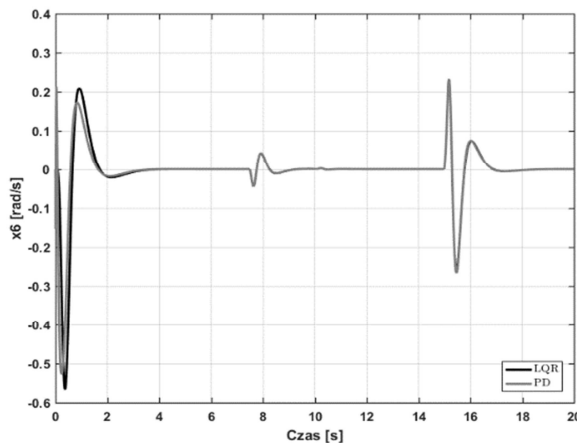
Warto dodać, iż zaprezentowane badania symulacyjne objęły również sytuację, w której uwzględniono wpływ zakłóceń zewnętrznych, co miało na celu pokazanie skuteczności działania obu dobranych struktur systemów sterowania.

Analizując trajektorie zmiennej stanu  $x_6(t)$  (rysunek 2) reprezentującej prędkość kątową drugiego ramienia wahadła można zauważyć, że różnice między działaniem obu systemów sterowania mają miejsce jedynie w początkowej fazie pracy systemu. W dalszych chwilach sygnały te niemalże się pokrywają, co wskazuje na praktycznie tożsame działania obu struktur. Potwierdza to porównanie przebiegów sygnału sterującego widoczne na rysunku 1. Różnica widoczna jest jedynie w początkowej fazie trajektorii, gdzie następuje gwałtowna zmiana wartości sygnału sterującego generowanego przez strukturę z regulatorami PD. Spowodowane jest to istotą działania

numerycznego mechanizmu różniczkowania, polegającego na przesuwaniu próbek sygnałów z chwil poprzednich. Podobnie jak w przypadku przebiegów zmiennej stanu  $x_6(t)$ , po około 2 sekundach, sygnały sterujące zaczynają się pokrywać.



Rys. 1. Przebiegi sygnału sterującego



Rys. 2. Przebiegi prędkości kątowej drugiego ramienia wahadła

Należy dodać, iż zaprezentowane przebiegi dla systemu sterowania bazującego na sprzężeniu od stanu uzyskano dla arbitralnego doboru macierzy  $Q_w$  i  $R_w$ , kierując się specyfiką rozpatrywanego systemu. Uszczegóławiając zaobserwowano, iż dla rozważanego obiektu szczególne znaczenie mają zmienne stanu reprezentujące przemieszczenie liniowe wózka oraz przemieszczenia kątowe ramion wahadła. Przyjęte postępowanie wynikało z faktu, iż zagadnienie to wykracza poza tematykę niniejszego artykułu i samo w sobie stanowi ciekawe wyzwanie na gruncie teorii sterowania.

## 5. WNIOSKI KOŃCOWE

W niniejszym artykule przedstawiono możliwość transformacji optymalnych nastaw regulatora bazującego na informacyjnym sprzężeniu zwrotnym od stanu w nastawy regulatora w klasycznym układzie regulacji, dla pewnej klasy obiektów SIMO. Tożsamość obu struktur została wykazana na etapie projektowym dla systemów ciągłych. Natomiast opracowane, dla potrzeb implementacji dyskretne algorytmy nie zachowują w pełni tej cechy. Widoczne jest to w numerycznej weryfikacji zastosowanej metodologii, gdzie zauważalny jest początkowy brak nagłej zmiany wartości sygnału sterującego, w strukturze opartej o sprzężenie od stanu, w stosunku do struktury z regulatorami PD. Przy czym zachowana zostaje zbieżność sygnałów generowanych w systemie zamkniętym do tych predykowanych przez systemy ciągłe.

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. Åström K. J., Hägglund T.: PID Controllers: Theory, design, and tuning, 2<sup>nd</sup> edition, International Society of Automation, US 1995.
2. Rosołowski E.: Podstawy regulacji automatycznej, [www.rose.pwr.wroc.pl](http://www.rose.pwr.wroc.pl), Wrocław 2016.
3. Kealy T., O'Dwyer A.: Analytical ISE calculation and optimum control system design, Proceedings of the Irish Signals and Systems Conference, University of Limerick, July 2003, pp. 418-423.
4. Åström K. J., Murray R. M.: Feedback systems: An introduction for scientists and engineers, Princeton University Press, US 2008.
5. He J-B., Wang Q-G., Lee T-H.: PI/PID controller tuning via LQR approach, Chemical Engineering Science, vol. 55, 2000, pp. 2429-2439.
6. Yu G-R., Hwang R-C.: Optimal PID speed control of brushless DC motors using LQR approach, Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, The Hague, Netherlands, October 2004, pp. 473-478.
7. Andrzejewski K., Czyżniewski M., Zielonka M.: Budowa stanowiska z podwójnym, odwróconym wahadłem wraz z synteza sterowania, Praca inżynierska, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2017, <http://pbc.gda.pl/dlibra/docmetadata?id=77969>.
8. Slotine J-J. E., Li. W.: Applied nonlinear control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, US 1991.
9. Bronsztejn I. N., Siemiendajew K. A.: Matematyka poradnik encyklopedyczny, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
10. Tatjewski P.: Advanced control of industrial processes: Structures and algorithms, Springer-Verlag, London 2007.

## PID-TYPE REGULATORS TUNING BY USING STATE-FEEDBACK CONTROL DESIGN

The PID-type regulators are one of the most commonly used in control systems. Therefore, there are many different methods of selecting values of their parameters. Apart from various engineering or analytical methods of tuning such controllers, there are also approaches based on optimisation. In the latter case, a typical performance index is integral square error (ISE). In this paper, an alternative method of PID parameters tuning has been presented. This approach is based on a solution of the linear-square optimisation task with energy-based performance index. In the result, a state-feedback controller is obtained. Subsequently, the state-feedback gains are translated into PID regulator parameters. The proposed approach has been illustrated using a non-linear mathematical model of a double inverted pendulum.

**Keywords:** control system, controller tuning, LQR, PID.