

**Marcin Burdziński**  
marburdz@gmail.com

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska  
Opiekun naukowy dr hab. inż. Krystyna Nagrodzka-Godycka

## WPŁYW ROZKŁADU OBCIĄŻENIA UŻYTKOWEGO NA SIŁY WEWNĘTRZNE I UGIĘCIA W STROPIE PŁYTOWO-SŁUPOWYM

### THE INFLUENCE OF THE LIVE LOAD DISTRIBUTION ON INTERNAL FORCES AND DEFLECTIONS IN THE SLAB-COLUMN FLOOR

**Słowa kluczowe:** konstrukcje żelbetowe, rozkład obciążenia, obciążenie użytkowe, strop płytowo-słupowy, powierzchnia wpływu

#### 1. Wstęp i cele pracy

Referat dotyczy analizy konkretnego stropu płytowo-słupowego pod względem sposobu rozkładu obciążenia użytkowego, która ma na celu wskazać najbardziej niekorzystny wariant spośród trzech badanych przypadków rozkładu obciążenia (na podstawie otrzymanych sił wewnętrznych i ugięć). Płyta stropowa, która została poddana analizie, pochodzi z inżynierskiej pracy dyplomowej autora niniejszego artykułu (*Burdziński 2017*). Praca ta polegała m.in. na zaprojektowaniu konstrukcji pięciokondygnacyjnego apartamentowca z dachem zielonym i garażem podziemnym – budynek o układzie szkieletowym ze stropem płytowo-słupowym.



Rys. 1. Widok projektowanego budynku

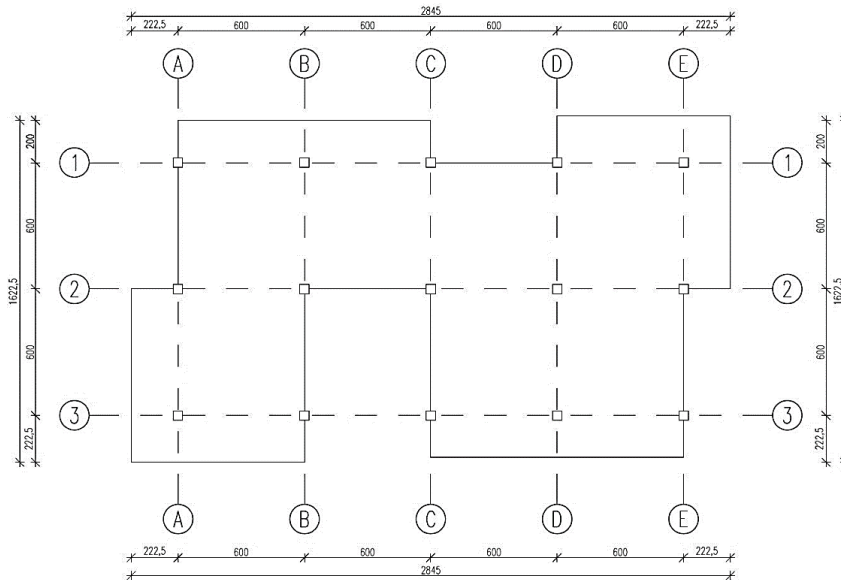
Pierwszym celem analizy jest wskazanie takiego sposobu rozkładu obciążenia użytkowego na wybranej płycie stropowej, który zapewni optymalne rozwiązanie – tj. możliwie najbezpieczniejsze (dające najniekorzystniejszy sposób obciążenia), najekonomiczniejsze (efektywne wykorzystanie betonu i stali oraz zastosowane

ilości materiałów) i najszybsze (liczba przypadków i kombinacji). W praktyce projektowej trzeba znaleźć kompromis między tymi trzema wymaganiami.

Drugim celem analizy jest sprawdzenie, czy istnieje uniwersalny sposób rozkładu obciążenia użytkowego na stropie płytowo-słupowym, który będzie najlepiej spełniał ww. wymagania. W pracy *Starosolski 2008* stwierdza się, że w przypadku braku możliwości automatycznego wygenerowania kombinacji obciążeń dla zadanych wcześniej przypadków obciążenia eksploatacyjnego to należy zastosować schemat obciążenia pasmowego. Zastosowanie schematu szachownicowego w stropie płytowo-słupowym obarcza wyniki niedokładnościami. Stwierdzenie to zostanie skonfrontowane z uzyskanymi wynikami.

## 2. Informacje dotyczące analizowanego układu

W inżynierskim projekcie dyplomowym autora znajdują się trzy różne stropy płytowo-słupowe różniące się kształtem. Przyjęto, że najbardziej interesującą płytą stropową do analizy będzie strop najwyższej kondygnacji. Strop ten zawiera dwie płyty balkonowe oraz dwa wykusze.



Rys. 2. Wymiary analizowanej płyty stropowej w rzucie poziomym

Podstawowe parametry dot. badanej płyty:

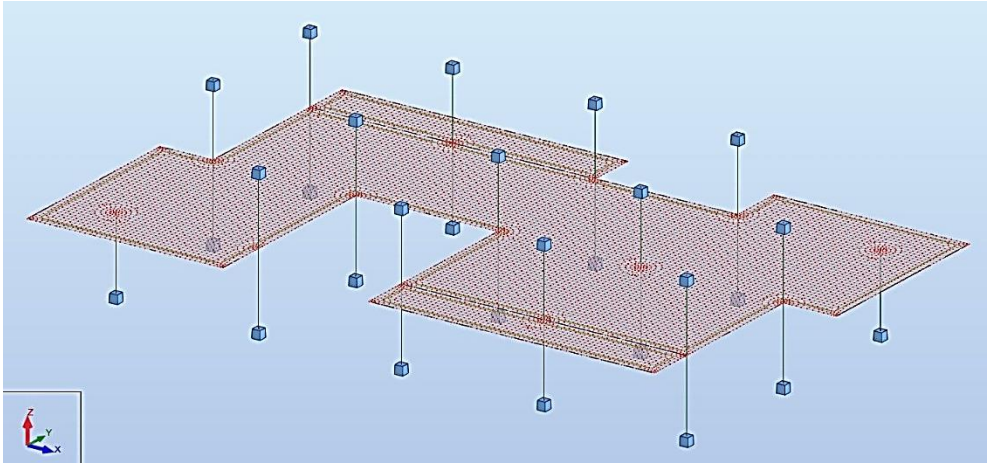
- Powierzchnia płyty (z balkonami): 375 m<sup>2</sup>
- Powierzchnia płyty (bez balkonów): 331 m<sup>2</sup>
- Grubość płyty stropowej: 0,25 m
- Grubość płyty balkonowej: 0,20 m
- Osiowy rozstaw słupów: 6,0 m
- Wymiary przekroju słupa: 0,45 m (kwadratowy)
- Wysokość kondygnacji: 3,00 m
- Materiał (strop i słupy): beton kl. C 30/37



### 3. Schemat statyczny

Z budynku wyodrębniono przestrzenny układ płyty stropowej wraz z usztywnionymi słupami. Korzystając z programu do komputerowej analizy konstrukcji dokonano dyskretyzacji układu w sposób następujący:

- Płyta stropowa jako powłoka
- Siatka ES Delaunay'a+Kang'a, czworokątna, 4-węzłowa o rozmiarze 0,20 m
- Zastosowano emitery w miejscach połączenia słupów z płytą ( $H_0=0,10$  m)



Rys. 3. Schemat statyczny analizowanej płyty wraz z dyskretyzacją ES w programie komputerowym

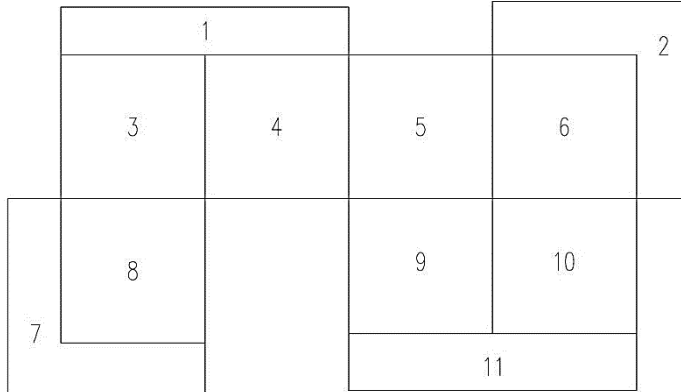
### 4. Przypadki rozkładu obciążenia

Do analizy porównawczej przyjęto trzy sposoby rozkładu obciążenia użytkowego płyty stropowej:

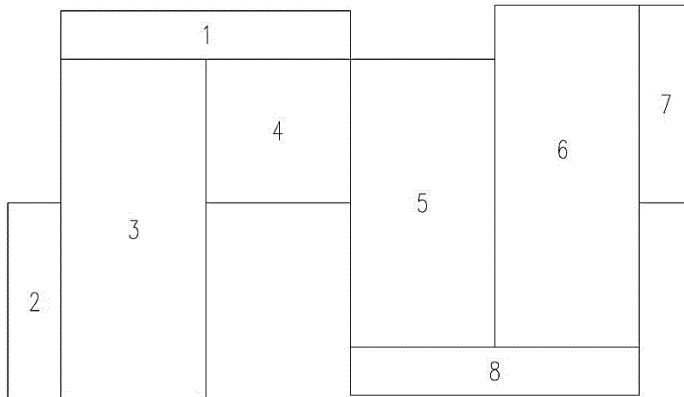
- Przypadek A – schemat obciążeń niezależnych (patrz: Rys. 4.)
  - Obciążenie powierzchniowe jednorodne o powierzchni wydzielonej osiami słupów
  - Uwzględniono ciężar własny konstrukcji (wg programu komp.)
  - Każde pole zostało obciążone osobnym obciążeniem (łącznie 11 przypadków obciążenia eksploatacyjnego)
  - Zastosowano kombinacje automatyczne kompletne zgodne z normą PN-EN 1990:2004 (SGN: dla obc. stałego  $\gamma_f = 1,35$ , dla obc. eksp.  $\gamma_f = 1,50$ )
- Przypadek B – obciążenie schematem pasmowym (patrz: Rys. 5.)
  - Uwzględniono ciężar własny konstrukcji (wg programu komp.)
  - Pasma obciążenia na kierunku Y (pionowo) (łącznie 8 przypadków obciążenia eksploatacyjnego)
  - Zastosowano kombinacje ręczne (SGN: dla obc. stałego  $\gamma_f = 1,35$ , dla obc. eksp.  $\gamma_f = 1,50$ )
- Przypadek C – obciążenie schematem szachownicowym (patrz: Rys. 4.)



- Uwzględniono ciężar własny konstrukcji (wg programu komp.)
- Każde pole zostało obciążone osobnym obciążeniem (łącznie 11 przypadków obciążenia eksploatacyjnego)
- Zastosowano kombinacje ręczne (SGN: dla obc. stałego  $\gamma_f = 1,35$ , dla obc. eksp.  $\gamma_f = 1,50$ )



Rys. 4. Oznaczenie powierzchni, na których przykładano obciążenie eksploatacyjne (przypadki A i C)



Rys. 5. Oznaczenie powierzchni, na których przykładano obciążenie eksploatacyjne (przypadek B)

## 5. Wyniki analizy porównawczej

W tabeli poniżej (Tab. 1) zestawiono wyniki analizy porównawczej dla trzech przypadków obciążenia (patrz: punkt 4.). Dla każdego przypadku odczytano następujące parametry (pogrubione zostały ekstremalne wartości wielkości):

- Sumaryczna liczba kombinacji (SGN i SGU)
- Wartość  $M_{XX,min}$  (dla obwiedni dolnej; SGN) [kNm/m]
- Wartość  $M_{XX,max}$  (dla obwiedni górnej; SGN) [kNm/m]
- Wartość  $M_{YY,min}$  (dla obwiedni dolnej; SGN) [kNm/m]
- Wartość  $M_{YY,max}$  (dla obwiedni górnej; SGN) [kNm/m]



- Wartość  $W_{norm}$  (ugięcie sprężyste) (dla obwiedni dolnej; SGU) [cm]
- Wartość siły przebijającej dla słupa D-2 [kN]

Na rysunkach 6 - 11 pokazano mapy momentów dla  $M_{XX,max}$  i  $M_{XX,min}$ , na których zaznaczono wyniki z Tab. 1. kol. 3 i 4.

Tabela 1. Zestawienie wielkości poddanych analizie porównawczej

Schemat obciążenia	Liczba kombinacji (SGN&SGU)	$M_{XX,min}$	$M_{XX,max}$	$M_{YY,min}$	$M_{YY,max}$	$W_{norm}$	Siła przebijająca słup D-2
		[kNm/m]	[kNm/m]	[kNm/m]	[kNm/m]	[cm]	[kN]
1	2	3	4	5	6	7	8
A	10240	-48,35	119,25	-42,12	113,75	-0,3605	652,42
B	16	-48,46	104,72	-36,49	96,78	-0,3557	520,84
C	16	-47,79	104,51	-37,12	96,44	-0,3550	524,10

## 6. Podsumowanie analizy porównawczej

Największa liczba kombinacji obciążeniowych została wykorzystana w przypadku A, w którym użyto kombinacji automatycznych wygenerowanych przez program komputerowy wg normy PN-EN 1990:2004 – w sumie 10240, przypadki B i C – zaledwie 16 (wygenerowanych ręcznie). W przypadku A wykorzystano 640 razy więcej kombinacji niż pozostałych przypadkach.

Najmniejszy minimalny moment zginający (co do wartości bezwzględnej) na kierunku X wystąpił dla przypadku C (47,79 kNm/m) (Rys. 11.), natomiast największy dla przypadku B (48,46 kNm/m) (Rys. 9.). Różnica ekstremów wynosi 0,67 kNm/m.

Najmniejszy maksymalny moment zginający na kierunku X wystąpił dla przypadku C (104,51 kNm/m) (Rys. 10.), zaś największy dla przypadku A (119,25 kNm/m) (Rys. 6.). Różnica ekstremów wynosi 14,74 kNm/m.

Najmniejszy minimalny moment zginający (co do wartości bezwzględnej) na kierunku Y wystąpił dla przypadku B (36,49 kNm/m), natomiast największy dla przypadku A (42,12 kNm/m). Różnica ekstremów wynosi 5,63 kNm/m.

Najmniejszy maksymalny moment zginający na kierunku Y wystąpił dla przypadku C (96,44 kNm/m), zaś największy dla przypadku A (113,75 kNm/m). Różnica ekstremów wynosi 17,31 kNm/m.

Najmniejsze ugięcie sprężyste płyty stropowej (co do wartości bezwzględnej) otrzymano dla przypadku C (0,3550 cm), wartość maksymalną uzyskano dla przypadku A (0,3605 cm). Różnica między tymi wartościami wynosi 0,0055 cm.

Najmniej niekorzystna siła przebijająca w stropie dla słupa D-2 wystąpiła dla przypadku B (520,84 kN), najbardziej niekorzystna dla przypadku A (652,42 kN). Różnica wynosi 131,58 kN.

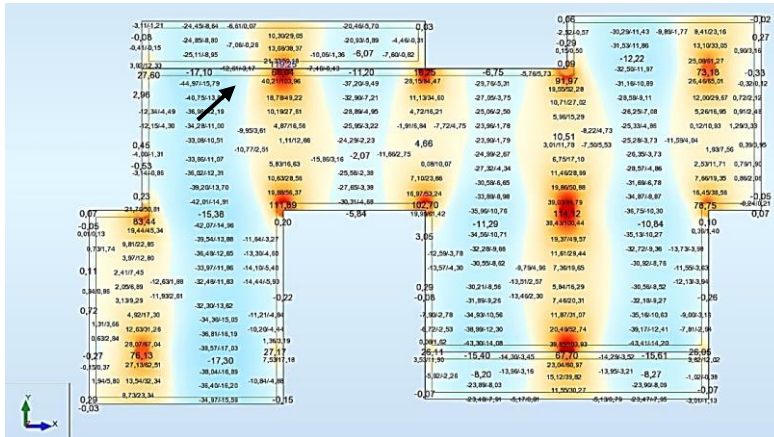
## 7. Wnioski z przeprowadzonej analizy

Z uwagi na bezpieczeństwo, które jest najważniejszym wymaganiem stawianym projektantowi, najniekorzystniejszym sposobem rozkładu obciążenia użytkowego jest przypadek A (wyjątek stanowi jedynie wartość  $M_{XX,min}$  – patrz: Tab. 1.) Przyjęcie schematu obciążeń niezależnych daje pewność, że uzyskane do wymiarowania wyniki (momenty, ugięcia) są największe co do wartości bezwzględnej spośród trzech badanych przypadków.

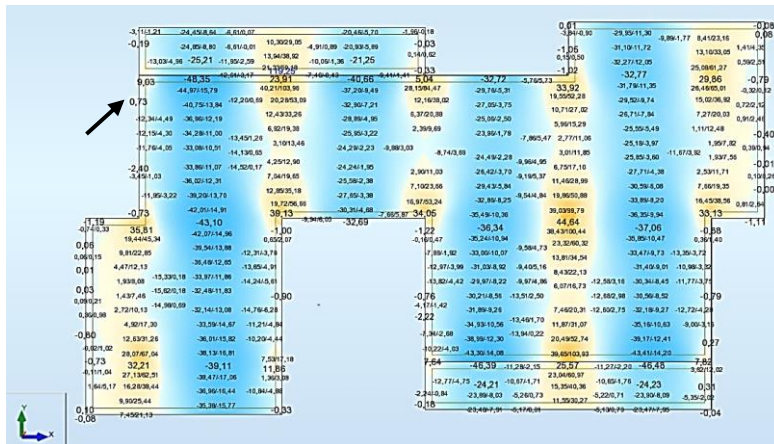




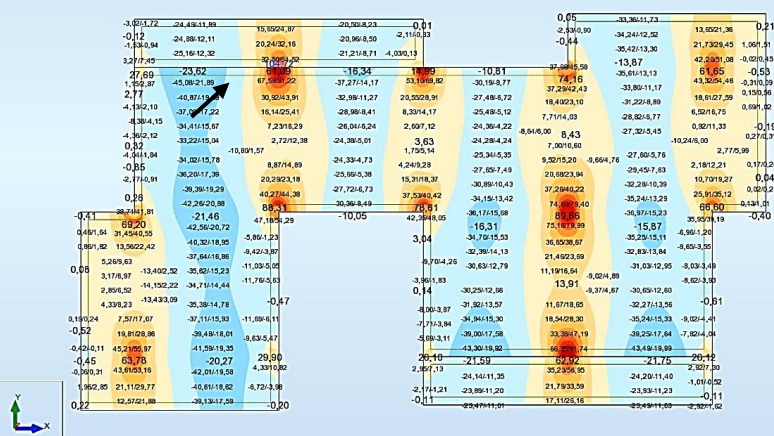
# Wpływ rozkładu obciążenia użytkowego na siły wewnętrzne i ugięcia w stropie płytowo-słupowym



Rys. 6. Mapa momentów zginających – przypadek A (MXX,max) [kNm/m]

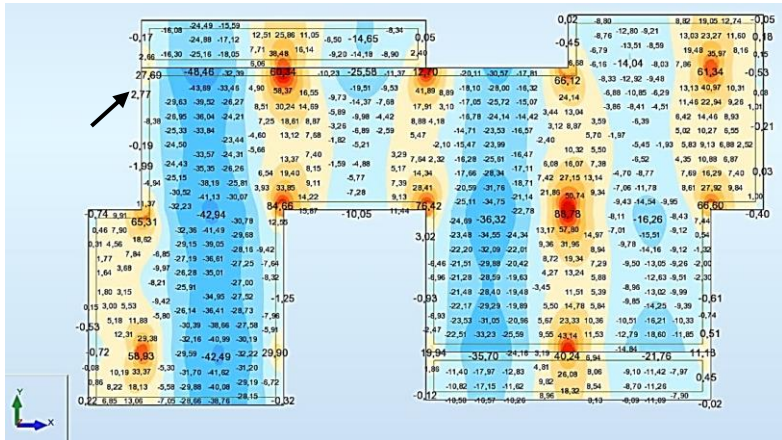


Rys. 7. Mapa momentów zginających – przypadek A (MXX,min) [kNm/m]

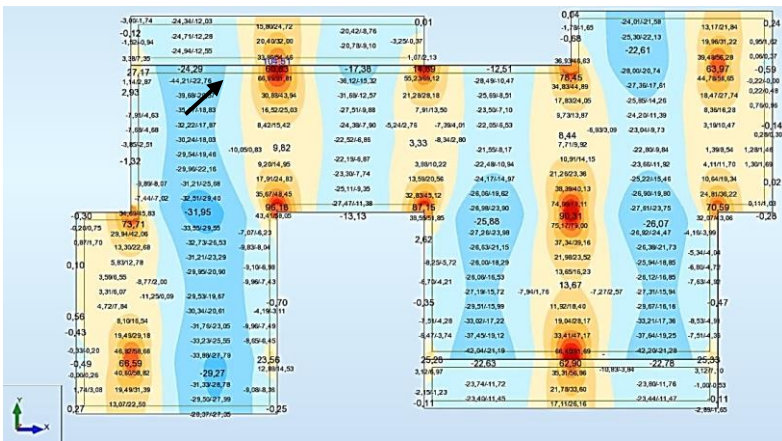


Rys. 8. Mapa momentów zginających – przypadek B (MXX,max) [kNm/m]

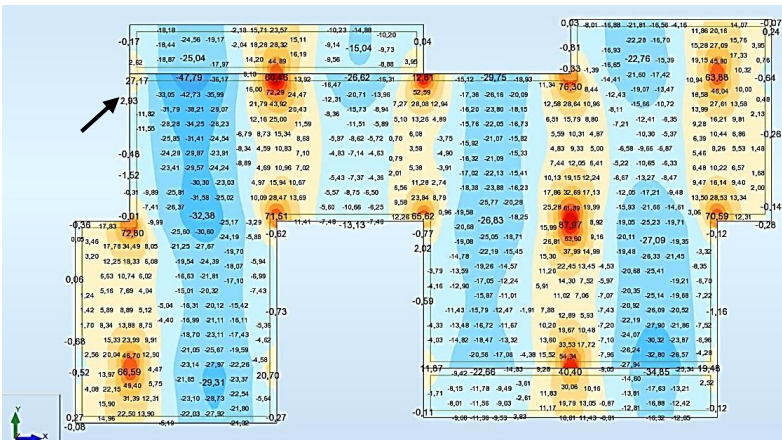
## Wpływ rozkładu obciążenia użytkowego na siły wewnętrzne i ugięcia w stropie płytowo-słupowym



Rys. 9. Mapa momentów zginających – przypadek B (MXX,min) [kNm/m]



Rys. 10. Mapa momentów zginających – przypadek C (MXX,max) [kNm/m]



Rys. 11. Mapa momentów zginających – przypadek C (MXX,min) [kNm/m]

Pod względem ekonomicznym, najtańszym rozwiązaniem byłby rozkład obciążenia według przypadku B lub C. Wykorzystanie wyników z tych przypadków do wymiarowania skutkowałoby najmniejszym zużyciem betonu i stali zbrojeniowej.

Korzystając z programów do komputerowej analizy konstrukcji, można zdefiniować przypadki obciążenia, a także stworzyć kombinacje obliczeniowe (ręcznie lub automatycznie). Przypadek A rozkładu obciążenia użytkowego zawiera kombinacje automatyczne – łącznie 10240. Na czas obliczeń wpływa nie tylko liczba kombinacji, ale również dyskretyzacja układu i parametry komputera (procesor, pamięć RAM) – im więcej elementów skończonych, tym więcej obliczeń. W przypadkach B i C wykorzystano kombinacje ręczne – każdy przypadek 16 kombinacji. Takie podejście znacznie skraca czas obliczeń oraz w mniejszym stopniu wykorzystuje podzespoły komputera. Zatem najszybszymi rozwiązaniami są przypadki B i C.

W pracy *Burdziński 2017* zdecydowano się na rozkład obciążenia użytkowego według przypadku A. Wzięto pod uwagę wyżej omówione wymagania stawiane projektantowi oraz możliwości sprzętowe. Wybór ten był podyktowany także tym, że przypadek A stanowi najbezpieczniejsze rozwiązanie.

W pracy *Starosolski 2008* stwierdza się, że gdy nie ma możliwości automatycznego wygenerowania kombinacji obciążeń dla zadanych wcześniej przypadków obciążenia eksploatacyjnego to trzeba zastosować schemat obciążenia pasmowego dla stropu płytowo-słupowego, gdyż schemat obciążenia szachownicowego prowadzi do zauważalnego zaniżenia otrzymanych wyników. Niniejsza analiza potwierdza, że najniekorzystniejsze wyniki daje rozkład przypadków obciążenia polami niezależnymi (przypadek A). Natomiast dla rozważanej w referacie płyty stropowej nie ma większego znaczenia, w jaki sposób zostanie rozłożone obciążenie eksploatacyjne – oba schematy (przypadek B i C) dają bardzo zbliżone wyniki. Najprawdopodobniej przyczyną tego jest specyfika geometrii analizowanego stropu. Płyta składa się z dwóch balkonów i dwóch wykuszy. Aby upewnić się, co jest przyczyną podobnych wyników sił wewnętrznych i ugięć w obciążeniu o schemacie pasmowym i szachownicowym (*Zdanowicz 2017*), utworzono powierzchnie wpływu dla podpory punktowej (słupa) w osi D-2 (patrz: Rys. 2.) ze względu na moment zginający względem kierunku X. W przeciwległych węzłach przyłożono jednostkowe, skupione momenty zginające o przeciwnych zwrotach. Zastosowano siatkę ES Delaunay'a+Kang'a, czworokątną, 4-węzłową o rozmiarze 0,50 m oraz emitery w miejscach połączenia słupów z płytą ( $H_0=0,25$  m).

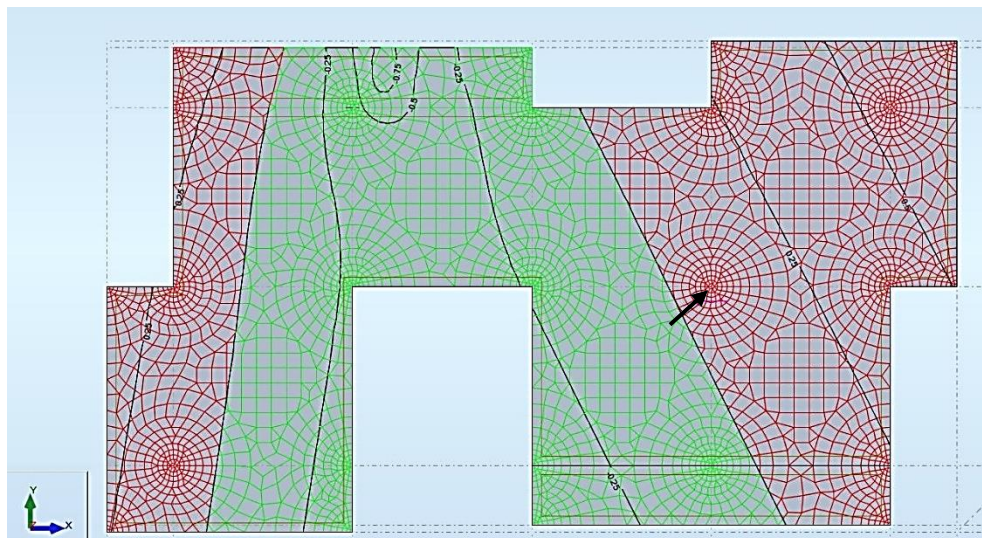
Analizując powierzchnię wpływu (patrz: Rys. 12.) wyraźnie widać, że przebieg obszarów jest krzywoliniowy. Na czerwono (ciemniejszym kolorem) zaznaczono powierzchnię, której obciążenie spowoduje otrzymanie maksymalnej dodatniej wartości momentu zginającego na kierunku X w miejscu zaznaczonym strzałką. Kolor zielony (jaśniejszy kolor) to obszar, którego obciążenie wywoła najmniejsze dodatnie momenty. Dokładność wydzielonych powierzchni zależy od wielkości ES.

Potwierdza się, że przewieszzone pola (płyty balkonowe, wykusze) rzutują na powierzchnię wpływu. Ciężko tutaj mówić o wyraźnych pasach czy szachownicy. Także schemat niezależnych pól nie jest idealnym rozwiązaniem – jest kompromisem. Rozwiązaniem dokładnym byłoby utworzenie powierzchni wpływu dla istotnych punktów płyty (podpory, przęsła, punkty między podporami) dla momentów zginających i ugięć (w obu kierunkach), dobranie zadawalających wielkości ES i obciążenie tylko tych obszarów, które wpływają na otrzymanie maksymalnych wartości. Byłoby to rozwiązanie bardzo pracochłonne (należałoby utworzyć wiele





przypadków obciążeń przybliżających kształt obszarów) i czasochłonne (potężna ilość obliczeń). Praca ta byłaby niepotrzebna – prawdopodobieństwo, że obciążenie użytkowe rozłoży się w taki sposób, jak przedstawia powierzchnia wpływu jest znikome.



Rys. 12. Powierzchnia wpływu dla podpory punktowej (słupa) D-2 dla momentu zginającego względem kierunku X

Przykład analizowanej płyty stopowej pokazuje, że należy zachować inżynierską ostrożność przy projektowaniu konstrukcji, a także podchodzić indywidualnie do danego przypadku w szczególności, gdy geometria stropu jest nietypowa. Cenna jest świadomość przebiegu powierzchni wpływu dla danej siły wewnętrznej lub ugięcia – pozwala ona na przyjęcie zadawalającego rozkładu obciążenia, który zapewni przede wszystkim bezpieczeństwo projektowanej płyty stopowej.

## 8. Bibliografia

Burdziński M., 2017, Inżynierski projekt dyplomowy pt. „Apartamentowiec z dachem zielonym i garażem podziemnym”, Politechnika Gdańska Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, promotor: dr hab. inż. Krystyna Nagrodzka-Godycka.

Starosolski W., 2008, „O rozmieszczaniu obciążeń zmiennych w stropach krzyżowo zbrojonych i płytowo-słupowych”, Inżynieria i Budownictwo, nr 4, pp. 177-180, 2008.

Zdanowicz Ł., 2017, „Rozkład obciążeń zmiennych: #1 Powierzchnie wpływu” <http://www.oprojektowaniu.pl/rozklad-obciazen-zmiennych-powierzchnie-wplywu/#more-195> (strona aktualna: 04.02.2018).

Zdanowicz Ł., 2017, „Rozkład obciążeń zmiennych: #2 Strop płytowo-słupowy” <http://www.oprojektowaniu.pl/rozklad-obciazen-zmiennych-strop-plytowo-slupowy/> (strona aktualna: 04.02.2018).