POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Imię i nazwisko autora rozprawy: Karol Wroński
Dyscyplina naukowa: matematyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Istnienie i regularność heteroklinicznych rozwiązań równania Allena-Cahna z anizotropowym operatorem eliptycznym.

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Existence and regularity of heteroclinic solutions of the Allen-Cahn type problem with an anisotropic elliptic operator.

Promotor *podpis*	Drugi promotor
prof. dr hab. Marek Izydorek	
Promotor pomocniczy *podpis*	Kopromotor
dr inż. Jakub Maksymiuk	

Gdańsk, 17.09.2019

Spis treści

Wstęp

Celem niniejszej rozprawy jest udowodnienie dwóch twierdzeń dotyczących równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego. Pierwsze mówi o regularności słabych rozwiązań pewnej klasy równań eliptycznych z operatorem anizotropowym. Drugie mówi o istnieniu heteroklinicznych rozwiązań problemu typu Allena-Cahna z takim operatorem.

Eliptyczne równanie typu Allena-Cahna najczęściej jest zapisywane w postaci

$$-\Delta u(x) + F_u(x, u(x)) = 0,$$

przy dość różnorodnych dziedzinach i warunkach brzegowych. Charakterystyczną cechą rozróżniającą równanie Allena-Cahna od innych równań eliptycznych jest funkcja $F(x, \cdot)$, o której zakłada się, że ma co najmniej dwa miejsca zerowe będące minimami. Typowym przykładem takiej funkcji jest $F(u) = u^2(u-1)^2$. Równanie ma swoje źródło w artykule Allena i Cahna [4], którzy badali własności stopów metali. Równanie tego typu znalazło także swoje zastosowanie do opisu wielu innych procesów fizycznych jak na przykład badanie przejść fazowych [31], przetwarzanie obrazów [7], czy rozwój nowotworów [25]. Równanie Allena-Cahna jest szczególnym przypadkiem modelu reakcji-dyfuzji i odpowiada mu funkcjonał energii

$$\int \frac{1}{2}|u(x)|^2 + F(x, u(x))dx$$

Zagadnienie reakcji-dyfuzji jest szerzej opisane w [9, 12, 17].

Równanie Allena-Cahna opisuje dużo różnorodnych zjawisk więc było wielokrotnie badane przez matematyków i istnieje wiele czysto matematycznych artykułów na ten temat. Rozważanych było wiele różnych typów rozwiązań tego równania (wiele przykładów znajdziemy np. w [24]). W tej rozprawie udowodnimy istnienie rozwiązań spełniających następujące warunki:

$$u(x + ke_i) = u(x) \text{ dla } 1 < i \leqslant n, \qquad \lim_{x_1 \to -\infty} u(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x_1 \to +\infty} u(x) = 1,$$

czyli okresowych w $n-1$ ostatnich współrzędnych i heteroklinicznych w pierwszej zmiennej x_1. Opisane powyżej rozwiązania heterokliniczne można interpretować np. jako stan przejściowy między dwoma stanami fizycznymi odpowiadającymi miejscom zerowym F, czyli rozwiązaniom stałym. Takie rozwiązania (jak również inne typy rozwiązań) są rozważane w artykule Rabinowitza i Stredulinskiego [24]. Także Alessio, Jeanjean i Montechiari w [2] i [3] rozważają ten typ rozwiązań, ale przy szczególnej postaci potencjału: $F(x, u) = f(x)F(u)$.

Jest widoczna wyraźna potrzeba uwzględniania niestandardowych operatorów eliptycznych, ponieważ równanie Allena-Cahna czy ogólniej, problem reakcji-dyfuzji w wielu zastosowaniach jest opisywany równaniami z niestandardowymi operatorami eliptycznymi. W wielu materiałach (takich jak np. kryształy) dyfuzja zachodzi anizotropowo, czyli w różnym stopniu zależnie od kierunku [9]. Równanie Allena-Cahna może też być stosowane gdy zamiast zjawiska dyfuzji zachodzi zjawisko super-dyfuzji. Wówczas w równaniu zamiast laplasjanu rozważa się ułamkowy s-laplasjan [14, 30].

W matematycznych artykułach na temat problemu Allena-Cahna jest wielokrotnie cytowany artykuł Mosera [21]. Wyniki z tej pracy zostały później uogólnione przez Bangerta [5], gdzie bada on minima funkcjonału $\int L(x, u(x), \nabla u(x))dx$ na $W^{1,2}_{loc}$, zaś funkcja L jest okresowa w zmiennej x zaś w zmiennej ∇u jest wypukła. Funkcjonał ten jest bardzo ogólnej postaci, w szczególności nie musi pochodzić od laplasjanu mimo, że zakładany jest wzrost kwadratowy L względem ∇u. Operator eliptyczny w równie ogólnej postaci rozważany jest także w pracy Llave i Valdinoci [10]. Tam również zakładany jest kwadratowy wzrost operatora.

W literaturze dotyczącej problemu Allena-Cahna istotnie dominują operatory ze wzrostem kwadratowym, zaś stosunkowo mało jest wyników uwzględniających operatory mniej standardowe . W szczególności, nie było znane żadne twierdzenie o istnieniu i pełnej regularności rozwiązań heteroklinicznych dla problemu Allena-Cahna z operatorem o innym wzroście. Takie twierdzenie udowodniłem w artykule [32], gdzie rozważam operator eliptyczny w postaci dywergencyjnej $\mathrm{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$, przy założeniach izotropowego wzrostu G z m-tą potęgą. Z uwagi na większy wzrost G przestrzeń $\mathrm{W}^{1,2}_{loc}$ została tam zastąpiona przez $\mathrm{W}^{1,m}_{loc}$. Oczywiście, gdy $G = \frac{1}{2}|\cdot|^2$ to $\mathrm{div}(\nabla G(\nabla u(x))) = \Delta u(x)$.

W tej rozprawie powyższy wynik zostanie uogólniony. W rozdziale 3 zostanie wykazane, że w problemie typu Allena-Cahna operator eliptyczny $\mathrm{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$ może pochodzić od anizotropowej funkcji wypukłej G. Analogicznie, przestrzenie Sobolewa $\mathrm{W}^{1,m}_{loc}$ zostaną zastąpione anizotropowymi przestrzeniami Orlicza-Sobolewa $\mathrm{W}^{1,G}_{loc}$.

Rozważany problem typu Allena-Cahna będzie więc miał następującą postać:

$$\mathrm{div}(\nabla G(\nabla u(x))) + F_u(x, u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

gdzie F ma dwa minima i jest okresowe względem x. Precyzyjnie sformułowane założenia znajdują się w rozdziale 3.

Rozważane uogólnienie nie jest inspirowane żadnym konkretnym problemem fizycznym, ale niestandardowe operatory eliptyczne związane z problemem reakcji-dyfuzji są często rozpatrywane, więc warto przeanalizować problem również z punktu widzenia potencjalnego użycia przestrzeni Orlicza-Sobolewa.

Zastosowanie operatora pochodzącego od anizotropowej funkcji G o wzroście wielomianowym oraz przestrzeni Orlicza-Sobolewa $\mathrm{W}^{1,G}$ spowodowało szereg technicznych trudności. Główną był brak twierdzenia o regularności słabych rozwiązań dla anizotropowych operatorów typu $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$. Dotychczas znane twierdzenia (na przykład podane w pracach Marcellini [19] lub [20]) okazały się niemożliwe do zastosowania w rozważanym problemie ze względu na słabe powiązanie przestrzeni funkcyjnej ze wzrostem funkcjonału. Powstała więc potrzeba udowodnienia odpowiedniego twierdzenia o regularności słabych rozwiązań. Jest to twierdzenie 2.1 z rozdziału 2. Dowód bazuje na metodach zbliżonych do dowodu twierdzenia 2.3 z artykułu Marcellini [20] oraz twierdzenia 3.1 z artykułu Siepe [27].

Pierwszy i jednocześnie główny wynik rozprawy jest następujący:

- przy założeniach (G_1)-(G_7) oraz (A_1)-(A_3) z rozdziału 2 słabe rozwiązania równania (1) są klasy $\mathrm{W}^{1,\infty}_{loc} \cap \mathrm{W}^{2,2}_{loc}$.

Twierdzenie to jest sformułowane z założeniami słabszymi niż założenia twierdzenia o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych dowodzonego w rozdziale 3. W szczególności, założenia na funkcję F są dużo ogólniejsze niż w równaniu Allena-Cahna. Dzięki temu samo twierdzenie o regularności jest ciekawym rezultatem w teorii równań eliptycznych.

W twierdzeniu 2.1 zostało założone, że funkcja G spełnia warunki Δ_2 i ∇_2, a więc jest ograniczona przez wielomiany. Niekoniecznie jednak posiada wzrost związany z jedną ustaloną potęgą. Co więcej, dopuszczony jest też wzrost anizotropowy, tzn. funkcja G może w istotnie różny sposób zależeć od wszystkich pochodnych cząstkowych, a nie tylko od modułu $|Du|$.

W pracy [19] podobne twierdzenie o regularności dowodzone jest przy założeniu p, q - wzrostu. W [20] rozważany jest funkcjonał o wzroście wielomianowym, który może być anizotropowy, ale przestrzeń w której badany jest problem wyznaczona jest przez funkcję izotropową ograniczającą z góry wzrost operatora. W [27] pojawiają się anizotropowe warunki wzrostu, a przestrzeń w której poszukiwane są rozwiązania jest bezpośrednio wyznaczona przez funkcję G. W [27] jednak badany funkcjonał jest w prostszej postaci $\int G(Du)dx$ (czyli bez zależności od u i x). Główną różnicą pomiędzy twierdzeniem 2.1 a wynikami Marcellini jest zakładana wyjściowa klasa całkowalności słabych rozwiązań (czyli przestrzeń w której poszukiwane są minima funkcjonału). W tej rozprawie zakłada się, że są one całkowalne po złożeniu pochodnej z funkcją G (czyli $\int G(Dv)dx < \infty$). Marcellini zakłada całkowalność pochodnej złożonej z pewną funkcją izotropową, która rośnie szybciej niż wynikałoby to z postaci funkcjonału. Przestrzeń której używa jest podprzestrzenią użytego tu $\mathrm{W}^{1,G}$. Rozważanie w [20] takiej przestrzeni i izotropowego warunku wzrostu ułatwia dowód, ale może powodować trudności w zastosowaniu metod wariacyjnych, gdyż ciąg minimalizujący może nie posiadać granicy w tej przestrzeni. Celowość stosowania przestrzeni dobrze powiązanej z funkcjonałem widać w szczególności w rozdziale 3.

Anizotropowe funkcje wypukłe mogą nie być monotoniczne ze względu na moduł, tzn. możliwe jest, że $G(\xi_1) > G(\xi_2)$ gdy $|\xi_1| < |\xi_2|$. Między innymi z tego powodu bezpośrednie stosowanie funkcji anizotropowych w dowodzie twierdzenia 2.1 powoduje różnorodne trudności techniczne. To sprawia, że dowód tego twierdzenia (a w szczególności wiele szacowań podanych w rozdziale 2.3) wymaga nieco innych technik, niż dowód wspomnianego wyżej twierdzenia 2.3 z [20].

Drugim głównym wynikiem jest twierdzenie o istnieniu klasycznych rozwiązań heteroklinicznych problemu (1) będące uogólnieniem wcześniejszego wyniku z [32].

- Jeśli G spełnia warunki (G_1)-(G_7) podane w rozdziale 2 oraz F spełnia założenia (F_1)-(F_4) podane w rozdziale 3, to równanie (1) posiada klasyczne rozwiązania heterokliniczne.

Dowód tego twierdzenia wykorzystuje techniki zbliżone do stosowanych w artykule [24] (twierdzenie 2.1). Jedna z różnic między dowodami jest widoczna na przykład w lemacie 3.8, gdzie niemożliwe okazało się zastosowanie klasycznej zasady maksimum i konieczne było użycie ogólniejszych twierdzeń z [23]. Kolejną istotną różnicą jest zastosowanie twierdzenia o regularności 2.1, zamiast standardowych twierdzeń o regularności odnoszących się do innych operatorów o wzroście potęgowym.

Rozprawa jest podzielona na trzy części. W rozdziale 1 podane zostaną potrzebne definicje i lematy dotyczące ilorazów różnicowych i słabych pochodnych. W kolejnym rozdziale zostanie sformułowane i udowodnione twierdzenie dotyczące regularności słabych rozwiązań. W rozdziale 3 będzie udowodnione twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych równania typu Allena-Cahna.

Spis oznaczeń

Poniżej zostały wymienione wybrane symbole, które będą często stosowane w dalszych częściach rozprawy:

- e_s - s-ty wektor bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$;
- Ω - jeśli nie wskazano inaczej dziedzina w $\mathbb{R}^n$ (zbiór otwarty i spójny);
- $\Omega + he_s$ - zbiór Ω przesunięty o wektor he_s;
- $\Omega_{|h|} = \{x \in \Omega \colon d(x, \partial\Omega) > |h|\}$;
- $dist$ - odległość zbiorów lub punktu od zbioru;
- χ_A - funkcja charakterystyczna zbioru A;
- $\mu(A)$ - miara Lebesgue'a zbioru A;
- D - pochodna funkcji, D_s pochodna cząstkowa funkcji po s-tej zmiennej, czasem też oznaczana jako F_{x_s} lub G_{ξ_s};
- Δ_h - iloraz różnicowy o przyroście h w s-tej zmiennej, oznaczany też jako Δ_h^s przy czym gdy s pozostaje ustalone to jest w oznaczeniach pomijane;
- $div(\nabla G(\nabla u(x))) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(G_{\xi_i}(\nabla u(x)))$;
- $B_r(x)$ - kula o środku x i promieniu r, jeśli środek jest raz ustalony i niezmienny w całych rachunkach kule zapisywane są po prostu jako B_r;
- $L^G(\Omega) = \left\{\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}^n \colon \xi\text{-mierzalna}, \exists_{\lambda>0} \int\limits_{\Omega} G(\lambda\xi)\; dx < \infty\right\}$ - przestrzeń Orlicza funkcji o wartościach wektorowych określonych na Ω;
- $W^{1,G}(\Omega)$ - przestrzeń Orlicza-Sobolewa funkcji skalarnych określonych na Ω, których słabe pochodne należą do $L^G(\Omega)$;
- 2^* - krytyczny wykładnik Sobolewa równy $\frac{2n}{n-2}$.

Rozdział 1

Przydatne definicje i lematy

1.1. G-funkcje i przestrzenie Orlicza-Sobolewa

G-funkcje są naturalnym uogólnieniem funkcji Younga na dziedziny wielowymiarowe. G-funkcją (w sensie definicji podanej przez Trudingera w [29]) nazywamy wypukłą, parzystą i półciągłą z dołu funkcję $G\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ spełniającą warunki $G(0) = 0$, $G(\infty) = \infty$ oraz taką, że $G^{-1}(\infty)$ jest oddzielone od 0.

W tym podrozdziale zakładamy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest ograniczoną dziedziną (czyli zbiorem otwartym, spójnym i ograniczonym).

Definicja 1.1. *Przestrzenią Orlicza* $\mathrm{L}^{\mathrm{G}}(\Omega)$ *nazywamy zbiór*

$$\mathrm{L}^{\mathrm{G}} = \left\{ \xi \colon \Omega \to \mathbb{R}^n \colon \xi\text{-}\mathit{mierzalna}, \exists_{\lambda > 0} \int\limits_{\Omega} G\left(\lambda \xi\right)\, dx < \infty \right\}.$$

Przestrzeń Orlicza $\mathrm{L}^{\mathrm{G}}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha z normą Luxemburga

$$\|\xi\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{G}}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} G\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\, dx \leqslant 1 \right\}.$$

Tak zdefiniowane przestrzenie Orlicza są zbyt ogólne dla naszych rozważań. W wielu artykułach (np. [6, 8, 15, 26, 28, 29]) przyjmowane są są dodatkowe założenia na G, w zależności od tego jakie własności przestrzeni Orlicza są wymagane. Również w tej rozprawie klasa dopuszczalnych funkcji zostanie zawężona.

Analogicznie do klasycznych przestrzeni Sobolewa, na bazie przestrzeni Orlicza definiuje się przestrzenie Orlicza-Sobolewa.

Definicja 1.2. *Słabo różniczkowalna funkcja* $u \in L^2(\Omega)$ *należy do przestrzeni Orlicza - Sobolewa* $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega)$ *gdy* $Du \in \mathrm{L}^{\mathrm{G}}(\Omega)$.

Przestrzeń $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega)$ z normą

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega)} = \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|Du\|_{\mathrm{L}^{\mathrm{G}}(\Omega)}$$

jest przestrzenią Banacha.

Standardowymi warunkami ograniczającymi wzrost G-funkcji są warunki Δ_2 i ∇_2. Pierwszy z nich ma postać

$$G(2\xi) \leqslant c\,G(\xi), \quad \text{dla } |\xi| \geqslant M, \tag{Δ_2}$$

a drugi

$$G(2\xi) \geqslant c\,G(\xi), \quad \text{dla } |\xi| \geqslant M. \tag{∇_2}$$

Gdy $M > 0$ to mówimy, że warunki te są spełnione w nieskończoności, a jeśli $M = 0$ to mówimy, że są spełnione globalnie.

Wiadomo, że jeżeli G spełnia warunek Δ_2, to jej wzrost jest ograniczony z góry przez funkcję wielomianową. Jeżeli G spełnia warunek ∇_2, wtedy jej wzrost jest ograniczony z dołu przez funkcję $|x|^\alpha$, dla pewnego $\alpha > 1$. Można to w skrócie podsumować jako $L^p \subset L^G \subset L^q$ gdy $|\cdot|^q \prec G \prec |\cdot|^p$. Precyzyjne sformułowanie i dowód tych faktów znajduje się np. w [11] - lemat 2.4.

Wprost z definicji wynika, że jeśli funkcja wypukła G spełnia warunek Δ_2, to spełnia także nierówność $G(k\xi) \leqslant cG(\xi)$ z dowolną stałą k (przy ewentualnie innym c i M). Wobec tego przy założeniu Δ_2 warunek definiujący przestrzeń Orlicza, czyli $\int_\Omega G(\lambda\xi)\,dx < \infty$, można zastąpić prostszym warunkiem $\int_\Omega G(\xi)\,dx < \infty$.

Jeśli założymy, że G spełnia warunki Δ_2 i ∇_2 w nieskończoności oraz $|\Omega| < \infty$, to wtedy wyznaczone przez nią przestrzenie Orlicza i Orlicza-Sobolewa są refleksywne ([26] wniosek 7.2). Jeśli $|\Omega| = \infty$, to warunki Δ_2 i ∇_2 muszą być spełnione globalnie.

Na potrzeby dowodu lematu 1.5 wykażemy następujący fakt:

Lemat 1.3. *Niech G będzie G-funkcją spełniającą warunek Δ_2 w nieskończoności i spełniającą warunek $|\cdot|^\alpha \prec G \prec |\cdot|^\beta$, gdzie $2 \leqslant \alpha \leqslant \beta$. Załóżmy ponadto, że $\beta \leqslant \alpha^*$. Przyjmujemy $\alpha^* = \frac{n\alpha}{n-\alpha}$ gdy $\alpha < n$ oraz α^* dowolne gdy $\alpha \geqslant n$. Przez ξ oznaczmy dowolny ustalony niezerowy wektor i zdefiniujmy funkcję $\widetilde{G}(t) = G(t\xi)$. Wówczas przestrzeń Orlicza-Sobolewa $W^{1,G}(\Omega)$ zawiera się w przestrzeni Orlicza $L^{\widetilde{G}}(\Omega)$.*

Dowód: Prawdziwy jest ciąg zawierań

$$W^{1,G}(\Omega) \subset W^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^{\alpha^*}(\Omega) \subset L^\beta(\Omega) \subset L^{\widetilde{G}}(\Omega)$$

Pierwsze wynika z $|\cdot|^\alpha \prec G$ i definicji $W^{1,G}$. Kolejne jest konsekwencją standardowych włożeń Sobolewa (zob. twierdzenie 4.12 z [1]). Trzecie zawieranie jest oczywiste, gdyż

$\beta \leqslant \alpha^*$. Czwarte włożenie wynika z tego, że $\widetilde{G} \prec |\cdot|^\beta$, co jest konsekwencją definicji $\widetilde{G}$ i założenia $G \prec |\cdot|^\beta$. □

W dalszych rozważaniach, istotną rolę odgrywać będą także lokalne przestrzenie Orlicza - Sobolewa $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Przestrzenie te definiujemy standardowo

$$\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{u \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(K) \colon K \subset\subset \Omega\}.$$

Przestrzenie $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ są przestrzeniami metrycznymi zupełnymi z metryką daną wzorem

$$d(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u-v\|_{\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(K_n)}}{2^k(1+\|u-v\|_{\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(K_n)})},$$

gdzie K_n są tak wybrane, aby $K_n \subset\subset K_{n+1}$ oraz $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1.2. Ilorazy różnicowe i słabe pochodne

Ilorazy różnicowe pełnią ważną rolę w dowodach twierdzeń o regularności rozwiązań. W szczególności cały dowód pierwszej części twierdzenia 2.1 będzie oparty o ich własności. Poniżej podane zostaną własności ilorazów różnicowych, które będą wykorzystywane w tej pracy. Są one w większości dobrze znane w literaturze (np. [13, 16, 27]). W wybranych lematach zostaną podane także dowody, gdyż metody tam stosowane są interesujące z punktu widzenia dalszych rozważań. W całym rozdziale przyjmujemy, że Ω jest dziedziną. Symbolem D oznaczamy pochodną a symbolem D_s pochodną cząstkową po s-tej zmiennej. W tym rozdziale będziemy zakładać, że funkcja G spełnia warunek Δ_2 w nieskończoności.

Definicja 1.4. *Ilorazem różnicowym funkcji $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ z przyrostem $h \in \mathbb{R}$ w kierunku wersora e_s nazywamy funkcję*

$$\Delta_h^s u(x) = \frac{u(x+he_s) - u(x)}{h}$$

określoną na $\Omega_{|h|} = \{x \in \Omega \colon d(x,\partial\Omega) > |h|\}$.

W dalszych rachunkach, jeśli tylko górny indeks s będzie pozostawał dowolnie ustalony i niezmienny, to zostanie w zapisach pominięty.

Pierwszy lemat jest inspirowany lematem 3.3 z [20] i podaje elementarne własności ilorazów różnicowych, wynikające wprost z definicji ilorazu różnicowego.

Lemat 1.5. *Niech $u, w \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega)$. Wówczas:*

(A) $\Delta_h u \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega_{|h|})$,

(B) jeśli $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia warunek Lipschitza, jest nieparzysta, niemalejąca i wypukła na* $[0,\infty)$, *to* $\psi(\Delta_h u) \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega_{|h|})$,

(C) jeśli ponadto $\eta \in C_0^1(\Omega)$ *a* G *jest takie jak w lemacie 1.3, to* $\eta\psi(\Delta_h u) \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega_{|h|})$,

(D) $D_i(\Delta_h u) = \Delta_h(D_i u)$,

(E) jeśli $\operatorname{supp} u \subset \Omega_{|h|}$ *lub* $\operatorname{supp} w \subset \Omega_{|h|}$, *to* $\int\limits_\Omega u\Delta_h w\,dx = -\int\limits_\Omega w\Delta_{-h} u\,dx$,

(F) $\Delta_h(uw)(x) = u(x+he_s)\Delta_h w(x) + w(x)\Delta_h u(x)$.

Dowód: Własność (A) wynika wprost z liniowości przestrzeni.

Niech L będzie stałą Lipschitza dla ψ. Wówczas

$$G(D(\psi(\Delta_h u))) = G(\psi'(\Delta_h u)D(\Delta_h u)) \leqslant G(L\,D(\Delta_h u)).$$

Jako, że $\Delta_h u \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega_{|h|})$ to prawa strona powyższej nierówności jest całkowalna a więc również lewa jest całkowalna, co dowodzi, że $\psi(\Delta_h u) \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(\Omega_{|h|})$.

Dowód (C) rozpocznijmy od nierówności wynikającej z wypukłości G:

$$G(D(\eta\,\psi(\Delta_h u))) = G(D\eta\,\psi(\Delta_h u) + \eta\,D(\psi(\Delta_h u))) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}G(2D\eta\,\psi(\Delta_h u)) + \frac{1}{2}G(\eta\,D(\psi(\Delta_h u)))$$

Całkowalność drugiego składnika prawej strony wynika z punktu (B) i ograniczoności η.

Z własności ψ wynika, że $|\psi(t)| \leqslant L|t|$. Ograniczoność $D\eta$ gwarantuje istnienie takiego wektora ξ_0, że $G(D\eta) \leqslant G(\xi_0)$ na Ω. Wówczas $G(2D\eta\,\psi(\Delta_h u)) \leqslant G(2\xi_0 L|\Delta_h u|)$. Przyjmując w lemacie 1.3 $\xi = 2L\xi_0$ otrzymujemy $\Delta_h u \in L^{\widetilde{G}}(\Omega_{|h|})$. To gwarantuje całkowalność $G(2D\eta\,\psi(\Delta_h u))$ i kończy dowód własności (C).

Kolejny punkt jest bezpośrednią konsekwencją liniowości pochodnej. Własność (E) wynika z definicji ilorazu różnicowego:

$$\int\limits_\Omega u\Delta_h w\,dx = \frac{1}{h}\int\limits_\Omega u(x)w(x+he_s) - u(x)w(x)\,dx = \\ = -\frac{1}{h}\int\limits_\Omega u(x)w(x) - u(x-he_s)w(x)\,dx = -\int\limits_\Omega w\Delta_{-h}u\,dx$$

Również z definicji dowodzimy ostatniej równości:

$$\Delta_h(uw)(x) = \\ = \frac{1}{h}\left(u(x+he_s)w(x+he_s) - u(x+he_s)w(x) + u(x+he_s)w(x) - u(x)w(x)\right) = \\ = u(x+he_s)\Delta_h w(x) + w(x)\Delta_h u(x)$$

□

Kolejne lematy pochodzą z książki Giusti [13]. Opisują one związki ilorazów różnicowych i słabych pochodnych funkcji należących do przestrzeni Sobolewa.

Lemat 1.6. *Niech* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Dla każdego* $v \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ *zachodzą nierówności*

$$\int\limits_{\Omega_0} |\Delta_h v|^p dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_s v|^p dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |Dv|^p dx.$$

Dowód: Wprost z definicji ilorazu różnicowego mamy $\Delta_h v = \int\limits_0^1 D_s v(x + the_s)dt$. Z nierówności Jensena wynika, że

$$\int\limits_{\Omega_0} |\Delta_h v|^p dx = \int\limits_{\Omega_0} \left| \int\limits_0^1 D_s v(x + the_s)dt \right|^p dx \leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega_0} |D_s v(x + the_s)|^p dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega_0 + the_s} |D_s v|^p dx\, dt \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_s v|^p dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |Dv|^p dx.$$

Symbolem $\Omega_0 + the_s$ oznaczono zbiór $\{x + the_s : x \in \Omega_0\}$. □

Jeśli słaba pochodna istnieje w $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, to ilorazy różnicowe są do niej zbieżne w $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Lemat 1.7. *Załóżmy, że funkcja* $v \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *posiada słabą pochodną* $D_s v \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Wówczas* $\Delta_h v \to D_s v$ *w* $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Dowód: Weźmy $\Sigma \subset\subset \Omega$ i dowolne $w \in C^1(\Sigma) \cap \mathrm{W}^{1,p}(\Sigma)$. Wówczas stosując lemat 1.6, dla każdego $\Sigma \subset\subset \Omega$ mamy

$$\|\Delta_{h_n} v - D_s v\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} \leqslant \|\Delta_{h_n} v - \Delta_{h_n} w\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} + \|\Delta_{h_n} w - D_s w\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} + \|D_s w - D_s v\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|D_s(w - v)\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} + \|\Delta_{h_n} w - D_s w\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)}.$$

Funkcje klasy C^1 tworzą gęstą podprzestrzeń $\mathrm{W}^{1,p}$ oraz $\Delta_{h_n} w \to D_s w$ w $\mathrm{L}^p(\Sigma)$, więc obydwa składniki mogą być wybrane dowolnie małe, co kończy dowód. □

Następny lemat pokazuje, że z ograniczoności norm ilorazów różnicowych można wywnioskować istnienie słabej pochodnej. Jest to prosta modyfikacja lematu 8.2 z [13] polegająca na zastąpieniu ogólnej zbieżności $h \to 0$ ciągiem $h_n \to 0$. Będzie to ważne narzędzie wykorzystywane w dowodzie pierwszej części twierdzenia 2.1.

Lemat 1.8. *Niech* $v \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Załóżmy, że istnieją* $M > 0$ *i ciąg* $h_n \to 0$ *takie, że* $\int\limits_{\Omega_{|h_n|}} |\Delta^s_{h_n} v|^p dx \leqslant M$. *Wówczas* $\int\limits_{\Omega} |D_s v|^p dx \leqslant M$ *(więc* $D_s v \in \mathrm{L}^p(\Omega)$*) i* $\Delta^s_{h_n} v \to D_s v$ *w* $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Dowód: Niech

$$g_n(x) = \begin{cases} \Delta_{h_n} v & \text{dla } x \in \Omega_{|h_n|} \\ 0 & \text{dla } x \in \Omega \setminus \Omega_{|h_n|} \end{cases}$$

Ciąg g_n jest ograniczony w $\mathrm{L}^p(\Omega)$, więc można wybrać podciąg (wciąż oznaczany jako g_n) słabo zbieżny do pewnego $g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Oczywiście $\|g\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant M$. Dla każdego $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \phi g \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi \Delta_{h_n} v \, dx = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v \Delta_{h_n} \phi \, dx = -\int_\Omega v D_s \phi \, dx,$$

więc $g = D_s v$. Pozostała część tezy wynika z Lematu 1.7. □

Warto zauważyć, że gdy Ω jest ograniczona, to w powyższym lemacie zbieżność w $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}$ można zastąpić zbieżnością w L^p. Taka wersja tego lematu będzie wykorzystywana w dowodzie twierdzenia 2.1.

Następny lemat o zbieżności ciągu norm jest dobrze znany, dowód można znaleźć na przykład w [22].

Lemat 1.9. *Niech Ω będzie zbiorem ograniczonym.*

a) Jeśli $v \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, to wówczas

$$\|v\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \lim_{p\to\infty} \|v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

b) Jeśli $v \in \mathrm{L}^{p_k}(\Omega)$ dla pewnego ciągu $p_k \to \infty$ oraz ciąg $\|v\|_{\mathrm{L}^{p_k}(\Omega)}$ jest ograniczony, to wówczas $v \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Wykorzystując powyższe własności, otrzymujemy następujący wniosek z lematu 1.6:

Lemat 1.10. *Niech $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$ i $\mu(\Omega) < \infty$. Dla każdego $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mamy*

$$\|\Delta_h^s v\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega_0)} \leqslant \|D_s v\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}.$$

Dowód: Z lematu 1.6 wynika, że

$$\|\Delta_h v\|_{p,\Omega_0} \leqslant \|D_s v\|_{p,\Omega} \leqslant \mu(\Omega)^{1/p} \|D_s v\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant c \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |D_s v|$$

dla każdego $1 \leqslant p < \infty$, a zatem $\Delta_h v \in \mathrm{L}^\infty(\Omega_0)$, na mocy lematu 1.9. Teraz wystarczy tylko przyjąć $p \to \infty$ w nierówności $\|\Delta_h v\|_{p,\Omega_0} \leqslant \|D_s v\|_{p,\Omega}$. □

Ostatni z lematów o ilorazach różnicowych pochodzi z [27]. Jest on pewnym uogólnieniem lematu 1.6 polegającym na zamianie funkcji $|\cdot|^p$ na funkcję wypukłą. Nie będzie on wykorzystywany w tej pracy, jednak warto go podać, gdyż jest mało znany, a może być przydatnym narzędziem w badaniu słabych pochodnych w przestrzeniach Orlicza-Sobolewa.

Lemat 1.11. *Zdefiniujmy wektor ilorazów różnicowych:* $\Theta_h u = (\Delta^1_{h_1} u, \ldots, \Delta^n_{h_n} u)$*, gdzie* $h = (h_1, \ldots, h_n)$*. Niech* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$*,* $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$*, funkcja* $G : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *jest wypukła. Dla każdego* $v \in W^{1,1}(\Omega)$ *takiego, że* $\int_\Omega G(Dv)dx < \infty$ *mamy*

$$\int\limits_{\Omega_0} G(\Theta_h v)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} G(Dv)dx.$$

Dowód: Podobnie jak wcześniej $\Theta_h v = \int\limits_0^1 Dv(x + th)dt$ i z nierówności Jensena

$$\int\limits_{\Omega_0} G(\Theta_h v)dx \leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega_0} G(Dv(x + th))dx\, dt = \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega_0 + th} G(Dv)dx\, dt \leqslant \int\limits_{\Omega} G(Dv)dx.$$

□

Rozdział 2

Twierdzenie o regularności słabych rozwiązań

Założenia na funkcję G podane w poprzednim rozdziale są zbyt ogólne, aby możliwe było udowodnienie twierdzenia o regularności słabych rozwiązań. W szczególności, dopuszczają one sytuację, gdy funkcja G rośnie zbyt szybko w nieskończoności (np. jak funkcja wykładnicza) lub maleje zbyt szybko w otoczeniu zera.

Podane niżej założenia, z których wynikają te podane w rozdziale 1, nakładają ograniczenia na wzrost G. W otoczeniu zera G musi się znajdować pomiędzy funkcją liniową a kwadratową (warunki (G_2) i (G_3)). W nieskończoności G musi być ograniczone przez dwa wielomiany stopnia wyższego niż 2 (warunki (G_5) i (G_6)). Należy również założyć, że G spełnia dość silny warunek eliptyczności (G_7).

W tym rozdziale zakładamy, że $G \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest funkcją wypukłą spełniającą następujące warunki:

(G_1) $G(-\xi) = G(\xi)$ dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^n$,

(G_2) $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{G(\xi)}{|\xi|} = 0$,

(G_3) istnieje $c_0 > 0$ takie, że $G(\xi) \geqslant c_0 |\xi|^2$ dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^n$,

(G_4) istnieje $p \geqslant 2$ takie, że $\langle DG(\xi), \lambda \rangle \leqslant p \frac{G(\xi)}{|\xi|} |\lambda|$ dla wszystkich ξ, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ $(\xi \neq 0)$,

(G_5) istnieją $\alpha \geqslant 2$ i $c_\alpha > 0$ takie, że $c_\alpha |\xi|^\alpha \leqslant G(\xi)$ dla wszystkich $|\xi| \geqslant 1$,

(G_6) $G(\xi) \leqslant \sum\limits_{s=1}^{n} |\xi_s|^{2^*(\frac{\alpha}{2}-1)+2}$ dla wszystkich $|\xi| \geqslant 1$, gdzie 2^* oznacza krytyczny wykładnik Sobolewa,

(G_7) istnieje $\nu > 0$ takie, że $\langle D^2 G(\xi)\lambda, \lambda \rangle \geqslant 2\nu \frac{G(\xi)}{|\xi|^2} |\lambda|^2$ dla wszystkich ξ, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ $(\xi \neq 0)$,

Łatwo sprawdzić, że funkcja G spełniająca powyższe założenia jest G-funkcją w sensie Trudingera. Z założenia (G_4) wynika warunek Δ_2 w postaci: $G(2\xi) \leqslant 2^p G(\xi)$ (zob. twierdzenie 3.2 w [28]). Stąd zaś wynika, że $G(\xi) \leqslant M|\xi|^p$, dla $M = \sup\limits_{|\xi|=1} G(\xi)$ oraz $|\xi| \geqslant 1$.

Okazuje się, że do badania regularności słabych rozwiązań będzie wykorzystywana jedynie liniowość przestrzeni $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}$ oraz warunek $u \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}} \iff \int_\Omega G(Du)\,dx < \infty$, gwarantowany przez Δ_2. Inne własności $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}$ (np. refleksywność) nie będą wykorzystywane w tym rozdziale. Warto też zwrócić uwagę, że dzięki warunkowi (G_3) przestrzeń $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}$ zawiera się w $W^{1,2}$ na ograniczonych dziedzinach.

Przyjęte założenia umożliwiają rozpatrywanie dość szerokiej klasy G-funkcji o wzroście typu wielomianowego. Taki zestaw warunków jest podobny do założeń wzrostu typu p-q rozważanych przez Marcellini w artykule [19]. Warunki (G_1)–(G_7) są inspirowane w dużej mierze przez założenia podane w [20], ale zostały sformułowane w sposób odpowiedni dla anizotropowych funkcji G. Dopuszczają one sytuację, w której zachowanie G może być w różny sposób zależne od współrzędnych ξ_i, a nie tylko od modułu $|\xi|$.

Uzyskanie odpowiedniej regularności rozwiązań wymaga między innymi silnego warunku eliptyczności dla operatora $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$, co przekłada się na silną wypukłość G, czyli założenie (G_7). W szczególności, wzrost funkcji G w otoczeniu zera musi być kwadratowy. Dla dowodu twierdzenia 2.1 potrzebne są także ograniczenia wzrostu funkcji G w nieskończoności. Mówią o tym założenia (G_5) i (G_6), z których wynika, że funkcja G jest z dwóch stron ograniczona potęgami o wykładnikach odpowiednio bliskich sobie, przy czym, im większe n tym są one bliższe. Można zauważyć, że założenia (G_1)–(G_7) są silniejsze niż podane w [19] czy [20] jednak także uzyskana tu teza jest nieco silniejsza.

Oczywistym przykładem funkcji G spełniającej założenia (G_1)–(G_7) jest $|\cdot|^2$. Niestety ze względu na (G_3) nie można za G wziąć $|\cdot|^\alpha$ dla $\alpha > 2$. Można jednak rozważać funkcje łączące wzrost kwadratowy dla małych argumentów i wyższe potęgi dla dużych argumentów, czyli np. $G(\xi) = c_0|\xi|^2 + \sum c_i|\xi_i|^{\alpha_i}$, gdzie wykładniki α_i należy wybrać uwzględniając przede wszystkim (G_5) i (G_6) (a więc ich wzajemne różnice są ograniczone w zależności od wymiaru przestrzeni, tj. $\max \alpha_1 \leqslant 2^*(\frac{\min \alpha_i}{2} - 1) + 2)$.

2.1. Sformułowanie twierdzenia

Poniżej sformułujemy twierdzenie o regularności słabych rozwiazań równania (2.1). Zostanie udowodnione przy założeniach ogólniejszych, niż te wymagane do rozważania równania typu Allena-Cahna, przez co możliwe do zastosowania także w innych problemach z ogólnym operatorem eliptycznym.

Przypomnijmy, że rozważane równanie na dziedzinie Ω ma postać

$$-\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) + F_u(x, u(x)) = 0, \quad \text{gdzie } x \in \Omega. \tag{2.1}$$

Zakładamy, że $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia:

(A_1) F jest różniczkowalna w sposób ciągły i jej pochodna cząstkowa F_u może być zapisana jako suma $F_u = \bar{F} + \hat{F}$, gdzie:

(A_2) $\bar{F}$ jest ciągła i $|\bar{F}(x,u)| \leqslant Q$ dla wszystkich $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$,

(A_3) $\hat{F}$ ma ciągłe i ograniczone pochodne cząstkowe: $|\hat{F}_{x_s}(x,u)| \leqslant Q$, $|\hat{F}_u(x,u)| \leqslant Q$ dla wszystkich $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.1. *Niech funkcja G spełnia założenia (G_1)-(G_7), zaś F spełnia (A_1)-(A_3). Dla każdej kuli $B_R \subset\subset \Omega$ i dla każdego słabego rozwiązania $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ problemu (2.1), istnieją stałe dodatnie $\bar{C}$ i $\tilde{C}$, dla których*

$$\int\limits_{B_{\frac{R}{2}}} |D^2 v|^2 dx \leqslant \bar{C} \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)\, dx, \tag{2.2}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2 \leqslant \tilde{C} \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)\, dx. \tag{2.3}$$

Powyższe nierówności oznaczają, że słabe rozwiązania są klasy odpowiednio $W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ i $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, przy czym jako słabe rozwiązania będziemy rozumieli funkcje $v \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$ spełniające równanie

$$\int\limits_{B_r} \sum_{i=1}^{n} (G_{\xi_i}(Dv)) D_i\varphi(x) + F_u(x,v)\varphi(x)\, dx = 0 \tag{2.4}$$

dla każdej kuli $B_r \subset\subset \Omega$ i każdego $\varphi \in W^{1,G}_0(B_r)$.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że cała teza twierdzenia jest sformułowana lokalnie na kulach a więc dziedzina Ω nie odgrywa tu większej roli. Dodatkowo rozważamy tylko słabe rozwiązania więc problem (2.1) nie wymaga uzupełnienia o warunki brzegowe.

Dowód powyższego twierdzenia będzie treścią kolejnych podrozdziałów. Jest on podzielony na następujące etapy:

- przekształcenie równania (2.4) przy użyciu specjalnie zdefiniowanej funkcji φ co pozwala na wprowadzenie tam ilorazów różnicowych,
- szacowanie odpowiednich ilorazów różnicowych w celu wykazania istnienia drugiej pochodnej i jednocześnie dowód pierwszej nierówności z tezy twierdzenia,
- skorzystanie z uzyskanej nierówności oraz odpowiednich nierówności Sobolewa w celu stworzenia nierówności łączących różne normy Lebesgue'a $|Dv|$,
- uzyskanie wspólnego szacowania dla całego ciągu norm Lebesgue'a i dzięki temu wykazanie istnienia $\operatorname{ess\,sup} |Dv|$ wraz z drugą nierównością z tezy twierdzenia.

W dowodzie obowiązywać będą następujące konwencje i oznaczenia:

- literą c będzie oznaczana stała dodatnia, dla której dane równanie bądź nierówność jest prawdziwa, zależna od innych wielkości występujących we wcześniejszych rachunkach lub założeniach. W szczególności, wartości c mogą być różne w różnych miejscach dowodu, a nawet w poszczególnych miejscach ciągów równań lub nierówności. Dla przejrzystości zależność c od innych wielkości nie będzie każdorazowo wyjaśniana.
- B_r będzie oznaczać kulę otwartą o promieniu r. Od tego momentu, wszystkie kule będą współśrodkowe, zmieniać się będzie jedynie ich promień.
- $2h_0 \leqslant dist(B_R, \partial\Omega)$, $|h| \leqslant h_0$,
- $\lambda_h^t = Dv(x + the_s)$,
- $\xi_h^t = tDv(x + he_s) + (1-t)Dv(x)$,
- $\eta \in C_0^2(\Omega)$ będzie oznaczać funkcję o wartościach w $[0,1]$, dla której $supp\, \eta \subset B_R$ i η ma stałą wartość 1 na B_ρ oraz $|D\eta| \leqslant \frac{1}{R-\rho}$, $|D^2\eta| \leqslant \frac{1}{(R-\rho)^2}$, $0 < \rho < R$,
- $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ będzie oznaczać dowolnie ustaloną funkcję nieparzystą i wypukłą w przedziale $[0,\infty)$, dla której $0 \leqslant \psi'(t) \leqslant c_{\psi'}$. Łatwo zauważyć, że

$$|\psi(t)| \leqslant \psi'(t)|t|. \tag{2.5}$$

2.2. Przekształcenie równania Eulera

W równaniu (2.4) podstawimy $\varphi = \Delta_{-h}(\eta^2\psi(\Delta_h v))$. Weźmy $\beta = 2^*(\frac{\alpha}{2} - 1) + 2$. Łatwo sprawdzić, że dla $\alpha < n$ mamy $\beta \leqslant \alpha^*$. Można więc skorzystać z lematów 1.3 i 1.5. Na mocy własności (A), (B), (C) z lematu 1.5 tak wybrane φ należy do $W_0^{1,G}(B_R)$.

Używając własności (D), (E), (F) z lematu 1.5 i uwzględniając, że $supp\, \eta \subset B_R$ można przepisać pierwszy składnik równania (2.4) jako

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} \sum_{i=1}^n (G_{\xi_i}(Dv)) D_i\varphi(x)\, dx = \int_{B_R} \sum_{i=1}^n G_{\xi_i}(Dv)\Delta_{-h}(D_i(\eta^2\psi(\Delta_h v)))\, dx = \\
&= -\int_{B_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) \Big(D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v) + \eta^2\psi'(\Delta_h v) D_i(\Delta_h v) \Big)\, dx = \\
&= -\int_{B_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h G_{\xi_i}(Dv) D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v)\, dx - \int_{B_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv))\Delta_h(D_i v)\eta^2\psi'(\Delta_h v)\, dx.
\end{aligned}$$

Równanie (2.4) można więc przepisać w postaci

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv))\Delta_h(D_i v)\eta^2\psi'(\Delta_h v)\, dx = \\
&\qquad = -\int_{B_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h G_{\xi_i}(Dv) D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v)\, dx + \int_{B_R} F_u(x,v)\Delta_{-h}(\eta^2\psi(\Delta_h v))\, dx.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Trzy całki występujące w równaniu (2.6) oznaczymy kolejno przez J_1, J_2 i J_3. Podamy teraz oszacowania na każdą z tych całek. Iloraz różnicowy wewnątrz J_1 może być zapisany za pomocą całki

$$\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) = \frac{1}{h}(G_{\xi_i}(Dv(x+he_s)) - G_{\xi_i}(Dv(x))) =$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt}G_{\xi_i}(tDv(x+he_s)+(1-t)Dv(x))dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n G_{\xi_i\xi_j}(\xi_h^t)\Delta_h(D_jv)dt.$$

To równanie pozwala przekształcić J_1 do postaci

$$J_1 = \int_{B_R}\int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^n G_{\xi_i\xi_j}(\xi_h^t)\Delta_h(D_iv)\Delta_h(D_jv)\right)\eta^2\psi'(\Delta_h v)\,dt\,dx.$$

Na mocy założenia (G_7)

$$|J_1| \geqslant 2\nu\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2}|\Delta_h(Dv)|^2\eta^2\psi'(\Delta_h v)\,dt\,dx.$$

W całce J_2 wyrażenie $\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv))$ także zostanie przekształcone, ale tym razem przy użyciu λ_h^t zamiast ξ_h^t

$$\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt}G_{\xi_i}(\lambda_h^t)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_s}G_{\xi_i}(\lambda_h^t)dt,$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial x_s}$ oznacza różniczkowanie po s-tej zmiennej argumentu λ_h^t. Podstawiając do J_2 i całkując przez części

$$J_2 = -\int_{B_R}\int_0^1 \sum_{i=1}^n G_{\xi_i}(\lambda_h^t)D_s\left(D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v)\right)\,dt\,dx =$$
$$= -2\int_{B_R}\int_0^1 \langle DG(\lambda_h^t), D_sD_i(\eta^2)\rangle\psi(\Delta_h v)\,dt\,dx-$$
$$-\int_{B_R}\int_0^1 \langle DG(\lambda_h^t), D_i(\eta^2)\rangle\psi'(\Delta_h v)\Delta_h(D_sv)\,dt\,dx.$$

Te dwie całki będą dalej oznaczone jako $J_{2,1}$ i $J_{2,2}$. Z definicji η wynika, że $|D_i(\eta^2)| \leqslant \frac{2}{R-\rho}$ oraz $|D_iD_j(\eta^2)| \leqslant \frac{4}{(R-\rho)^2}$. Z założenia (G_4) i nierówności (2.5) wynika, że

$$|J_{2,1}| \leqslant \int_{B_R}\int_0^1 p\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}\frac{4}{(R-\rho)^2}\psi'(\Delta_h v)|\Delta_h v|\,dt\,dx.$$

Ponownie korzystając z założenia (G_4), własności η i nierówności $|2ab| \leqslant \nu a^2 + \frac{b^2}{\nu}$

$$|J_{2,2}| \leqslant \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 p \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} 2\eta |D_i \eta| \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h (D_s v)| \, dt \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 2 \left(\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h (D_s v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^2}{(R-\rho)^2} G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) \right)^{\frac{1}{2}} dt \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \nu \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h (D_s v)|^2 \, dt \, dx + \frac{p^2}{\nu (R-\rho)^2} \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) \, dt \, dx.$$

Teraz oszacujemy J_3. Stosując (A_1) i lemat 1.5 (E) otrzymujemy

$$|J_3| = \left| \int\limits_{B_R} \bar{F}(x,v) \Delta_{-h} (\eta^2 \psi(\Delta_h v)) \, dx - \int\limits_{B_R} \Delta_h \hat{F}(x,v) \eta^2 \psi(\Delta_h v) \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_R} |\bar{F}(x,v)| |\Delta_{-h} (\eta^2 \psi(\Delta_h v))| \, dx + \int\limits_{B_R} |\Delta_h \hat{F}(x,v)| \eta^2 |\psi(\Delta_h v)| \, dx = J_{3,1} + J_{3,2}.$$

Z (A_2) i lematu 1.6

$$J_{3,1} \leqslant Q \int\limits_{B_R} |\Delta_{-h} (\eta^2 \psi(\Delta_h v))| \, dx \leqslant Q \int\limits_{B_{R+|h|}} |\frac{d}{dx_s} (\eta^2 \psi(\Delta_h v))| \, dx.$$

Jako że $supp\, \eta \subset B_R$, więc kulę $B_{R+|h|}$ można zastąpić kulą B_R. Po zastosowaniu lematu 1.5 (D) mamy

$$J_{3,1} \leqslant Q \int\limits_{B_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| + \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h (D_s v)| \, dx.$$

Do oszacowania drugiego składnika zastosowana będzie nierówność $ab \leqslant \tau a^2 + \frac{1}{\tau} b^2$

$$J_{3,1} \leqslant Q \int\limits_{B_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| \, dx + \tau \int\limits_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h (Dv)|^2 dx + \frac{1}{4\tau} \int\limits_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) \, dx.$$

Szacując $J_{3,2}$ skorzystamy z (A_3)

$$J_{3,2} = \int\limits_{B_R} \left| \eta^2 \psi(\Delta_h v) \frac{1}{h} \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} \hat{F}(x + the_s, v + th\Delta_h v) \, dt \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 |\eta^2 \psi(\Delta_h v)| \left(|\hat{F}_{x_s}| + |\hat{F}_u| |\Delta_h v| \right) dt \, dx \leqslant$$

$$\leqslant Q \int\limits_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) \, dx.$$

Podsumowując:

$$|J_3| \leqslant Q \int\limits_{B_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| \, dx + \tau \int\limits_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h (Dv)|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{4\tau} \int\limits_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) \, dx + Q \int\limits_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) \, dx.$$

Z równania (2.6) wynika, że $J_1 = J_2 + J_3$. Porządkując odpowiednio powyższe szacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}2\nu \int_{B_R}\int_0^1 \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2}\eta^2\psi'(\Delta_h v)|\Delta_h(Dv)|^2\,dt\,dx - \nu\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2}\eta^2\psi'(\Delta_h v)|\Delta_h(D_s v)|^2\,dt\,dx-\\ -\tau\int_{B_R}\eta^2\psi'(\Delta_h v)|\Delta_h(Dv)|^2 dx \leqslant\\ \leqslant Q\int_{B_R} 2\eta|D_s\eta||\psi(\Delta_h v)|\,dx + Q\int_{B_R}\eta^2\psi'(\Delta_h v)|\Delta_h v|(1+|\Delta_h v|)\,dx+\\ +\frac{1}{4\tau}\int_{B_R}\eta^2\psi'(\Delta_h v)dx + \frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2}\int_{B_R}\int_0^1 G(\lambda_h^t)\psi'(\Delta_h v)\,dt\,dx+\\ +\frac{4p}{(R-\rho)^2}\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|\psi'(\Delta_h v)dt\,dx. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Oczywiście $|\Delta_h(D_s v)|^2 \leqslant |\Delta_h(Dv)|^2$, więc lewa strona nierówności (2.7) jest ograniczona z dołu przez

$$\int_{B_R}\int_0^1 \left(2\nu\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau\right)\eta^2\psi'(\Delta_h v)|\Delta_h(Dv)|^2\,dt\,dx.$$

2.3. Wspólne ograniczenie ilorazów różnicowych

Kolejnym krokiem dowodu będzie wykazanie, że prawa strona (2.7) jest ograniczona przez wielkości niezależne od h. Łatwo uzyskać takie szacowania dla pierwszych czterech składników. Istotnie, stosując lemat 1.6 oraz własności ψ i η, otrzymujemy:

$$Q\int_{B_R} 2\eta|D_s\eta||\psi(\Delta_h v)|\,dx \leqslant \frac{2c_{\psi'}Q}{R-\rho}\int_{B_{R+h_0}} |D_s v|\,dx,$$

$$Q\int_{B_R}\eta^2\psi'(\Delta_h v)|\Delta_h v|(1+|\Delta_h v|)\,dx \leqslant c_{\psi'}Q\int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2\,dx,$$

$$\frac{1}{4\tau}\int_{B_R}\eta^2\psi'(\Delta_h v)dx \leqslant \frac{c_{\psi'}}{4\tau}|B_R|,$$

$$\frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2}\int_{B_R}\int_0^1 G(\lambda_h^t)\psi'(\Delta_h v)\,dt\,dx \leqslant \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R-\rho)^2}\int_{B_{R+h_0}} G(Dv)\,dx,$$

gdyż jak łatwo widać z definicji λ_h^t wynika, że $\int_{B_R}\int_0^1 G(\lambda_h^t)dt\,dx \leqslant \int_{B_{R+h_0}} G(Dv)dx$.

Uzyskanie ograniczenia górnego ostatniego składnika prawej strony (2.7) wymaga więcej pracy. Niech G_k oznacza ciąg funkcji takich, że $G_k(x) = G(x)$ dla $|x| \leqslant k$ i $G_k(x) = c_0|x|^2$ dla $|x| > k$. Ciąg ten jest niemalejący i punktowo ograniczony z góry przez G. Dodatkowo niech χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Wówczas

$$\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx = \int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\leqslant 1\}}\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx +$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\in[i,i+1]\}}\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx + \int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\geqslant k\}}\frac{c_0|\lambda_h^t|^2}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx.$$

Dla $|\lambda_h^t| \leqslant 1$ zachodzi nierówność $\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} \leqslant M$ (dla $M = \sup\limits_{|\xi|=1} G(\xi)$) i z lematu 1.10 $|\Delta_h v| \leqslant 1$. Wobec tego

$$\int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\leqslant 1\}}\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx \leqslant M|B_{R+h_0}|.$$

Analogicznie dla $|\lambda_h^t| \in [i, i+1]$ korzystając z Lematu 1.10

$$\int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\in[i,i+1]\}}\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx \leqslant \int_{B_{R+|h|}}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\in[i,i+1]\}}\frac{G(\lambda_h^t)}{i}(i+1)dt\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{B_{R+h_0}}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\in[i,i+1]\}}G(\lambda_h^t)dt\,dx.$$

Sumując powyższe nierówności po i mamy

$$\sum_{i=1}^{k-1}\int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\in[i,i+1]\}}\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx \leqslant 2\int_{B_{R+2h_0}} G(Dv)dx.$$

Korzystając z lematu 1.6 oraz nierówności $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$$\int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\geqslant k\}}|\lambda_h^t||\Delta_h v|dt\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\geqslant k\}}|\lambda_h^t|^2dt\,dx + \frac{1}{2}\int_{B_R}\int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t|\geqslant k\}}|\Delta_h v|^2dt\,dx \leqslant \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2dx.$$

Rezultatem powyższych przekształceń jest

$$\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx \leqslant M|B_{R+h_0}| + 2\int_{B_{R+2h_0}} G(Dv)dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2dx.$$

Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej, powyższej nierówności i definicji G_k mamy

$$\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|\psi'(\Delta_h v)dt\,dx \leqslant c_{\psi'}\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx =$$

$$= c_{\psi'}\lim_{k\to\infty}\int_{B_R}\int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|}|\Delta_h v|dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_{\psi'}\left(M|B_{R+h_0}| + 2\int_{B_{R+2h_0}} G(Dv)dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx\right).$$

Ostatecznie mamy szacowanie prawej strony (2.7) przez wielkości niezależne od h:

$$\int_{B_R}\int_0^1 \eta^2\psi'(\Delta_h v)\left(2\nu\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau\right)|\Delta_h(Dv)|^2 dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{\psi'}Q}{R-\rho}\int_{B_{R+h_0}} |D_s v|\,dx + c_{\psi'}Q\int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2\,dx +$$

$$+\frac{c_{\psi'}}{4\tau}|B_R| + \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R-\rho)^2}\int_{B_{R+h_0}} G(Dv)\,dx +$$

$$+c_{\psi'}\left(M|B_{R+h_0}| + 2\int_{B_{R+2h_0}} G(Dv)dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx\right). \tag{2.8}$$

2.4. Dowód nierówności (2.2)

Teraz należy wykazać, że jeśli τ jest dostatecznie małe, to z dowolnego ciągu $h \to 0$ można wybrać podciąg taki, że

$$2\nu\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau > \nu c_0 - \tau > 0 \quad \text{p.w.}$$

Ponieważ $\xi_h^t \to Dv$ i $\lambda_h^t \to Dv$ w L^2 przy $h \to 0$, więc (po przejściu do podciągu) ξ_h^t i λ_h^t są również zbieżne punktowo p.w. Wobec tego

$$2\nu\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \to \nu\frac{G(Dv)}{|Dv|^2} - \tau \geqslant \nu c_0 - \tau > 0.$$

W tym kroku dowolne ψ będzie wybrane konkretnie jako $\psi(t) = t$. Dodatkowo lewą stronę nierówności (2.8) oszacujemy zstępując kulę B_R mniejszą kulą B_ρ. W tej mniejszej kuli η jest stale równa 1. Uwzględniając powyższe:

$$\int_{B_R}\int_0^1 \eta^2\psi'(\Delta_h v)\left(2\nu\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau\right)|\Delta_h(Dv)|^2 dt\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{B_\rho}\int_0^1 \left(2\nu\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^2|^2} - \tau\right)|\Delta_h(Dv)|^2 dt\,dx \geqslant (\nu c_0 - \tau)\int_{B_\rho}|\Delta_h(Dv)|^2 dx.$$

Mamy zatem $\int\limits_{B_\rho} |\Delta_h(Dv)|^2 dx \leqslant c$, gdzie stała ta pochodzi z nierówności (2.8), więc nie zależy od h. Na mocy lematu 1.8 dla $p = 2$ istnieje słaba pochodna cząstkowa drugiego rzędu i $\int\limits_{B_\rho} |D_s(Dv)|^2 dx \leqslant c$ dla tej samej wartości c.

Ponieważ h_0 było wybrane dowolnie małe, więc kule B_{R+h_0} i B_{R+2h_0} można zastąpić w górnych ograniczeniach z prawej strony nierówności (2.8) kulą B_R. Dodatkowo z założenia (G_3), mamy $|D_s v| \leqslant 1 + G(Dv)/c_0$ i $|D_s v|^2 \leqslant G(Dv)/c_0$, więc można całą prawą stronę (2.8) oszacować z góry przez

$$\frac{c_{\psi'}Q}{R-\rho} \int\limits_{B_{R+h_0}} |D_s v|\, dx + c_{\psi'}Q \int\limits_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2\, dx + \frac{c_{\psi'}}{4\tau}|B_R| +$$
$$+ \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R-\rho)^2} \int\limits_{B_{R+h_0}} G(Dv)\, dx +$$
$$+ c_{\psi'} \left(M|B_{R+h_0}| + 2 \int\limits_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int\limits_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx \right) \leqslant c \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)\, dx.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int\limits_{B_\rho} |D_s(Dv)|^2 dx \leqslant c \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)\, dx,$$

co kończy dowód nierówności (2.2).

2.5. Dowód nierówności (2.3)

Jako punkt wyjścia do dowodu nierówności (2.3) posłuży dolne oszacowanie nierówności (2.7). Stosując do niej ograniczenia na η, $D\eta$ i ψ' oraz nierówność (2.5) otrzymujemy

$$\int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 \left(2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2\, dt\, dx \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 \left(1 + 2|\Delta_h v| + |\Delta_h v|^2 + G(\lambda_h^t) + \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \right) \psi'(\Delta_h v) dt\, dx \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{B_R} \int\limits_0^1 1 + \left(|\Delta_h v| + |\Delta_h v|^2 + G(\lambda_h^t) + \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \right) \psi'(\Delta_h v) dt\, dx.$$

Z lematu 1.7 wiadomo, że $\Delta_h v$ zbiega do $D_s v$ oraz $\Delta_h(Dv)$ do $D_s(Dv)$ w L^2. Dodatkowo zauważmy, że na mocy definicji λ_h^t i ξ_h^t są równe Dv z przesuniętym argumentem. Wobec tego wszelkie funkcje zależne od λ_h^t i ξ_h^t (jako translacje w argumencie x) zbiegają w L^1 do odpowiednich funkcji zależnych od Dv (np. $\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} \to \frac{G(Dv)}{|Dv|^2}$ w L^1). Stąd wynika, że w powyższej nierówności można przejść do granicy z $h \to 0$.

Dodatkowo korzystając z założenia (G_3), podobnie jak w dowodzie nierówności (2.2), otrzymujemy

$$\int_{B_R} \eta^2 \psi'(D_s v) \left(\nu \frac{G(|Dv|)}{|Dv|^2} - \tau \right) |D_s(Dv)|^2 dx \leqslant c \int_{B_R} 1 + G(Dv)\psi'(D_s v)\, dx. \tag{2.9}$$

Również z (G_3) otrzymujemy natychmiast

$$\nu \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} - \tau \geqslant \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} \left(\nu - \frac{\tau}{c_0} \right).$$

Wobec tego, jeśli τ jest dostatecznie małe, to po zmianie stałej c, nierówność (2.9) można przepisać jako

$$\int_{B_R} \eta^2 \psi'(D_s v) \frac{G(|Dv|)}{|Dv|^2} |D_s(Dv)|^2 dx \leqslant c \int_{B_R} 1 + G(Dv)\psi'(D_s v)\, dx. \tag{2.10}$$

Następnym krokiem będzie udowodnienie, że powyższa nierówność pozostaje prawdziwa po opuszczeniu założenia o ograniczoności ψ'. Niech $\widetilde{\psi}$ spełnia wszystkie założenia wcześniej ustalone dla ψ, ale niech jego pochodna $\widetilde{\psi}'$ jest nieograniczona. Dla takiego $\widetilde{\psi}$ definiujemy ciąg $\widetilde{\psi}_k$ następująco: $\widetilde{\psi}_k(t) = \widetilde{\psi}(t)$ dla $|t| < k$ i $\widetilde{\psi}_k'(t) = \widetilde{\psi}'(k)$ dla $|t| \geqslant k$. Każde $\widetilde{\psi}_k$ ma ograniczoną pochodną, więc nierówność (2.10) zachodzi dla $\widetilde{\psi}_k$. Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej, nierówność (2.10) jest prawdziwa także dla $\widetilde{\psi}$.

Wobec powyższego w dalszych rozważaniach ψ' może być nieograniczone. Korzystając z faktu, że ψ' jest parzysta nierówność (2.10) można przepisać jako

$$\int_{B_R} \eta^2 \psi'(|D_s v|) \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} |D_s(Dv)|^2 dx \leqslant c \int_{B_R} 1 + G(Dv)\psi'(|D_s v|)\, dx. \tag{2.11}$$

Zdefiniujmy funkcję $\Phi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Phi(t) = 1 + c_\Phi \int_0^t \sqrt{\psi'(\tau)} \cdot \tau^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\tau, \tag{2.12}$$

gdzie $c_\Phi > 0$. Wprost z definicji i nierówności $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ wynika, że

$$|D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 \leqslant 2|D\eta|^2(\Phi(|D_s v|))^2 + 2\eta^2 c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|)|D_s v|^{\alpha-2}|D(D_s v)|^2. \tag{2.13}$$

Łatwo zauważyć, że z (G_5) mamy $|D_s v|^{\alpha-2} \leqslant c\frac{G(Dv)}{|Dv|^2}$. Znów wychodząc od nierówności $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ dostajemy także

$$\begin{aligned}(\Phi(|D_s v|))^2 &\leqslant \left(1 + c_\Phi \sqrt{\psi'(|D_s v|)} \cdot |D_s v|^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot |D_s v|\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant 2 + 2c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|)|D_s v|^\alpha \leqslant 2 + 2c\,\psi'(|D_s v|)G(Dv). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Stosując łącznie nierówności (2.11), (2.13) i (2.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx \leqslant \\ \leqslant 2\int_{B_R} |D\eta|^2(\Phi(|D_s v|))^2 dx + 2\int_{B_R} \eta^2 c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|)\frac{G(Dv)}{|Dv|^2}|D(D_s v)|^2 dx \leqslant \\ \leqslant 2\int_{B_R} 2 + 2c\,\psi'(|D_s v|)G(Dv)dx + c\int_{B_R} 1 + G(Dv)\psi'(|D_s v|)\,dx = \\ = c\int_{B_R} 1 + G(Dv)\psi'(|D_s v|)dx.\end{aligned}$$

Z nierówności Sobolewa i definicji η wynika, że:

$$\left(\int_{B_\rho} (\Phi(|D_s v|))^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2*}} \leqslant C\int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx,$$

co razem z wcześniejszą nierównością daje

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_\rho} (\Phi(|D_s v|))^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2*}} &\leqslant C\int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx \leqslant \\ &\leqslant c\int_{B_R} (1 + G(Dv)\psi'(|D_s v|))\,dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Niech $\gamma \geqslant 0$, $c_\Phi = \gamma + \frac{\alpha}{2}$ i niech $\psi(t) = \frac{1}{2\gamma+1}t^{2\gamma+1}$ dla $t \geqslant 0$. Stąd $\psi'(t) = t^{2\gamma}$. Wówczas

$$\Phi(t) = 1 + \left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)\int_0^t \tau^{\gamma+\frac{\alpha}{2}-1}d\tau = 1 + t^{\gamma+\frac{\alpha}{2}}.$$

Stąd wynika, że

$$(\Phi(|D_s v|))^{2^*} \geqslant 1 + \left((\gamma + \frac{\alpha}{2})\int_0^{|D_s v|} \tau^{\gamma+\frac{\alpha}{2}-1}d\tau\right)^{2^*} = 1 + |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})}.$$

Stosując definicję ψ oraz powyższą nierówność do (2.15) otrzymujemy

$$\left(\int_{B_\rho} 1 + |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant c\int_{B_R} 1 + G(Dv)|D_s v|^{2\gamma}dx.$$

Wobec tego

$$\int_{B_\rho} 1 + |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})}dx \leqslant c\left(\int_{B_R} 1 + G(Dv)|D_s v|^{2\gamma}dx\right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

Biorąc powyższą nierówność dla wszystkich $s = 1, 2, \ldots, n$, sumując stronami a następnie korzystając z nierówności $\sum_{i=i}^{n} a_i^{\beta} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i)^{\beta}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\rho} n + \sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})} dx \leqslant & c \sum_{s=1}^{n} \left(\int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)|D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2^*}{2}} \leqslant \\ \leqslant & c \left(\int\limits_{B_R} n + G(Dv) \sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2^*}{2}}. \qquad (2.16)\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla wszystkich nieujemnych i niemalejących funkcji h_1 i h_2 zachodzi nierówność

$$n \sum_{i=1}^{n} h_1(a_i) \cdot h_2(a_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} h_1(a_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} h_2(a_i).$$

Będzie ona zastosowana do lewej strony (2.16) razem z założeniem (G_6). Niech A_1 oznacza zbiór $\{x : |Dv(x)| \geqslant 1\}$. Szacowanie lewej strony (2.16) wykonamy osobno dla całki po $B_\rho \cap A_1$ oraz $B_\rho \setminus A_1$. Dla pierwszego z tych zbiorów mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\rho \cap A_1} n + \sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})} dx = & \int\limits_{B_\rho \cap A_1} n + \sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2^*(\frac{\alpha}{2}-1)+2} \cdot |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} dx \geqslant \\ \geqslant & \int\limits_{B_\rho \cap A_1} n + \frac{1}{n} \left(\sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2^*(\frac{\alpha}{2}-1)+2} \right) \left(\sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx \geqslant \\ \geqslant & c \int\limits_{B_\rho \cap A_1} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx.\end{aligned}$$

Pamiętając, że $M = \sup\limits_{|\xi|=1} G(\xi)$, $\gamma \geqslant 0$ i $2^* \geqslant 2$ łatwo widać, że dla $|\xi| \leqslant 1$ zachodzą nierówności

$$\sum_{s=1}^{n} |\xi_s|^{2^*(\gamma+1)-2} \leqslant |\xi|^2 \quad \text{i} \quad G(\xi) \sum_{s=1}^{n} |\xi_s|^{2^*(\gamma+1)-2} \leqslant M.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\rho \setminus A_1} n + \sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})} dx \geqslant \int\limits_{B_\rho \setminus A_1} n\, dx \geqslant & \frac{1}{2} \int\limits_{B_\rho \setminus A_1} n + \frac{n}{M} M\, dx \geqslant \\ \geqslant & \frac{1}{2} \int\limits_{B_\rho \setminus A_1} n + \frac{n}{M} G(Dv) \left(\sum_{s=0}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx.\end{aligned}$$

W rezultacie prawdziwa jest także nierówność

$$\int\limits_{B_\rho} n + \sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})} dx \geqslant c \int\limits_{B_\rho} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx.$$

Nierówność (2.16) przyjmuje teraz postać

$$\left(\int\limits_{B_\rho} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^{n} |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant c \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2\gamma} \right) dx. \qquad (2.17)$$

Aby wykazać, że $|Dv| \in L^\infty$ stworzymy ciąg całek z rosnących potęg $|D_s v|$. Ciąg ten powstanie w oparciu o nierówność (2.17). Wprowadźmy oznaczenia: $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{i+1} = \frac{2^*}{2}(\gamma_i + 1) - 1$ oraz $R_i = \frac{R}{2} + \frac{R}{2^{i+1}}$. Wprost z tej definicji wynika, że $\gamma_i = \left(\frac{2^*}{2}\right)^i - 1$, $\gamma_i \to \infty$ oraz $R_i \to \frac{R}{2}$. Podstawiając w (2.17) γ_i zamiast γ, R_i zamiast R oraz R_{i+1} zamiast ρ mamy

$$\left(\int\limits_{B_{R_{i+1}}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^{n} |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant c \int\limits_{B_{R_i}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2\gamma_i} \right) dx. \quad (2.18)$$

Zauważmy, że w (2.18) całki wyższych potęg $|D_s v|$ są szacowane z góry przez całki mniejszych potęg. Niech teraz

$$E_i = \left(\int\limits_{B_{R_i}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2\gamma_i} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_i + 1}}.$$

Zauważmy w szczególności, że $E_0 = \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)\, dx$. Wprost z definicji γ_i wynika, że $\frac{\gamma_{i+1}+1}{\gamma_i+1} = \frac{2^*}{2}$. Na mocy (2.18) prawdziwe jest szacowanie

$$E_{i+1} \leqslant c^{\frac{1}{\gamma_i+1}} E_i \leqslant \left(\prod_{j=0}^{i} c^{\frac{1}{\gamma_j+1}} \right) E_0.$$

Bezpośredni rachunek pokazuje, że

$$\lim_{i\to\infty} \prod_{j=0}^{i} c^{\frac{1}{\gamma_j+1}} = \exp\left(\ln c \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2^*} \right)^j \right) = c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}}.$$

Wobec tego

$$\infty > c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}} E_0 = c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}} \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)\, dx \geqslant \lim_{i\to\infty} E_{i+1}.$$

Pamiętając, że $B_{\frac{R}{2}} \subset B_{R_{i+1}}$ oraz korzystając z (G_3) i lematu 1.9

$$\lim_{i\to\infty} E_{i+1} = \lim_{i\to\infty} \left(\int\limits_{B_{R_{i+1}}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{i\to\infty} \left(c_0 \int\limits_{B_{\frac{R}{2}}} \left(|Dv|^2 \sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{i\to\infty} \left(c_0 \int\limits_{B_{\frac{R}{2}}} \left(\sum_{s=1}^{n} |D_s v|^{2\gamma_{i+1}+2} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} = \operatorname*{ess\,sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2.$$

Podsumowując te szacowania mamy

$$\infty > c \int\limits_{B_R} 1 + G(Dv)\, dx = cE_0 \geqslant \lim_{i\to\infty} E_{i+1} = \operatorname*{ess\,sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2,$$

co dowodzi, że $|Dv| \in L^\infty$ i jednocześnie kończy dowód nierówności (2.3).

Rozdział 3

Rozwiązania heterokliniczne problemu Allena-Cahna

W tym rozdziale sformułowane i udowodnione zostanie twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych problemu typu Allena-Cahna. Ze względu na charakter tych rozwiązań warto wyszczególnić jedną ze zmiennych, względem której te rozwiązania będą heterokliniczne. Będziemy więc używali zapisu $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, zamiast $x \in \mathbb{R}^n$, przy czym oczywiście nie jest konieczne, aby x był pierwszą ze zmiennych. W pozostałych współrzędnych y poszukiwane rozwiązania mają być 1-okresowe. Po takim podstawieniu równanie będzie postaci

$$-\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x, y))) + F_u(x, y, u(x, y)) = 0, \tag{AC}$$

gdzie $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. Niech $F \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ spełnia założenia standardowe dla problemów typu Allena Cahna:

(F_1) F jest 1-okresowa w x i wszystkich współrzędnych y,

(F_2) $F(x, y, 0) = F(x, y, 1) = 0$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^n$,

(F_3) $F(x, y, s) > 0$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ i $s \in (0, 1)$,

(F_4) $F(x, y, s) \geqslant 0$ dla $(x, y, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Najprostszym przykładem jest funkcja F niezależna od x i y jak na przykład $F(x, y, s) = s^2(1 - s)^2$ lub $\sin^2(\pi s)$. Oczywiście F może też zależeć od x i y, np. $F(x, y, s) = u^2(u - 1)^2(u^2 + \sin 2\pi x + \sin 2\pi y + 3)$.

W tym rozdziale pozostaną w mocy wszystkie wcześniejsze założenia na funkcję G, czyli (G_1)-(G_7). Dodatkowo będziemy zakładać warunek ∇_2. Dzięki temu przestrzeń $W^{1,G}$ będzie refleksywna.

Z założeń (F_1) - (F_4) bezpośrednio wynika, że równanie (AC) posiada dwa trywialne rozwiązania stałe równe 0 lub 1. Celem będzie wykazanie istnienia rozwiązań heteroklinicznych w zmiennej x (tzn. zbieżnych do 0 przy $x \to -\infty$ i do 1 przy $x \to \infty$) i okresowych w zmiennych y. Istotnym utrudnieniem w rozwiązywaniu tego problemu metodami wariacyjnymi jest fakt, że naturalną dziedziną takich rozwiązań jest $\mathbb{R}^n$. Wobec czego nie są to funkcje całkowalne na swojej dziedzinie. Aby użyć metod wariacyjnych będziemy korzystać z odpowiednio skonstruowanej przestrzeni. Nie będzie to opisana wcześniej przestrzeń Orlicza-Sobolewa, ale jej podprzestrzeń.

Niech E_1 oznacza podprzestrzeń $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ zawierającą funkcje u, które są 1-okresowe we wszystkich współrzędnych y i spełniające warunek $\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^G(\mathbb{R}\times[0,1]^{n-1})} < \infty$. W przestrzeni E_1 można wprowadzić normę daną wzorem

$$\|u\|_{E_1} = \|u\|_{\mathrm{L}^2([0,1]^n)} + \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^G(\mathbb{R}\times[0,1]^{n-1})}. \tag{3.1}$$

Metryka indukowana przez normę $\|\cdot\|_{E_1}$ jest równoważna w E_1 metryce przestrzeni $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ponadto E_1 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Z tego powodu E_1 jest refleksywną przestrzenią Banacha. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- dla każdego całkowitego k i dla każdej funkcji $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiujemy

$$\tau_k u(x,y) = u(x-k,y), \tag{3.2}$$

- rozwiązań heteroklinicznych będziemy szukać w zbiorze

$$\Gamma = \{u \in E_1 : \tau_{-1}u \geqslant u \text{ p.w.} \wedge \lim_{k\to-\infty} \tau_{-k}u = 0 \wedge \lim_{k\to+\infty} \tau_{-k}u = 1 \text{ w } \mathrm{L}^2_{loc}\}. \tag{3.3}$$

  Zauważmy, że jeśli $u \in \Gamma$, to $0 \leqslant u \leqslant 1$ p.w. Warunki definiujące zbiór Γ zawierają granice w L^2_{loc} zamiast klasycznych granic definiujących heterokliniczność, gdyż w tym momencie nie możemy jeszcze stwierdzić, że elementy Γ w ogóle posiadają granice w klasycznym sensie.

- Operator L jest dany wzorem $L(u) = G(\nabla u) + F(x,y,u)$ zaś funkcjonał $I\colon E_1 \to [0,\infty]$ jest zdefiniowany wzorem:

$$I(u) = \int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} L(u)\,dx. \tag{3.4}$$

- Infimum funkcjonału I na zbiorze Γ będzie oznaczone jako

$$c_\Gamma = \inf_{u\in\Gamma} I(u).$$

Wykażemy, że funkcjonał I osiąga na zbiorze Γ minimum, które jest klasycznym rozwiązaniem problemu (AC).

Twierdzenie 3.1. *Istnieje funkcja* $v \in \Gamma$ *będąca klasycznym heteroklinicznym rozwiązaniem* (AC), *dla której* $I(v) = c_\Gamma$, $\tau_{-1}u < u$ *oraz* $0 < v < 1$.

Należy zwrócić uwagę, że z założeń (F_1)-(F_4) bezpośrednio nie wynikają założenia (A_1)-(A_3). Jednak poszukując rozwiązań heteroklinicznych, czyli zawartych w Γ ograniczamy ich zbiór wartości do przedziału $[0,1]$. Założenia (F_1)-(F_4) sprawiają, że funkcja F obcięta do zbioru $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ jest ograniczona i ma ograniczone pochodne. Wobec tego spełnione są także (A_1)-(A_3) i twierdzenie 2.1 będzie mogło być zastosowane.

3.1. Rozwiązanie problemu wariacyjnego

Zauważmy, że zarówno zbiór Γ jak i funkcjonał I są niezmiennicze ze względu na τ_k w następującym sensie: $u \in \Gamma \Leftrightarrow \tau_k u \in \Gamma$ oraz $I(u) = I(\tau_k u)$. Oznacza to więc, że jeśli u jest nietrywialnym minimum I, to nie jest ono jedyne, gdyż każde $\tau_k u$ także minimalizuje I.

Oczywiście $I(v) \geqslant 0$ dla wszystkich $v \in \Gamma$ więc $c_\Gamma \geqslant 0$. Niech $\{u_j\} \subset \Gamma$ oznacza ciąg minimalizujący I. Ciąg wartości $I(u_j)$ jest zbieżny do c_Γ, a więc jest ograniczony, tzn. $I(u_j) < M$ dla wszystkich j. Stąd wynika, że ciąg $\{u_j\}$ jest ograniczony w normie $\|\cdot\|_{E_1}$, gdyż

$$\int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} G(\nabla u_j)\, dx \leqslant \int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} G(\nabla u_j) + F(x,y,u_j)\, dx = I(u_j) < M$$

oraz $\int_{[0,1]^n} |u_j|\, dx\, dy$ jest ograniczony przez 1, jako że $u_j \in \Gamma$.

Powyżej widać dlaczego ważne jest powiązanie przestrzeni $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}$ z postacią funkcjonału. W tym szacowaniu nie byłoby możliwe zastosowanie wspomnianych we wstępie wyników z artykułu [20].

Ponieważ I jest niezmiennicze ze względu na τ_k, więc bez straty ogólności można założyć, że ciąg u_j został tak wybrany, aby

$$\int\limits_{[0,1]^{n-1}} \int\limits_{[0,1]} u_j dx dy > \frac{1}{2}, \quad \text{oraz} \quad \int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{[k-1,k]} u_j dx \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{dla } k \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Rzeczywiście, u_j można zastąpić przez $\tau_{-k_j} u_j$ gdzie k_j jest najmniejszym takim k, że

$$\int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{[k-1,k]} u_j dx > \frac{1}{2}.$$

Takie k_j istnieje gdyż wprost z definicji Γ wynika, że

$$\int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{[k-1,k]} u_j dx \to 0 \text{ dla } k_j \to -\infty \text{ oraz } \int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{[k-1,k]} u_j dx \to 1 \text{ dla } k_j \to +\infty.$$

Taka modyfikacja ciągu minimalizującego będzie potrzebna w Lemacie 3.2.

Przestrzeń E_1 jest refleksywna, więc istnieje $v \in E_1$ oraz podciąg $\{u_j\}$ (oznaczany wciąż jako $\{u_j\}$) słabo zbieżny do v w E_1. Z tego podciągu można również wybrać podciąg silnie zbieżny L^2_{loc} i punktowo prawie wszędzie.

Wykażemy teraz, że $I(v) \leqslant M$. Istotnie, dla każdego j, n: $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{-n}^{n} L(u_j)\, dx \leqslant M$. Zbiór po którym całkujemy jest teraz ograniczony, więc ze słabej półciągłości z dołu tego funkcjonału mamy $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{-n}^{n} L(v)\, dx \leqslant M$ dla wszystkich n . Biorąc $n \to \infty$ można stwierdzić, że $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} L(v)\, dx \leqslant M$.

W poniższym lemacie będzie potrzebna równoważna postać funkcjonału I. Niech:

$$a_k(u) = \int\limits_{[0,1]^{n-1}} dy \int\limits_{[k,k+1]} L(u)dx \quad \text{ i } \quad I(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(u).$$

Lemat 3.2. *Powyżej zdefiniowana funkcja v należy do Γ.*

Dowód: Dla wszystkich j, $\tau_{-1}u_j \geqslant u_j$ p.w. oraz $u_j \to v$ p.w. więc $\tau_{-1}v \geqslant v$ p.w. Należy wykazać, że $\tau_{-k}v \to 1$ w L^2 przy $k \to +\infty$. Ciąg $\tau_{-k}v$ jest ograniczony w $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})$, ponieważ $I(\tau_{-k}v) = I(v) \leqslant M$. Istnieje v^* takie, że $\tau_{-k}v \to v^*$ słabo w $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})$, silnie w L^2_{loc} oraz $v^* \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}([0,1]^n)$. Mamy również $a_k(v) = a_0(\tau_{-k}v) \to a_0(v^*)$, gdyż $I(v)$ jest skończone. Wobec tego $a_k(v) \to 0$. Z definicji a_0 otrzymujemy $v^* = const$ oraz $\int_{[0,1]^n} F(x, y, v^*)dxdy = 0$. To oznacza, że $v^* \equiv 0$ lub $v^* \equiv 1$. Z równania (3.5) wynika, że $v^* \equiv 1$.

Analogicznie dowodzi się, że $\tau_{-k}v \to 0$ w L^2 przy $k \to -\infty$. □

Teraz można pokazać, że $I(v) = c_\Gamma$. Oczywiście $I(v) \geqslant c_\Gamma$. Dla ustalonego $\epsilon > 0$ oraz dostatecznie dużych j

$$\sum_{-n}^{n} a_k(u_j) \leqslant I(u_j) \leqslant c_\Gamma + \epsilon \quad \text{dla wszystkich } n.$$

Jeśli $j \to \infty$, to

$$\sum_{-n}^{n} a_k(v) \leqslant c_\Gamma + \epsilon \quad \text{dla wszystkich } n.$$

Jeśli $n \to \infty$, to $I(v) \leqslant c_\Gamma + \epsilon$ dla wszystkich $\epsilon > 0$ więc $I(v) = c_\Gamma$.

Pozostaje wykazać, że v jest słabym rozwiązaniem równania (AC), a w konsekwencji na mocy odpowiednich twierdzeń o regularności, będzie wykazane, że v jest również klasycznym rozwiązaniem. Dodatkowo wykażemy, że $0 < v < 1$.

Aby to osiągnąć, problem będzie analizowany lokalnie. Poniżej oraz w całym kolejnym podrozdziale 3.2 rozróżnienie x i y nie będzie konieczne, więc dla skrócenia zapisu będzie stosowane skrócone oznaczenie $z = (x, y)$. Kulę o środku $z \in \mathbb{R}^n$ i promieniu r oznaczymy jako $B_r(z)$.

Definicja 3.3. *Dla każdego $r \leqslant \frac{1}{2}$ i $z \in [0,1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ zdefiniujmy*

$$Z(B_r(z), v) = \Big\{u \in E_1 : u = v \ na \ B_{\frac{1}{2}}(z) - B_r(z)\Big\}$$

oraz funkcjonał $\Phi_{B_r(z),v} : Z(B_r(z), v) \to \mathbb{R}$

$$\Phi_{B_r(z),v}(u) = \int\limits_{B_r(z)} L(u)dxdy.$$

Łatwo sprawdzić, że $Z(B_r(z), v)$ jest domkniętym i wypukłym podzbiorem E_1. Infimum $\Phi_{B_r(z),v}$ na $Z(B_r(z), v)$ będzie oznaczane symbolem $c(B_r(z), v)$. Zbiór minimów funkcjonału Φ będzie oznaczony jako

$$M(B_r(z), v) = \{w \in Z(B_r(z), v) : \Phi_{B_r(z),v}(w) = c(B_r(z), v)\}.$$

Poniżej zostanie wykazane, że v nie tylko minimalizuje globalny funkcjonał I, ale także lokalne funkcjonały Φ czyli, że $v \in M(B_r(z), v)$.

Twierdzenie 3.4. *Dla każdego $z \in \mathbb{R} \times [0,1]^{n-1}$ i $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ funkcja v jest jednoznacznie wyznaczonym minimum $\Phi_{B_\epsilon(z),v}$ na $Z(B_\epsilon(z), v)$.*

Z twierdzenia 3.4 wynika, że v jest słabym rozwiązaniem (AC) na każdej kuli o odpowiednio małym promieniu. Stąd, v jest słabym rozwiązaniem globalnie.

Zakładając prawdziwość twierdzenia 3.4 można zastosować twierdzenie 2.1, aby wykazać, że słabe rozwiązanie v spełnia lokalnie warunek Lipschitza. W celu uzyskania wyższej regularności poniżej zostaną zacytowane (w uproszczonej formie) twierdzenia 6.2 i 6.3 z rozdziału 4 z klasycznej monografii [16]. Są to odpowiednio:

Twierdzenie 3.5. *Niech $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania*

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0$$

gdzie a oraz a_i są różniczkowalne oraz ograniczone (wraz z pochodnymi) na zbiorze wartości u i u_x. Niech także a_i spełniają warunek eliptyczności. Wówczas u jest klasy $C^{1,\alpha}(\Omega') \cap W^{2,2}(\Omega')$ przy dowolnie ustalonym $\Omega' \subset \Omega$.

Twierdzenie 3.6. *Niech $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ jest słabym rozwiązaniem problemu z poprzedniego twierdzenia. Niech również funkcje a_i spełniają warunek eliptyczności oraz $a_i \in C^{l-1,\beta}$, $a \in C^{l-2,\beta}$ $(l \geqslant 2)$. Wówczas $u \in C^{l,\beta}$.*

Twierdzenia te gwarantują więc, że elementy $M(B_r(z), v)$ będące dzięki twierdzeniu 2.1 klasy $W^{1,\infty}$, są tak naprawdę rozwiązaniami klasy C^2. Twierdzenia mogą być tu stosowane przy $a_i = G_{\xi_i}$ oraz $a = F_u$ ponieważ warunek eliptyczności wynika z (G_7).

Dowód twierdzenia 3.4 będzie podzielony na szereg lematów i zostanie przeprowadzony w następnym podrozdziale.

3.2. Własności funkcjonału Φ - dowód Twierdzenia 3.4

W tym podrozdziale szukane będą minima $\Phi_{B_r(z)}$ na zbiorze $Z(B_r(z), v)$, oznacza to w konsekwencji rozwiązywanie równania (AC) jako problemu brzegowego na kuli $B_r(z)$. Badane będą także własności tych minimów. Sformułowania i dowody lematów 3.7, 3.10, 3.11 są zbliżone do zaprezentowanych w [24]. Ze względu na bardziej ogólną postać równania (w szczególności użycie funkcji G i postawienie problemu w przestrzeni Orlicza-Sobolewa) dowody nie mogą być jednak powtórzone dosłownie. Lemat 3.8 także jest inspirowany [24], ale w tym przypadku dowód jest istotnie inny.

Lemat 3.7. *Dla każdego $r < \frac{1}{2}$ istnieje $w \in Z(B_r(z), v)$ takie, że $\Phi_{B_r(z)}(w) = c(B_r(z), v)$.*

Dowód: Postępowanie będzie podobne do znajdowania minimum funkcjonału I. Niech $\{u_j\} \subset Z(B_r(z), v)$ jest ciągiem minimalizującym dla funkcjonału $\Phi_{B_r(z)}$. Jest to ciąg ograniczony w przestrzeni refleksywnej $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(B_{\frac{1}{2}}(z))$, więc posiada podciąg słabo zbieżny do pewnego $w \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(B_{\frac{1}{2}}(z))$. Zbiór $Z(B_r(z), v)$ jest domknięty i wypukły w $\mathrm{W}^{1,\mathrm{G}}(B_{\frac{1}{2}}(z))$, więc $w \in Z(B_r(z), v)$. $\Phi_{B_r(z)}$ jest już całką po zbiorze ograniczonym, więc $\Phi_{B_r(z)}$ jest słabo półciągły z dołu i $\Phi_{B_r(z)}(w) = c(B_r(z), v)$. $\square$

Dzięki twierdzeniu 2.1 funkcja w oraz każde inne minimum $\Phi_{B_r(z)}$ w zbiorze $M(B_r(z), v)$ należy do $W^{1,\infty}_{loc}$ tzn. spełnia lokalnie warunek Lipschitza.

Lemat 3.8. *Zbiór $M(B_r(z), v)$ jest uporządkowany w następującym sensie: jeśli $\varphi, \psi \in M(B_r(z), v)$ oraz $\varphi \not\equiv \psi$, to $\varphi < \psi$ albo $\varphi > \psi$ w $B_r(z)$.*

Powyższy lemat jest zbliżony w treści do Lematu 4.2 z [21], którym inspirowali się również autorzy [24]. Dowód lematu będzie istotnie inny niż podobnych lematów z [21] czy [24], gdyż zamiast tradycyjnej zasady maksimum wykorzystane będzie ogólniejsze twierdzenie będące konsekwencją twierdzenia 2.5.3 z [23]:

Twierdzenie 3.9. *Rozważmy równanie* $\mathrm{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0$ *na zbiorze otwartym, spójnym i ograniczonym. Niech $A(x, z, \xi)$ jest klasy C^1, zaś B jest ciągła i spełnia* *lokalnie warunek Lipschitza. Niech macierz $D_\xi A$ jest dodatnio określona zaś u i v oznaczają dwa rozwiązania tego równania klasy $C^0 \cap W^{1,2}_{loc}$, dla których $u \leqslant v$. Wówczas albo $u \equiv v$ albo $u < v$ w całej dziedzinie.*

Teraz przejdziemy do dowodu lematu 3.8.

Dowód: Niech $\chi = \max\{\varphi, \psi\}$ i $\xi = \min\{\varphi, \psi\}$. Łatwo widać, że

$$\Phi_{B_r(z)}(\chi) + \Phi_{B_r(z)}(\xi) = \Phi_{B_r(z)}(\varphi) + \Phi_{B_r(z)}(\psi) = 2c(B_r(z), v),$$

więc χ i ξ należą do $M(B_r(z), v)$. Oczywistym jest również, że $\chi \geqslant \xi$. Jeśli więc $\varphi \not\equiv \psi$, to $\chi \not\equiv \xi$. Oczywiście χ i ξ, jako słabe rozwiązania, na mocy twierdzenia 2.1 spełniają warunek Lipschitza. Z twierdzenia 3.9 wynika, że albo $\chi > \xi$ albo $\chi \equiv \xi$ w $B_r(z)$. Jeśli $\chi > \xi$, to nie istnieje takie $z_0 \in B_r(z)$, żeby $\varphi(z_0) = \psi(z_0)$. Zatem z ciągłości $\varphi < \psi$ lub $\varphi > \psi$ w $B_r(z)$. Jeśli zaś $\chi \equiv \xi$, to łatwo zauważyć, że $\varphi \equiv \psi$. □

Konsekwencją powyższego lematu jest fakt, że $M(B_r(z), v)$ zawiera element najmniejszy w sensie porządku zdefiniowanego w lemacie. Istotnie, gdyby taki element nie istniał, to można by wybrać malejący ciąg $w_n \in M(B_r(z), v)$. Ciąg taki jest ograniczony więc można w nim wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego $w^* \in Z(B_r(z), v)$. Z własności ciągu w_n i funkcjonału Φ wynika, że $\Phi(w^*) = c(B_r(z), v)$, a więc $w^* \in M(B_r(z), v)$ oraz $w^* < w_n$, czyli w^* jednak jest elementem najmniejszym w $M(B_r(z), v)$. Najmniejszy element zbioru $M(B_r(z), v)$ oznaczymy dalej jako w_z.

Będziemy chcieli pokazać, że w_z jest w istocie równe v w kuli $B_r(z)$, a nie tylko na pierścieniu $B_{\frac{1}{2}}(z) - B_r(z)$. Zdefiniujmy ciąg punktów $z_j = z + (j, 0)$ dla $j \in \mathbb{Z}$ oraz nową funkcję $\widetilde{v}$ taką, że dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}$ zachodzą równości

$$\widetilde{v} = w_{z_j} \quad \text{w} \quad B_{\frac{1}{2}}(z_j) \qquad \text{oraz} \qquad \widetilde{v} = v \quad \text{w} \quad \mathbb{R} \times [0,1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_r(z_n).$$

Istotnym problemem dla dalszego dowodu jest fakt, że taka lokalna zamiana funkcji v na w_z może spowodować, że otrzymana funkcja nie jest już elementem Γ.

Lemat 3.10. *Powyżej zdefiniowana funkcja $\widetilde{v}$ należy do Γ.*

Dowód: Należy wykazać nierówność $\widetilde{v} \leqslant \tau_{-1}\widetilde{v}$. Jeśli nie byłaby ona prawdziwa, to dla pewnego j istniałby punkt $(x_0, y_0) \in B_r(z_j)$ taki, że $w_{z_j}(x_0, y_0) > \tau_{-1} w_{z_j}(x_0, y_0) = w_{z_{j+1}}(x_0 + 1, y_0)$. Wówczas niech $\psi(x, y) = w_{z_{j+1}}(x + 1, y)$, $\phi(x, y) = w_{z_j}(x, y)$ dla każdego $(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}(z_j)$ oraz niech $\chi = \max\{\psi, \phi\}$, $\xi = \min\{\psi, \phi\}$. Nierówności $\xi = \phi = v \leqslant \tau_{-1} v = \psi = \chi$ zachodzą w $B_{\frac{1}{2}}(z_j) - B_r(z_j)$. Ponadto $\xi \in Z(B_r(z_j), v)$ i $\xi \in Z(B_r(z_{j+1}), v)$, więc $\Phi_{B_r(z_j)}(\xi) + \Phi_{B_r(z_j)}(\chi) = \Phi_{B_r(z_j)}(\phi) + \Phi_{B_r(z_j)}(\psi) = 2c(B_r(z_j), v)$ oraz $\Phi_{B_r(z_j)}(\chi) =$

$\Phi_{B_r(z_{j+1})}(\tau_1\chi)$. Wobec tego $\chi \in M(B_r(z_j), v)$ i $\tau_1\chi \in M(B_r(z_{j+1}), v)$. Zastosowanie definicji $\widetilde{v}$ i lematu 3.8 daje $\chi \geqslant w_{z_j} = \phi$, a więc $w_{z_j}(x_0, y_0) \leqslant \chi(x_0, y_0) \leqslant \psi(x_0, y_0) = w_{z_{j+1}}(x_0 + 1, y_0)$ co jest sprzeczne z definicją punktu (x_0, y_0). □

Jako wniosek z powyższego lematu mamy $I(v) \leqslant I(\widetilde{v})$. W szczególności dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\iint\limits_{B_r(z_j)} L(v)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{B_r(z_j)} L(\widetilde{v})dx\,dy = \iint\limits_{B_r(z_j)} L(w_{z_j})\,dx\,dy = c(B_r(z_j)).$$

Jeśli $j = 0$, to $\iint_{B_r(z)} L(v)\,dx\,dy = c(B_r(z))$, czyli $\Phi_{B_r(z)}(v) = c(B_r(z))$.

Ostatni lemat w tym podrozdziale kończy dowód Twierdzenia 3.4.

Lemat 3.11. *Funkcja v jest jedynym elementem w zbiorze $Z(B_r(z), v)$ minimalizującym $\Phi_{B_r(z)}$.*

Dowód: Dla każdej dziedziny $D \subset B_r(z)$ można wybrać minimum ψ funkcjonału $\Phi_D = \Phi_{B_r(z)}|_D$ takie, że $\psi = v$ w $B_r(z) \setminus D$. Należy pokazać, że ψ jest wyznaczone jednoznacznie i że $\psi = v$. Z oczywistej nierówności $\Phi_D(\psi) \leqslant \Phi_D(v)$ wynika także $\Phi_{B_r(z)}(\psi) \leqslant \Phi_{B_r(z)}(v)$. Ponieważ $\psi \in Z(B_r(z), v)$, więc $\Phi_{B_r(z)}(\psi) \geqslant \Phi_{B_r(z)}(v)$, a stąd $\psi \in M(B_r(z), v)$. Jako, że $\psi = v$ w $B_r(z) \setminus D$ to z Lematu 3.8 wynika, że $\psi = v$ w $B_r(z)$. □

3.3. Zakończenie dowodu Twierdzenia 3.1

Ponieważ $v \in \Gamma$, więc $\tau_{-k}v \to 0$ (lub 1) w L^2 przy $k \to -\infty$ (lub $+\infty$). Funkcja v jest klasy C^2, zatem ta zbieżność zachodzi również punktowo

$$\lim_{x\to-\infty} v(x, y) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty} v(x, y) = 1.$$

Zakończenie dowodu Twierdzenia 3.1 wymaga jedynie wykazania nierówności ostrych

$$0 < v < 1 \quad \text{oraz} \quad v < \tau_{-1}v.$$

Odpowiednie nierówności nieostre wynikają wprost z definicji Γ.

Rozpoczniemy od dowodu nierówności $v < \tau_{-1}v$. Przypomnijmy, że funkcje v oraz $\tau_{-1}v$ są rozwiązaniami (AC). Wobec tego, gdyby w jakimś punkcie $z \in \mathbb{R} \times [0, 1]^{n-1}$ zachodziła równość $v(z) = \tau_{-1}v(z)$, to na mocy twierdzenia 3.9 taka równość zachodziła by również w $B_{\frac{1}{2}}(z)$. Biorąc odpowiedni ciąg punktów, można kulami o promieniu $\frac{1}{2}$ pokryć całe $\mathbb{R} \times$

$[0,1]^{n-1}$, a przez to wykazać, że równość $v(z) = \tau_{-1}v(z)$ zachodziłaby wszędzie. Powyższe znaczyłoby, że v jest funkcją 1-okresową w zmiennej x, co jest oczywiście niemożliwe ze względu na heterokliniczność.

Gdy w powyższym dowodzie zastąpimy τ i $\tau_{-1}v$ odpowiednio przez funkcję stałą 0 i funkcję v to, prowadząc analogiczne rozumowanie, tym razem doprowadzimy do równości $0 = v$ wszędzie, co również prowadzi do sprzeczności z faktem, że $v \in \Gamma$ i dowodzi, że $0 < v$. Analogicznie dostajemy $v < 1$.

Uwagi końcowe

Problem regularności

Założenia twierdzenia 2.1, a w szczególności (G_6) oraz (G_7) są dość skomplikowane. Naturalne jest więc pytanie o możliwość ich uproszczenia. Oczywiście nie można oczekiwać otrzymania twierdzenia o regularności bez odpowiednio silnych założeń. Wśród nich powinny się znaleźć nie tylko Δ_2 oraz ∇_2, ale także silna eliptyczność. Brak silnej eliptyczności w problemie anizotropowym może skutkować istnieniem nieograniczonych słabych rozwiązań. Przykład takiego równania i rozwiązania zaprezentował Marcellini w [18].

Założenia eliptyczności (G_7) oraz powiązanie ze sobą górnych i dolnych oszacowań wzrostu – (G_5) wraz z (G_6) – wydają się więc konieczne do uzyskania odpowiedniej klasy regularności słabych rozwiązań. Można jednak próbować je nieco uprościć. Rozważam hipotezę, że (G_7) można zastąpić następującym warunkiem:

- Istnieje niemalejąca funkcja $g_1 : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ taka, że

$$\langle D^2 G(\xi)\lambda, \lambda\rangle \geqslant 2\nu g_1(|\xi|)|\lambda|^2$$

Taka zmiana musiałaby być połączona ze zmianą założeń (G_5) i (G_6), które zastąpione byłyby przez:

- $c_0 g_1(|\xi|)|\xi|^2 \leqslant G(\xi) \leqslant \overline{c} \sum\limits_{i=1}^{n} g_1(|\xi_i|)^{\frac{2^*}{2}} |\xi_i|^2$ dla $|\xi| \geqslant 1$

Takie założenia są ogólniejsze i co jest równie ważne, mogą być łatwiejsze do sprawdzenia.

Problem typu Allena-Cahna

Kolejnym ciekawym problemem jest pytanie o istnienie innych niż heterokliniczne rodzajów rozwiązań problemu (AC) z uogólnionym operatorem. Rozwiązania heterokliniczne należą do najczęściej rozważanych rodzajów rozwiązań problemu typu Allena-Cahna (zaraz po trywialnych stałych rozwiązaniach), ale w literaturze wielu autorów dowodzi istnienia także innych rodzajów rozwiązań. Na przykład w [24] autorzy dowodzą szereg twierdzeń o istnieniu nie tylko rozwiązań heteroklinicznych, ale także na przykład rozwiązań typu "multibump". Dowód twierdzenia 3.1 pokazuje jakie założenia i metody stosować można, gdy problem z laplasjanem zostanie zamieniony na problem z operatorem o szybszym wzroście. Naturalne jest więc oczekiwanie, że można udowodnić więcej twierdzeń o istnieniu pewnych rozwiązań analogicznych do tych z [24] stosując podobne metody do przedstawionych w tej rozprawie.

Bibliografia

[1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces.* Elsevier Science, 2003.

[2] F. Alessio, L. Jeanjean, and P. Montecchiari. Stationary layered solutions in $\mathbb{R}^2$ for a class of non autonomous Allen-Cahn equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 11(2):177–202, 2000.

[3] F. Alessio, L. Jeanjean, and P. Montecchiari. Existence of infinitely many stationary layered solutions in $\mathbb{R}^2$ for a class of periodic Allen-Cahn equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 27(7-8):1537–1574, 2002.

[4] S. M. Allen and J. W Cahn. Coherent and incoherent equilibria in iron-rich iron-aluminum alloys. *Acta Metallurgica*, 23(9):1017 – 1026, 1975.

[5] V. Bangert. On minimal laminations of the torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6(2):95–138, 1989.

[6] G. Barletta and A. Cianchi. Dirichlet problems for fully anisotropic elliptic equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 147(1):25–60, 2017.

[7] M. Beneš, V. Chalupecký, and K. Mikula. Geometrical image segmentation by the Allen–Cahn equation. *Applied Numerical Mathematics*, 51(2):187 – 205, 2004.

[8] I. Chlebicka. A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 175:1–27, 2018.

[9] J. Crank and E.P.J. Crank. *The Mathematics of Diffusion.* Clarendon Press, 1979.

[10] R. de la Llave and E. Valdinoci. Multiplicity results for interfaces of Ginzburg - Landau - Allen - Cahn equations in periodic media. *Advances in Mathematics*, 215(1):379–426, 2007.

[11] W. Desch and R. Grimmer. On the wellposedness of constitutive laws involving dissipation potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353, 01 2001.

[12] P. C. Fife. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems.* Springer-Verlag, 1979.

[13] E. Giusti. *Direct Methods in the Calculus of Variations.* World Scientific, 2003.

[14] C. Gui and M. Zhao. Traveling wave solutions of Allen–Cahn equation with a fractional laplacian. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 32(4):785 – 812, 2015.

[15] G Hardy and H. B. Thompson. An imbedding theorem for anisotropic Orlicz-Sobolev spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 51:463–467, 1995.

[16] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva. Linear and quasilinear elliptic equations, 1968.

[17] T. Ma and S. Wang. *Phase transition dynamics.* Springer, New York, 2013.

[18] P. Marcellini. Un exemple de solution discontinue d'un probleme variationnel dans le cas scalaire. *preprint Istituto Matematico "U. Dini"*, 11:1–6, 1987.

[19] P. Marcellini. Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p,q-growth conditions. *Journal of Differential Equations*, 90(1):1 – 30, 1991.

[20] P. Marcellini. Regularity for elliptic equations with general growth conditions. *Journal of differential equations*, 105(2):296–333, 1993.

[21] J. Moser. Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 3(3):229–272, 1986.

[22] L. Pick, A. Kufner, O. John, and S. Fucík. *Function Spaces, 1.* De Gruyter, 2013.

[23] P. Pucci and J.B. Serrin. *The Maximum Principle.* Birkhäuser Basel, 2007.

[24] P. H. Rabinowitz and E. Stredulinsky. Mixed states for an Allen-Cahn type equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56(8):1078–1134, 2003.

[25] M. Sabir, A. Shah, W. Muhammad, I. Ali, and P. Bastian. A mathematical model of tumor hypoxia targeting in cancer treatment and its numerical simulation. *Computers and Mathematics with Applications*, 74(12):3250 – 3259, 2017.

[26] G. Schappacher. A notion of Orlicz spaces for vector valued functions. *Applications of Mathematics*, 50(4):355–386, 2005.

[27] F. Siepe. On the Lipschitz regularity of minimizers of anisotropic functionals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263:69–94, 2001.

[28] M. S. Skaff. Vector valued Orlicz spaces generalized N-functions, I. *Pacific J. Math.*, 28(1):193–206, 1969.

[29] N. S. Trudinger. An imbedding theorem for $H^0(G,\Omega)$ spaces. *Studia Math.*, 50:17–30, 1974.

[30] V.A. Volpert, Y. Nec, and A.A. Nepomnyashchy. Exact solutions in front propagation problems with superdiffusion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(3):134 – 144, 2010.

[31] A. A. Wheeler, W. J. Boettinger, and G. B. McFadden. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys. *Phys. Rev. A*, 45:7424–7439, 1992.

[32] K. Wroński. Heteroclinic solutions of Allen-Cahn type equations with a general elliptic operator. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 51(2):1–10, 06 2018.