

Imię i nazwisko autora rozprawy: Adam Dąbrowski

Dyscyplina naukowa: inżynieria mechaniczna

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Wpływ środowiska i warunków zamocowania na drgania elementów obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną

Tytuł rozprawy w języku angielskim: The influence of environment and mounting conditions on vibration of objects to be launched into space

Promotor

*podpis*

dr hab. inż. Marek Galewski

Gdańsk, 2022 r.

## OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

**Autor rozprawy doktorskiej:** Adam Dąbrowski

**Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Wpływ środowiska i warunków zamocowania na drgania elementów obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną

**Tytuł rozprawy w języku angielskim:** The influence of environment and mounting conditions on vibration of objects to be launched into space

**Język rozprawy doktorskiej:** polski

**Promotor rozprawy doktorskiej:** dr hab. inż. Marek Galewski

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polski:** drania mechaniczne, analiza modalna, konstrukcje kosmiczne, współczynnik tłumienia, ciśnienie, tribologia kosmiczna

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim:** mechanical vibration, modal analysis, space structures, damping coefficient, pressure, space tribology

**Streszczenie rozprawy w języku polskim:** Rozprawa doktorska dotyczy zagadnienia analizy wpływu ciśnienia atmosferycznego i siły docisku na współczynnik tłumienia drgań mechanicznych. Głównym celem pracy było sformułowanie opisu oddziaływania otoczenia obiektów drgających w warunkach wynoszenia w przestrzeń kosmiczną na parametry tych drgań.

Przedstawiono przegląd literatury dotyczący sposobu pomiaru oraz metod identyfikacji parametrów drgań, zagadnienia tribologii oraz kwestie dotyczące obciążeń konstrukcji kosmicznych. Zakres pracy objął konstrukcję stanowiska do pomiaru drgań własnych obiektu. Stanowisko umożliwiło kontrolowanie warunków, wyizolowanie wpływu czynników i odtworzenie, w pewnym zakresie, rzeczywistych warunków wynoszenia obiektów w przestrzeń kosmiczną. Wykonano symulacje przy użyciu modeli metody elementów skończonych oraz opracowano autorską metodę identyfikacji współczynnika tłumienia.

Stworzono model matematyczny kwantyfikujący wpływ warunków środowiskowych na współczynnik tłumienia drgań oraz współczynnik tarcia. W wyniku przeprowadzonych rozważań i badań wykazano prawdziwość tezy sformułowanej jako: tłumienie w warunkach wynoszenia ładunku w przestrzeń kosmiczną wynika głównie z tribochemicznych mechanizmów tarcia i tłumienia materiałowego. Metody opisane w poniższej pracy mogą posłużyć analizie drgań innych obiektów, w szczególności mechanizmów i struktur wynoszonych w przestrzeń kosmiczną.

**Streszczenie rozprawy w języku angielskim:** This doctoral dissertation concerns the analysis of the influence of air pressure and clamp force on vibration damping ratio (DR) and coefficient of friction (COF). The main goal of the work was to formulate a description of effect of the environment of space structures on parameters of their vibrations.

A literature review regarding vibration measurement, parameter estimation as well as spacecraft loads and space tribology has been provided. The range of this work included development of a test stand for measuring free vibrations of a cantilever beam. It enabled controlling the variables, and, to some extent, recreation of conditions of vibration of space structures. Additionally, numerical simulations using finite element method were performed and a novel method for identifying the DR from time series has been developed.

A mathematical model quantifying the influence of environmental factors on the DR and the COF has been developed. As a result of analyses and studies, the thesis: damping in space launch environment is mostly due to tribo-chemical friction and material damping, has been confirmed. Methods described in this work can be applied to analysis of vibration of other objects, especially space mechanisms and structures.



## OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: Adam Dąbrowski

Ja, niżej podpisany, wyrażam zgodę na bezpłatne korzystanie z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

Wpływ środowiska i warunków zamocowania na drgania elementów obiektów  
wynoszonych w przestrzeń kosmiczną

do celów naukowych lub dydaktycznych.<sup>1</sup>

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Świadomy odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),<sup>2</sup> a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem dr hab. inż. Markiem Galewskim.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisany, wyrażam zgodę na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej, Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

---

<sup>1</sup> Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

<sup>2</sup> Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: Rozdział 7 Odpowiedzialność dyscyplinarna doktorantów, Art. 226.

## Podziękowania

Chciałbym najserdeczniej podziękować wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania niniejszej pracy doktorskiej.

Dr hab. inż. Markowi Galewskiemu, promotorowi mojej pracy za liczne uwagi, poprawki, komentarze, pomysły, sugestie rozwiązań i, przede wszystkim opiekę naukową w ciągu ostatnich pięciu lat.

Dr hab. inż. Jackowi Łubińskiemu, za liczne uwagi inżynierskie, pomoc, motywację i wsparcie.

Moim Rodzicom, za motywację, wiarę w moje możliwości, wykształcenie i wsparcie.

Róży Pietruszewskiej, najserdeczniej – to Ty dawałaś mi siłę w trudnych momentach, radość w pięknych, wskazywałaś, jak słuchać siebie i rozumieć świat. Z całego serca, dziękuję!

Adam Dąbrowski  
kwiecień 2022 r.

## Spis treści

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | Wstęp.....  | 15 |
| 2     | Drgania mechaniczne .....                             | 17 |
| 2.1   | Wstęp.....  | 17 |
| 2.2   | Opis matematyczny .....                               | 17 |
| 2.3   | Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej, FRF.....       | 22 |
| 2.4   | Zagadnienia pokrewne .....                            | 24 |
| 3     | Sposoby pomiaru drgań.....                            | 26 |
| 3.1   | Wstęp.....  | 26 |
| 3.2   | Metody pomiaru drgań .....                            | 30 |
| 3.2.1 | Ultradźwiękowe czujniki odległości.....               | 30 |
| 3.2.2 | Tensometry.....                                       | 31 |
| 3.2.3 | Akcelerometry piezoelektryczne .....                  | 32 |
| 3.2.4 | Akcelerometry MEMS.....                               | 33 |
| 3.2.5 | Czujniki wiroprądowe.....                             | 34 |
| 3.2.6 | Czujniki pojemnościowe.....                           | 34 |
| 3.2.7 | Interferometria laserowa .....                        | 35 |
| 3.3   | Pojemnościowy pomiar przemieszczeń .....              | 36 |
| 3.4   | Podsumowanie .....                                    | 37 |
| 4     | Drgania obiektów kosmicznych .....                    | 38 |
| 4.1   | Wpływ drgań na niezawodność obiektów kosmicznych..... | 38 |
| 4.2   | Środowisko dynamiczne obiektów kosmicznych .....      | 39 |
| 4.3   | Obciążenia w trakcie transportu.....                  | 41 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.4   | Obciążenia testowe.....                                  | 43 |
| 4.4.1 | Testy statyczne .....                                    | 44 |
| 4.4.2 | Wibracyjne testy sinusoidalne .....                      | 47 |
| 4.4.3 | Wibracyjne testy losowe .....                            | 48 |
| 4.5   | Obciążenia w trakcie wynoszenia .....                    | 49 |
| 5     | Zjawiska kontaktowe.....                                 | 53 |
| 5.1   | Wstęp.....   | 53 |
| 5.2   | Kontakt w strukturach wielobryłowych .....               | 55 |
| 5.3   | Dyskretyzacja zagadnienia kontaktowego .....             | 58 |
| 5.3.1 | Siła normalna .....                                      | 59 |
| 5.3.2 | Siła styczna .....                                       | 60 |
| 5.4   | Modelowanie kontaktu metodą elementów skończonych.....   | 61 |
| 5.4.1 | Definicja par kontaktowych i rodzaju kontaktu.....       | 61 |
| 5.4.2 | Szukanie punktów kontaktu.....                           | 62 |
| 5.4.3 | Obliczanie sił i sztywności w kontaktach .....           | 63 |
| 5.5   | Modelowanie zjawisk kontaktowych w środowisku ANSYS..... | 65 |
| 6     | Tribologia kosmiczna .....                               | 72 |
| 6.1   | Podstawy tribologii .....                                | 72 |
| 6.2   | Wymagania stawiane smarom w przestrzeni kosmicznej ..... | 73 |
| 6.3   | Dobór smarowania .....                                   | 78 |
| 6.4   | Smary stałe .....  | 79 |
| 7     | Analiza modalna.....                                     | 82 |
| 7.1   | Wstęp.....   | 82 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 7.2   | Metoda <i>Ibrahim Time Domain</i> , ITD .....                    | 83  |
| 7.3   | Metoda <i>Least Square Complex Exponential</i> , LSCE .....      | 87  |
| 7.4   | Metoda <i>Eigensystem Realization Algorithm</i> , ERA .....      | 89  |
| 7.5   | Metoda <i>Peak Picking</i> , PP .....                            | 92  |
| 7.6   | Metoda <i>Least Squares Rational Function</i> , LSRF .....       | 94  |
| 7.7   | Transformata Hilberta .....                                      | 98  |
| 7.8   | Podsumowanie .....   | 99  |
| 8     | Autorska metoda identyfikacji parametrów modalnych .....         | 101 |
| 8.1   | Wstęp.....   | 101 |
| 8.2   | Podstawy matematyczne .....                                      | 101 |
| 8.3   | Obiekt symulowany .....  | 103 |
| 8.4   | Dane pomiarowe .....   | 107 |
| 8.5   | Identyfikacja parametrów modalnych układów niestacjonarnych..... | 107 |
| 9     | Program badań.....   | 110 |
| 9.1   | Plan eksperymentu .....  | 110 |
| 9.2   | Przebieg eksperymentu .....                                      | 114 |
| 9.2.1 | Stanowisko badawcze .....  | 114 |
| 9.2.2 | Uszczelnienie dynamiczne.....                                    | 116 |
| 9.2.3 | Parametry stanowiska .....                                       | 117 |
| 9.3   | Wyniki pomiarów dla układu bez smaru.....                        | 118 |
| 9.3.1 | Model liniowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań.....   | 124 |
| 9.3.2 | Model kwadratowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań ..  | 128 |
| 9.4   | Wyniki pomiarów dla układu ze smarem MoS <sub>2</sub> .....      | 132 |



|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 9.4.1 | Model liniowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań.....  | 136 |
| 9.4.2 | Model kwadratowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań .. | 138 |
| 10    | Identyfikacja współczynnika tarcia .....                        | 140 |
| 10.1  | Wstęp.....  | 140 |
| 10.2  | Model obliczeniowy .....  | 141 |
| 10.3  | Obliczenia na superkomputerze Tryton.....                       | 144 |
| 10.4  | Wyniki .....  | 145 |
| 11    | Wnioski .....   | 147 |
| 12    | Literatura .....  | 149 |

## Spis rysunków

|  |    |
|--|----|
| Rysunek 1. Belka jednostronnie utwierdzona jako układ o jednym stopniu swobody... 18                           | 18 |
| Rysunek 2. Układ masowo-sprężysty. .... 18   | 18 |
| Rysunek 3. Krzywa czułości akcelerometru ADXL1001 [44]. .... 28  | 28 |
| Rysunek 4. Typy nieliniowości przetworników (na podstawie [39]). .... 29                                       | 29 |
| Rysunek 5. Zasada działania efektu Dopplera [39]. .... 31  | 31 |
| Rysunek 6. Przykład zastosowania tensometru w rakiecie sondującej [55]. .... 32                                | 32 |
| Rysunek 7. Budowa akcelerometru pojemnościowego różnicowego [61]. .... 33                                      | 33 |
| Rysunek 8. Schemat działania czujnika wiroprowadowego [67]. .... 34  | 34 |
| Rysunek 9. Zasada działania interferometru Michelsona [72]. .... 35  | 35 |
| Rysunek 10. Zasada działania pojemnościowego czujnika odległości (na podstawie [77]). .... 36                  | 36 |
| Rysunek 11. Powody uszkodzeń satelitów (na podstawie [86]). .... 38  | 38 |
| Rysunek 12. Poziomy drgań występujące w różnych modach transportu (na podstawie [102]). .... 42                | 42 |
| Rysunek 13. Sekwencja testów wg ECSS-E-ST-10-03C (na podstawie [88]). .... 44                                  | 44 |
| Rysunek 14. Ilustracja procedury notchingu [121]. .... 48  | 48 |
| Rysunek 15. Przeciążenie kwazistatyczne w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz (na podstawie [103]). .... 49       | 49 |
| Rysunek 16. Zakresy przeciążeń sinusoidalnych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz (na podstawie [103]). .... 51 | 51 |
| Rysunek 17. Zakresy przeciążeń losowych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz (na podstawie [103]). .... 52       | 52 |
| Rysunek 18. Podział na ciało sztywne i odkształcalne. .... 55  | 55 |

|  |     |
|--|-----|
| Rysunek 19. Dyskretyzacja zagadnienia kontaktowego. ....   | 58  |
| Rysunek 20. Ilustracja metod poszukiwania punktów kontaktu: (a) węzeł do powierzchni i (b) powierzchnia do powierzchni. .... | 63  |
| Rysunek 21. Ilustracja metody sprawdzania warunku niepenetrowalności. ....   | 63  |
| Rysunek 22. Obliczanie sił w kontakcie. ....   | 64  |
| Rysunek 23. Schemat modelowania kontaktu wielu ciał w środowisku ANSYS. ....   | 68  |
| Rysunek 24. Naprężenia statyczne w rozszerzonym modelu tarcia [147]. ....  | 70  |
| Rysunek 25. Zależność współczynnika tarcia od prędkości względnej w rozszerzonym modelu tarcia kinetycznego [147]. ....      | 71  |
| Rysunek 26. Krzywa Stribeck [152]. ....  | 73  |
| Rysunek 27. Zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości nad Ziemią (na podstawie [154]). ....                           | 74  |
| Rysunek 28. Wpływ atmosfery na współczynnik tarcia par materiałów smarowanych MoS <sub>2</sub> (na podstawie [168]). ....    | 81  |
| Rysunek 29. Identyfikacja współczynnika tłumienia metodą <i>peak picking</i> [182]. ....                                     | 93  |
| Rysunek 30. Sygnał (niebieski) wraz z obwiednią (czerwony). ....   | 99  |
| Rysunek 31. Model obiektu testowego o jednym stopniu swobody w programie Simulink. ....                                      | 103 |
| Rysunek 32. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 0% szumu. ....  | 104 |
| Rysunek 33. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 1% szumu. ....  | 104 |
| Rysunek 34. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 5% szumu. ....  | 105 |
| Rysunek 35. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 10% szumu. ....   | 105 |
| Rysunek 36. Schemat stanowiska badawczego. ....  | 114 |
| Rysunek 37. Schemat pojemnościowego systemu do pomiaru drgań. ....   | 115 |



|   |     |
|---|-----|
| Rysunek 38. Zdjęcie stanowiska badawczego. ....   | 116 |
| Rysunek 39. Uszczelnienie dynamiczne. ....  | 116 |
| Rysunek 40. Fragment przebiegu pojedynczego pomiaru. ....   | 118 |
| Rysunek 41. Zależność między współczynnikiem tłumienia a ciśnieniem dla różnych momentów dokręcania. ....   | 119 |
| Rysunek 42. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania — model liniowy wraz z danymi pomiarowymi. ....  | 128 |
| Rysunek 43. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania — model kwadratowy wraz z danymi pomiarowymi. ....   | 131 |
| Rysunek 44. Zależność między współczynnikiem tłumienia a ciśnieniem dla różnych momentów dokręcania dla przypadku ze smarowaniem MoS <sub>2</sub> . ....  | 132 |
| Rysunek 45. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania dla przypadku ze smarowaniem MoS <sub>2</sub> — model liniowy wraz z danymi pomiarowymi. ....    | 138 |
| Rysunek 46. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania dla przypadku ze smarowaniem MoS <sub>2</sub> — model kwadratowy wraz z danymi pomiarowymi. .... | 139 |
| Rysunek 47. Podział zadania na elementy skończone. ....   | 142 |
| Rysunek 48. Przebieg przemieszczeń dla współczynnika tarcia $\mu = 0.02$ . ....   | 146 |
| Rysunek 49. Zależność pomiędzy współczynnikiem tłumienia $\zeta$ a współczynnikiem tarcia $\mu$ . ....  | 146 |

## Spis tabel

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 1. Rodzaje obciążeń na różnych etapach życia satelity (opracowanie własne). .                 | 40  |
| Tabela 2. Poziomy obciążeń kwazistatycznych w różnych modach transportu (na podstawie [102]).        | 42  |
| Tabela 3. Współczynniki bezpieczeństwa KQ i KA [117].  | 46  |
| Tabela 4. Zakresy przeciążeń kwazistatycznych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz [103].              | 50  |
| Tabela 5. Zakresy przeciążeń sinusoidalnych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz [103].                | 50  |
| Tabela 6. Zakres przeciążeń losowych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz [103].                       | 51  |
| Tabela 7. Porównanie rodzajów kontaktowych elementów skończonych w środowisku ANSYS [140].           | 66  |
| Tabela 8. Parametry kontaktowe w ANSYSie [147].  | 69  |
| Tabela 9. Skutki oddziaływań cząstek na tribomateriały (na podstawie [158]).                         | 75  |
| Tabela 10. Wyzwania tribologiczne środowiska kosmicznego (na podstawie [158]).                       | 77  |
| Tabela 11. Dobór typu smarowania w zależności od warunków pracy (na podstawie [158]).                | 78  |
| Tabela 12. Dodatkowe funkcje smarowania (na podstawie [158]).  | 78  |
| Tabela 13. Substancje używane jako smary stałe i ich właściwości (na podstawie [158]).               | 79  |
| Tabela 14. Porównanie wartości współczynników tłumienia zidentyfikowanych przy pomocy różnych metod. | 106 |
| Tabela 15. Porównanie błędów identyfikacji współczynnika tłumienia różnych metod.                    | 107 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 16. Plan statyczny zdeterminowany kompletny eksperymentu rozważany w tym rozdziale.....                 | 110 |
| Tabela 17. Zmienne wejściowe.....  | 117 |
| Tabela 18. Zmienne wyjściowe.....  | 117 |
| Tabela 19. Średni współczynnik tłumienia dla przypadku bez smaru.....  | 120 |
| Tabela 20. Odchylenie standardowe współczynnika tłumienia dla przypadku bez smaru.<br>.....                    | 121 |
| Tabela 21. Wariancja współczynnika tłumienia dla przypadku bez smaru.....                                      | 122 |
| Tabela 22: Matryca planu PS/DK 2 <sup>2</sup> z uwzględnieniem interakcji.....                                 | 124 |
| Tabela 23. Średni współczynnik tłumienia dla przypadku ze smarowaniem MoS <sub>2</sub> . ....                  | 133 |
| Tabela 24. Odchylenie standardowe współczynnika tłumienia dla przypadku ze smarowaniem MoS <sub>2</sub> . .... | 134 |
| Tabela 25. Wariancja współczynnika tłumienia dla przypadku ze smarowaniem MoS <sub>2</sub> .<br>.....          | 135 |
| Tabela 26. Matryca planu PS/DK 2 <sup>2</sup> z uwzględnieniem interakcji.....                                 | 136 |
| Tabela 27. Dane materiałowe użyte w zadaniu.....   | 141 |
| Tabela 28. Podsumowanie parametrów elementów skończonych.....  | 143 |
| Tabela 29. Parametry superkomputera Tryton.....  | 144 |
| Tabela 30. Zidentyfikowane wartości współczynnika tarcia dla pomiarów bez smaru.<br>.....                      | 145 |

# 1 Wstęp

Głównym celem niniejszej pracy doktorskiej zatytułowanej *Wpływ środowiska i warunków zamocowania na drgania elementów obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną* jest sformułowanie opisu wpływu otoczenia obiektów drgających w warunkach wynoszenia w przestrzeń kosmiczną na parametry tego drgania. W szczególności skupiono się na warunkach zamocowania i nietypowych warunkach środowiskowych, takich jak obniżone ciśnienie atmosferyczne i próżnia. Rozważania te są punktem wyjścia do analizy drgań obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną.

Drgania mechaniczne są ważnym zagadnieniem w inżynierii (rozdział 2). Wciąż udoskonalane są sposoby ich pomiaru (rozdział 3) w różnych zastosowaniach, gdyż na ich podstawie można przewidywać ich intensywność, a nawet im przeciwdziałać. Jest to szczególnie ważne w inżynierii kosmicznej. Obiekt wynoszony w przestrzeń kosmiczną poddawany jest środowisku drgań na wszystkich etapach „życia”: od testowania, poprzez transport, w trakcie wyniesienia oraz na orbicie. Uszkodzenia mechaniczne są jedną z ważniejszych przyczyn zniszczeń satelitów, co ma swoje konsekwencje finansowe (rozdział 4).

Znajomość środowiska dynamicznego jest szczególnie ważna dla mechanizmów kosmicznych, których kluczowym składnikiem są smary, specyficzne dla zastosowań kosmicznych. Ich własności mechaniczne silnie zależą od warunków środowiska i zamocowania, co jest przesłanką, że również tłumienie przez nie drgań może być zależne od parametrów takich jak siła docisku lub ciśnienie powietrza (rozdział 6). Zjawiska w takich elementach można modelować przy użyciu metody elementów skończonych (rozdział 5). Z kolei eksperymentalna analiza modalna pozwala wyznaczyć kluczowe parametry przebiegu drgań na podstawie danych doświadczalnych (rozdział 7).

W niniejszej pracy zaproponowano własną metodę identyfikacji współczynnika tłumienia drgań (rozdział 8), a następnie przygotowano eksperyment, którego celem było opisanie wpływu środowiska na współczynnik tłumienia drgań (rozdział 9) oraz współczynnik tarcia (rozdział 10). Przedstawiono wnioski inżynierskie i naukowe (rozdział 11).

Praca obejmuje konstrukcję stanowiska do pomiaru drgań własnych belki jednostronnie utwierdzonej. Stanowisko umożliwia kontrolowanie wspomnianych wcześniej warunków,



wyzolowanie wpływu poszczególnych czynników i wreszcie odtworzenie, w pewnym zakresie, rzeczywistych warunków wynoszenia obiektów w przestrzeń kosmiczną.

Kluczowym elementem pracy jest identyfikacja własności dynamicznych wynoszonych obiektów z uwzględnieniem ich zamocowania oraz warunków środowiskowych. Zawarto przegląd zagadnień dotyczących identyfikacji, w szczególności najpowszechniejszych metod operujących w dziedzinie czasu oraz częstotliwości. Zaproponowana została autorska metoda identyfikacji oparta na optymalizacji, która umożliwia oszacowanie wartości współczynnika tarcia. Wnioski mają szczególny wpływ na dobór modelu zjawisk kontaktowych w drgającym elemencie. Szczegółowo omówiony został model kontaktu, jego opis matematyczny i zgodność z badaniami doświadczalnymi.

Kolejnym poruszonym zagadnieniem jest wpływ zastosowania smaru na warunki zamocowania. W szczególności skupiono się na smarach stosowanych w inżynierii kosmicznej. W pracy zaprezentowano przegląd rodzajów smarów z ich najważniejszymi właściwościami i zastosowaniami. Wyjaśniono kluczowe zjawiska i omówiono proces doboru smaru do konkretnej aplikacji. Wreszcie, przedstawiono przegląd literatury dotyczącej zjawisk wpływu różnych rodzajów smarów na drgania.

Opisane wcześniej metody identyfikacji własności dynamicznych zostały porównane z autorską metodą opartą na optymalizacji. W tym celu przeprowadzono symulacje na wyidealizowanych obiektach. Potwierdzono dzięki temu skuteczność autorskiej metody w problemie identyfikacji współczynnika tarcia.

Rozważania teoretyczne i analityczne stały się podstawą do autorskich badań eksperymentalnych, w których w jakościowy sposób zbadano wpływ wybranych czynników na drgania. Opisane zostało stanowisko pomiarowe, plan i przebieg eksperymentów. Następnie przedstawione zostały wyniki i wyciągnięte wnioski.

W wyniku przeprowadzonych w pracy rozważań i badań wykazano prawdziwość tezy sformułowanej jako: tłumienie w warunkach wynoszenia ładunku w przestrzeń kosmiczną wynika głównie z tribochemicznych mechanizmów tarcia i tłumienia materiałowego i możliwy jest ilościowy opis wpływu tych parametrów na tłumienie.



## 2 Drgania mechaniczne

### 2.1 Wstęp

Drganiami mechanicznymi nazywany jest ruch ciała, w którym badana współrzędna na przemian przybliża się i oddala od pewnej wartości. Typowo, wartość ta jest stała w czasie i przyjmowana jest jako wartość zerowa w danym układzie współrzędnych. Literatura zwraca uwagę, że drgania, często występujące w maszynach, mogą być m.in. przyczyną hałasu i uszkodzeń. Dzieje się tak, ponieważ powtarzalne przemieszczenia mogą skutkować występowaniem oscylacyjnego poślizgu na powierzchniach połączeń między elementami, a także powodują zmienne obciążenia, co prowadzi do zjawisk takich jak [1]:

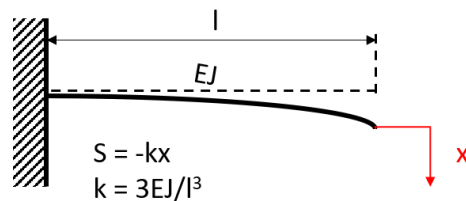
- zmęczenie materiału,
- zwiększenie zużycia powierzchni trących,
- zwiększenie luzów, itp.

W pracy [2], Osiński stwierdza, że „drgania mogą powodować niewłaściwą pracę urządzeń nakładając się na ruchy robocze i zniekształcając je. W specjalnych przypadkach występują zjawiska rezonansowe oraz niestateczności, które prowadzą do powstania dużych obciążeń, a często do zniszczenia lub uszkodzenia maszyny. Drgania mogą mieć ujemny wpływ na organizm ludzki powodując zmęczenie lub stany chorobowe. W budowie maszyn i innych gałęziach techniki wkłada się bardzo dużo wysiłku w łagodzenie i zmniejszenie drgań oraz usuwanie ich skutków”. Choć drganiom najczęściej się przeciwdziała, np. [3], to można znaleźć również przykłady ich pożądanego stosowania: np. w metodach identyfikacji w Eksperymentalnej i Operacyjnej Analizie Modalnej [4], [5] obróbce skrawaniem [6], technologii czujników MEMS [7], biomechanice [8].

### 2.2 Opis matematyczny

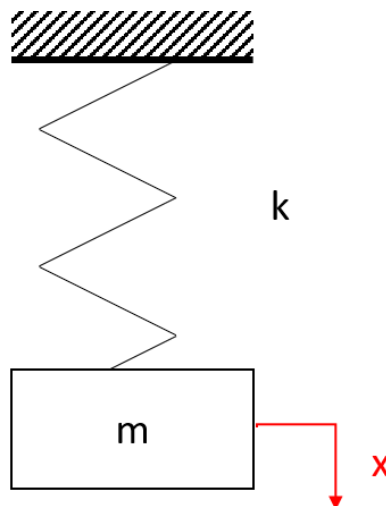
W celu analizy drgań układu mechanicznego, tworzone są modele, upraszczające obiekt rzeczywisty. Przy konstrukcji modelu, należy zwrócić uwagę na zakres uproszczeń, w szczególności zweryfikować czy ruch modelu jest jakościowo tożsamy z ruchem obiektu rzeczywistego, a niedokładności mieszczą się w akceptowalnych granicach.

Podstawowym pojęciem praktycznym przy tworzeniu takich modeli jest współrzędna uogólniona. Współrzędne uogólnione to minimalna liczba współrzędnych opisujących w sposób jednoznaczny położenie układu w przestrzeni [9]. Liczba współrzędnych uogólnionych jest zatem również liczbą stopni swobody, czyli niezależnych możliwych składowych ruchów, jaką mogą wykonać elementy rozpatrywanego układu. Rozważane mogą być układy dyskretne o skończonej liczbie stopni swobody, bądź ciągłe o nieskończonej liczbie stopni swobody [10]. Rozpatrzmy prosty układ fizyczny belki jednostronnie utwierdzonej o jednym stopniu swobody przedstawiony na rysunku 1.



Rysunek 1. Belka jednostronnie utwierdzona jako układ o jednym stopniu swobody.

W układzie tym wyróżnić można jedną współrzędną uogólnioną, tj. przemieszczenie pionowe  $x$  końca belki. Gürgöze [11] wykazał, że belkę taką można modelować jako układ sprężyna-masa-tłumik (rysunek 2) o masie  $m$ , sprężystości  $k$  i tłumieniu  $c$ .



Rysunek 2. Układ masowo-sprężysty.

Różniczkowe równanie ruchu dla powyższego układu można ułożyć przy pomocy równania Lagrange'a II rodzaju [12], które dla układu o jednej współrzędnej uogólnionej  $x$  ma postać ogólną:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = F, \quad (1)$$

gdzie:  $E$  – energia kinetyczna układu,  $D$  – funkcja dyssypacji energii układu,  $V$  – energia potencjalna układu,  $F$  – wypadkowa siła czynna działająca na układ.

W układzie opisanym na rysunku 2, wartości powyższych funkcji wynoszą:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad (2)$$

$$D = \frac{c\dot{x}^2}{2}, \quad (3)$$

$$V = \frac{kx^2}{2}. \quad (4)$$

Podstawiając wzory (2), (3) i (4) do wzoru (1), otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (5)$$

W przypadku, gdy na układ nie działa żadna siła czynna ( $F = 0$ ), równanie przyjmuje postać:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (6)$$

a układ jest zwany swobodnym. W przypadku, gdy masa, sztywność i tłumienie są stałe w czasie, a zatem:

$$m(t) \equiv m = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

$$c(t) \equiv c = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

$$k(t) \equiv k = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (9)$$

układ taki nazywany jest stacjonarnym, a od czasu zależy jedynie zmienna uogólniona i jej pochodne:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (10)$$

W celu rozwiązania różniczkowego równania ruchu dla drgań swobodnych układu stacjonarnego (10), należy przewidzieć jego formę jako funkcję współrzędnej uogólnionej (i jej pochodnych) od czasu:

$$x(t) = C \cdot e^{r \cdot t}, \quad (11)$$

$$\dot{x}(t) = C \cdot r \cdot e^{r \cdot t}, \quad (12)$$

$$\ddot{x}(t) = Cr^2 \cdot e^{r \cdot t}. \quad (13)$$

Po podstawieniu tych zależności do wzoru (10), otrzymujemy:

$$m(Cr^2 \cdot e^{r \cdot t}) + c(C \cdot r \cdot e^{r \cdot t}) + k(C \cdot e^{r \cdot t}) = 0. \quad (14)$$

Na podstawie równania (14) można wyznaczyć dwie wartości parametru  $r$  (równanie (14) ma dwa rozwiązania):

$$r_1 = -\frac{c + \sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2m}, \quad (15)$$

$$r_2 = -\frac{c - \sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2m}, \quad (16)$$

a zatem, całka ogólna jednorodnego równania różniczkowego wynosi:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}, \quad (17)$$

a jej pochodna:

$$\dot{x}(t) = C_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + C_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}. \quad (18)$$

Przy wykorzystaniu warunków początkowych:

$$x(t = 0) = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot 0} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot 0} = x_0, \quad (19)$$

$$\dot{x}(t = 0) = C_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot 0} + C_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot 0} = v_0, \quad (20)$$

uzyskujemy stałe  $C_1$  oraz  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{v_0 - x_0 \cdot r_2}{r_1 - r_2}, \quad (21)$$

$$C_2 = -\frac{v_0 - x_0 \cdot r_1}{r_1 - r_2}. \quad (22)$$

Przyjmując oznaczenia za [13]:

$$\beta = \frac{c}{2 \cdot m}, \quad (23)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (24)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (25)$$

gdzie:  $\beta$  – współczynnik beta (oznaczenia przyjęte zgodne z [2], [14]),  $\omega_0$  – częstość kołowa oscylatora nietłumionego,  $\omega$  – częstość kołowa drgań tłumionych, uzyskamy następujące równania:

$$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (26)$$

$$r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (27)$$

Funkcja  $x(t)$  we wzorze (17) jest sumą dwóch funkcji wykładniczych. W przypadku, gdy  $\beta^2 < \omega_0^2$  (czyli  $r_1$  oraz  $r_2$  posiadają część urojoną), przebieg funkcji  $x(t)$  jest oscylacyjny. Przydatny w opisie ruchu oscylacyjnego jest współczynnik tłumienia  $\zeta$ , definiowany jako [15]:

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega_0}. \quad (28)$$

W zależności od wartości współczynnika  $\zeta$ , układ oscylacyjny swobodny (przy niezerowych warunkach początkowych) może być:

- nietłumiony ( $\zeta = 0$ ) – układ wykonuje oscylacje o stałej amplitudzie i częstości  $\omega_0$ ,
- tłumiony podkrytycznie ( $0 < \zeta < 1$ ) – układ wykonuje oscylacje o częstości drgań tłumionych  $\omega_d$ , a amplituda dąży do zera tym szybciej im większa jest wartość  $\zeta$ ,

- tłumiony krytycznie ( $\zeta = 1$ ) oraz nadkrytycznie ( $\zeta > 1$ ) – układ dąży do położenia równowagi bez wykonywania oscylacji tym wolniej im większa jest wartość  $\zeta$ .

W innej formie, równanie (17) można zapisać [16]:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\omega_0 \zeta t} \cos(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t). \quad (29)$$

### 2.3 Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej, FRF

W przypadku, gdy na układ o jednym stopniu swobody działa wymuszenie harmoniczne  $F = F_0 \cos(\omega t)$  o częstotliwości  $\omega$ , równanie (5), przyjmuje postać:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cdot \cos(\omega t). \quad (30)$$

Jest to równanie różniczkowe niejednorodne, a jego rozwiązanie, czyli całka szczególna wyrażona jest wzorem:

$$x_p(t) = C \cdot \cos(\omega t) + D \cdot \sin(\omega t), \quad (31)$$

a jej pochodne to:

$$\dot{x}_p(t) = \omega(-C \cdot \sin(\omega t) + D \cdot \sin(\omega t)), \quad (32)$$

$$\ddot{x}_p(t) = \omega^2(C \cdot \cos(\omega t) - D \cdot \sin(\omega t)). \quad (33)$$

Jeśli podstawimy równania (31), (32) i (33) do równania (30), uzyskamy:

$$\begin{aligned} [-m\omega^2 C + c\omega D + kC] \cdot \cos(\omega t) + [-m\omega^2 D - c\omega C + kD] \cdot \sin(\omega t) = \\ = F_0 \cdot \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (34)$$

Po przyrównaniu podobnych wyrazów z lewej i prawej strony równania (34) uzyskujemy:

$$[-m\omega^2 C + c\omega D + kC] = F_0 \quad (35)$$

oraz:

$$[-m\omega^2 D - c\omega C + kD] = 0, \quad (36)$$

zatem:

$$C = \frac{k-m\omega^2}{c\omega} D, \quad (37)$$

oraz:

$$\frac{(k-m\omega^2)^2}{c\omega} D + c\omega D = F_0, \quad (38)$$

co pozwala obliczyć niewiadome  $C$  i  $D$ :

$$C = \frac{(k-m\omega^2)}{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F_0, \quad (39)$$

$$D = \frac{c\omega}{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F_0. \quad (40)$$

Całkę szczególną z równania (31) można zapisać w formie:

$$x_p(t) = X_0 \cdot (\omega t - \phi), \quad (41)$$

gdzie  $\phi$  – oznaczać będzie przesunięcie fazowe. Porównując wzory (31) oraz (41) można wykazać, że:

$$X_0 = \sqrt{C^2 + D^2}, \quad (42)$$

oraz:

$$\phi = \arctan\left(\frac{D}{C}\right), \quad (43)$$

a zatem:

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad (44)$$

oraz:

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right). \quad (45)$$

Korzystając z oznaczeń (24) oraz (28), można zapisać powyższe jako:

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (46)$$

oraz:

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right). \quad (47)$$

Otrzymuje się wówczas rozwiązanie równania różniczkowego (30) w formie:

$$x_p(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{k} \cdot H(\omega) \cdot \cos(\omega t - \phi), \quad (48)$$

gdzie:

$$\frac{F_0}{k} = \delta_{st}, \quad (49)$$

zwane również odkształceniem statycznym, a  $H(\omega)$  nazywane jest funkcją odpowiedzi częstotliwościowej (ang. *frequency response function, FRF*) i zdefiniowane jest jako (por. równania (46) i (48)):

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (50)$$

FRF jest miarą odpowiedzi układu w odniesieniu do sygnał wejściowego. Jego znajomość pozwala na przewidywanie zachowania układu przy znajomości sygnału wejściowego oraz umożliwia dobór filtrów w celu zmiany charakterystyki dynamicznej układu.

## 2.4 Zagadnienia pokrewne

Model układu drgającego swobodnie z tłumieniem o jednym stopniu swobody jest często stosowany w literaturze do opisu prostych układów mechanicznych [17], [18]. W przypadku bardziej skomplikowanych układów, powszechne są opisy oscylatorów o dwóch [19] i więcej stopniach swobody [20]–[22]. Bardzo ważne z punktu widzenia inżynierii mechanicznej są zagadnienia związane z drganiami wymuszonymi, np. *chatter* w obróbce skrawaniem [23] oraz *flutter* w lotnictwie [24], z zastosowaniami takimi jak wibroizolacja [25], czy też z tłumieniem drgań sejsmicznych [26].



Często spotykana w inżynierii kosmicznej jest również analiza drgań w stanach przejściowych (ang. *transient vibration*) w odpowiedzi na wymuszenie impulsowe [27] (np. drgania spowodowane separacją satelity od rakiety [28]). Wiele prac dotyczy drgań układów ciągłych o nieskończenie wielu stopniach swobody ([10], [29], [30]). Wraz z rozwojem technik komputerowych, popularność zyskały modele tworzone metodą elementów skończonych [31], a także sztywnych elementów skończonych [32] czy hybrydową metodą sztywnych elementów skończonych [33].

Coraz większy rozwój czyniony jest w dziedzinie modelowania układów nieliniowych. Nieliniowość geometryczna występuje, gdy energia potencjalna (patrz równanie (4)) nie jest liniową lub kwadratową funkcją współrzędnych uogólnionych. Z kolei nieliniowość materiałowa występuje, gdy energia kinetyczna (patrz równanie (2)) nie jest kwadratową funkcją pochodnych współrzędnych uogólnionych — nieliniowość materiałowa. Przykładami są niesymetryczne belki jednostronnie utwierdzone [30] czy wahadła [34]. Natomiast dostatecznie skomplikowany układ nieliniowy wykazuje zachowanie chaotyczne [35].

Innym ważnym aspektem zagadnienia drgań mechanicznych mającym znaczenie w inżynierii kosmicznej są drgania losowe [36], ich opis statystyczny [37], a także praktyczne zastosowania, takie jak opis drgań rakiety w trakcie startu [27] czy testy ładunku wynoszonego w przestrzeń kosmiczną [38]. Zagadnienia drgań w inżynierii kosmicznej szerzej opisane zostały w rozdziale 4.

## 3 Sposoby pomiaru drgań

### 3.1 Wstęp

Zjawisko drgań mierzyć można na wiele sposobów. W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną najważniejsze metody wraz z zasadami działania czujników wykorzystywanych w tych metodach. Szczególny nacisk położony zostanie na pojemnościowy pomiar przyspieszeń, ponieważ taka metoda zostanie wykorzystana w eksperymentalnej części niniejszej pracy. Opis całości stanowiska pomiarowego zawarty jest w dalszej części pracy (podrozdział 9.2.1).

Z problematyką pomiaru i generacji drgań powiązane są również zagadnienia dotyczące układów przetwarzania sygnałów (analogowych i cyfrowych), modulacji oraz zapisu przebiegu drgań. Wykraczają one jednak poza zakres tej pracy, a zostały szczegółowo opisane na przykład w podręczniku [39]. W kontekście identyfikacji charakterystyk obiektów z ww. tematyką powiązane są również zagadnienia dotyczące urządzeń do wzbudzania drgań mechanicznych oraz systemów testowania wibracyjnego (stosowanych m.in. w inżynierii kosmicznej). Takim systemom, wraz z praktycznymi wskazówkami dotyczącymi m.in. ich kalibracji oraz licznymi przykładami stanowisk badawczych, inżynierskich i przemysłowych poświęcone są np. publikacje [39] i [40]. Ważnym aspektem pomiaru drgań jest fakt, że drgania opisane mogą być przy pomocy różnych parametrów. Zapisem drgań może być przebieg przyspieszenia, prędkości, przemieszczeń czy siły, czyli wszystkich funkcji zmiennych w czasie w równaniu (5). Żadna z powyższych wielkości fizycznych nie jest typowo współcześnie mierzona bezpośrednio, zatem wymagany jest odpowiedni przetwornik, który zmieni tą wielkość fizyczną na inną, mierzalną, taką jak opór, napięcie, ładunek.

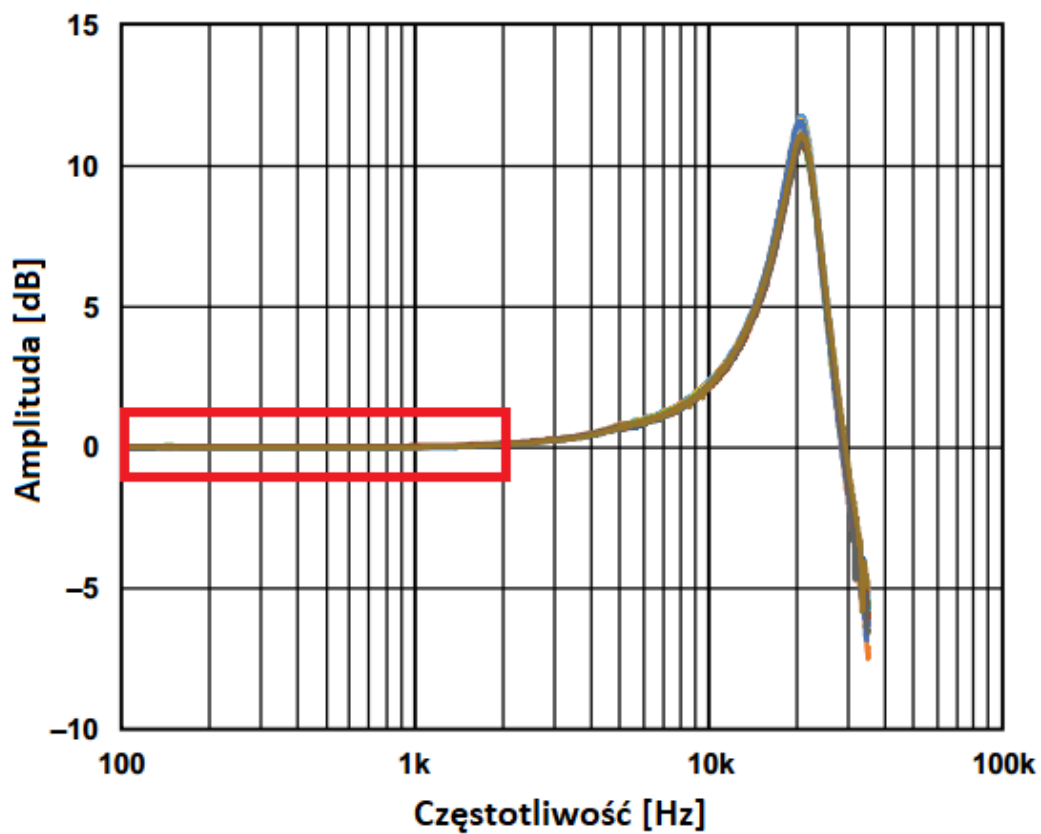
Parametry, które są kluczowe przy doborze przetwornika do pomiaru drgań (ale również dowolnych innych zjawisk fizycznych) to [41]:

- zakres pomiarowy,
- zakres częstotliwości pomiaru,
- liniowość,
- masa przetwornika,
- poziom zakłóceń.



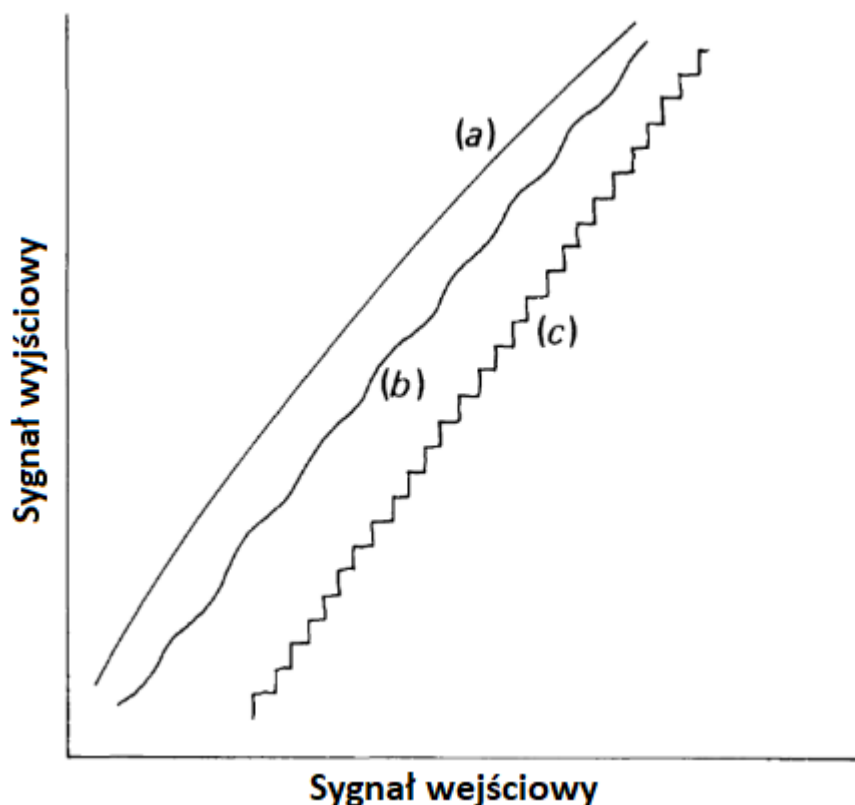
Żeby uniknąć zjawiska przesterowania [42], wielkość fizyczna musi w ciągu całego pomiaru pozostawać w granicach zakresu pomiarowego urządzenia. W przypadku pomiaru przyspieszeń może być to trudne do osiągnięcia, gdyż, w szczególności zjawiskom przejściowym w inżynierii kosmicznej, takim jak start rakiety kosmicznej [27] czy separacja satelity od rakiety [28] towarzyszą szoki. Są to bardzo krótkotrwałe drgania (rzędu milisekund [43]) o bardzo dużej amplitudzie, często przekraczające zakresy typowych przetworników. Gdyby projektować proces pomiarowy tylko pod te największe wartości, mogłoby się okazać, że tak dobrany czujnik posiadałby zbyt małą czułość, żeby wykryć pozostałe zjawiska.

Dobierając czujnik pomiarowy należy zwrócić uwagę na oferowany przez niego zakres częstotliwości pomiaru. Należy przy tym wziąć pod uwagę oczekiwane zakresy częstotliwości mierzonych drgań oraz warunek Nyquista. Ponadto, aby uniknąć zniekształceń mierzonego sygnału należy operować w takim zakresie charakterystyk częstotliwościowych czujnika, w których zapewnione jest jednakowe wzmocnienie poszczególnych składowych częstotliwościowych sygnału. Na rysunku 3 przedstawiono charakterystykę częstotliwościową analogowego czujnika przyspieszeń, akcelerometru ADXL1001 [44] i zaznaczono jej fragment, gdzie odpowiedź akcelerometru (sygnał wyjściowy) jest proporcjonalna do wymuszenia (sygnału wejściowego) niezależnie od częstotliwości.



Rysunek 3. Krzywa czułości akcelerometru ADXL1001 [44].

Kolejnym wyzwaniem pomiaru drgań jest nieliniowość przetwornika, w znacznie większym stopniu dotyczącym pomiaru przemieszczeń niż przyspieszeń. Rysunek 4 przedstawia różne typy nieliniowości przetworników [39].



Rysunek 4. Typy nieliniowości przetworników (na podstawie [39]).

O ile nieliniowość zaznaczona jako (a) może mieć stosunkowo mały wpływ na przebieg pomiaru, te zaznaczone jako (b) i (c), w szczególności dla pomiaru małych drgań mogą mieć zasadnicze znaczenie. Nieliniowość (c) może być spowodowana zbyt rzadką kwantyfikacją sygnału zarówno w czasie jak i w wartości. Niestety, niewielu producentów podaje pełną informację o nieliniowości czujnika, a w szczególności, że jak może ona zależeć, np. od warunków środowiskowych użycia czujnika, co w przestrzeni kosmicznej jest ważne [45]. Zwykle producenci ograniczają się do ogólnikowego stwierdzenia, że przetwornik jest liniowy we wskazanym zakresie pomiarowym.

Nie bez znaczenia przy pomiarach drgań, zwłaszcza obiektów o niewielkiej masie, jest masa samego czujnika. Jak istotny jest to problem wskazuje np. praca [39], gdzie autorzy wyprowadzają równanie na odpowiedź nieskończenie długiej płyty o grubości  $h$ , module Younga  $E$ , gęstości  $\rho$  i liczbie Poissona  $\nu$ :

$$\frac{F}{v} = 8h^2 \sqrt{\frac{E\rho}{12(1-\nu^2)}}, \quad (51)$$

a zatem masa zredukowana [2]  $M_e$  ma wartość:

$$M_e = \frac{8h^2}{\omega} \sqrt{\frac{E\rho}{12(1-\nu^2)}}, \quad (52)$$

co dla danych materiałowych stali oraz częstotliwości drgań własnych  $f = 1000$  Hz daje masę zredukowaną  $M_e = 98$  g. Oznacza to, że na przykład akcelerometr o masie 20 g nie byłby odpowiedni dla drgań o częstotliwościach powyżej 50 Hz. Autorzy [46] podają praktyczną wskazówkę, że przetwornik nie powinien przekraczać 10% masy zredukowanej układu. Autorzy [47] porównują również metody mocowania przetworników do drgających obiektów: przyciskanie, magnes, wosk, połączenie gwintowe, klejenie i zwracają uwagę na to, że rezonanse w kontakcie są najczęściej występującym problemem przy pomiarze drgań, w szczególności wiotkich i małych obiektów, a takie często występują w inżynierii kosmicznej. Porady dotyczące montażu akcelerometrów dostępne są też w publikacji [48].

Wreszcie, dla analizy przebiegu drgań, ważnym aspektem jest poziom szumu [49]. W podrozdziale 8.3 przeanalizowano wpływ szumu na metody identyfikacji drgań. Typowymi źródłami szumu są:

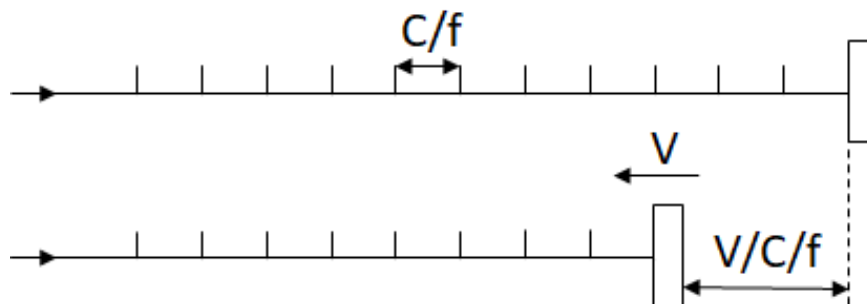
- szum termiczny [50].
- szum wzmacniaczy sygnału [51],
- szum kwantyzacji [52].

Wpływ niektórych rodzajów szumu na pomiary można określić przy pomocy testów przetwornika przy braku sygnału wymuszającego.

## 3.2 Metody pomiaru drgań

### 3.2.1 Ultradźwiękowe czujniki odległości

Ultradźwiękowe czujniki odległości działają na zasadzie efektu Dopplera. Wysyłają one falę elektromagnetyczną o częstotliwości  $f$ , która po odbiciu się od obiektu poruszającego się z prędkością  $V$ , powraca ze zmienioną częstotliwością  $f + fV/c_0$ , gdzie  $c_0$  – prędkość światła (rysunek 5).



Rysunek 5. Zasada działania efektu Dopplera [39].

Na zasadzie takiej działają np. urządzenia do pomiaru prędkości pojazdów używane przez Policję, a także systemy pomiarowe stosowane w przemyśle aeronautycznym do badania drgań wirników silników lotniczych [53].

### 3.2.2 Tensometry

Tensometry pozwalają na pomiar naprężenia w materiale, do którego zostały przyklejone. W czujnikach tego typu, względna zmiana oporu elektrycznego  $\Delta R$  jest proporcjonalna do odkształceń  $\epsilon$ , którym poddawany jest tensometr, a współczynnik proporcjonalności nazywany jest stałą tensometru  $K$ :

$$\Delta \frac{R}{R} = K \cdot \epsilon. \quad (53)$$

W przypadku poprawnego zamocowania, odkształcenia tensometru będą takie same jak badanego materiału. Odkształcenie  $\epsilon$  jest miarą względnego wydłużenia materiału, a zatem może być miarą przemieszczenia. W przypadku odkształceń materiału w zakresie prawa Hooke'a możliwy jest również pośredni pomiar naprężenia w materiale.

Zmiana oporu jest jednak bardzo mała i mierzona jest przy pomocy mostków Wheatstone'a, które dodatkowo pozwalają skompensować wpływ temperatury na pomiar przy pomocy drugiego tensometru. Szereg praktycznych wskazówek dotyczących pomiarów tensometrycznych został zawarty w pracy [54].



Rysunek 6. Przykład zastosowania tensometru w rakiecie sondującej [55].

Tensometry są powszechnie stosowane w przemyśle kosmicznym ze względu na małe rozmiary. Prace [55]–[57] ukazują zastosowanie tensometrów do pomiarów drgań i naprężeń raket sondujących. Rysunek 6 ukazuje tensometr przyklejony do ściany modułu rakiety sondującej pozwalający zmierzyć obciążenia dynamicznie w rakiecie podczas jej lotu.

### 3.2.3 Akcelerometry piezoelektryczne

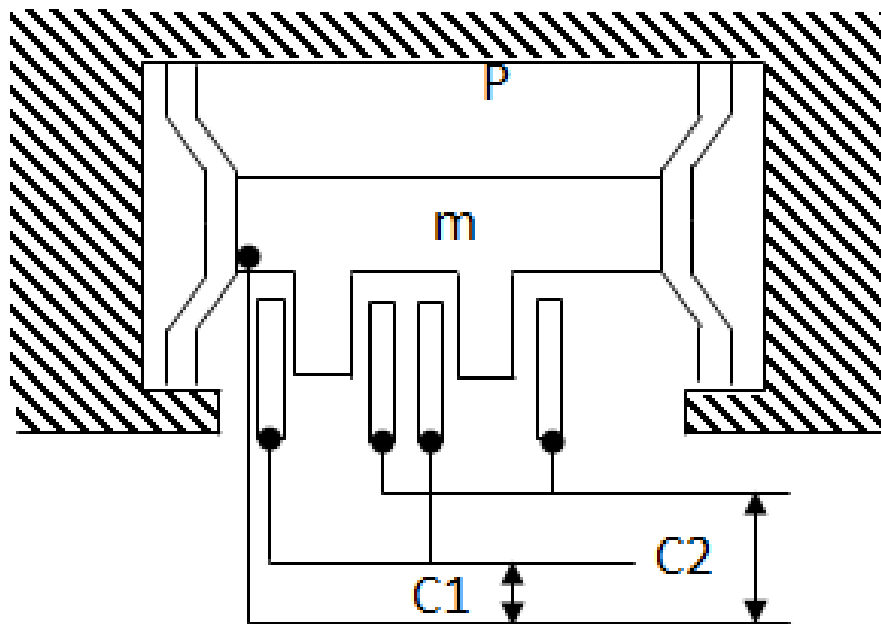
Akcelerometry piezoelektryczne wykorzystują efekt piezoelektryczny, polegający na tym, że ładunek elektryczny w niektórych materiałach akumuluje się pod wpływem deformacji. Ładunek generowany przez element jest proporcjonalny do zmiany naprężenia. Poważnym ograniczeniem jest dynamiczny charakter tej zależności – przy braku zmian naprężenia element piezoelektryczny nie generuje napięcia, a więc nie można zmierzyć przyspieszeń stałych. Ponadto, poziom szumów rośnie wraz ze spadkiem częstotliwości sygnału. W praktyce, przy wykorzystaniu akcelerometrów piezoelektrycznych nie jest możliwy pomiar sygnałów wolnozmiennych, o częstotliwości poniżej kilkunastu-kilkudziesięciu herców [58], takich jak na przykład przyspieszenie w trakcie startu rakiety. Ograniczenie to rozwiązuje się poprzez stosowanie akcelerometrów innych typów, np. MEMS. Niekiedy używa się na stanowiskach pomiarowych kilku akcelerometrów wzajemnie uzupełniających zakresy pomiarowe (np. piezoelektrycznych i MEMS [59]).



Aktualnie, najważniejsze kierunki rozwoju akcelerometrów piezoelektrycznych to: redukcja szumów [51], uzyskanie cienkich urządzeń [60] czy też udoskonalenia materiałowe [61]. Przegląd zagadnień związanych z piezoelektrycznym pomiarem przyspieszeń dostępny jest w artykule [62].

### 3.2.4 Akcelerometry MEMS

Akcelerometry MEMS mogą być opisane prostym układem masa-sprężyna o jednym stopniu swobody. Dzięki odpowiednim zabiegom wytwórczym, mogą osiągać bardzo małe rozmiary. Pod wpływem przyspieszenia, masa testowa przesuwa się, a wraz z nią (Rysunek 7) zmienia się odległość od stałej ramy. Pomiędzy ramą a masą testową znajdują się specjalnie ukształtowane wnęki, pełniące funkcję kondensatorów elektrycznych, w których proporcja pojemności  $C_1$  do  $C_2$  zależy od odległości między masą  $m$  a podstawą  $P$  [63]. Poprzez pomiar pojemności kondensatora mierzone jest przemieszczenie układu, proporcjonalne do przyspieszenia, które działa na układ. Typowe akcelerometry posiadają 3 takie masy zorientowane prostopadle do siebie, dzięki czemu możliwy jest trójosiowy pomiar przyspieszeń.

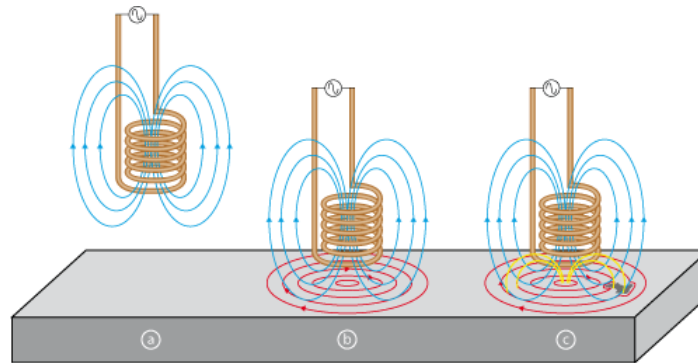


Rysunek 7. Budowa akcelerometru pojemnościowego różnicowego [61].

Varanis et al. opracował przegląd zagadnień związanych z akcelerometrami MEMS, w szczególności najnowszymi osiągnięciami [64]. Z kolei Shea przeanalizował zastosowania MEMS w technologiach kosmicznych [65].

### 3.2.5 Czujniki wiropądowe

Zasada działania czujników wiropądowych (ang. *eddy current*) została podana przez H. L. Libbiego w raporcie technicznym [66]. Czujniki takie pozwalają mierzyć drgania materiałów przewodzących elektrycznie, a ich model zaproponowali Stencil i Piwowar [67].



Rysunek 8. Schemat działania czujnika wiropądowego [67].

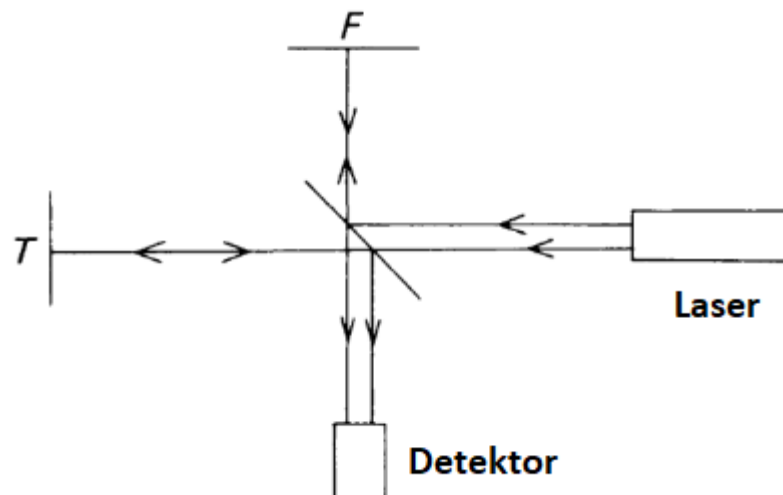
Czujnik (przedstawiony na rysunku 8) zawiera cewkę, która po przepuszczeniu przez nią prądu przemiennego wytwarza pole magnetyczne (zaznaczone na niebiesko). Gdy znajduje się ona w pobliżu przewodzącego materiału, wzbudzone są w nim prądy wirowe (zaznaczone na czerwono). Prądy te wytwarzają własne pole magnetyczne, a zatem wypadkowe pole magnetyczne jest inne niż to pierwotnie wytworzone przez cewkę. Zmiana pola wywołana wprowadzeniem obiektu metalowego zależy od: własności elektrycznych i magnetycznych obiektu, geometrii, konstrukcji czujnika, częstotliwości prądu zasilającego oraz wreszcie odległości od czujnika. W przypadku, gdy pozostałe parametry pozostają stałe, możliwy jest dzięki temu pomiar odległości. Czujniki wiropądowe są powszechnie stosowane do pomiaru drgań z dużą częstotliwością próbkowania [68], prędkości obrotowych wałów [69], siły [70] oraz wykrywania uszkodzeń [71].

### 3.2.6 Czujniki pojemnościowe

Pojemnościowy pomiar przyspieszeń jako metoda użyta w niniejszej pracy, został opisany w podrozdziale 3.3.

### 3.2.7 Interferometria laserowa

Interferometryczny pomiar przemieszczeń wywodzi się od pierwszych pomiarów interferometrem Michelsona [72]. Zmiana odległości od obiektu badanego (patrz rysunek 9), wpływa na zmianę długości drogi optycznej promieni lasera. Dzięki użyciu dwóch promieni, jednego odbijającego się od celu T, a drugiego od nieruchomego zwierciadła F, dochodzi do zjawiska interferencji fal odbitych od różnych zwierciadeł. Parametry efektu interferencyjnego są proporcjonalne do różnicy odległości między zwierciadłami, co przy wysokiej częstotliwości pomiaru pozwala rejestrować cykliczne ruchy jednego ze zwierciadeł. Typowy laser He-Ne ma długość fali 630 nm, a zatem strzałki fali oddalone są o  $0,316 \mu\text{m}$  [73]. Dodatkowo, można zwiększyć dokładność pomiaru wykrywając natężenie światła w detektorze. Metoda uznawana jest za najdokładniejszą, a przy jej pomocy wzorcowane są innego typu akcelerometry [74].

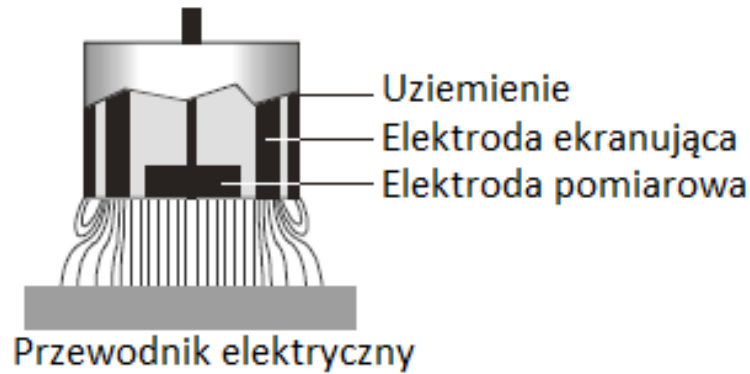


Rysunek 9. Zasada działania interferometru Michelsona [72].

Dostępne są różne rodzaje wibrometrów laserowych [75], które z powodzeniem stosowane są na przykład w analizie modalnej [76].

### 3.3 Pojemnościowy pomiar przemieszczeń

Pojemnościowy pomiar przyspieszeń wykorzystuje zasadę działania kondensatora płaskiego. Czujnik wraz z powierzchnią, do której mierzona jest odległość, tworzą dwie okładki takiego kondensatora (patrz rysunek 10).



Rysunek 10. Zasada działania pojemnościowego czujnika odległości (na podstawie [77]).

Jeśli przez kondensator przepływa prąd przemienny, amplituda napięcia jest proporcjonalna do odległości pomiędzy okładkami kondensatora. Czujnik pojemnościowy mierzy reaktancję  $X_c$ , która jest wprost proporcjonalna do odległości  $d$ :

$$X_c = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{d}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot A}, \quad (54)$$

gdzie:  $j$  – jednostka urojona,  $\omega$  – częstotliwość prądu przemiennego,  $C$  – pojemność kondensatora,  $\epsilon_r$  – względna przenikalność elektryczna powietrza ( $\epsilon_r = 1,00054$ ),  $\epsilon_0$  – przenikalność elektryczna próżni ( $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ ) [78]. Znaczna niepłaskość powierzchni pomiarowej może powodować, że zależność  $X_c-d$  przyjmie postać nieliniową.

### 3.4 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono szereg metod pomiaru drgań. Zwrócono uwagę, że w praktyce pomiar drgań polega na pomiarze przebiegu czasowego jednego z parametrów układu drgającego: przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia lub siły wymuszającej. W rozdziale 7 przedstawiono szereg metod identyfikacji parametrów modalnych – algorytmów, dla których danymi wejściowymi będą właśnie zmierzone przebiegi. Część z nich wymaga sygnału związanego z przemieszczeniem. Oczywiście, możliwe jest odtworzenie przebiegu przemieszczeń na podstawie przebiegu przyspieszeń, ale operacja ta wymaga podwójnego całkowania:

$$x(t) = \iint \ddot{x}(t). \quad (55)$$

Związane z tym jest również podwójne całkowanie błędów pomiarowych (szumów), co znacząco zmniejsza dokładność pozyskanego w ten sposób sygnału przemieszczeń  $x(t)$  [79], zwłaszcza w zakresie niskich częstotliwości tego sygnału. Istnieją techniki radzenia sobie z tym problemem, np. całkowanie w dziedzinie częstotliwości [80]. W niniejszej pracy, uwzględniając warunki środowiskowe oraz konstrukcję stanowiska pomiarowego zdecydowano się na użycie pojemnościowego pomiaru przemieszczeń. Szczegóły stanowiska pomiarowego opisano w podrozdziale 9.2.1.

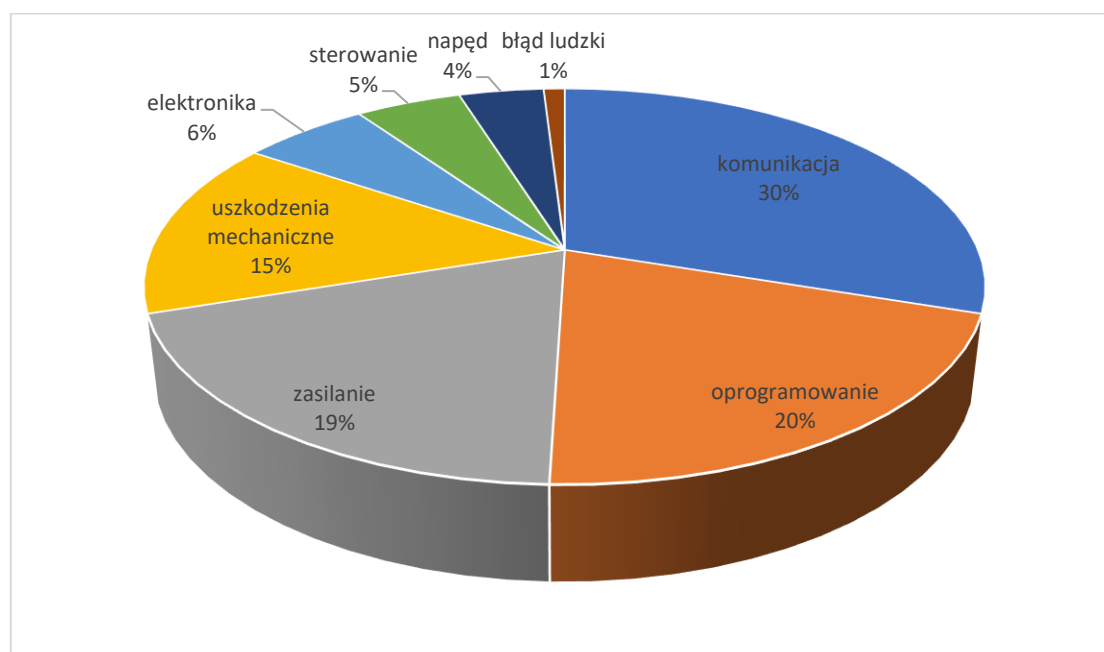
## 4 Drgania obiektów kosmicznych

### 4.1 Wpływ drgań na niezawodność obiektów kosmicznych

Projekty kosmiczne charakteryzują się wysoką złożonością oraz znacznymi kosztami. Aspekty bezpieczeństwa i niezawodności mają w nich coraz większe znaczenie, w szczególności uwzględniając coraz większą liczbę lotów kosmicznych organizowanych nie tylko przez agencje rządowe, ale również firmy prywatne.

Modelowanie niezawodności satelitów, a w szczególności ich podsystemów jest przedmiotem wielu publikacji, na przykład [81], [82]. Jest to szczególnie trudne wyzwanie, gdyż możliwość diagnozy obiektów na orbicie jest ograniczona [83]. Dodatkowo, serwisowanie satelitów, o ile przejawia interesujące perspektywy, nie jest jeszcze osiągalne dla znacznej większości obiektów [84]. Dotyczy to w szczególności małych satelitów [85].

Mimo, że struktury mechaniczne są jednym z mniej zawodnych podsystemów (w szczególności na późniejszych etapach misji [81]), to według danych z roku 2009, 15% uszkodzeń satelitów wynikało z uszkodzeń struktur mechanicznych i mechanizmów, spowodowanych między innymi drganiami mechanicznymi [86].



Rysunek 11. Powody uszkodzeń satelitów (na podstawie [86]).

W przyszłości, w związku z coraz większą liczbą obiektów wynoszonych na orbitę, straty finansowe w wyniku uszkodzeń podsystemów mechanicznych będą rosły. Jest to powód coraz większego nacisku zarówno środowiska naukowego jak i przemysłowego na dokładne poznanie zjawisk dotyczących środowiska dynamicznego obiektów kosmicznych na różnych etapach życia satelity.

## 4.2 Środowisko dynamiczne obiektów kosmicznych

Środowisko dynamiczne obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną jest wyjątkowo złożone. W trakcie czterech etapów życia maszyny, tj.: w trakcie testowania, transportu naziemnego, wynoszenia oraz praktycznej eksploatacji w przestrzeni kosmicznej występują różnego rodzaju mechaniczne obciążenia statyczne i dynamiczne.

Podczas każdego z wyżej wymienionych etapów występuje szereg różnych obciążeń, które powodują drgania o szerokim zakresie amplitud i częstotliwości. Są to [87]:

- obciążenia transportowe i od manipulacji;
- obciążenia od testów wibracyjnych, niezbędnych [88] do kwalifikacji (ang. *qualification* – dopuszczenia do lotu rakiety) struktury, w szczególności:
  - drgania sinusoidalne;
  - drgania losowe;
  - ciśnienie akustyczne;
- obciążenia w trakcie lotu, w szczególności:
  - przyspieszenia kwazistatyczne (obciążenia bezwładnościowe);
  - drgania sinusoidalne;
  - drgania losowe;
  - obciążenia akustyczne;
  - obciążenia wstrząsowe;
  - gwałtowne zmiany ciśnienia atmosferycznego;
- obciążenia przy ponownym wejściu w atmosferę (tylko niektóre ładunki);
- obciążenia związane z lądowaniem (tylko niektóre ładunki);
- obciążenia na orbicie, w szczególności:
  - obciążenia wywołane napędem (np. manewry zmiany orbity);
  - rozwijanie, zwijanie lub otwieranie elementów (np. panele słoneczne, anteny);
  - gradienty temperatur;
  - uderzenia mikrometeoroidów;

Zestawienie obciążeń wraz z podziałem na rodzaje drgań przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Rodzaje obciążeń na różnych etapach życia satelity (opracowanie własne).

|                                  | w transporcie naziemnym [89]   | w trakcie testowanie  | w trakcie wynoszenia  | operacje w przestrzeni kosmicznej   |
|----------------------------------|--|---|---|---|
| <b>obciążenia kwazistatyczne</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• przyspieszenie ziemskie (w różnych osiach)</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• „orczykowe” (ang. <i>whiffletree</i>) testy obciążenia statycznego [90]</li> <li>• testy w wirówkach</li> <li>• testy impulsowe (ang. <i>sine burst</i>) [91]</li> <li>• testy w różnych orientacjach</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• przyspieszenie od ciągu rakiety</li> <li>• przyspieszenie ziemskie (w różnych osiach)</li> </ul>                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• mikrogravitacja</li> <li>• gradienty temperatur</li> </ul>                                   |
| <b>drżenia sinusoidalne</b>      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• drżenia od transportu szynowego</li> <li>• drżenia od transportu kołowego</li> <li>• drżenia od transportu morskiego</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• przemiatanie częstotliwości [92]</li> <li>• test drgań sinusoidalnych [93]</li> <li>• testy mikro-wibracji [88]</li> </ul>   |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• koła reakcyjne</li> <li>• mikrowibracje [94]</li> </ul>                                      |
| <b>drżenia losowe</b>            |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• test drgań losowych PSD</li> <li>• testy akustyczne</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• oscylacje siły ciągu [95]</li> <li>• ciśnienie akustyczne [95]</li> <li>• aerodynamiczny buffeting [96]</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• otwieranie się zaworów [97]</li> <li>• silniki typu „cold gas” (<i>thrusters</i>)</li> </ul> |
| <b>wstrząsy</b>                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• wyboje</li> <li>• przypadkowe uderzenia</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• test wstrząsowy</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• separacja satelity od rakiety</li> <li>• separacja stopni rakiety</li> </ul>                                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>• otwarcia anten, paneli słonecznych</li> <li>• mikrometeority</li> </ul>                      |



### 4.3 Obciążenia w trakcie transportu

Praktyką jest montaż, integracja i testowanie (ang. *assembly, integration, verification – AIT*) podsystemów pojazdu kosmicznego w innym miejscu niż miejsce wyniesienia. Wymagany jest zatem transport morski, drogowy czy kolejowy. Każda z wyżej wymienionych metod transportu generuje specyficzne obciążenia. Obciążenia te mogą być inne niż występujące w trakcie wyniesienia lub związane z wypełnianiem wymagań misji. Pożądanym jest, aby podczas procesu projektowania elementu wynoszonego w przestrzeń kosmiczną to wymagania misji, ew. wymagania procesu wyniesienia, a nie transportowe warunkowały konkretne rozwiązania. Dlatego obciążenia w trakcie transportu muszą być dobrze znane, a obiekt powinien zostać przed tymi obciążeniami odpowiednio zabezpieczony. Transport i integracja na Ziemi posiadają dużo mniejsze ograniczenia (np. masy) niż wynoszenie w przestrzeń kosmiczną, dlatego możliwe jest zastosowanie specjalnych układów rozkładania masy i tłumików drgań.

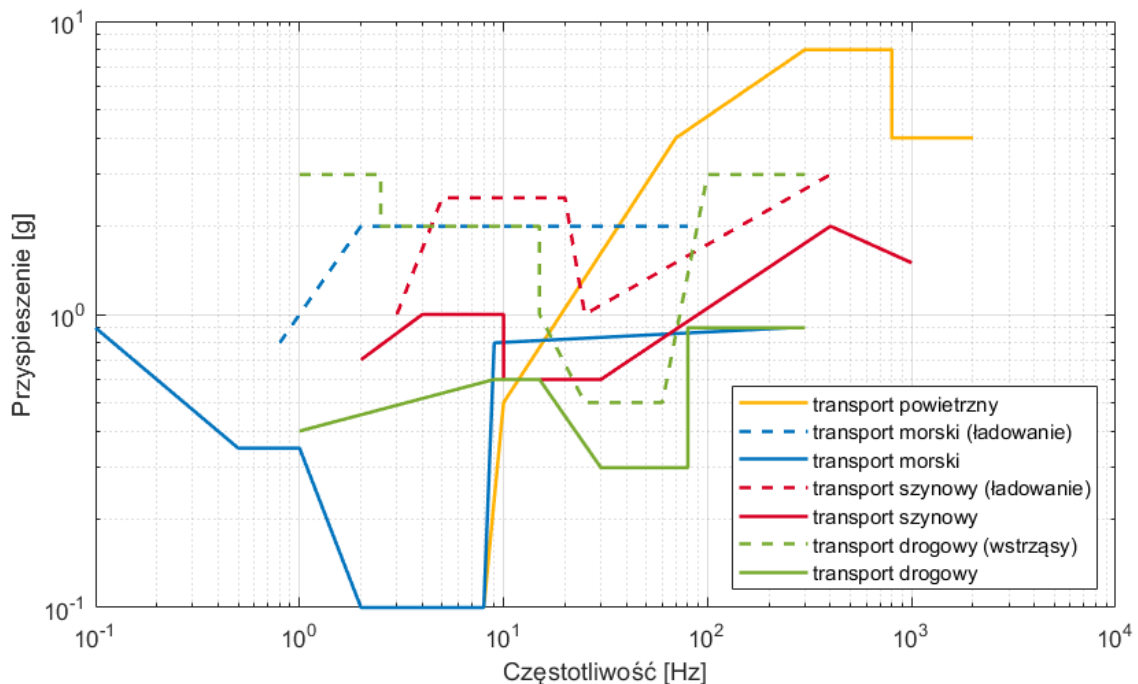
Literatura przedstawia sposoby modelowania obciążeń od różnych modów transportu: drogowego [98], szynowego [99], powietrznego [100] i morskiego [101]. Wnioskiem z analizy tych prac jest zestawienie obciążeń, które należy uwzględnić przy planowaniu transportu. W tabeli 2 przedstawiono obciążenia kwazistatyczne, a na rysunku 12 - poziomy drgań w zależności od ich częstotliwości dla różnych środków transportu (na podstawie raportu NASA [102]).

Należy zwrócić uwagę, że każdy rodzaj transportu ma swoje charakterystyczne pasma częstotliwości, w których występują obciążenia. Na przykład, dla transportu morskiego można oczekiwać w zakresie 0,1 Hz do 400 Hz (gdzie typowo występują częstości drgań własnych obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną [87]) drgań nieprzekraczających 1 g. Ma to znaczenie przy wyborze transportu dla obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną. Dodatkowo, możliwe jest również wystąpienie krótkotrwałych wstrząsów o wartościach do kilku g.

Tabela 2. Poziomy obciążeń kwazistatycznych w różnych modach transportu (na podstawie [102]).

|                      | przyspieszenia w kierunku wzdłużnym [g] | przyspieszenia w kierunku poprzecznym [g] | przyspieszenia w kierunku pionowym [g] |
|----------------------|---|---|--|
| transport morski     | $\pm 0,5$                               | $\pm 2,5$                                 | + 2,5                                  |
| transport powietrzny | $\pm 3,0$                               | $\pm 1,5$                                 | $\pm 3,0$                              |
| transport naziemny   |   |   |  |
| ciężarówka           | $\pm 3,5$                               | $\pm 2,0$                                 | + 6,0                                  |
| pociąg               | $\pm 0,25$ do $\pm 3,0$                 | $\pm 0,25$ do $\pm 0,75$                  | + 0,2 do + 3,0                         |
| wózek transportowy   | $\pm 1,0$                               | $\pm 0,75$                                | + 2,0                                  |

Typowe sposoby radzenia sobie z obciążeniami w trakcie wnoszenia (a także w trakcie transportu) to odpowiednie pakowanie wnoszonego obiektu, w szczególności składanie długich, wiotkich elementów takich, jak anteny czy panele słoneczne. W ten sposób znacznie zwiększana jest sztywność, a zatem i pierwsza częstość drgań własnych. Dzięki temu zabiegowi, elementy mają mniejszą podatność na zjawisko rezonansu w zakresach częstotliwości typowych dla drgań występujących w rakietach (typowo ok. 15-30 Hz [103]).



Rysunek 12. Poziomy drgań występujące w różnych modach transportu (na podstawie [102]).

## 4.4 Obciążenia testowe

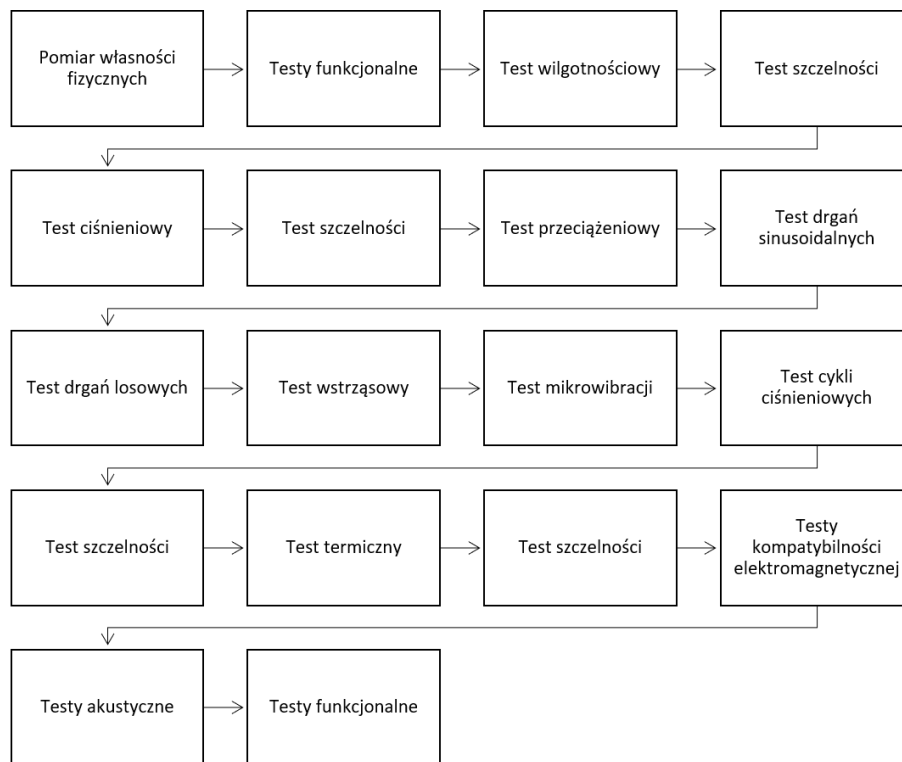
Zanim obiekt zostanie wyniesiony w przestrzeń kosmiczną, przechodzi proces certyfikacji [104]. Polega on na weryfikacji oraz walidacji, że obiekt spełnia wszystkie postawione mu wymagania [105]. To z kolei upewnia twórców, że produkt wykona swoją misję, nawet w ekstremalnych warunkach lotu kosmicznego i przestrzeni kosmicznej. Proces weryfikacji i walidacji polega na zdefiniowaniu obciążeń występujących w środowisku, w którym będzie pracował produkt, a następnie przy użyciu kombinacji: testów, analiz, demonstracji i inspekcji, potwierdzeniu zdolności do nominalnej pracy w przewidywanym środowisku.

W miarę technicznych możliwości, testy powinny symulować środowisko, na które narażony jest obiekt. Nie zawsze jest to możliwe, ze względu na ograniczenia możliwości urządzeń testowych, ekonomię procesu lub ograniczenia fizyczne. Obecnie stosowane podejście zakłada kombinację szeregu standardowych bloków testów, po których następuje analiza ich rezultatów. W ten sposób zwiększany jest poziom ufności, że produkt zadziała w oczekiwany sposób.

Proces testowania odbywa się na wielu poziomach [106]:

- surowca (np. konkretny stop aluminium);
- komponentu (np. rurka ciepła);
- przyrządu (np. wymiennik ciepła);
- podsystemu (np. podsystem termiki);
- systemu (np. satelita);

Za testy odpowiedzialny jest, na każdym etapie prac, dostawca produktu. Norma ECSS-E-ST-10-03C [88] definiuje sekwencję testów obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną. Sekwencja została przedstawiona na rysunku 13.



Rysunek 13. Sekwencja testów wg ECSS-E-ST-10-03C (na podstawie [88]).

Sekwencja rozpoczyna się od testów sprawdzających funkcjonalność danego elementu. Następnie, w przypadku elementów, w których wymagana jest szczelność, przeprowadza się test szczelności przy zadanym ciśnieniu. Jest to pierwsze obciążenie, któremu jest poddawany obiekt.

#### 4.4.1 Testy statyczne

Kolejna seria testów dotyczy przyspieszeń statycznych. Obciążenia, które są uzyskiwane na testowanym elemencie zależą od sposobu przykładania przyspieszeń. Pierwszym z kluczowych aspektów jest sztywność podłoża. Wpływ tego parametru na obciążenia jest szeroko dyskutowany w literaturze [107]–[111]. W technologiach kosmicznych, typowo stosuje się dwa podejścia [93]:

- bardzo sztywne podłoże lub
- podłoże o skalibrowanej, znanej sztywności, która odpowiada sztywności interfejsu pomiędzy testowanym obiektem a resztą układu (np. rakieta).

Pierwsze z tych podejść może spowodować większe obciążenia niż te, którym obiekt będzie poddawany podczas wynoszenia. W każdym wypadku, sztywność podłoża wymaga dokładnego opisanie, a jej wpływ na obciążenia jest analizowany [112].

Drugim czynnikiem istotnym dla testów statycznych jest sposób przykładania obciążenia. O ile w niektórych przypadkach osiągnięcie statycznego obciążenia jest stosunkowo proste (np. wewnętrzne ciśnienie szczelnego pojemnika [113]), często bardzo trudne jest odtworzenie obciążenia statycznego (np. reprezentatywnego dla przeciążeń podczas lotu). Stosowane metody to:

- test na wirówce odśrodkowej (z przyłożeniem jednoosiowych przyspieszeń o liniowym rozkładzie pola przyspieszeń);
- test na wzbudniku elektrodynamicznym (z przyłożeniem kwazistatycznych przyspieszeń);
- tradycyjny test statyczny (z przyłożeniem obciążeń statycznych).

Pierwsze dwa testy są często preferowane ze względu na czas oraz koszt, ale wiąże się z nimi szereg ograniczeń:

- wirówki generują pole przyspieszeń liniowo zmienne w funkcji promienia wodzącego, co może spowodować (w szczególności dla dużych obiektów), że różne części obiektu poddawane będą różnym przyspieszeniom;
- gondole wirówek mają ograniczone rozmiary;
- wstrząsarki mają ograniczony zakres przyspieszeń;
- oba urządzenia generują jednoosiowe przyspieszenia – wymagana jest analiza superpozycji wyników testu [114] (co bywa kłopotliwe, np. dla połączeń śrubowych [115] czy klejonych [116]).
- połączenie z innymi typami obciążeń (np. ciśnienie i temperatura) może być trudne.

Trzecim aspektem ważnym przy testach statycznych jest poziom obciążeń. Występuje tu (podobnie jak w innych testach) podział na poziom akceptacji (ang. *acceptance level*)

i kwalifikacji (ang. *qualification level*) [117]. Na podstawie analizy sprzężonych obciążeń dynamicznych rakieta-satelita (ang. *launch vehicle-satellite coupled dynamic load analysis, LCDA*) wyznaczone są maksymalne obciążenia występujące w danych warunkach (ang. *load limit*) [118]. Następnie, obciążenia mnożone są przez współczynniki *KA* (dla poziomu akceptacji) i *KQ* (dla poziomu kwalifikacyjnego). Testy akceptacyjne mają za zadanie potwierdzić, że produkt nie posiada wad produkcyjnych i jest gotowy do użycia [119]. Test kwalifikacyjny ma za zadanie potwierdzić, że produkt spełnia wymagania z odpowiednimi marginesami bezpieczeństwa [119], dlatego też:

$$KQ > KA. \quad (56)$$

Współczynniki *KQ* i *KA* podano w tabeli 3 [117].

Tabela 3. Współczynniki bezpieczeństwa *KQ* i *KA* [117].

| Pojazd                           | KQ   | KA  |
|----------------------------------|------|-----|
| satelita                         | 1,25 | 1,0 |
| rakieta                          | 1,25 | 1,1 |
| pojazd załogowy (w trakcie lotu) | 1,4  | 1,2 |
| pojazd załogowy (na orbicie)     | 1,5  | 1,2 |

Dodatkowe współczynniki dotyczą etapu, na którym projekt się znajduje. Oznacza to, że w trakcie testów obciążenia na konstrukcję mogą być ponad 1,5 razy większe niż największe obciążenia w trakcie wnoszenia i pracy konstrukcji.

Testy statyczne przeważnie kończą się sprawdzeniem kryteriów powodzenia testu (ang. *test success criteria*) [120], np.:

- brak deformacji plastycznej;
- brak rozerwania się;
- brak przekroczenia zakładanych wcześniej wartości deformacji.

Przykładane siły (np. przy pomocy siłowników hydraulicznych) powinny być stale monitorowane. Analiza odkształceń powinna być przeprowadzona poprzez porównanie z wartościami otrzymanymi przy pomocy metody elementów skończonych.



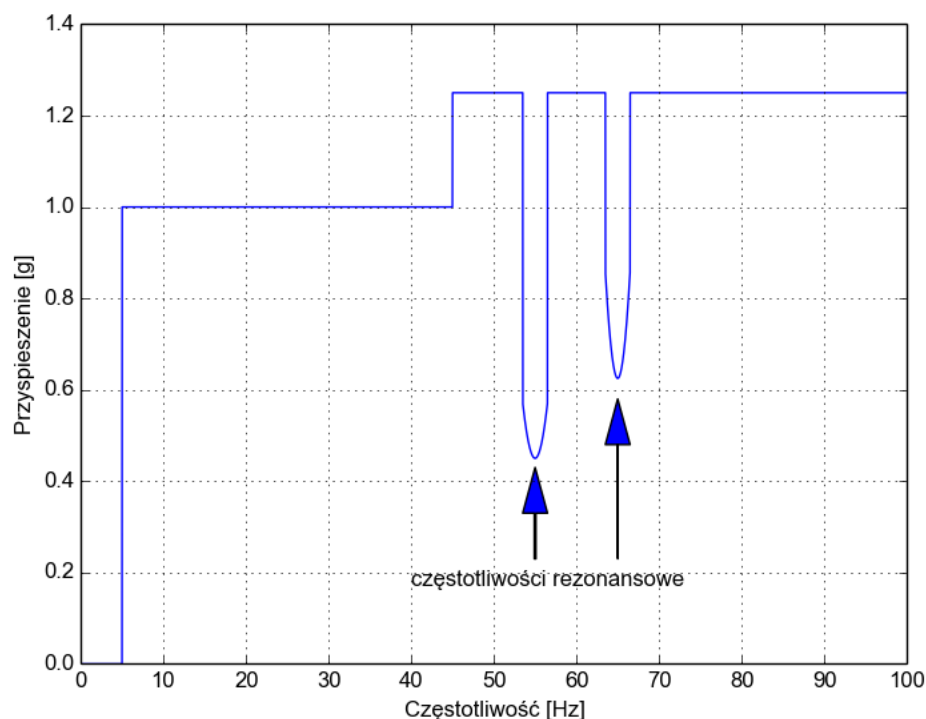
#### 4.4.2 Wibracyjne testy sinusoidalne

Wibracyjne testy sinusoidalne są typowo przeprowadzane na jednoosiowych elektrodynamicznych wzbudnikach drgań. Obiekt testowany poddawany jest osobno drganiom w trzech kierunkach. Następuje tzw. przemiatanie częstotliwości (ang. *sine sweep*) od wartości minimalnej do wartości maksymalnej lub na odwrót. Prędkość przemiatania (ang. *sweep rate*) jest określona w oktawach na minutę.

Celem testów jest typowo:

- identyfikacja dynamiki obiektu (znalezienie częstości drgań własnych) w celu walidacji modelu zbudowanego z wykorzystaniem metody elementów skończonych;
- demonstracja, że obiekt wytrzyma część niskich częstotliwości środowiska dynamicznego (na poziomie kwalifikacyjnym lub akceptacyjnym);
- potwierdzenie, że obiekt spełnia wymagania mechaniczne;
- wykrycie wad produkcyjnych.

W pracy [121] przedstawiłem głosy krytyki wobec współczesnych metod testowania wibracyjnego. Główne zarzuty dotyczą większego niż w rzeczywistych warunkach obciążenia badanego elementu w trakcie testów sinusoidalnych. Dodatkowo, zwraca się uwagę, że testy sinusoidalne nieodpowiednio oddają prawdziwy przebieg drgań w trakcie lotu. Ponadto, istnieje możliwość wprowadzenia obiektu w drgania rezonansowe [122], co nie wystąpiłoby podczas lotu. Odpowiedzią jest proponowany w normie ECSS-E-HB-32-26A [93] tzw. *notching*.



Rysunek 14. Ilustracja procedury notchingu [121].

Polega ona na sztucznym zmniejszaniu amplitudy widma sygnału w pobliżu częstotliwości rezonansowej. Wg autorów publikacji [123], poprawnie przeprowadzony *notching* pozwala na skuteczne przewidywanie dynamicznej odpowiedzi układu przy zmniejszonej amplitudzie drgań. Innym rozwiązaniem jest technika *Force Limited Vibration* [124]. Jednakże, wskazane byłoby dążenie do tego, by warunki testowe były jak najbliższe warunkom rzeczywistego lotu rakiety.

#### 4.4.3 Wibracyjne testy losowe

Celem wibracyjnych testów losowych jest weryfikacja wytrzymałości i stateczności konstrukcji mechanicznej poprzez poddanie jej działaniu wymuszeń o charakterze drgań losowych [125]. Często testy takie są preferowane wobec komponentów elektrycznych oraz małych statków kosmicznych, dla których inne typy testów nie są skuteczne [93]. Wibracyjny test losowy polega na wygenerowaniu przebiegu drgań na podstawie wartości widmowej gęstości mocy dla różnych częstotliwości. Norma ECSS-E-10-03C [88] zakłada testowanie poziomem drgań o 3 dB wyższym niż podany przez producenta w zakresie 20 do 2000 Hz.





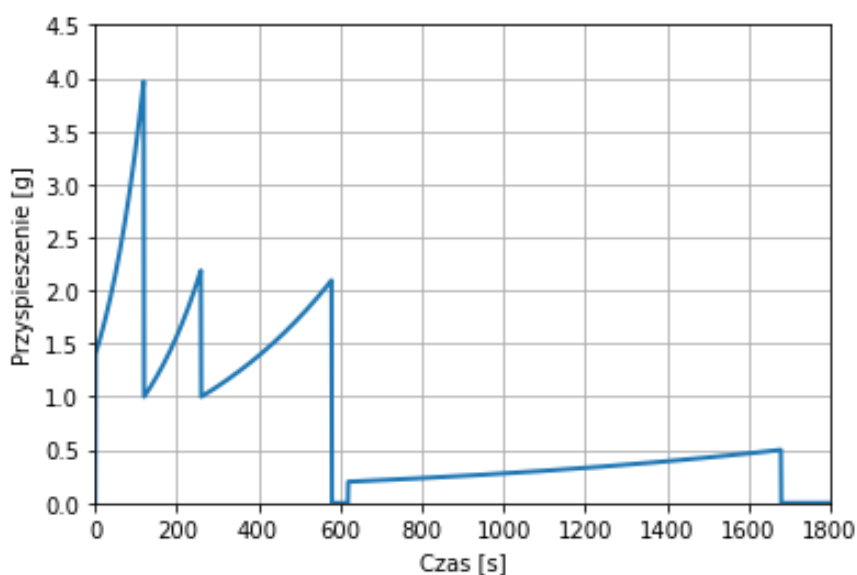
Doświadczenie z projektów satelitarnych Europejskiej Agencji Kosmicznej pokazuje, że dotychczasowe wymagania dot. losowych testów wibracyjnych [88] często nie znajdują potwierdzenia w pomiarach parametrów drgań w rzeczywistym środowisku dynamicznym [126]. Trwają prace nad wypracowaniem nowych procedur dotyczących tworzenia wymagań dla testów losowych oraz aktualizacją obecnie stosowanego podejścia pochodzącego z lat 80 [127]. Niniejsza praca może być przyczynkiem do uwzględnienia tłumienia drgań w opracowywanych procedurach.

## 4.5 Obciążenia w trakcie wynoszenia

Obciążenia w trakcie wynoszenia również typowo dzielone są na:

- przeciążenia kwazistatyczne;
- drgania sinusoidalne;
- oraz drgania losowe.

Rysunek 15 przedstawia typowe osiowe przeciążenie kwazistatyczne w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz [103].



Rysunek 15. Przeciążenie kwazistatyczne w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz (na podstawie [103]).

W tabeli 4 przedstawiono zakresy obciążeń kwazistatycznych w kierunku osiowym opracowanych na podstawie wielu lotów rakiety Sojuz [103].

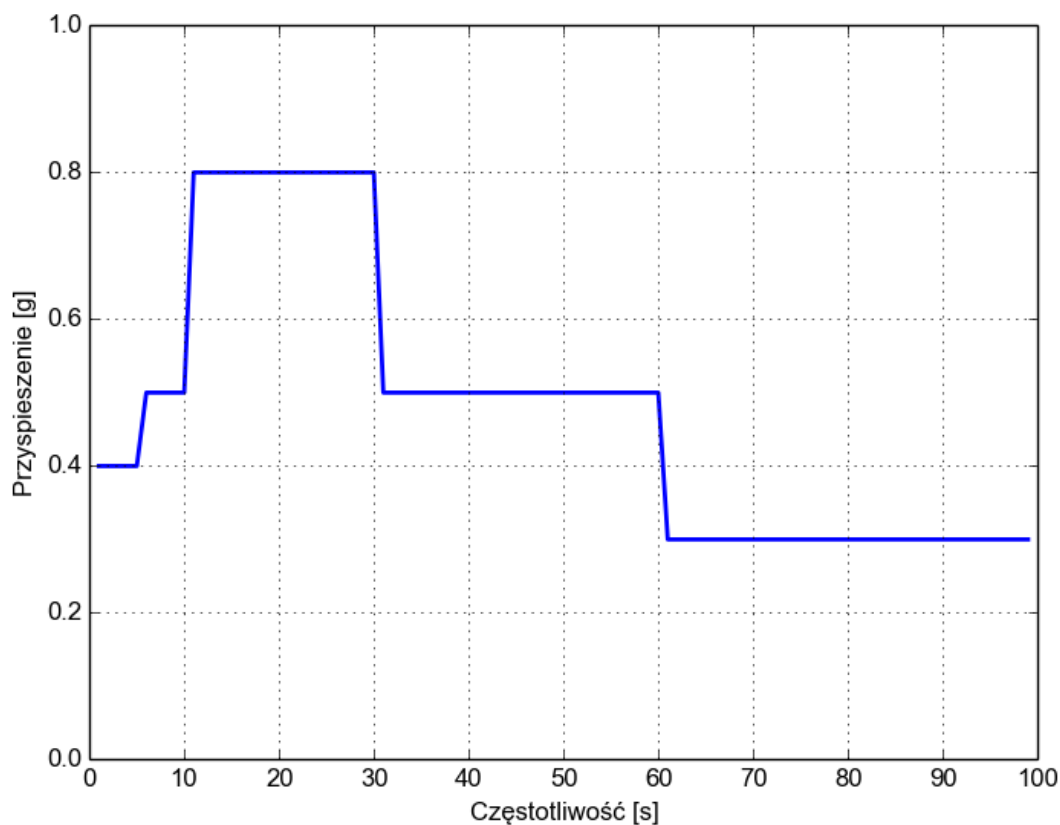
Tabela 4. Zakresy przeciążeń kwazistatycznych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz [103].

| <b>Etap wyniesienia</b>                                   | <b>Przeciążenie<br/>(+ = rozciąganie,<br/>- = ściskanie)</b> |
|---|--|
| 1. Start rakiety  | min. -1,6 g<br>max. -0,4 g                                   |
| 2. Lot z maksymalnym ciśnieniem dynamicznym ( $Q_{max}$ ) | min. -2,8 g<br>max. -2,0 g                                   |
| 3. Lot na pierwszym stopniu z maksymalnym przyspieszeniem | min. -5,0 g<br>max. -3,6 g                                   |
| 4. Separacja pierwszego i drugiego stopnia                | min. -4,3 g<br>max. -0,6 g                                   |
| 5. Lot na drugim stopniu                                  | min. -4,0 g<br>max. -0,4 g                                   |
| 6. Separacja drugiego i trzeciego stopnia                 | min. -3,3 g<br>max. +1,3 g                                   |
| 7. Lot na trzecim stopniu                                 | min. -2,9 g<br>max. +0,9 g                                   |
| 8. Wyłączenie silników trzeciego stopnia                  | min. -4,0 g<br>max. +1,8 g                                   |

Drgania sinusoidalne występują w trakcie lotu głównie w trakcie przechodzenia przez atmosferę, a także w trakcie oddzielania się członów. Typowo nie trwa to dłużej niż 6 minut. Obciążenia sinusoidalne podane przez producenta rakiety Sojuz przedstawiono w tabeli 5 oraz na rysunku 16.

Tabela 5. Zakresy przeciążeń sinusoidalnych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz [103].

| kierunek   | Zakres częstotliwości [Hz] |        |         |         |         |         |          |
|------------|----------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|----------|
|            | 1 – 5                      | 5 – 10 | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 60 | 60 – 100 |
|            | Amplituda drgań [g]        |        |         |         |         |         |          |
| osiowy     | 0,4                        | 0,5    | 0,8     | 0,8     | 0,5     | 0,5     | 0,3      |
| poprzeczny | 0,4                        | 0,6    | 0,6     | 0,4     | 0,4     | 0,3     | 0,3      |



Rysunek 16. Zakresy przeciążeń sinusoidalnych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz (na podstawie [103]).

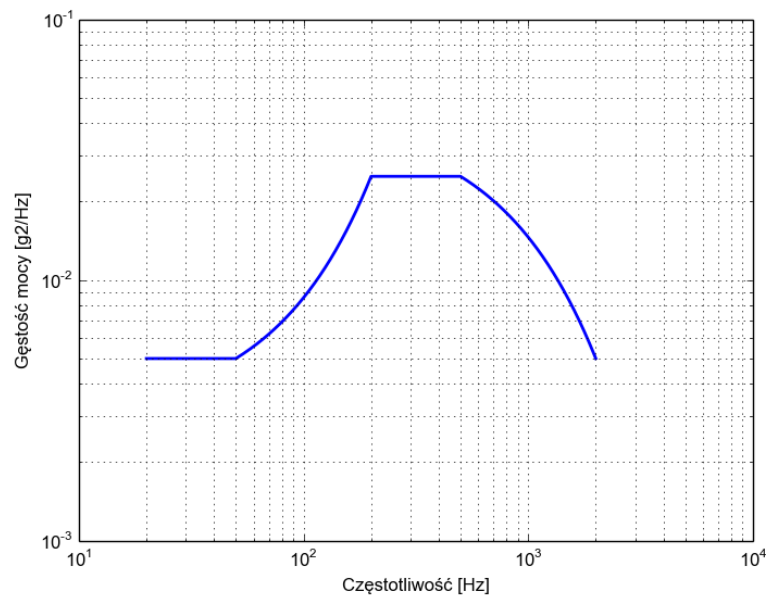
W tabeli 6 przedstawiono obciążenia losowe w trakcie lotu rakiety Sojuz [103]. Przedstawiono poziomy obciążenia w postaci widmowej gęstości mocy (ang. *power spectral density*, *PSD*) dla poszczególnych zakresów częstotliwości oraz wartość skuteczną ( $G_{RMS}$ ) przyspieszeń.

Tabela 6. Zakres przeciążeń losowych w trakcie wynoszenia rakiety Sojuz [103].

|                   | Zakres częstotliwości [Hz]                             |        |         |         |        |       | G <sub>RMS</sub><br>[g] | Czas trwania<br>[s] |
|-------------------|--|--------|---------|---------|--------|-------|-------------------------|---------------------|
|                   | 20–50  | 50–100 | 100–200 | 200–500 | 500–1k | 1k–2k |                         |                     |
|                   | Widmowa gęstość mocy ( $10^{-3}$ [g <sup>2</sup> /Hz]) |        |         |         |        |       |                         |                     |
| <b>1. stopień</b> | 5,0  | 10,0   | 25,0    | 25,0    | 10,0   | 5,0   | 4,94                    | 120                 |
| <b>2. stopień</b> | 2,5  | 2,5    | 5,0     | 10,0    | 5,0    | 2,5   | 3,31                    | 480                 |
| <b>3. stopień</b> | 2,0  | 2,0    | 2,0     | 2,0     | 1,0    | 1,0   | 1,63                    | 1100                |



Zależność widmowej gęstości mocy podczas lotu w funkcji częstotliwości przedstawiono na rysunku 17.



Rysunek 17. Zakresy przeciążeń losowych w trakcie wynoszenia rakieta Sojuz (na podstawie [103]).

Struktury w pojazdach kosmicznych dzieli się na struktury podstawowe (ang. *primary structure*) i struktury wtórne (ang. *secondary structure*). Struktura podstawowa to wszystkie elementy, które przenoszą obciążenie. Struktury wtórne to wszystkie elementy, które zamocowane są do struktury podstawowej, np.: panele słoneczne, anteny, elementy mocowań. Drgania struktury podstawowej w trakcie całego procesu wynoszenia są wymuszone głównie poprzez drgania pochodzące od rakiety nośnej, której rozmiary i sztywność są znacznie większe niż tej struktury. Zwykle dla dynamiki drgań struktury wtórnej ogromne znaczenie mają częstotliwości rezonansowe, dlatego dalsza część pracy poświęcona będzie tłumieniu drgań swobodnych obiektu, stanowiącego modelowe odwzorowanie struktury wtórnej.

## 5 Zjawiska kontaktowe

### 5.1 Wstęp

Celem analizy zjawisk, jakie zachodzą w obszarze kontaktu dwóch elementów (w skrócie kontaktu) [128] jest odpowiedź na pytania:

- czy dwa lub więcej ciał są w styku;
- jeśli są, gdzie jest miejsce lub obszar styku;
- jak duża siła lub ciśnienie występuje w tym obszarze;
- czy występuje względny ruch w tym obszarze.

Obszar styku między łączonymi elementami struktury (kontakt) jest nieliniowością warunków brzegowych, w odróżnieniu od geometrycznych nieliniowości, która pojawia się w przypadku dużych odkształceń lub materiałowych nieliniowości. Te, z kolei są rezultatem nieliniowych relacji między naprężeniami i odkształceniami (wyrażonymi w postaci nieliniowych równań konstytutywnych [129]). Nieliniowość zagadnień kontaktowych może być opisana w dwóch aspektach. Po pierwsze, jeżeli dwa ciała wchodzi w kontakt, siła w kontakcie wzrasta skokowo, ponieważ przed zetknięciem się ciał wynosiła zero. W takim przypadku, opis funkcyjny nie jest możliwy, gdyż dla momentu zetknięcia się ciał, nie występują warunki do zaistnienia siły wzajemnego oddziaływania mechanicznego ciał. Podobne zjawisko występuje w kierunku stycznym, gdy dwa ciała nie poruszają się względem siebie aż do momentu, gdy siła styczna osiąga pewną wartość krytyczną (maksymalne tarcie statyczne), po której następuje ciągły ruch względny bez zwiększania siły stycznej [130]. Tego typu nagłe zmiany sił w styku powodują, że jest to zagadnienie silnie nieliniowe.

Po drugie, żeby zagadnienie w mechanice było poprawnie postawione [131], zadane muszą być przemieszczenia (zadanie proste [9]) lub siły (zadanie odwrotne [9]) dla każdego punktu materialnego, ale nie ma możliwości prawidłowego uwarunkowania zadania poprzez zdefiniowanie obu tych zbiorów wymuszeń jednocześnie. Następnie, w poszukiwaniu nieznanych wartości w oparciu o znane, rozwiązywane jest równanie (na przykład przy pomocy metody elementów skończonych). W zagadnieniu

brzegowym dane są na przykład przemieszczenia, a obliczona zostaje siła reakcji. W przypadku ruchu, znana jest siła, a obliczane są przemieszczenia. W przypadku kontaktu, zarówno przemieszczenia jak i siła w kontakcie są nieznane. Rozwiązujący równanie może tylko zidentyfikować wstępnie obszar kontaktu. Zatem, w przebiegu rozwiązania metodą elementów skończonych, zidentyfikowane muszą zostać zarówno:

- czy dany punkt materialny pozostaje w styku z innym ciałem i jeśli tak,
- jaka jest odpowiadająca siła w styku.

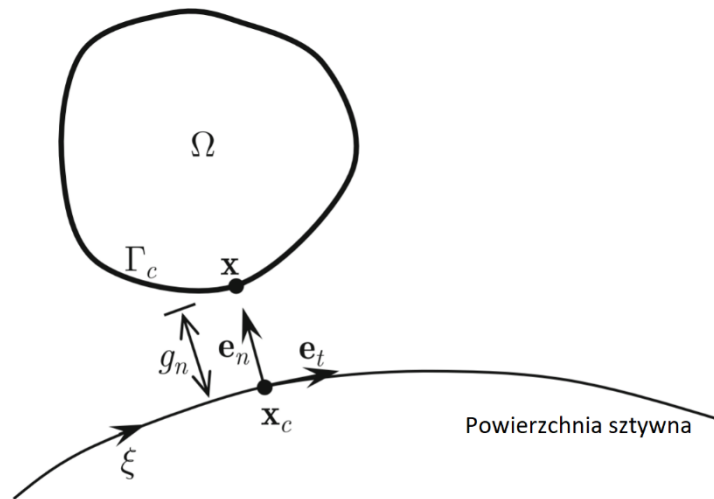
Ponieważ siła w styku powoduje deformację w pobliżu jej punktu przyłożenia, powyższy proces powtarzany jest aż do spełnienia równań dla wszystkich punktów, które wejdą w kontakt. Nieliniowość w tym zakresie jest zatem rozwiązywana przy pomocy procedur iteracyjnych.

Dla układów sprężystych, równowaga może zostać opisana jako pole przemieszczeń, które minimalizuje energię potencjalną [128]. Kontakt może być wtedy rozpatrywany jako ograniczenie w problemie optymalizacji, w taki sposób, że energia potencjalna będzie minimalizowana przy zachowaniu ograniczenia, tzn. że ciała nie mogą się na siebie nakładać [132]. Problem ograniczonej optymalizacji może zostać sprowadzony do zagadnienia nieograniczonej korzystając z funkcji kary [133] lub metody współczynników Lagrange'a [134]. Większość algorytmów rozwiązujących zagadnienia kontaktowe bazuje na jednej z tych dwóch metod. W ten sposób, rozwiązywanie zagadnienia kontaktu można traktować niezależnie od zagadnienia modeli konstytutywnych (np. materiałowych).

Często używanym podejściem przy modelowaniu zjawisk kontaktowych jest podział powierzchni na *master* i *slave* (lub *contact* i *target* w nomenklaturze niektórych środowisk obliczeniowych). W tej koncepcji, ograniczenie styku jest nałożone w taki sposób, że nie może występować przenikanie między tymi dwoma ciałami. W przypadku opisu metodą elementów skończonych oznacza to, że węzły na brzegu ciała *slave* nie mogą nakładać się na powierzchnię ciała *master*. Klasyfikacja będących w kontakcie ciał jako *master* lub *slave* jest arbitralna [135].

## 5.2 Kontakt w strukturach wielobryłowych

Kim [128] opisał interesującą metodę modelowania nieliniowych zjawisk kontaktowych w kontakcie ze sztywną powierzchnią. Załóżmy zagadnienie dwóch ciał: ciała sztywnego (ang. *master*) oraz odkształcalnego (ang. *slave*). Oba ciała są tak utwierdzone, że ruch (ang. *rigid body motion*) nie jest możliwy. Przedstawiono to na rysunku 18.



Rysunek 18. Podział na ciało sztywne i odkształcalne.

Warunki brzegowe takiego zagadnienia można podzielić na te dotyczące kierunku normalnego (niepenetrowalność) i stycznego (poślizg). Pierwsze warunki uniemożliwiają ciało *slave* przenikanie się z ciałem *master*, podczas gdy drugie opisują tarcie na powierzchni styku. Na rysunku 18 przedstawiono brzeg ciała *slave* ( $\Omega$ ) jako  $\Gamma_c$ . Jak opisano w podrozdziale 5.1, prawdziwa powierzchnia styku jest nieznaną i jej znalezienie jest częścią rozwiązania problemu, jednak należy wyraźnie określić ten obszar na powierzchni ciała, gdzie kontakt jest dopuszczalny, ponieważ właśnie tam będzie umiejscowiona powierzchnia styku — rozwiązanie zadania. Punkt  $x$  na powierzchni kontaktu styka się z punktem  $x_c$  na powierzchni *master* w momencie, gdy nastąpi kontakt. Poniżej rozpatrzony zostanie warunek kontaktu dla tego punktu. W naturalnym układzie współrzędnych, współrzędna  $\xi$  opisuje położenie na ciele *master*. Zatem, współrzędne punktu kontaktu  $x_c$  również mogą zostać opisane w tym układzie współrzędnych jako:

$$x_c = x_c(\xi_c). \quad (57)$$

Współrzędna punktu styku  $\mathbf{x}_c$ , a zatem również  $\xi_c$ , są początkowo nieznanne. W przypadku styku trójwymiarowego, potrzebne będą dwie współrzędne naturalne, żeby opisać położenie tego punktu.

Jak wspomniano w podrozdziale 5.1, zadaniem analizy kontaktowej jest znalezienie punktu styku i siły kontaktowej w tym punkcie, w szczególności nacisku kontaktowego oraz siły tarcia. W przeciwieństwie do typowych zadań metody elementów skończonych, oba są nieznanne.

Pierwszym krokiem analizy kontaktu jest znalezienie punktu styku  $\mathbf{x}_c(\xi_c)$  na powierzchni ciała *master*, który odpowiada punktowi  $\mathbf{x}$  na ciele *slave*. Pozwala to określić, czy punkty są w styku czy nie. Matematycznie odpowiada to projekcji ortogonalnej (znalezienie najbliższego punktu  $\mathbf{x}$  punktu). W przypadku, gdy powierzchnia ciała *master* jest linią prostą, znalezienie tego punktu jest trywialne. Jednak w ogólnym wypadku, wymagane jest rozwiązanie poniższego równania nieliniowego:

$$\phi(\xi_c) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c))^T \cdot \mathbf{e}_t(\xi_c) = 0, \quad (58)$$

gdzie  $\mathbf{e}_t(\xi_c) = \frac{\mathbf{t}(\xi_c)}{\|\mathbf{t}(\xi_c)\|}$  jest wersorem kierunku stycznego, a  $\mathbf{t}(\xi_c)$  jest wektorem kierunku stycznego w punkcie kontaktu. Równanie (58) jest nazywane warunkiem spójności kontaktu, a punkt  $\mathbf{x}_c(\xi_c)$  jest najbliższym rzutowaniem punktu  $\mathbf{x} \in \Gamma_c$  na powierzchnię sztywną (*master*), które spełnia równanie (58).

Po znalezieniu punktu potencjalnego kontaktu, konieczne jest określenie czy kontakt w ogóle zachodzi, co można ustalić mierząc odległość między tymi punktami. Jednocześnie, nałożony musi zostać warunek niepenetrowalności przy użyciu funkcji dystansu normalnego  $g_n$ :

$$g_n \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c))^T \cdot \mathbf{e}_n(\xi_c) \geq 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad (59)$$

gdzie  $\mathbf{e}_n(\xi_c)$  jest wersorem kierunku normalnego prowadzącego od powierzchni ciała *master*.



Gdy punkt styku porusza się po powierzchni ciała sztywnego, siła tarcia działa w kierunku stycznym do powierzchni ciała *master* przeciwnie do kierunku (potencjalnego) ruchu. Funkcja poślizgu stycznego  $g_t$  jest miarą względnego ruchu punktu styku po powierzchni i jest zdefiniowana:

$$g_t \equiv \|\mathbf{t}^0\| (\xi_c - \xi_c^0), \quad (60)$$

gdzie zarówno wektor styczny  $\mathbf{t}^0$  jak i współrzędna naturalna są wartościami dla poprzedniego kroku czasowego (ang. *time increment*) lub przykładania obciążenia (ang. *load increment*).

W artykule [136] omówiono (liniowy) problem elastyczny, który przez występowanie kontaktu jest zagadnieniem nieliniowym. Równania różniczkowe zostały zapisane jako:

- równania mechaniki:

$$\sigma_{ij,j} + f_i^B = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (61)$$

$$u_i(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma^S, \quad (62)$$

$$\sigma_{ij}n_j = f_i^S, \mathbf{x} \in \Gamma^S, \quad (63)$$

- warunki kontaktu:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{e}_n + g_n \geq 0, \quad (64)$$

$$\sigma_n \geq 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad (65)$$

$$\sigma_n (\mathbf{u}^T \mathbf{e}_n + g_n) = 0. \quad (66)$$

Są to warunki równowagi statycznej w punkcie kontaktu: dla ciała  $\Omega$  (61) i dla ciała sztywnego  $\Gamma^S$  (62) oraz założenie braku przemieszczenia w punkcie styku na powierzchni ciała sztywnego (63). Nierówność (64) jest przyrostową formą warunku niepenetrowalności z równania (59) przy założeniu małych odkształceń i liniowych zależności między siłą a odkształceniem. Warunki kontaktu zakładają, że odkształcenia (64) i naprężenia (65) są dodatnie i tylko w kierunku normalnym (66). Warunki mogą zostać nałożone w metodzie optymalizacji przy pomocy współczynników Lagrange'a



lub funkcji kary. Nierówności warunków kontaktu mogą zostać rozpatrzone konstruując zamknięty zbiór wypukły:

$$K = \{\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^N \mid \mathbf{w}_{\Gamma g} = 0 \wedge \mathbf{w}^T \mathbf{e}_n + g_n \geq 0\}. \quad (67)$$

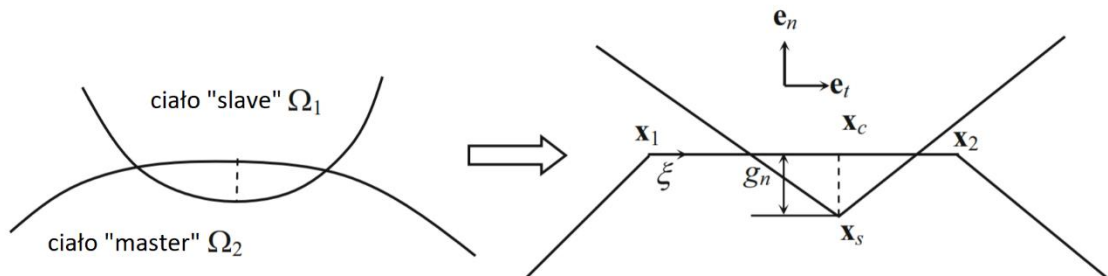
Zbiór spełnia wszystkie zadane ograniczenia kinematyczne. Jeżeli  $\mathbf{u}$  jest rozwiązaniem równań, to  $\mathbf{u} \in K$ . Nierówność w formie wariacyjnej może zostać wyprowadzona jako [128]:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u}) \geq l(\mathbf{w} - \mathbf{u}) \forall \mathbf{w} \in K. \quad (68)$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania tej nierówności były rozważane dla materiałów liniowo elastycznych przez Duvaut i Lions [137] oraz Kikuchi i Odena [138].

### 5.3 Dyskretyzacja zagadnienia kontaktowego

W najprostszym przypadku, ciało odkształcalne (*slave*) znajduje się w styku z ciałem sztywnym (*master*). Zakładane jest również utwierdzenie ciała sztywnego. Niech  $\Gamma_C$  będzie częścią powierzchni ciała *slave*, która nachodzi na ciało *master*.



Rysunek 19. Dyskretyzacja zagadnienia kontaktowego.

Rozpatrywany jest pojedynczy węzeł ciała *slave* (patrz rysunek 19). Miejsce styku może zostać zdefiniowane jako jeden węzeł ciała *slave* oraz dwa węzły ciała *master*, pomiędzy którymi znajduje się miejsce styku:

$$X = \{\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}^T. \quad (69)$$

Węzeł  $\mathbf{x}_1$  oznacza węzeł po lewej stronie, a  $\mathbf{x}_2$  po prawej stronie węzła *slave*. Współrzędna naturalna  $\xi$  jest zdefiniowana tak że  $\xi(\mathbf{x}_1) = 0$ ,  $\xi(\mathbf{x}_2) = 1$ . Dla danej pary kontaktowej  $X$ , celami obliczeń są: znalezienie czy para jest w kontakcie,

a jeżeli tak, obliczenie siły kontaktowej i penetracji. Pierwszy cel nazywany jest poszukiwaniem kontaktu. W dużych modelach obliczeniowych, wiele węzłów *slave* ma możliwość kontaktu z wieloma odcinkami powierzchni ciała *master*. Zatem liczba możliwych kontaktów jest duża i zadanie wymaga znacznego nakładu obliczeniowego. Po identyfikacji, które pary są w kontakcie, obliczana jest siła występująca w tych parach.

### 5.3.1 Siła normalna

Dla każdej pary kontaktowej, wersory normalny i styczny mogą być zdefiniowane jako:

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad (70)$$

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}, \quad (71)$$

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_t. \quad (72)$$

Z założenia o utwierdzeniu ciała sztywnego *master*, wynika, że również powyższe wektory są utwierdzone. Ponieważ po dyskretyzacji odcinek ciała *master* jest linią prostą, równania (61)-(66) mogą zostać jawnie rozwiązane. Dystans normalny może zostać obliczony jako:

$$g_n = (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_1)^T \cdot \mathbf{e}_n. \quad (73)$$

Jeżeli  $g_n > 0$ , kontakt nie zachodzi i nie jest wymagane obliczenie siły normalnej. W przeciwnym wypadku, gdy  $g_n \leq 0$ , należy sprawdzić czy współrzędna naturalna punktu styku spełnia warunek  $0 \leq \xi_c \leq 1$ , czyli czy kontakt występuje na danym odcinku *master*. Współrzędna naturalna punktu styku może zostać obliczona według wzoru:

$$\xi_c = \frac{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_1)^T \cdot \mathbf{e}_t}{\|\mathbf{t}\|}. \quad (74)$$

Jeżeli  $\xi_c < 0$  lub  $\xi_c > 1$ , kontakt nie zachodzi na tym odcinku. Jeżeli  $0 \leq \xi_c \leq 1$ , kontakt zachodzi na tym odcinku i należy obliczyć siłę normalną, której kierunek jest normalny, a wartość proporcjonalna do wgłębienia, czyli:

$$f_n^c = -\omega_n g_n e_n. \quad (75)$$

Jako że  $e_n$  jest utwierdzony, można ją obliczyć ze wzoru:

$$k_n^c = \omega_n e_n^T. \quad (76)$$

Obliczony zostaje w ten sposób współczynnik sztywności kontaktu.

### 5.3.2 Siła styczna

W odróżnieniu od siły normalnej, obliczenie siły stycznej wymaga informacji zarówno z obecnego jak i poprzedniego kroku czasowego. Dla prostego odcinka ciała *master*, poślizg styczny zdefiniowany jest jako:

$$g_t = l^0 (\xi_c - \xi_c^0), \quad (77)$$

gdzie indeks górny  $^0$  oznacza wartość dla poprzedniego kroku czasowego,  $\xi_c$  to współrzędna naturalna odpowiadająca położeniu punktu kontaktu na odcinku ciała *master*, a  $l^0$  to długość odcinka ciała *master*. Ponieważ odcinek jest sztywny, długość nie ulega zmianie. Siła tarcia występująca, jeśli poślizg styczny jest różny od zera jest proporcjonalna do tego poślizgu i wynosi:

$$f_t^c = -\omega_t g_t e_t. \quad (78)$$

Powyższa zależność jest nazywana warunkiem przyczepności (ang. *stick condition*), ponieważ poślizg styczny zanika, jeśli siła styczna jest równa zero. Zatem, dwa ciała przywierają do siebie i zachowują się jak jeden materiał sprężysty. Również, w warunku przyczepności, siła tarcia może być rozumiana jako przeciwdziałanie stycznemu odkształceniu. Zatem, warunek odpowiada sprężystemu odkształceniu zanim wystąpi poślizg.

Siła tarcia w kulombowskim modelu [139] nie może rosnąć w nieskończoność – jej wartość jest ograniczona wartością maksymalnego tarcia statycznego, równego iloczynowi współczynnika tarcia statycznego i siły normalnej. Możemy więc opisać maksymalną siłę styczną jako maksymalne tarcie statyczne:

$$f_t^c = \mu \omega_n \operatorname{sgn}(g_t) g_n \mathbf{e}_n, |\omega_t g_t| \geq |\mu \omega_n g_n|, \quad (79)$$

gdzie  $\mu$  to współczynnik tarcia. Identyfikacja tego współczynnika jest zasadniczym celem działań opisanych w rozdziale 10.

## 5.4 Modelowanie kontaktu metodą elementów skończonych

Rozwiązywanie zagadnień kontaktowych przy pomocy metody elementów skończonych często sprawia wiele problemów. Najważniejsze z nich to brak zbieżności iteracyjnie rozwiązywanego zadania oraz duży błąd obliczeniowy. Spowodowane są one przeważnie niewłaściwym modelowaniem kontaktu. Zienkiewicz [31] analizuje trzy etapy zagadnienia:

- definicja par kontaktowych,
- szukanie punktów kontaktu,
- obliczanie sił i sztywności w kontaktach.

Zostaną one przedstawione w kolejnych podrozdziałach.

### 5.4.1 Definicja par kontaktowych i rodzaju kontaktu

Dokładny przebieg granicy styku ciał nie jest znany zanim znalezione zostaną punkty kontaktu. Zdefiniowane muszą więc zostać wszystkie miejsca, w których kontakt jest prawdopodobny. Należy na to zwrócić szczególną uwagę w zagadnieniach dotyczących utraty stateczności i przesuwania się obciążenia względem konstrukcji, ponieważ w takim przypadku występować będą duże przemieszczenia utrudniające uzyskanie zbieżności zadania.

Ważna jest również definicja rodzaju kontaktu, tzn. czy jest to: spoina, kontakt szorstki (ang. *rough*), kontakt przywierający (ang. *stick*) czy kontakt z poślizgiem (ang. *slip*). W przypadku spoiny, węzeł ciała *slave* jest przyczepiony do węzła ciała *master*, zatem nie występuje ruch względny. Szukanie punktów kontaktu nie jest wymagane, ponieważ zakładany jest styk wszystkich punktów. Modelowanie może przebiegać tak, jakbyśmy modelowali jedno ciało.

W przypadku kontaktu szorstkiego, zachowanie interfejsu jest bardzo podobne do spoiny, poza tym, że pierwotnie ciała mogą nie być w kontakcie. W momencie jednak, gdy kontakt nastąpi, z powodu szorstkości połączenia, nie występuje ruch względny, niezależnie od siły normalnej.

W kontakcie przywierającym może występować ruch względny na zasadzie odkształcenia sprężystego, gdy siła styczna działa na połączenie, w przeciwieństwie do kontaktu szorstkiego, gdy połączenie zachowuje się jak ciało sztywne. Ważna jest zatem znajomość sztywności stycznej, której macierz jest symetryczna.

Najczęstszym przypadkiem jest jednak kontakt z poślizgiem, w którym punkty mogą pozostawać lub zrywać kontakt. Dodatkowo, występuje ruch względny opisany modelem tarcia Coulomba. W przeciwieństwie do kontaktu przywierającego, macierz sztywności nie jest w tym przypadku symetryczna.

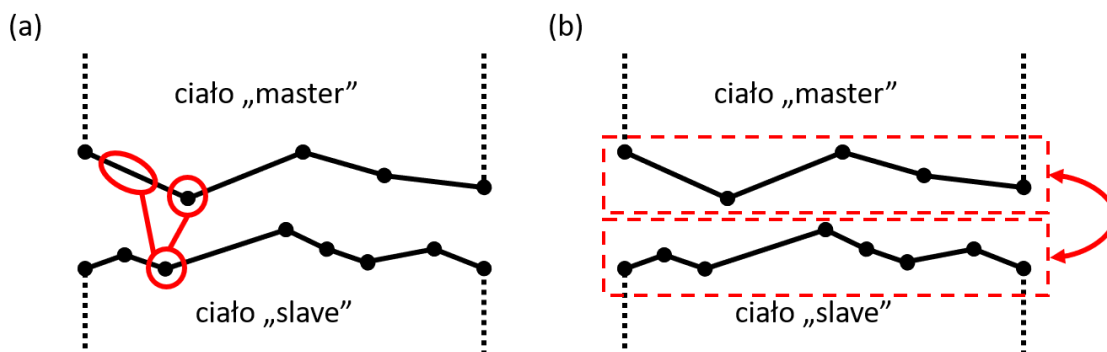
#### **5.4.2 Szukanie punktów kontaktu**

Najprostszym sposobem przeprowadzenia poszukiwania punktów kontaktu jest przyporządkowanie jeden do jednego elementów ciała *slave* z elementami ciała *master*. Jest to możliwe tylko w przypadku małych odkształceń i braku ruchu względnego, co jest jednak sytuacją rzadko występującą.

W ogólnym wypadku nie jest wiadome, które elementy będą pozostawać w kontakcie. Wybierane są tylko te elementy, dla których zachodzenie kontaktu jest możliwe. Oprogramowanie MES przeszukuje wszystkie pary odcinek *master* – węzeł *slave*, zgodnie z metodami opisanymi w podrozdziale 5.4.2. Takie poszukiwanie jest bardzo czasochłonne, gdyż dla  $k$  odcinków i  $m$  węzłów należy sprawdzić warunek  $k \times m$  razy, a czynność ta musi zostać wykonana dla każdej iteracji analizy nieliniowej. Często, dla przyspieszenia obliczeń, informacja o węzłach w kontakcie jest przechowywana między iteracjami jako punkt startowy dla nowego wyszukiwania.

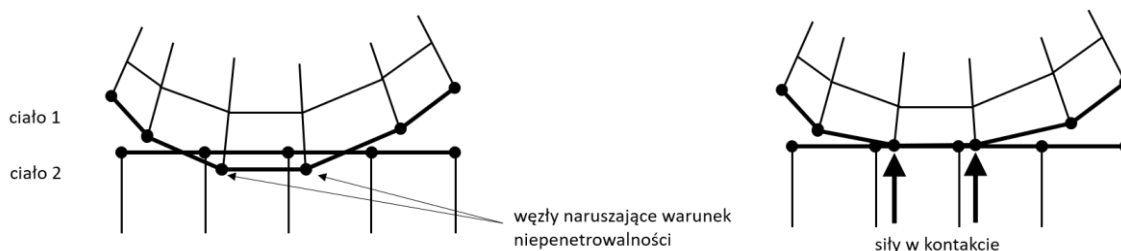
Stosuje się dwie metody poszukiwań punktów kontaktu: węzeł do powierzchni (ang. *node-to-surface*) i powierzchnia do powierzchni (ang. *surface-to-surface*). Metody te zostały przedstawione w sposób graficzny na rysunku 20.





Rysunek 20. Ilustracja metod poszukiwania punktów kontaktu: (a) węzeł do powierzchni i (b) powierzchnia do powierzchni.

Pierwsza jest stosowana, gdy węzeł penetruje powierzchnię *master*, co jest wykorzystywane w przypadku, gdy ciało *master* jest sztywne. Druga polega na sprawdzaniu warunku niepenetrowalności (patrz rysunek 21) pomiędzy powierzchniami *slave* i *master*, co jest przydatne w przypadku, gdy oba ciała są odkształcalne lub zachodzą duże przemieszczenia, a zatem rozróżnienie *slave-master* nie jest czytelne. Metoda ta daje lepsze rezultaty, ale jest ona również bardziej wymagająca obliczeniowo.



Rysunek 21. Ilustracja metody sprawdzania warunku niepenetrowalności.

Jeśli dwie powierzchnie znajdują się w mniejszej odległości niż tolerancja kontaktu, uznaje się, że są w styku.

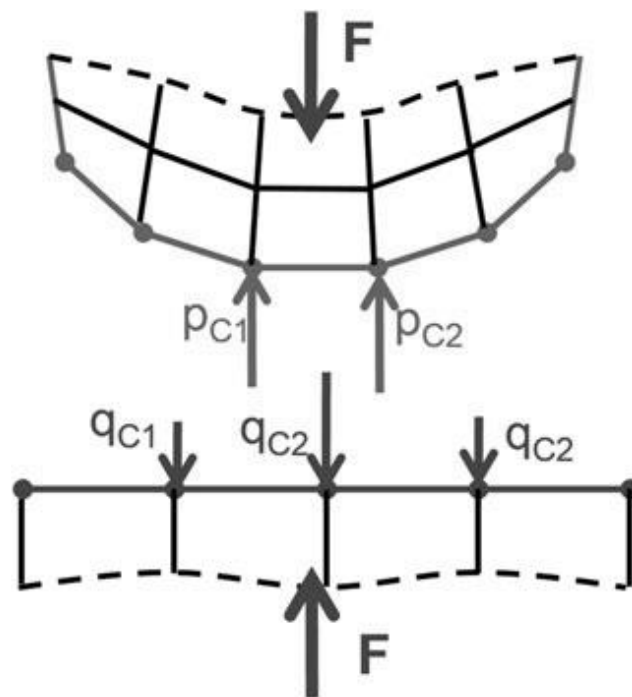
### 5.4.3 Obliczanie sił i sztywności w kontaktach

Gdy pary kontaktowe są ze sobą w styku (tzn. naruszony został warunek niepenetrowalności), siły w styku mogą zostać wyznaczone przy pomocy metody kary lub współczynników Lagrange'a. Metoda kary jest prostsza, jednak zezwala na lekkie naruszenie warunku niepenetrowalności. Stopień naruszenia może być kontrolowanym parametrem. Duża wartość parametru pozwoli na zmniejszenie głębokości naruszenia warunku, ale może spowodować też numeryczną niestabilność, gdyż macierz sztywności

stanie się źle uwarunkowana. W praktyce, wartość parametru dobierana jest na podstawie sztywności materiału, rozmiaru elementu i długości elementu (w kierunku normalnym do styku), dlatego też jest nazywana sztywnością kontaktową (ang. *contact stiffness*).

Kolejnym parametrem jest sztywność styczna, potrzebna do obliczenia siły tarcia w kontakcie. Jako że ta zależy od siły normalnej, zależy też od sztywności normalnej, co komplikuje problem. W metodzie kary, warunek przywierania jest zachowany aż do momentu, kiedy nastąpi poślizg pod wpływem obciążenia stycznego. Jeśli obciążenie zostanie usunięte, ciało wraca do stanu pierwotnego. Parametr sztywności stycznej ma wpływ na spełnienie tego warunku. Duża wartość parametru powoduje poślizg bez przywierania, mała - powoduje przywieranie.

Przy obliczaniu sił w kontaktach, zastosowanie ma trzecia zasada Newtona, gdyż ciała powinny pozostawać w równowadze. Zatem suma sił działających w interfejsie kontaktu na ciało *slave* ( $p_{ci}$  na rysunku 22) powinna być równa sumie sił działających na ciało *master* ( $q_{ci}$  na rysunku 22).



Rysunek 22. Obliczanie sił w kontakcie.



## 5.5 Modelowanie zjawisk kontaktowych w środowisku ANSYS

Środowisko ANSYS [140] jest oprogramowaniem do modelowania metodą elementów skończonych. Pozwala na dwu- i trój-wymiarowe modelowanie zagadnień (między innymi) statycznej analizy wytrzymałościowej, dynamiki konstrukcji, przepływu ciepła, analizy modalnej, symulacji dynamicznych, elektryczno-magnetycznych, a także mechaniki płynów. Dostępne są w nim narzędzia, które ułatwiają rozwiązywanie zagadnień kontaktowych. W zależności od potrzeb należy wybrać odpowiedni model elementu skończonego, który oferuje uwzględnienie zjawisk, które mają być analizowane. Przegląd możliwości rodzajów elementów skończonych przedstawiono w tabeli 7.

Tabela 7. Porównanie rodzajów kontaktowych elementów skończonych w środowisku ANSYS [140].

| Nazwa elementu                                 | CONTACT12      | CONTACT52 | CONTACT178       | CONTACT175,<br>TARGET169,<br>TARGET170 | CONTACT171,<br>CONTACT172,<br>TARGET169 | CONTACT173,<br>CONTACT174,<br>TARGET170 |
|--|----------------|-----------|------------------|--|---|---|
| Metoda poszukiwania punktów kontaktu           | węzeł do węzła |           |                  | węzeł do powierzchni                   | powierzchnia do powierzchni             |   |
| Zadania 2 D                                    | TAK            |           | TAK              | TAK                                    | TAK                                     |   |
| Zadania 3 D                                    |                | TAK       | TAK              | TAK                                    |   | TAK                                     |
| Poślizg styczny                                | tylko mały     |           |                  | duży                                   |   |   |
| Metoda współczynników Lagrange'a               |                |           | TAK              | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |
| Rozszerzona metoda współczynników Lagrange'a   |                |           | TAK              | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |
| Metoda funkcji kary                            |                |           |                  | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |
| Sztywność w kontaktach                         | zadana         |           | półautomatycznie |  |   |   |
| Kontakt ciała sztywnego z odkształcalnym       | TAK            | TAK       | TAK              | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |
| Kontakt ciała odkształcalnego z odkształcalnym | TAK            | TAK       | TAK              | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |
| Kontakt termiczny                              |                |           |                  | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |
| Kontakt elektryczny                            |                |           |                  | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |
| Kontakt magnetyczny                            |                |           |                  | TAK                                    | TAK                                     | TAK                                     |

Kroki analizy kontaktowej w ANSYSIE są bardzo podobne do przedstawionych w podrozdziale 5.1. Są to:

1. tworzenie modelu geometrii i siatki MES,
2. identyfikacja par kontaktowych (porównaj z podrozdziałem 5.2),
3. wybór powierzchni CONTACT i TARGET (odpowiednik *master* i *slave*),
4. definicja powierzchni TARGET,
5. definicja powierzchni CONTACT,
6. ustawienie wartości KEYOPTS i parametrów (ang. *real constants*) dla elementów (patrz tabela 8),
7. definicja rodzaju kontaktu (porównaj z podrozdziałem 5.4.1),
8. dobór warunków brzegowych,
9. wybór opcji iteracyjnego rozwiązania zagadnienia nieliniowego,
10. rozwiązanie zagadnienia kontaktowego,
11. wizualizacja wyników.

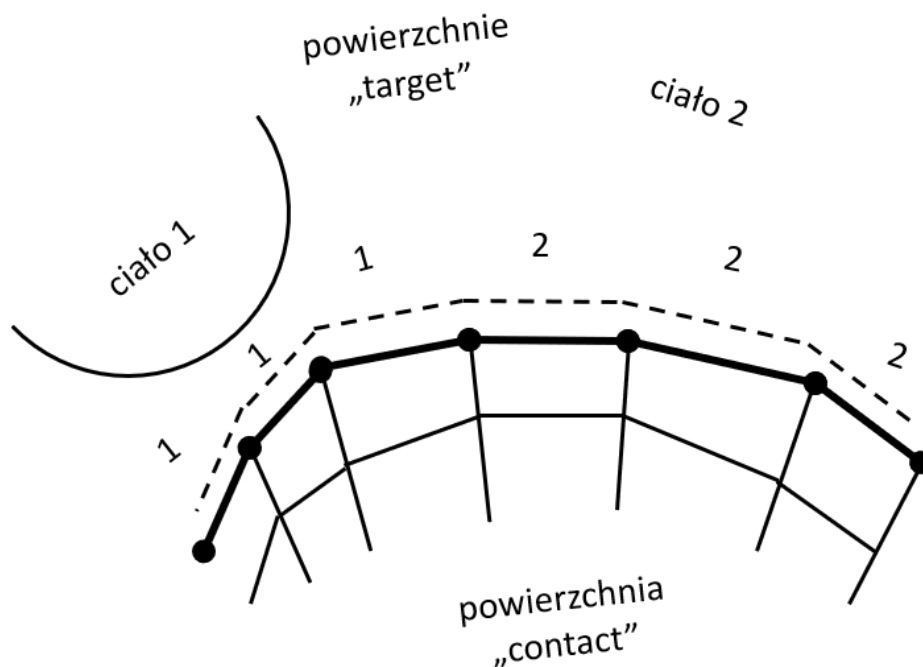
Tworzenie modelu geometrii i siatki jest standardowym zajęciem, które zostało wielokrotnie opisane w literaturze światowej [141]–[143] i polskiej [144]–[146] i jest poza zakresem niniejszej pracy.

Identyfikacja par kontaktowych przebiega podobnie jak opisano w punkcie 5.4.1. Przy pomocy wspólnego parametru wiązane są powierzchnie CONTACT i TARGET, co jest ważne szczególnie w przypadku kontaktu wielu ciał (co zaprezentowano na rysunku 23). Dobór powierzchni może być dowolny, ale w celu skrócenia czasu obliczeń, zalecane jest definiowanie mniejszych, lokalnych stref kontaktu, obejmujących jednak wszystkie możliwe miejsca wystąpienia kontaktu.

Następnie, podobnie jak w przypadku powierzchni *master/slave* należy wybrać powierzchnie CONTACT/TARGET. Dla kontaktu ciała sztywnego z odkształcalnym,

TARGET jest ciałem sztywnym (odpowiednik ciała *master*), CONTACT ciałem odkształcalnym (odpowiednik *slave*). Poradnik modelowania kontaktów ANSYS [147] podaje kilka wskazówek, którymi należy się kierować przy wyborze powierzchni CONTACT/TARGET w przypadku kontaktu ciała odkształcalnego z odkształcalnym:

- w przypadku kontaktu powierzchni wypukłej z powierzchnią płaską lub wklęsłą, ta druga powinna być powierzchnią TARGET;
- w przypadku różnej gęstości siatki, powierzchnia z bardziej zgrubną siatką powinna być powierzchnią TARGET;
- w przypadku różnicy sztywności, sztywniejsza powierzchnia powinna być powierzchnią TARGET;
- w przypadku elementów różnych rzędów [148], powierzchnia modelowana elementami wyższego rzędu powinna być powierzchnią TARGET;
- w przypadku różnicy rozmiarów, większa powierzchnia powinna być powierzchnią TARGET.



Rysunek 23. Schemat modelowania kontaktu wielu ciał w środowisku ANSYS.

W środowisku ANSYS można uwzględnić dodatkowe zjawiska oraz własności materiałowe. Przedstawiono je w tabeli 8 [147].

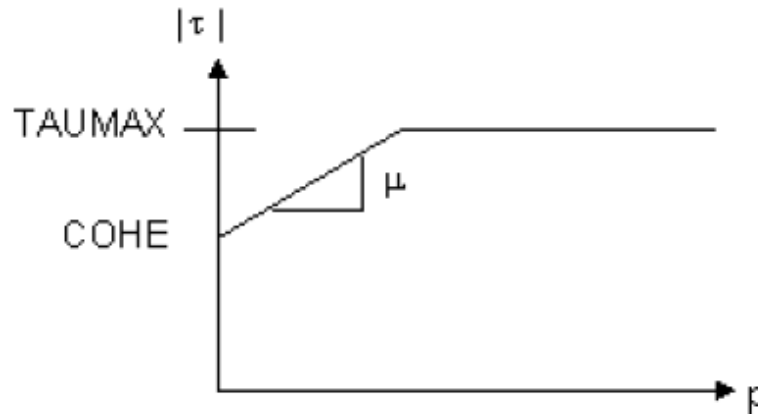
Tabela 8. Parametry kontaktowe w ANSYSie [147].

| <b>Symbol</b>     | <b>Parametr (nazwa polska)</b>               | <b>Parametr (nazwa angielska)</b>               |
|-------------------|--|---|
| <i>R2</i>         | grubość elementu                             | <i>element width</i>                            |
| <i>FKN</i>        | współczynnik funkcji kary                    | <i>normal penalty stiffness factor</i>          |
| <i>FTON</i>       | współczynnik tolerancji penetracji           | <i>penetration tolerance factor</i>             |
| <i>ICONT</i>      | początkowa odległość                         | <i>initial contact closure</i>                  |
| <i>PINB</i>       | region tolerancji                            | <i>pinball region</i>                           |
| <i>PMAX, PMIN</i> | limity tolerancji, patrz punkt 5.4.2         | <i>upper/lower limit of initial penetration</i> |
| <i>TAUMAX</i>     | maksymalne naprężenia związane z tarcie      | <i>maximum friction stress</i>                  |
| <i>CNOF</i>       | odległość powierzchni kontaktowych           | <i>contact surface offset</i>                   |
| <i>FKOP</i>       | szywność normalna kontaktu                   | <i>contact stiffness</i>                        |
| <i>FKT</i>        | szywność styczna kontaktu                    | <i>tangent stiffness</i>                        |
| <i>COHE</i>       | współczynnik kohezji                         | <i>contact cohesion</i>                         |
| <i>TCC</i>        | współczynnik wymiany ciepła w kontakcie      | <i>thermal contact conductance</i>              |
| <i>FHTG</i>       | współczynnik nagrzewania ciernego            | <i>frictional heating factor</i>                |
| <i>SBCT</i>       | stała Stefana-Boltzmanna                     | <i>Stefan-Boltzmann constant</i>                |
| <i>RDVF</i>       | współczynnik kierunku promieniowania         | <i>radiation view factor</i>                    |
| <i>FWGT</i>       | współczynnik wagowy rozkładu ciepła          | <i>heat distribution weighting factor</i>       |
| <i>ECC</i>        | współczynnik przewodzenia elektrycznego      | <i>electric contact conductance</i>             |
| <i>FACT</i>       | proporcja tarcia statycznego do kinetycznego | <i>static/dynamic ratio</i>                     |
| <i>DC</i>         | współczynnik zaniku tarcia                   | <i>exponential decay coefficient</i>            |
| <i>SLTO</i>       | wielkość dozwolonego poślizgu                | <i>allowable elastic slip</i>                   |
| <i>MCC</i>        | współczynnik przewodzenia magnetycznego      | <i>magnetic contact permeance</i>               |

W szczególności ważne w kontekście niniejszej pracy są parametry dotyczące modeli zjawiska tarcia. W prostym modelu tarcia kulombowskiego [139], dwie powierzchnie mogą przenosić obciążenia styczne aż do osiągnięcia pewnej wartości, a następnie rozpoczyna się poślizg. Rozszerzony model tarcia opisany przez Laursena [149] definiuje maksymalne naprężenia statyczne, przy których rozpoczyna się poślizg jako:

$$\tau = \mu_s p + COHE, \quad (80)$$

gdzie  $\mu_s$  – współczynnik tarcia statycznego,  $p$  – nacisk na powierzchni,  $COHE$  – współczynnik kohezji. ANSYS rozszerza ten model o maksymalne naprężenia związane z tarcie  $TAUMAX$ . Rozszerzony model tarcia statycznego przedstawiono na rysunku 24.



Rysunek 24. Naprężenia statyczne w rozszerzonym modelu tarcia [147].

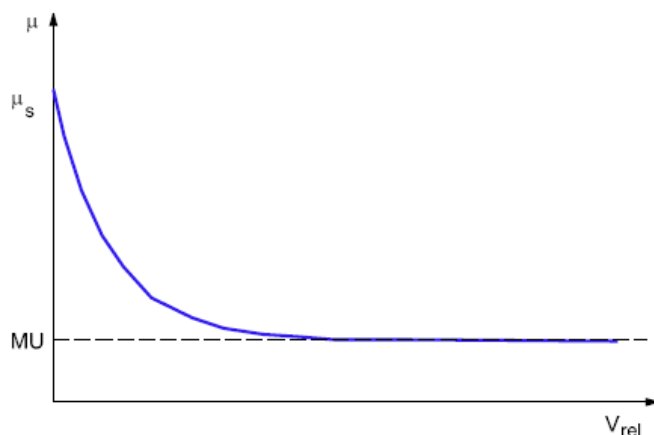
W rozszerzonym modelu tarcia możliwe jest też uzależnienie współczynnika tarcia kinetycznego od prędkości poślizgu, zgodnie z równaniem:

$$\mu = MU(1 + (FAC - 1)e^{-DC \cdot VREL}) \quad (81)$$

gdzie:

- $\mu$  – współczynnik tarcia;
- $MU$  – minimalna wartość współczynnika tarcia kinetycznego (dla nieskończonej wielkiej prędkości);
- $FAC$  – proporcja tarcia statycznego do kinetycznego (zatem  $\mu_s = FAC \times MU$ );
- $DC$  – współczynnik zaniku tarcia.

Rozszerzony model tarcia kinetycznego przedstawiono na rysunku 25.



Rysunek 25. Zależność współczynnika tarcia od prędkości względnej w rozszerzonym modelu tarcia kinetycznego [147].

Parametry KEYOPTS pozwalają na wybór metody poszukiwania par kontaktowych (domyślnie jest to metoda zmodyfikowanych współczynników Lagrange'a [150]) oraz sterowanie zachowaniem algorytmu optymalizacyjnego. Środowisko ANSYS pozwala również na uwzględnienie zjawisk cieplnych, elektrycznych oraz magnetycznych, które są poza zakresem niniejszej pracy.

W niniejszej pracy wybrano kombinację elementów CONTA174 oraz TARGET170 dzięki ich największej uniwersalności: możliwości modelowania kontaktu ciał odkształcalnych z odkształcalnymi, korzystania z funkcji kary i metody powierzchni do powierzchni przy szukaniu par kontaktowych oraz możliwości rozwiązywania zagadnień trójwymiarowych. Model obliczeniowy metody elementów skończonych użyty w niniejszej pracy opisano w podrozdziale 10.2.

## 6 Tribologia kosmiczna

### 6.1 Podstawy tribologii

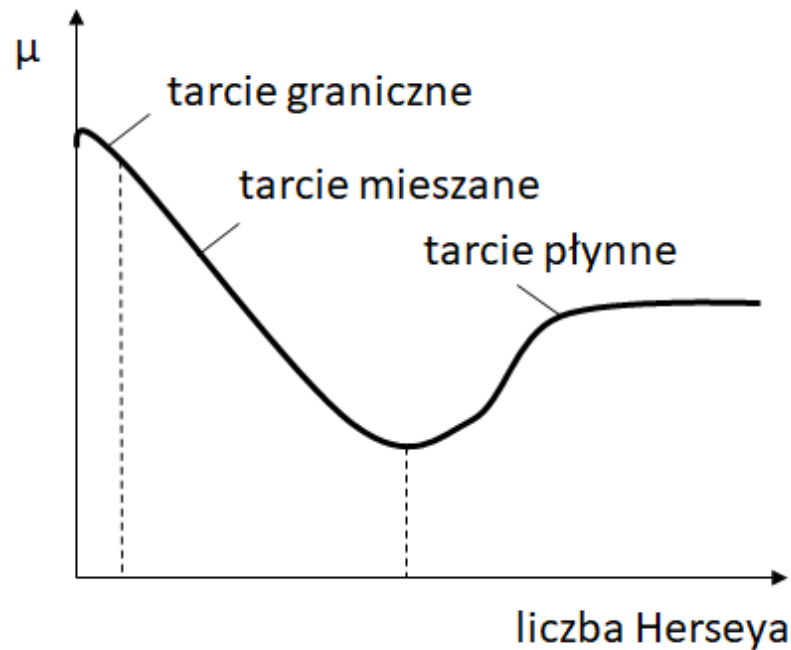
Tribologia jest nauką o tarcii i sposobach jego zmniejszania, na przykład przy użyciu smarowania [151]. Literatura wyróżnia trzy główne reżimy smarowania/tarcia: graniczne (ang. *boundary*), mieszane (ang. *mixed*) i hydrodynamiczne. Rozróżnienie te można zilustrować krzywą Stribecka [152], przedstawioną na rysunku 26, która ukazuje zależność współczynnika tarcia od liczby Herseya (współczynnik ten jest wprost proporcjonalny do lepkości smaru i prędkości względnej skojarzenia i odwrotnie proporcjonalny do obciążenia). W reżimie hydrodynamicznym, powierzchnie ślizgowe są od siebie oddzielone warstwą olejową, a zużycie przestaje występować.

W reżimie granicznym, występują oddziaływania między nierównościami (ang. *asperity*) skojarzonych powierzchni, a warstwa olejowa nie występuje. W tym wypadku to odpowiednia warstwa wierzchnia (np. tlenki) jest odpowiedzialna za redukcję niepożądanych skutków tych oddziaływań.

W reżimie mieszanym, występować mogą oba te zjawiska, a w przypadku nieprzylegających do siebie powierzchni, pojawić się może smarowanie elasto-hydrodynamiczne. Przy braku smarowania albo bardzo małej ilości środka smarowego w strefie styku można również wyróżnić tarcie suche, albo technicznie suche. W takim przypadku, niezależnie od warunków obciążenia i ruchu względnego, nie może wystąpić między powierzchniami trącymi efekt hydrodynamiczny w żadnej postaci.

W przypadku smarowania hydrodynamicznego, to film olejowy w pełni przenosi obciążenie, a powierzchnie się nie stykają. Oznacza to, że grubość warstwy olejowej jest znacznie większa niż wielkość największych nierówności powierzchni. Smarowanie hydrodynamiczne zależy od trzech czynników: lepkości smaru, kształtu oraz prędkości względnych powierzchni. Ciśnienie w smarze tworzone jest poprzez zabieranie smaru przez ruch tych powierzchni. Smarowanie hydrodynamiczne występuje we wszystkich powierzchniach, które są zbieżne (nie równoległe do siebie). Wymagana zbieżność jest niewielka [151].





Rysunek 26. Krzywa Striebecka [152].

W niniejszej rozprawie, badaniom poddany został smar stały, opisany szerzej w podrozdziale 6.4.

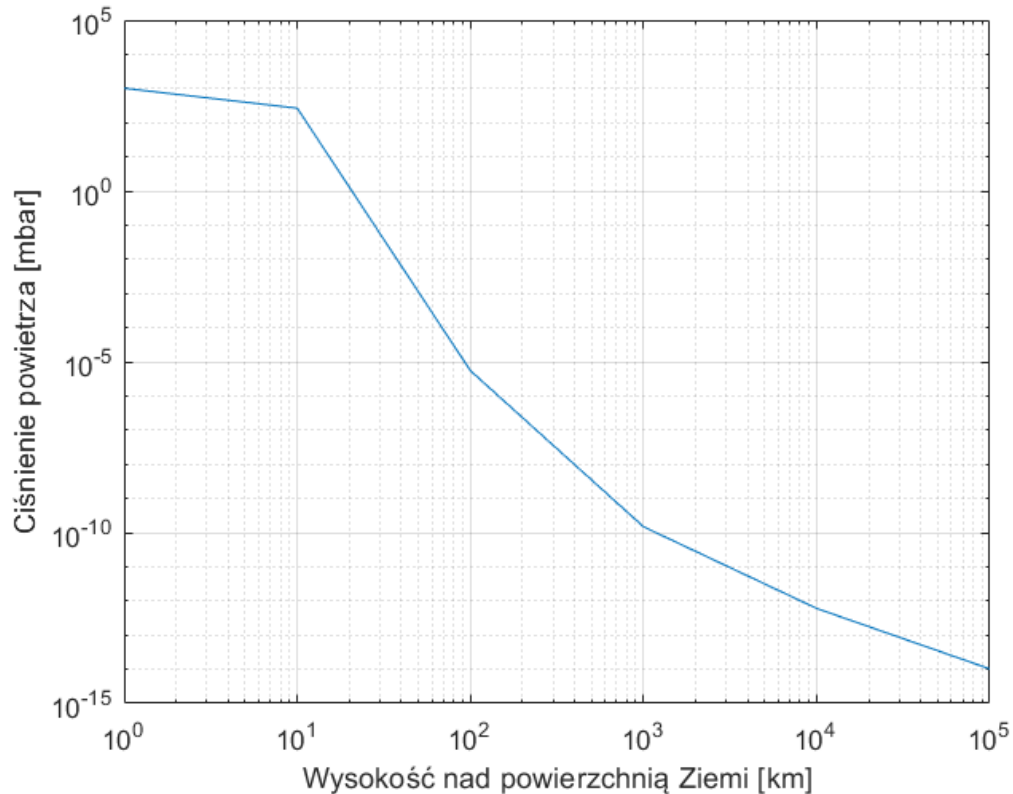
## 6.2 Wymagania stawiane smarom w przestrzeni kosmicznej

W przypadku, gdy środowiskiem pracy smarów będzie przestrzeń kosmiczna, kluczowa jest analiza wpływu zjawisk tam występujących na właściwości smarów. Te zjawiska to: efekty dynamiczne, obniżone ciśnienie, brak tlenu, brak wilgoci, promieniowanie, wysokie gradienty temperatur, mikrogravitacja. W rozdziale 4 przedstawiono środowisko dynamiczne rakiet z uwzględnieniem efektów, które wywołuje.

Ziemska atmosfera jest jednorodną mieszaniną azotu (78%), cząsteczkowego tlenu (21%) oraz śladowych ilości argonu, wody, dwutlenku węgla, itd. Ciśnienie i gęstość powietrza maleją wykładniczo wraz ze wzrostem wysokości nad poziomem morza [153] (patrz rysunek 27). Powyżej 20 km występuje ozon ( $O_3$ ), którego powstanie jest rezultatem fotochemicznego procesu rozpadu i rekombinacji  $O_2$ . Powyżej wysokości 85 km – 100 km mieszanina powietrza się rozwarstwa. Na wysokościach do 1000 km dominuje tlen, na wysokościach do 2500 km hel, na wysokościach 8-14 promieni Ziemi

wodór. Na niskiej orbicie Ziemi (ang. *low Earth orbit, LEO*) silnie reaktywny tlen atomowy dominuje nad tlenem cząsteczkowym.

W przypadku wysokiej aktywności słonecznej, temperatura i stężenie składników atmosfery powyżej 120 km ulegają zmianie, co ma wpływ na ciśnienie powietrza dookoła obiektu [154].



Rysunek 27. Zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości nad Ziemią (na podstawie [154]).

Ciśnienia wewnątrz mechanizmu w przestrzeni kosmicznej znajdującego się na statku kosmicznym lub satelicie typowo są większe, ale mają charakter przejściowy. Na orbicie geostacjonarnej poziom próżni to ok.  $10^{-13}$  mbar, ale w pobliżu satelity wzrasta do ok.  $10^{-10}$  mbar z powodu odgazowania [155] a wewnątrz satelity jest jeszcze większy. Stark [155] podaje, że ciśnienie wewnątrz typowego mechanizmu takiego jak napęd paneli słonecznych osiąga wartość ok.  $10^{-5}$  mbar po osiągnięciu docelowej orbity i maleje do poziomu ok  $10^{-7}$  mbar po roku operacji. Należy zwrócić uwagę na fakt, że atmosfera ta składa się w ok. 80% z pary wodnej i 20% tlenku węgla. Dodatkowo, wiele smarów i olejów wydziela

własne opary. Cząsteczki z tych molekuł mogą łączyć się z powierzchniami (adsorpcja) i przyczyniać się do zmniejszenia reflektywności lub przepuszczalności komponentów optycznych [156].

Głównym źródłem promieniowania elektromagnetycznego na orbicie okołoziemskiej jest Słońce, dodatkowymi są Ziemia oraz Księżyc (zarówno przez własną niezerową temperaturę jak i odbite promieniowanie słoneczne). Widmo promieniowania słonecznego przypomina widmo ciała doskonale czarnego o temperaturze 6000 K [157]. Głównym efektem tej formy energii jest ogrzewanie satelity oraz generowanie energii elektrycznej przez panele słoneczne. Negatywnym efektem jest degradacja polimerów i półprzewodników. W obszarze niskich długości fal (promieniowanie rentgenowskiej) intensywność promieniowania jest znacznie większa niż dla ciała doskonale czarnego o temperaturze 6000 K. Jednakże, promieniowanie tego typu jest dobrze ekranowane przez bardzo cienkie warstwy metalu. Poza promieniowaniem elektromagnetycznym, na orbicie występują również strumienie protonów, elektronów i tlenu atomowego. Skutki ich oddziaływań na tribomateriały przedstawiono za [158] w tabeli 9.

Tabela 9. Skutki oddziaływań cząstek na tribomateriały (na podstawie [158]).

| <b>czynnik odpowiedzialny</b> | <b>skutki dla tribomateriałów</b>   |
|-------------------------------|---|
| strumień protonów             | Nie przenika ścian statku kosmicznego. Materiały na zewnętrznej stronie powinny być chronione, jeśli są odpowiedzialne za funkcjonalność satelity.  |
| strumień elektronów           | Przenikają ściany statku, ale w trakcie życia satelity nie są w stanie uszkodzić większości smarów i olejów. Parametry niektórych polimerów (np. PTFE) mogą zostać zdegradowane z powodu zmiany w gęstości i stopnia krystaliczności w dłuższej perspektywie. |
| tlen atomowy                  | Jeśli zostaną wystawione na jego działanie, większość smarów zdegraduje poprzez utlenienie, erozję lub oba zjawiska.  |

Pomimo, że na orbicie występują niezwykle trudne warunki termiczne – nie tylko ekstremalne temperatury, ale również bardzo duże gęstości strumieni ciepła, a także szybkie zmiany – współczesne pojazdy kosmiczne konstruuje się w taki sposób, by mechanizmy pracowały w warunkach termicznych zbliżonych do ziemskich. Osiąga się to poprzez odpowiednią kontrolę termiczną: bilansowanie promieniowania otrzymanego od Słońca, Ziemi, Księżyca, ciepła wypromieniowanego przez satelitę (przy temperaturze własnej ok. 300 K) i ciepłe wygenerowanym przez satelitę

(np. przez układy elektroniczne na jego pokładzie) poprzez np. użycie odpowiednich osłon termicznych [159].

Warunki zbliżone do nieważkości również wpływają na rozkład płynnych smarów i produktów zużycia w strefie styku ciernego. Typowo zużywanie nie jest równomierne, lecz zlokalizowane jest w losowo rozrzuconych wżerach (kawernach), wypełniających się stopniowo produktami zużycia [160]. Tymczasem w przestrzeni kosmicznej, rozkład cząstek będzie zależał od proporcji sił bezwładności i elektrostatycznych w pobliskim polu elektromagnetycznym. Na przykład, nieczystości osadzają się na izolatorach w pierścieniach ślizgowych dużo częściej podczas pracy w nieważkości niż podczas testów laboratoryjnych na powierzchni Ziemi. Niedawne testy na Beijing Drop Tower pokazują, że mikrogravitacja wpływa również na wartości tarcia i wpływa na własności dynamiczne smarów [161].

Space Tribology Handbook [158] podsumowuje najważniejsze problemy tribologiczne wynikające ze środowiska kosmicznego, mechanizmy ich powstawania oraz sposoby zapobiegania i opóźniania ich powstawania. Podsumowanie przedstawiono w tabeli 10.

Tabela 10. Wyzwania tribologiczne środowiska kosmicznego (na podstawie [158]).

| środowisko                                 | potencjalny problem  | zjawisko odpowiedzialne  | sposób zapobiegania lub opóźnienia   |
|--|--|--|--|
| wyniesienie rakiety w przestrzeń kosmiczną | zużywanie się smaru stałego prowadzące do adhezji            | fretting   | inżynieria warstwy wierzchniej (np. warstwy smarujące napyłane w polu magnetycznym (ang. PVD, <i>physical vapour deposition</i> )) |
|  | brinelling powierzchni kontaktowych                          | wysokie obciążenia   | odpowiednie wymiarowanie i napięcie wstępne części   |
| próżnia                                    | utrata smarów płynnych                                       | wyparowanie  | używanie smarów o niskim ciśnieniu parowania lub smarów stałych  |
|  | zanieczyszczenie się powierzchni komponentów                 | odgazowywanie (ang. <i>outgassing</i> ) i adsorpcja oparów olejów                                  | używanie smarów o niskim ciśnieniu parowania lub smarów stałych; uszczelnianie przestrzeni z optyką                                |
| promieniowanie                             | degradacja niektórych polimerów                              | strumienie cząstek i promieniowanie elektromagnetyczne   | osłanianie odpowiedzialnych powierzchni  |
|  | utlenianie lub erozja smarów stałych przez atomowy tlen      | tlen atomowy   | osłanianie odpowiedzialnych powierzchni  |
| temperatura                                | niewystarczające smarowanie przy ekstremalnych temperaturach | rozkład i/lub parowanie olejów przy wysokich temperaturach i zestalenie przy niskich temperaturach | użycie odpowiednich smarów stałych   |
| mikrogravitacja                            | zanieczyszczenie cząstkami smarów                            | cząstki smarów stałych   | uszczelnienia  |
|  | zatarcie   | zmniejszenie własności dynamicznych smarów w mikrogravitacji [161]                                 | jeszcze nie opracowano   |

### 6.3 Dobór smarowania

Dobór smarowania stałego (mazistego) lub płynnego zależy głównie od warunków pracy urządzenia. Typowe przykłady doboru na podstawie charakterystyki zastosowania przedstawiono w tabeli 11 [158].

Tabela 11. Dobór typu smarowania w zależności od warunków pracy (na podstawie [158]).

| warunki   | smarowanie | uwagi   |
|---|------------|---|
| eksploatacja w niskiej temperaturze                   | stałe      | Oleje nie powinny być używane poniżej ich temperatury płynięcia. Najniższą znaną temperaturą dla smaru płynnego jest $-75\text{ }^{\circ}\text{C}$ dla PTFE typu Z. To wyznacza dolną granicę stosowania smarów płynnych. |
| eksploatacja w wysokiej temperaturze                  | stałe      | Wg [162] oleje nie powinny być stosowane powyżej $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .  |
| przyspieszone testowanie                              | stałe      | Ze względu na dynamikę, testy przyspieszone smarowania płynnego nie dają wiarygodnych wyników [163] (por. [164]).   |
| zagrożenie zanieczyszczeniem z oparów                 | stałe      | Większość smarów mazistych posiada niskie ciśnienie pary nasyconej.   |
| wysokie prędkości przy długich czasach eksploatacji   | płynne     | Systemy smarowane smarem mazistym mają ograniczone czasy życia. Koła reakcyjne opierają się głównie na smarach płynnych, ze względu na niskie tarcie hydrodynamiczne.   |
| operacja zarówno w próżni jak i w środowisku tlenowym | płynne     | Niektóre smary stałe (np. MoS <sub>2</sub> ) nie powinny pracować w atmosferze powietrznej, a praca innych (np. ołowiu) powinna być ograniczona.  |

Literatura [158] podaje również przykłady dodatkowych funkcji, które może spełniać smar stały lub płynny. Przedstawiono je w tabeli 12.

Tabela 12. Dodatkowe funkcje smarowania (na podstawie [158]).

| wymaganie                             | zalecany typ smaru |
|---------------------------------------|--------------------|
| duża przewodność termiczna w styku    | płynny             |
| duża przewodność elektryczna          | stały              |
| mały hałas                            | płynny             |
| małe zanieczyszczenie cząsteczkami    | płynny             |
| praca w środowisku bez zanieczyszczeń | stały              |
| potrzeba przyspieszonego testowania   | stały              |

Jedną z dodatkowych funkcji smaru może być tłumienie drgań mechanicznych. Badanie tego zjawiska jest celem niniejszej pracy.

## 6.4 Smary stałe

Zgodnie z informacjami przedstawionymi w rozdziałach 6.2 i 6.3, smarowanie stałe jest stosowane w tribologii kosmicznej, gdy warunki pracy zakładają pracę w bardzo niskich lub wysokich temperaturach, przyspieszone testowanie, ryzyko zanieczyszczeniem innych powierzchni lub wymagana jest wysoka konduktancja elektryczna. Smary stałe wykonywane są z różnych typów materiałów, takich jak: substancje lamelarne (warstwowe), polimery, miękkie warstwy metaliczne oraz tlenki. Zestawienie przedstawiające przykłady materiałów wykorzystywanych jako smary stałe w przemyśle kosmicznym zawiera tabela 13.

Tabela 13. Substancje używane jako smary stałe i ich właściwości (na podstawie [158]).

| Typ substancji             | Materiał  | Właściwości tribologiczne   |
|----------------------------|---|---|
| substancje lamelarne       | dwusiarczek molibdenu   | Niski współczynnik tarcia w próżni. Używany szeroko jako powłoki w zastosowaniach kosmicznych.  |
|                            | dwusiarczek wolframu  | Podobne właściwości jak MoS <sub>2</sub> , ale rzadziej używany.  |
|                            | grafit  | Słabe właściwości tribologiczne w próżni, ale używany np. w szczotkach silników.  |
|                            | grafit interkalowany  | Skuteczny w próżni, ale rzadko stosowany w przemyśle kosmicznym.  |
|                            | fluorek wapnia  | Skuteczny w wysokich temperaturach.   |
|                            | eutektyka fluorek wapnia / fluorek baru                       | Skuteczny w wysokich temperaturach.   |
| polimery                   | politetrafluoroetylen (PTFE)                                  | Nie zmienia własności w powietrzu i próżni. Używany szeroko jako kompozyt i powłoki.  |
|                            | poliacetal (POM)  | Używane w przekładniach o małej dokładności.  |
|                            | poliamidy (nylon)   | Nie używane w zastosowaniach kosmicznych z powodu pochłaniania wody   |
|                            | polietylen o ultradużej masie cząsteczkowej (Dyneema, UHMWPE) | Używane w przekładniach o małej dokładności.  |
|                            | poliimidy   | Posiada niższy współczynnik tarcia w próżni niż w powietrzu.  |
| miękkie warstwy metaliczne | ołów  | Powszechnie stosowany jako substancja smarująca elementów tocznych łożysk i klatek. Obecnie regulacje prawne wycofują stosowanie z powodu toksyczności. |
|                            | srebro  | Skuteczny w wysokich temperaturach.   |
|                            | złoto   | Odporny na tlen atomowy, ale rzadko używany w zastosowaniach kosmicznych.   |
| tlenki                     | tlenek ołowiu, dwutlenek krzemu                               | Skuteczny w wysokich temperaturach.   |
|                            | tritylenek diboru, siarczek ołowiu                            | Skuteczny w wysokich temperaturach.   |
|                            | tritylenek molibdenu  | Skuteczny w wysokich temperaturach.   |

Istnieje szereg metod nanoszenia smaru stałego na powierzchnię. Zaliczają się do nich: nanoszenie próżniowe (ang. *vacuum deposition*), fizyczne osadzanie z fazy gazowej

(ang. *physical vapour deposition, PVD*), platerowanie (ang. *burnishing*), lakierowanie adhezyjne (ang. *bonded coating*), napylenie plazmowe (ang. *plasma spray*).

Nanoszenie próżniowe pozwala uzyskać najbardziej jednorodną, a zarazem najcieńszą warstwę smaru na powierzchni. Stosuje się ją w precyzyjnych komponentach. Metoda PVD wykorzystuje odparowanie metali lub ich stopów w próżni. Nanoszenie powłok przeprowadzane jest na podłożu zimnym lub podgrzanym do 200-500 °C [165], co umożliwia pokrywanie podłoża zahartowanych i odpuszczonych bez obawy o spadek ich twardości, lecz jednocześnie prowadzi do wytworzenia powłok bardzo cienkich i słabo związanych z podłożem. Połączenie powłoka – podłoże ma charakter adhezyjny i jest tym silniejsze im bardziej czysta jest powierzchnia pokrywana.

Platerowanie jest najprostszą metodą aplikacji – polega na wcieraniu suchego smaru w powierzchnię. Może zostać wykonane ręcznie lub mechanicznie, co pozwala na równomierne nałożenie warstwy o odpowiedniej grubości.

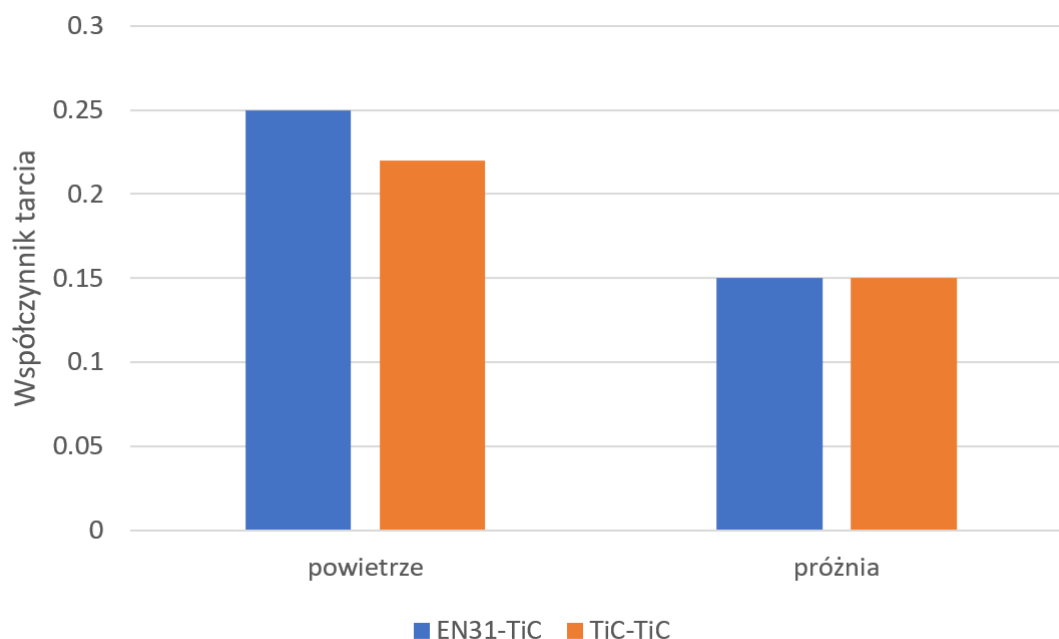
Lakierowanie adhezyjne polega na połączeniu substancji smarującej z powierzchnią smarowaną za pomocą dodatkowej substancji wiążącej (np. lakieru). W przypadku tej metody, występuje ryzyko zamknięcia bąbli powietrza, więc wymagane są dodatkowe procesy, takie jak obróbka cieplna i piaskowanie). W wypadku tej metody, trudna jest również kontrola grubości warstwy.

Napylenie plazmowe polega na szybkim podgrzaniu substancji smarującej przy użyciu gorącego gazu, a następnie skierowaniu na powierzchnię z dużą prędkością. Dzięki takiemu procesowi można napylić kilka substancji jednocześnie, a także utworzyć strukturę warstwową (np. twarda powierzchnia z węgla chromu, a pod nią substancja smarująca z MoS<sub>2</sub> lub srebra). W zastosowaniach kosmicznych, używana jest głównie przy termicznie odpornych warstwach na pojazdach, które mają za zadanie przetrwać powrót przez atmosferę.

W niniejszej pracy zdecydowano się wybrać smarowanie stałe przy pomocy dwusiarczku molibdenu osadzanego na powierzchni aluminiowej poprzez platerowanie. Dwusiarek molibdenu (MoS<sub>2</sub>) jest smarem stałym powszechnie stosowanym w inżynierii lotniczej oraz kosmicznej. Jego częste stosowanie jako smaru mechanizmów kosmicznych zawdzięcza przede wszystkim temu, że w środowiskach niskiego stężenia tlenu pozwala



na osiągnięcie niskich współczynników tarcia [166]. Badania pokazują, że współczynnik tarcia w połączeniach  $\text{MoS}_2$  silnie zależy od warunków środowiskowych [167]. W pracy [168] porównano współczynnik tarcia w próżni ( $10^{-3}$  bar) i na powietrzu (1 bar) dla par: stal łożyskowa EN31 – węgiel tytanu (TiC) oraz węgiel tytanu – węgiel tytanu smarowanych dwusiarczkiem molibdenu. Wyniki przedstawiono na rysunku 28.



Rysunek 28. Wpływ atmosfery na współczynnik tarcia par materiałów smarowanych  $\text{MoS}_2$  (na podstawie [168]).

Z badań wynika, że warunki środowiskowe mają duży wpływ na współczynnik tarcia. Nie badano dotychczas wpływu  $\text{MoS}_2$  na współczynnik tłumienia drgań. Badania takie przedstawiono w podrozdziale 9.4.

## 7 Analiza modalna

### 7.1 Wstęp

Celem identyfikacji parametrów modalnych jest uzyskanie parametrów modelu matematycznego opisującego drgania obiektu (patrz podrozdział 2.2). Badanie charakterystyki dynamicznej obiektu nazywane jest analizą modalną. Pozwala ona na zrozumienie zachowania obiektu technicznego, a także uniknięcie wielu problemów związanych z drganiami, które, mogą mieć katastrofalne skutki (np. most Tacoma Narrows [169]). Literatura podaje wiele zastosowań analizy modalnej, takie jak rozwiązywanie problemów inżynierskich [80], [170]–[172], walidacja modelu metody elementów skończonych [80], [173], modyfikacja dynamiki obiektu w celu uzyskania bardziej pożądanego zachowania (np. mniejsze drgania dające w efekcie większą gładkość powierzchni w procesie frezowania [174]), szacowanie obciążeń [175], wykrywanie uszkodzeń [171], [176], [177], a nawet opracowywanie algorytmów sterowania [178].

Jak opisano w podrozdziale 2.1, przy typowym modelu używanym w mechanice, zachowanie dynamiczne obiektu technicznego charakteryzują trzy własności – związane z: bezwładnością, dyssypacją energii oraz magazynowaniem energii. Po odpowiednich przekształceniach matematycznych (podrozdział 2.2), wykazać można, że w pełni układ opisują trzy parametry: częstości drgań własnych, tłumienie oraz postacie drgań własnych. W ogólnym wypadku, dla układów wielowymiarowych, każdy z nich jest opisany w formie macierzowej.

Układ o  $N$  stopniach swobody posiada  $N$  postaci, które przedstawia się jako rozwiązanie różniczkowego równania ruchu. Postacie drgań własnych są silnie związane ze strukturą obiektu i nie zależą od obciążeń przykładanych do układu. Zależą natomiast od geometrii obiektu, jego własności materiałowych oraz warunków brzegowych. Postacie drgań własnych nie opisują jednak konkretnego ruchu, gdyż ten jest superpozycją wszystkich postaci.

Taki układ ma również  $N$  częstości drgań własnych, które zależą od geometrii, własności materiałowych, w szczególności gęstości, sztywności oraz tłumienia. W przypadku drgań wymuszonych, gdy częstotliwość sygnału wymuszającego jest zbliżona do częstotliwości drgań własnych, wystąpić może zjawisko rezonansu,



wiążące się ze zwiększaniem amplitudy drgań, co może doprowadzić do utraty stateczności, a w konsekwencji zniszczenia konstrukcji.

Wreszcie, układ o  $N$  stopniach swobody posiada również  $N$  współczynników tłumienia, które zależą od własności materiałowych. Tłumienie również ma wpływ na częstotliwości drgań własnych (patrz podrozdział 2.2).

Typowo [4] identyfikacją nazywany jest cały proces, od przygotowania eksperymentu, przez przeprowadzenie pomiaru, wstępną analizę danych, określenie klasy modelu, określenie struktury modelu parametrycznego, aż po estymację parametrów modelu. W niniejszym rozdziale opisane zostaną wybrane metody stosowane tylko w ostatnim z tych etapów (pozostałe etapy opisano w rozdziale 9). W opisie skupiono się na najpopularniejszych metodach identyfikacji stosowanych w mechatronice. Są to zarówno metody przyjmujące dane w dziedzinie czasu:

- np. IRF – *impulse response function*:
  - metoda *Ibrahim Time Domain*, ITD [179],
  - metoda *Least Square Complex Exponential*, LSCE [180],
  - metoda *Eigensystem Realization Algorithm*, ERA [181],

jak i w dziedzinie częstotliwości:

- np. FRF – *frequency response function*:
  - metoda *Peak Picking*, PP [182],
  - metoda *Least Squares Rational Function*, LSRF [5],

oraz inne, np. metody wykorzystujące transformatę Hilberta.

## 7.2 Metoda *Ibrahim Time Domain*, ITD

*Ibrahim Time Domain* [179] jest metodą identyfikacji działającą w dziedzinie czasu. Pozwala ona uniknąć typowych problemów związanych z transformacją do dziedziny częstotliwości, takich jak *aliasing* czy rozdzielczość częstotliwościowa widma, dzięki czemu pozwala na większą dokładność estymacji parametrów modalnych. Metoda ta bazuje na odpowiedzi impulsowej układu.

Jak przedstawiono w podrozdziale 2.1, rozwiązaniem różniczkowego równania ruchu układu swobodnego o jednym stopniu swobody (6) jest równanie (29). W przypadku układu o  $N$  stopniach swobody, wzór (29) przybiera postać:

$$\{y\} = \sum_{i=1}^{2N} A_i \{\psi\}_i e^{\lambda_i t}, \quad (82)$$

gdzie  $\{\psi\}_i$  jest  $i$ -tą postacią zespoloną, a  $\lambda_i$  jest  $i$ -tym pierwiastkiem charakterystycznym, który zawiera informacje zarówno o częstości drgań własnych  $\omega_{0i}$ , jak i współczynnika tłumienia  $\zeta_i$  (por. współczynniki  $r_1$  i  $r_2$  we wzorach (15) i (16)).  $A_i$  jest warunkiem początkowym.

Metoda zakłada, że odpowiedź strukturalna układu mierzona jest w  $N$  położeniach i nie zawiera szumu. Zawierając współczynniki  $A_i$  w wektorze postaci zespolonych  $\{\psi\}_i$ , można zapisać wektor odpowiedzi w chwili  $t_k$ :

$$\{y(t_k)\} = \{y_k\} = [\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{2N}] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_k} \\ e^{\lambda_2 t_k} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_k} \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Metoda wymaga pomiarów w  $2N$  chwil czasowych, które zapisać można w macierzy  $[y]$  o wymiarach  $N$  na  $2N$ :

$$[y] = [y_1 y_2 \cdots y_{2N}] = [\psi][A], \quad (84)$$

gdzie  $[\psi]$  jest macierzą o wymiarach  $N$  na  $2N$ , a  $[A]$  ma wymiar  $2N$  na  $2N$  i ma postać:

$$[A] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \cdots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & \cdots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Jak podają autorzy [179], w macierzy  $[A]$  występują nieliniowości. Metoda *Ibrahim Time Domain* radzi sobie z nimi poprzez powtórzenie równania (83) opóźniając odpowiedź o pewną stałą czasową.

Rozpatrzmy wektor odpowiedzi w czasie  $t_k + \Delta t_3$ :

$$\{y(t_k + \Delta t_3)\} = \sum_{i=1}^{2N} \{\psi\}_i e^{\lambda_i \Delta t_3} e^{\lambda_i t_k} = \sum_{i=1}^{2N} \{\bar{\psi}\}_i e^{\lambda_i t_k}, \quad (86)$$

gdzie:

$$\{\bar{\psi}\}_i = \{\psi\}_i e^{\lambda_i \Delta t_3}, \quad (87)$$

a zatem przesunięcie czasowe mnoży wektor  $\{\psi\}_i$  przez skalar  $e^{\lambda_i \Delta t_3}$ . Z opóźnionych odpowiedzi można utworzyć macierz  $N \times 2N$ , podobnie jak we wzorze (84):

$$[\bar{y}] = [\bar{\psi}][A]. \quad (88)$$

Składając równania (84) oraz (88), otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} [y] \\ [\bar{y}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\psi] \\ [\bar{\psi}] \end{bmatrix} [A], \quad (89)$$

lub inaczej:

$$[\phi] = [\Psi][A]. \quad (90)$$

Stosując opóźnienie czasowe  $\Delta t_1$  do równania (90), otrzymujemy nową macierz  $[\hat{\phi}]$  o rozmiarze  $2N \times 2N$ :

$$[\hat{\phi}] = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y(t_k + \Delta t_1)] \\ [y(t_k + \Delta t_3 + \Delta t_1)] \end{bmatrix}, \quad (91)$$

czyli:

$$[\hat{\phi}] = [\Psi]diag[\alpha][A], \quad (92)$$

gdzie:

$$\alpha_i = e^{\lambda_i \Delta t_1}. \quad (93)$$

Przekształcając równanie (92) i podstawiając do (90) można wyeliminować z równania (90) macierz  $[A]$ :

$$[\hat{\phi}][\phi]^{-1}[\Psi] = [\Psi]diag[\alpha]. \quad (94)$$

Jeśli podstawimy:

$$[A] = [\hat{\phi}][\phi]^{-1}, \quad (95)$$

otrzymamy:

$$[A]\{\Psi\} = \alpha\{\Psi\}, \quad (96)$$

co jest równaniem własnym. Dla wartości własnej  $\alpha_i$  równania (96), która typowo jest liczbą zespoloną, niech:

$$\alpha_i = \beta_i + j\gamma_i. \quad (97)$$

Jeśli  $\alpha_i$  odpowiada pierwiastkowi charakterystycznemu  $\lambda_i$ , który ma postać:

$$\lambda_i = a_i + jb_i, \quad (98)$$

a zgodnie z równaniem (93):

$$\alpha_i = e^{\lambda_i \Delta t_1}, \quad (99)$$

zatem:

$$a_i = \frac{1}{2\Delta t_1} \ln(\beta_i^2 + \gamma_i^2) \quad (100)$$

oraz:

$$b_i = \frac{1}{\Delta t_1} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_i}{\beta} \right). \quad (101)$$

W takim wypadku,  $b_i$  jest częstością drgań tłumionych  $(\omega_d)_i$ :

$$b_i = (\omega_d)_i = (\omega_0)_i \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (102)$$

oraz:

$$a_i = -(\omega_n)_i \zeta_i, \quad (103)$$

gdzie  $\zeta_i$  jest  $i$ -tym współczynnikiem tłumienia. Zatem: obliczyć można  $i$ -tą częstość drgań własnych oraz  $i$ -ty współczynnik tłumienia:

$$(\omega_0)_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (104)$$

oraz:

$$\zeta_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}. \quad (105)$$

Metoda *Ibrahim Time Domain* z powodzeniem jest używana do identyfikacji dużych układów, zarówno liniowych [183], jak i nieliniowych [184]. Literatura przedstawia zastosowania również dla przypadku układów pobudzanych wymuszeniem losowym [185], a nie tylko układów o drganiach swobodnych. Metoda została również zmodyfikowana w celu lepszej identyfikacji układów, gdzie częstości drgań własnych są blisko położone [186].

### 7.3 Metoda *Least Square Complex Exponential*, LSCE

Metoda *Least Square Complex Exponential* [180] działa w dziedzinie czasu i opiera się na opisanu związku pomiędzy sygnałem IRF – *Impulse Response Function*, a zespolonymi biegunami układu, przy pomocy zespolonego równania wykładniczego. Dzięki temu, możliwe jest stworzenie modelu matematycznego układu dynamicznego. W metodzie tej wykorzystywany jest wielomian, którego pierwiastkami są zespolone pierwiastki układu dynamicznego. Po oszacowaniu pierwiastków (a zarazem częstotliwości drgań własnych oraz współczynników tłumienia), możliwe jest oszacowanie postaci drgań własnych [187].

LSCE wykorzystuje funkcję IRF:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{2N} (A_{ij})_r e^{s_k t}. \quad (106)$$

W przypadku próbkowania IRF w równych odstępach, uzyskujemy wektor:

$$h_k = \sum_{k=1}^{2N} (A_{ij})_r z_r^k a(k=0,1,\dots,2N) a z_r^k = e^{s_r k \Delta}. \quad (107)$$

Wszystkie próbki  $h$  są wartościami rzeczywistymi, mimo że residua  $(A_{ij})_r$  oraz pierwiastki  $s_r$  są liczbami zespolonymi. Kolejnym krokiem jest estymacja pierwiastków i residuów. Pierwiastki  $z_r$  są pierwiastkami wielomianu o rzeczywistych współczynnikach:

$$\beta_0 + \beta_1 z_r + \beta_2 z_r^2 + \dots + \beta_{2N} - 1 z_r^{2N-1} + \beta_{2N} z_r^{2N} = 0. \quad (108)$$

Współczynniki mogą zostać oszacowane na podstawie danych z IRF. Jako że zbiór równań *IRF* zawiera  $2N + 1$  równań, mogą zostać przemnożone przez odpowiedni współczynnik  $\beta$ , dzięki czemu można uzyskać równanie:

$$\sum_{k=0}^{2N} \beta_k h_k = \sum_{k=0}^{2N} (A_{ij})_r \sum_{k=0}^{2N} \beta_k z_r^k. \quad (109)$$

Prawa strona równania (108) będzie równa zero, gdy  $z_r$  jest pierwiastkiem równania wielomianowego (108). Dzięki temu, uzyskać można zależność:

$$\sum_{k=0}^{2N} \beta_k h_k = 0. \quad (110)$$

Pozwala to na oszacowanie współczynników  $\beta$ . Równanie (110) układane jest na podstawie jednego zbioru  $2N$  próbek IRF. Przy  $2N$  zbiorów po  $2N$  próbek, można utworzyć układ równań:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \dots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Liczba wierszy w równaniu (111) może być większa od liczby współczynników  $\beta$  – w takim przypadku dostajemy najlepsze dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów. Znając współczynniki  $\beta$  można rozwiązać równanie (108) w celu otrzymania pierwiastków  $z_r$ . Na ich podstawie obliczyć można zespolone częstotliwości własne  $s_r$ , dzięki którym wyznaczyć można częstotliwości drgań własnych układu oraz współczynniki tłumienia, dzięki zależnościom:

$$s_r = -\zeta_r \omega_{0r} + j\omega_{0r} \sqrt{1 - \zeta_r^2}, \quad (112)$$

$$s_r^* = -\zeta_r \omega_{0r} - j\omega_{0r} \sqrt{1 - \zeta_r^2}, \quad (113)$$

gdzie  $s_r^*$  oznacza liczbę zespoloną sprzężoną z  $s_r$ .  $r$ -tą częstotliwość drgań własnych i  $r$ -ty współczynnik tłumienia można obliczyć z zależności:

$$\omega_{0r} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\ln(z_r) \ln(z_r^*)} \quad (114)$$

$$\zeta_r = \frac{-\ln(z_r z_r^*)}{2\omega_r \Delta}. \quad (115)$$

Metoda *Least Square Complex Exponent* jest stosowana, po modyfikacjach, w wielu dziedzinach. Przykładami jest analiza modalna różnorodnych obiektów, np. pomp podwodnych [188], instrumentów muzycznych [189], konstrukcji lądowych [190], centrów obróbkowych [14], opon pojazdów ciężarowych [191], silników lotniczych [192], skrzydeł samolotów [193], turbin wiatrowych [194], a nawet jabłek [195].



## 7.4 Metoda *Eigensystem Realization Algorithm*, ERA

W przeszłości, modele strukturalne obiektów technicznych tworzone były przez inżynierów na podstawie danych geometrycznych i materiałowych, na przykład przy użyciu metody elementów skończonych. Parametry utworzonego modelu MES dobierane mogą być na przykład na podstawie danych eksperymentalnych. Juang i Pappa [181] wskazali jednak, że dla potrzeb sterowania drganiami elastycznych struktur, powyższe podejście może być niewystarczająco dokładne i zaproponowali alternatywne – tworzenie modelu bezpośrednio na podstawie danych doświadczalnych. Metoda *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) polega na skonstruowaniu modelu najniższego rzędu, który dobrze opisuje dynamikę układu doświadczalnego. Obiekt, rozumiany jest jako dyskretny (czyli o skończonej liczbie stopni swobody), dyskretny w czasie (co oznacza, że dane doświadczalne są próbkowane), liniowy układ dynamiczny, który może zostać opisany równaniami stanu [196]:

$$x(k + 1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (116)$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k), \quad (117)$$

gdzie:

- $x$  jest wektorem stanu o wymiarach 1 na  $n$ ,
- $u$  jest wektorem sygnału wejściowego (wejścia) o wymiarach 1 na  $m$ ,
- $y$  jest wektorem odpowiedzi układu (wyjścia) o wymiarach 1 na  $p$ ,
- $k$  jest indeksem próbki,
- $\mathbf{A}$  to macierz stanu (podstawowa, fundamentalna), opisuje dynamikę układu sterowania, macierz o wymiarach  $n$  na  $n$ ,
- $\mathbf{B}$  to macierz wejścia (sterowania), opisuje oddziaływanie sterowania na układ sterowania, macierz o wymiarach  $n$  na  $m$ ,
- $\mathbf{C}$  to macierz wyjścia (odpowiedzi), opisuje w jaki sposób zmienne stanu są transformowane na zmienne wyjścia, macierz o wymiarach  $p$  na  $n$ .

Opisane powyżej macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  tworzone są na podstawie danego wektora  $y(k)$ .

Przy założeniu sygnału impulsowego oraz zerowego stanu początkowego układu ( $u_0 = 1$ ,  $u_k = 1$  dla  $k > 0$ ,  $x_0 = 0$ ) można zapisać kilka pierwszych wartości wektora stanu oraz wektora wyjścia:

$$x_0 = 0, x_1 = Ax_0 + B = B, x_2 = Ax_1 = AB, x_3 = Ax_2 = A^2B, \dots \quad (118)$$

$$y_0 = 0, y_1 = CB, y_2 = CAB, \dots \quad (119)$$

Parametry w równaniu (119) są zwane parametrami Markova i mają ogólną postać:

$$y(k) = CA^{k-1}B. \quad (120)$$

Tworzona jest macierz Hankela parametrów Markova:

$$H_1 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_2 & y_3 & \dots & y_{n+1} \\ y_3 & y_4 & \dots & y_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_{n+1} & \dots & y_{n+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^n B \\ CAB & CA^2 B & \dots & CA^{n+1} B \\ CA^2 B & CA^3 B & \dots & CA^{n+2} B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^n B & CA^{n+1} B & \dots & CA^{n+k} B \end{bmatrix}. \quad (121)$$

Macierz Hankela może być też zdefiniowana jako:

$$H_1 = O_p C_p, \quad (122)$$

gdzie:

$$O_p = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix} \text{ oraz} \quad (123)$$

$$C_p = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^n B]. \quad (124)$$

Macierz  $O_p$  nazywana jest macierzą obserwowalności, a macierz  $C_p$  — macierzą sterowalności. W celu obliczenia macierzy obserwowalności i sterowalności, dokonać można rozkładu na wartości osobliwe:

$$H_1 = U\Gamma^2 V^T, \quad (125)$$

co pozwala uzyskać nową macierz obserwowalności  $P$  i nową macierz sterowalności  $Q$ :

$$P = U\Gamma, \quad (126)$$

$$Q = \Gamma V^T, \quad (127)$$

a zatem:

$$H_1 = PQ. \quad (128)$$

Analogicznie jak we wzorze (121), uzyskać można przesuniętą macierz Hankela  $H_2$ , gdzie pierwszym elementem będzie  $y_2$ , a obowiązywać będzie wzór:

$$H_2 = O_p A C_p \quad (129)$$

a zatem:

$$A = Q_p^{-1} H_2 C_p^{-1}. \quad (130)$$

Przy pomocy nowej macierzy obserwowalności można wyznaczyć estymowaną macierz stanu  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} = P^{-1} H_2 Q^{-1}, \quad (131)$$

a estymowane macierze wejścia  $\hat{B}$  i wyjścia  $\hat{C}$  są pierwszymi elementami macierzy  $P$  i  $Q$ :

$$P = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ CA \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix} \quad (132)$$

oraz

$$Q = [\hat{B} \ AB \ A^2B \ \dots \ A^nB]. \quad (133)$$

Otrzymujemy zatem pożądany opis układu w postaci równań stanu:

$$x(k+1) = \hat{A}x(k) + \hat{B}u(k) \quad (134)$$

$$y(k) = \hat{C}x(k). \quad (135)$$

Rozwiązując zagadnienie własne:

$$Av = \lambda v, \quad (136)$$

uzyskujemy wektor wartości własnych układu  $A$  i wektory własne  $V$ :

$$A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (137)$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}. \quad (138)$$

Należy pamiętać, że wartości własne dotyczą układu dyskretnego, a wartości własne układu ciągłego  $\lambda_{c(i)}$  można obliczyć ze wzoru:

$$\lambda_{c(i)} = \frac{\ln(\lambda_i)}{dt}. \quad (139)$$

Na podstawie tych wartości można obliczyć postacie drgań własnych:

$$y_k = \hat{\mathbf{C}}u_k, \quad (140)$$

oraz dzięki zależności między wartościami własnymi (biegunami) a częstością drgań własnych i współczynnikiem tłumienia:

$$\lambda_{c(i)} = \left( -\zeta_i + j\sqrt{1 - \zeta_i^2} \right) \omega_{0i}, \quad (141)$$

obliczyć można te ostatnie:

$$\omega_{0i} = |\lambda_{c(i)}| \quad (142)$$

$$\zeta_i = \frac{\operatorname{Re}(\lambda_{c(i)})}{|\lambda_{c(i)}|}. \quad (143)$$

Autorzy [181] udowadniają również, że można zmodyfikować metodę tak, aby działała na danych wyjściowych nie tylko pobudzenia impulsowego, ale również dowolnego zmierzonego sygnału wejściowego. Metoda ERA zyskała zastosowanie m.in. w inżynierii kosmicznej [197], budowie maszyn [198] czy inżynierii lądowej [199].

## 7.5 Metoda *Peak Picking*, PP

Metoda *Peak Picking* [182], zwana również metodą *Half Power* [200], jest najprostszą metodą identyfikacji parametrów modalnych na podstawie danych wyjściowych z układu. Zakłada ona, że w pobliżu częstości drgań własnych, układ można aproksymować przy pomocy oscylatora o jednym stopniu swobody, a także, że w tym obszarze, odpowiedź częstotliwościowa układu FRF (patrz podrozdział 2.3) będzie miała ekstremum (co najmniej lokalne).

Określenie „w pobliżu częstości drgań własnych”, oznacza, że częstość wymuszenia  $\omega$  jest bliska częstości drgań własnych  $\omega_0$ :

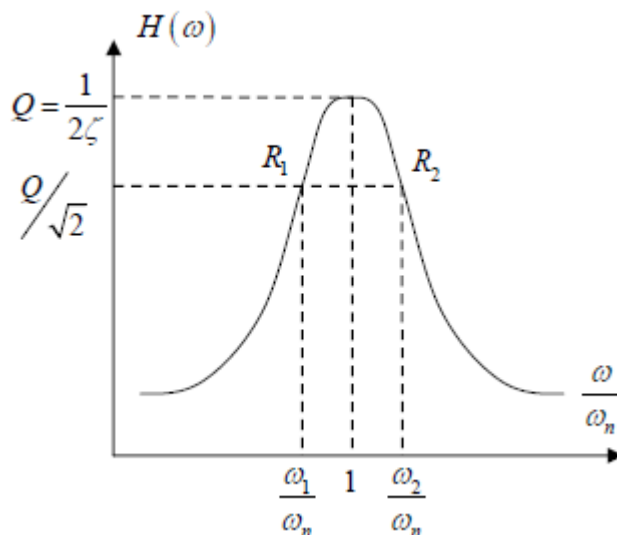
$$\omega \approx \omega_0. \quad (144)$$

Przy takim założeniu, definicja odpowiedzi częstotliwościowej układu (patrz wzór (50)), znacząco się upraszcza:



$$H(\omega) \approx \frac{1}{2\zeta} = Q. \quad (145)$$

W tej metodzie, przy pomocy wykresu wyznacza się punkty  $R_1$  i  $R_2$ , w których funkcja odpowiedzi częstotliwościowej osiąga połowę mocy maksymalnej  $Q$  (a zatem wartość maksymalna wynosi  $\frac{Q}{\sqrt{2}}$ ). Zostało to przedstawione na rysunku 29.



Rysunek 29. Identyfikacja współczynnika tłumienia metodą *peak picking* [182].

Punkty  $R_1$  i  $R_2$  pozwalają na obliczenie pasma  $\Delta\omega$ , które definiowane jest jako:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (146)$$

gdzie  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$  można obliczyć z następującego wzoru:

$$H(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\zeta\sqrt{2}}, \quad (147)$$

a zatem:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{1,2}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\zeta\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0})^2}} = \frac{1}{\zeta\sqrt{2}}. \quad (148)$$

Zgodnie z [182]:

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 4\zeta\omega_0^2, \quad (149)$$

a zatem:

$$(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1) = 4\zeta\omega_0^2. \quad (150)$$

Z rysunku 29 wynika, że:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0. \quad (151)$$

Po podstawieniu wzoru (151) do (150) uzyskujemy:

$$2\omega_0(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_0^2, \quad (152)$$

co po przekształceniu pozwala obliczyć współczynnik tłumienia:

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0}. \quad (153)$$

W pozycji [5] podsumowano wady tej metody:

- metoda zależy od wartości szczytowej funkcji odpowiedzi częstotliwościowej, którą trudno dokładnie zmierzyć;
- współczynnik tłumienia szacowany jest na podstawie tylko dwóch punktów ( $R_1$  i  $R_2$ ), które typowo muszą zostać interpolowane na podstawie sąsiednich punktów, co dodatkowo zmniejsza dokładność metody;
- jest podatna na błędy wywołane szumem;
- założenie, że zachowanie układu przypomina zachowanie układu o jednym stopniu swobody w pobliżu częstości drgań własnych nie jest dobrze spełnione w przypadku dwóch (lub więcej) częstości w pobliżu siebie, gdyż ich postacie również wpływają na wartość FRF w tym miejscu.

Mimo wielu istotnych wad, metoda jest często stosowana gdy np. nie jest wymagana duża dokładność wyników oraz jako metoda określania wartości początkowych dla dokładniejszych metod poszukiwań, np. w publikacji [201]. Często też jest wykorzystywana przy porównywaniu metod identyfikacji, np. [16], [202].

## 7.6 Metoda *Least Squares Rational Function*, LSRF

Metoda LSRF [203], znana jest również jako *polyreference Least Squares Complex Frequency Domain*, p-LSCF [204] lub pod nazwą *PolyMAX* w środowisku *LMS Test.Lab* [205]. Wykorzystuje ona przedstawienie odpowiedzi częstotliwościowej układu FRF,



$H_{ij}(\Omega)$  za pomocą ułamków wielomianowych o wspólnym mianowniku  $A(\Omega)$ , różnych licznikach  $B_{ij}(\Omega)$ , zależnych od  $j$ -tego stopnia swobody wejścia i  $i$ -tego stopnia swobody wyjścia:

$$H_{ij}(\Omega) = \frac{B_{ij}(\Omega)}{A(\Omega)}. \quad (154)$$

LSRF identyfikuje zespolone współczynniki wielomianu wspólnego mianownika  $A(\Omega)$  i wielomianów liczników  $B_{ij}(\Omega)$  na podstawie FRF. Następnie bieguny układu są identyfikowane na podstawie pierwiastków równania  $A(\Omega) = 0$ .

Jeśli rozważymy FRF jako  $K$  dyskretnych próbek, korzystając z transformaty Z [206]:

$$z_k = e^{j\Omega_k \Delta t}, k = 0, 1, \dots, K, \quad (155)$$

możemy otrzymać:

$$H_{ij}(\Omega) = \frac{B_{ij}(z_k)}{A(z_k)}. \quad (156)$$

Autorzy [5] wyprowadzają wzór na ważony błąd szacowania  $E_{ij}(\Omega_k)$ :

$$w_{ij}(\Omega_k)E_{ij}(\Omega_k) = A(z_k)H_{ij}(\Omega_k) - B_{ij}(z_k), \quad (157)$$

a zatem:

$$E_{ij}(\Omega_k) = \frac{1}{w_{ij}(\Omega_k)} \left( A(z_k)H_{ij}(\Omega_k) - B_{ij}(z_k) \right). \quad (158)$$

Podają również, że w praktycznych zastosowaniach, wartości współczynników  $w_{ij}(\Omega_k)$  są równe jedności lub wielkości FRF dla danej częstotliwości  $\Omega_k$ :

$$w_{ij}(\Omega_k) = |H_{ij}(\Omega_k)|, \quad (159)$$

tak aby zwiększyć wagę w procesie identyfikacji punktów FRF w pobliżu częstości drgań własnych. Wielomiany  $A(z_k)$  i  $B_{ij}(z_k)$  są zespolonymi funkcjami zmiennej  $z_k$  z zespolonymi współczynnikami  $a_n$  i  $b_{ij(n)}$ :

$$A(z_k) = \sum_{n=0}^N a_n z_k^n = a_0 + a_1 z_k + a_2 z_k^2 + \dots + a_N z_k^N, \quad (160)$$

$$B_{ij}(z_k) = \sum_{n=0}^N b_{ij(n)} z_k^n = b_{ij0} + b_{ij1} z_k + b_{ij2} z_k^2 + \dots + b_{ijN} z_k^N. \quad (161)$$

Rząd  $N$  wielomianu jest rzędem modelu, a zatem oczekiwaną liczbą stopni swobody docelowego modelu układu.

Przy rozważaniu sygnałów FRF z różnych punktów pomiarowych  $i = 1, \dots, I$  oraz różnych pobudzeń  $j = 1, \dots, J$ , zdefiniować można funkcję skalarną błędów średniokwadratowych między estymowanym analitycznym FRF a mierzonym:

$$\epsilon(\{\theta\}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^K |E_{ij}(\Omega_k)|^2. \quad (162)$$

Funkcja ta jest zmienną wektora parametrycznego  $\{\theta\}$ , który zawiera współczynniki wielomianów licznika i mianownika:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\beta_{ij}\} \\ \vdots \\ \{a\} \end{Bmatrix}, a\{\beta_{ij}\} = \begin{Bmatrix} b_{ij(0)} \\ b_{ij(1)} \\ \vdots \\ b_{ij(N)} \end{Bmatrix}, a\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix}. \quad (163)$$

Identyfikacja zespolonych współczynników może zostać osiągnięta na zasadzie minimalizacji funkcji błędu opisanej równaniem (162). W metodzie LSRF stosuje się aproksymację pierwszego rzędu szeregiem Taylora i wówczas problem przybiera postać:

$$[J]\{\theta\} = \{0\}. \quad (164)$$

Macierz  $[J]$  oznacza jacobian (macierz Jakobiego) zawierający pochodne cząstkowe funkcji błędu  $\epsilon(\{\theta\})$  względem parametrów zawartych w wektorze  $\{\theta\}$ . Cauberghe [207] podał wzór na macierz Jakobiego:

$$J = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 & \vdots & 0 & Y_1 \\ 0 & \kappa_2 & \vdots & 0 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_{N_0} & Y_{N_0} \end{bmatrix}, \quad (165)$$

gdzie:

$$\kappa_i = \begin{bmatrix} \Gamma_{o1} & 0 & \vdots & 0 & \Xi_{o11} & \vdots & \Xi_{o1N_b} \\ 0 & \Gamma_{o2} & \vdots & 0 & \Xi_{o12} & \vdots & \Xi_{o2N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \Gamma_{oN_i} & \Xi_{oN_i1} & \vdots & \Xi_{oN_iN_b} \end{bmatrix}, \quad (166)$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} \rho_{o1} \\ \vdots \\ \rho_{oN_i} \end{bmatrix}, \quad (167)$$



a:

$$\mathbf{\Gamma}_{oi} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{w_{oi}(\omega_1)} [1 \ z_1 \ \dots \ z_1^n] \\ \frac{1}{w_{oi}(\omega_2)} [1 \ z_2 \ \dots \ z_2^n] \\ \vdots \\ \frac{1}{w_{oi}(\omega_N)} [1 \ z_N \ \dots \ z_N^n] \end{bmatrix}, \quad (168)$$

$$\mathbf{\rho}_{oi} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{w_{oi}(\omega_1)} H_{oi}(\omega_1) [1 \ z_1 \ \dots \ z_1^n] \\ \frac{1}{w_{oi}(\omega_2)} H_{oi}(\omega_2) [1 \ z_2 \ \dots \ z_2^n] \\ \vdots \\ \frac{1}{w_{oi}(\omega_N)} H_{oi}(\omega_N) [1 \ z_N \ \dots \ z_N^n] \end{bmatrix}, \quad (169)$$

$$\mathbf{\Xi}_{oib} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{w_{oi}(\omega_1)} F_{bi}^t(\omega_1) [1 \ z_1 \ \dots \ z_1^n] \\ \frac{1}{w_{oi}(\omega_2)} F_{bi}^t(\omega_2) [1 \ z_2 \ \dots \ z_2^n] \\ \vdots \\ \frac{1}{w_{oi}(\omega_N)} F_{bi}^t(\omega_N) [1 \ z_N \ \dots \ z_N^n] \end{bmatrix}. \quad (170)$$

Przekształcając równanie (164), można uzyskać zależność pomiędzy współczynnikami licznika  $\{\beta_{ij}\}$  i mianownika  $\{\alpha\}$  w postaci:

$$\{\beta_{ij}\} = [T_{ij}]\{\alpha\}, \quad (171)$$

gdzie macierz  $[T_{ij}]$  można otrzymać odpowiednio przekształcając Jakobian (165). Podstawiając równanie (171) do definicji macierzy  $\{\theta\}$  (163), uzyskujemy:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\beta_{ij}\} \\ \vdots \\ \{\alpha\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ [T_{ij}] \\ \vdots \\ [I] \end{bmatrix} \{\alpha\}. \quad (172)$$

Podstawiając równanie (172) do (164), uzyskujemy równanie w formie:

$$[D]\{\alpha\} = \{0\}, \quad (173)$$

co pozwala wyznaczyć współczynniki  $\{\alpha\}$ , a po podstawieniu do wzoru (171), również współczynniki  $\{\beta_{ij}\}$ . Wyznaczone współczynniki  $a_n$  pozwalają na wyznaczenie pierwiastków  $z_k$  wspólnego wielomianu  $A(z_k)$ :

$$A(z_k) = a_0 + a_1 z_k + a_2 z_k^2 + \dots + a_N z_k^N = 0. \quad (174)$$

Wyznaczywszy pierwiastki  $z_k$ , można obliczyć bieguny układu:

$$\lambda_k = \frac{1}{\Delta t} \ln(z_k), \quad (175)$$

a następnie, podobnie jak w metodzie ERA, wyznaczyć częstotści drgań własnych oraz współczynniki tłumienia:

$$\omega_{0k} = |\lambda_k|, \quad (176)$$

$$\zeta_k = \frac{\operatorname{Re}(\lambda_k)}{|\lambda_k|}. \quad (177)$$

Böswald et al. [208] opisując zalety metody LSRF w stosunku do LSCE wskazują między innymi mniejszą czułość na zakłócenia w danych wejściowych.

## 7.7 Transformata Hilberta

Transformata Hilberta znajduje szereg zastosowań praktycznych w inżynierii, np.: [209]–[212]. Na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat, w różnych modyfikacjach z powodzeniem używana była do identyfikacji parametrów modalnych, zarówno dla układów liniowych [213]–[215] jak i nieliniowych [216].

Transformata Hilberta  $\hat{g}(t)$  funkcji  $g(t)$  oraz transformata do niej odwrotna są zdefiniowane następująco:

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (178)$$

$$\hat{g}^{-1}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (179)$$

Jest to spłot funkcji  $g(t)$  z funkcją  $h(t)$ :

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}. \quad (180)$$

Transformata Hilberta jest przekształceniem liniowym i dla dowolnego sygnału, jego widmo amplitudowe jest takie samo jak widmo amplitudowe jego transformaty.

Pokrewnym pojęciem jest sygnał analityczny  $g_+(t)$ , sygnału rzeczywistego (czyli takiego, którego elementy są liczbami rzeczywistymi)  $g(t)$ . Sygnał analityczny

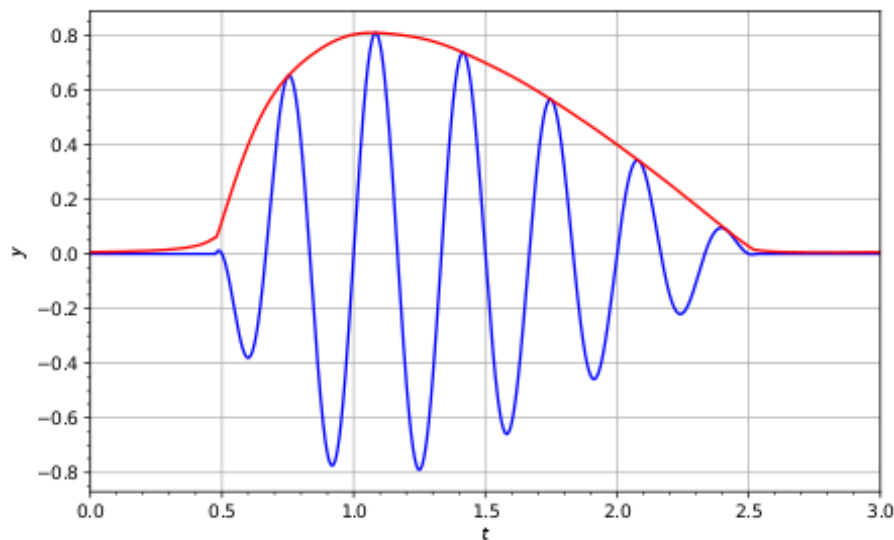
jest sygnałem zespolonym, którego część rzeczywistą stanowi pierwotny sygnał  $g(t)$ , a część urojona, transformata Hilberta  $\hat{g}(t)$  sygnału  $g(t)$ :

$$g_{+a}(t) = g(t) + j \cdot \hat{g}(t). \quad (181)$$

Wartość bezwzględna sygnału analitycznego  $g_{+a}(t)$  nazywana jest amplitudą chwilową lub obwiednią (ang. *envelope*)  $e(t)$  sygnału:

$$e(t) = |g_{+a}(t)|. \quad (182)$$

Na rysunku 30 pokazano przykładowy sygnał wraz z jego obwiednią.



Rysunek 30. Sygnał (niebieski) wraz z obwiednią (czerwony).

Szereg metod korzysta z przedstawionej powyżej metody otrzymywania obwiedni sygnału do identyfikacji parametrów modalnych (w szczególności współczynnika tłumienia) na podstawie obwiedni odpowiedzi impulsowej układu swobodnego. Szczegóły opisu matematycznego tej metody zostały opisane w podrozdziale 8.2.

## 7.8 Podsumowanie

W literaturze dostępnych jest kilka przeglądów metod identyfikacji porównujących ich wady oraz zalety na konkretnych zbiorach, na przykład [5]. Kaliński [14] opisuje zastosowanie wyżej wymienionych metod do nadzorowania drgań w procesach obróbkowych. Reynders [217] wykonał liczne symulacje metodą Monte Carlo w celu porównania dokładności kilku wybranych metod. Autorzy [218] podają

praktyczne wskazówki dotyczące doboru metody identyfikacji. Zidentyfikowano również podobieństwa wybranych metod w szczególnych przypadkach [219].

Galewski [16] wykorzystał opisane w tym rozdziale metody identyfikacji parametrów modalnych jako odniesienie wobec własnej metody opartej na sztucznej inteligencji rojów. Podobnie postąpiono w rozdziale 8, gdzie zaproponowano własną metodę identyfikacji opartą na transformacie Hilberta i metodach optymalizacji matematycznej oraz porównano jej skuteczność z innymi metodami opisanymi w rozdziale dla danych doświadczalnych, specyficznych dla stanowiska badawczego opisywanego w niniejszej pracy.

## 8 Autorska metoda identyfikacji parametrów modalnych

### 8.1 Wstęp

W ramach badań opisanych w niniejszej pracy, opracowano własną metodę identyfikacji opartą na transformacie Hilberta oraz metodach optymalizacji matematycznej. W tym rozdziale przedstawione zostały założenia metody, wyniki testów na obiekcie symulowanym wraz z zakłóceniami. Metoda została porównana z innymi, opisanymi w rozdziale 7. Zostały również wyciągnięte wnioski w oparciu o charakterystykę układu rzeczywistego stanowiska doświadczalnego opisanego w rozdziale 9.

### 8.2 Podstawy matematyczne

W podrozdziale 2.2 wykazano, że równanie ruchu drgającego dla ciała o jednym stopniu, można zapisać w formie równania (29):

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\omega_0 \zeta t} \cos(\omega_0 \cdot \sqrt{(1 - \zeta^2)} \cdot t). \quad (183)$$

Dla takiego sygnału, obwiednią, będzie funkcja wykładnicza:

$$o(t) = A_0 \cdot e^{-\omega_0 \zeta t}. \quad (184)$$

Po podstawieniu:

$$A_1 = \omega_0 \zeta, \quad (185)$$

otrzymujemy:

$$o(t) = A_0 \cdot e^{-A_1 t}, \quad (186)$$

czyli funkcję eksponencjalną, zależną od dwóch parametrów:  $A_0$  – parametr skalujący oraz  $A_1$  – parametr skalujący wykładnik. Wyznaczenie parametru  $A_1$ , przy znanej częstotliwości drgań własnych (wyznaczonej na przykład przy pomocy innej metody), pozwala obliczyć współczynnik tłumienia (przekształcony wzór):

$$\zeta = \frac{A_1}{\omega_0}. \quad (187)$$

W podrozdziale 7.7 pokazano, że obwiednię sygnału  $e(t)$ , można uzyskać stosując sygnał analityczny  $g_+(t)$  sygnału rzeczywistego  $g(t)$ :

$$e(t) = |g(t) + j \cdot \hat{g}(t)|, \quad (188)$$

gdzie  $\hat{g}(t)$  oznacza transformatę Hilberta sygnału  $g(t)$ . Zadanie identyfikacji współczynnika tłumienia  $\zeta$ , a zatem współczynnika  $A_1$  można potraktować jako zagadnienie optymalizacji funkcji błędu. Funkcja błędu zostanie tutaj zdefiniowana jako różnica pomiędzy dopasowaną obwiednią sygnału a sygnałem analitycznym, a optymalny współczynnik  $A_{1opt}$  jako:

$$A_{1opt} = \underset{A_0, A_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{minarg}} |o(t) - e(t)| = \underset{A_0, A_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{minarg}} |A_0 \cdot e^{-A_1 t} - |g(t) + j \cdot \hat{g}(t)||. \quad (189)$$

Tak zdefiniowane zadanie optymalizacyjne można rozwiązać wieloma metodami. Przegląd kilku z nich zawarto w pracy [220]. W tej pracy zastosowano implementację algorytmu sympleksowego Nelder-Meada [221] oprogramowanego w funkcji `fminsearch()` środowiska Matlab [222].

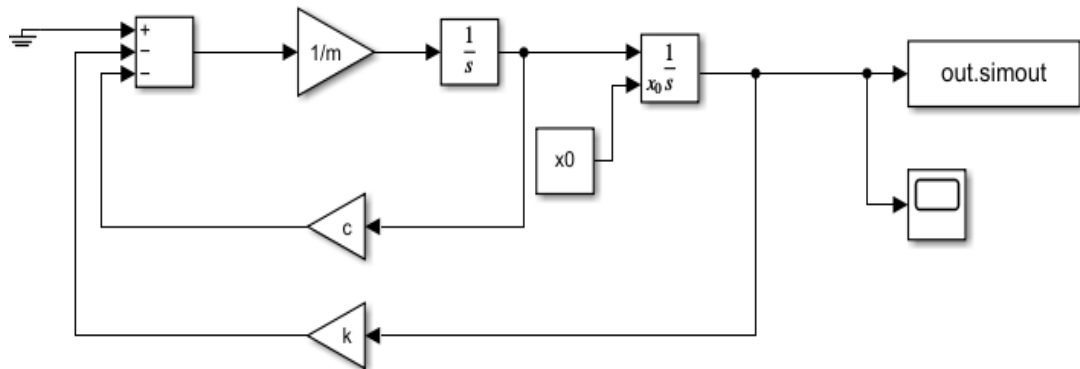
Metoda Nelder-Meada, zwana również sympleksową metodą spadku to popularna metoda optymalizacji opisana po raz pierwszy w 1965 r. Metoda ta pozwala na znalezienie minimum funkcji wielowymiarowych. Polega na wybraniu sympleksu (w przestrzeni dwuwymiarowej jest to trójkąt) z punktów funkcji dwóch zmiennych i sprawdzenia kątów nachylenia jego boków. Dużą zaletą tej metody jest fakt, że nie wymaga wyznaczania pochodnych funkcji celu (jak niektóre inne metody optymalizacji), co mogłoby pochłonąć duże zasoby obliczeniowe i może być trudne dla przypadków, gdy analityczny opis tej funkcji nie jest znany.

### 8.3 Obiekt symulowany

W celu zweryfikowania poprawności działania metody, utworzony został w programie Matlab/Simulink model prostego układu o jednym stopniu swobody (por. równanie (6)) z zakłóceniem sygnału pomiarowego przemieszczenia  $x_m(t)$  szumem białym. Wartości współczynników dobrano tak, by uzyskać układ słabo tłumiony:

$$m = 1 \text{ kg}, c = 1 \text{ Ns/m}, k = 50 \text{ N/m}, x_0 = 1 \text{ m}. \quad (190)$$

Schemat układu w programie Simulink przedstawiono na rysunku 31.

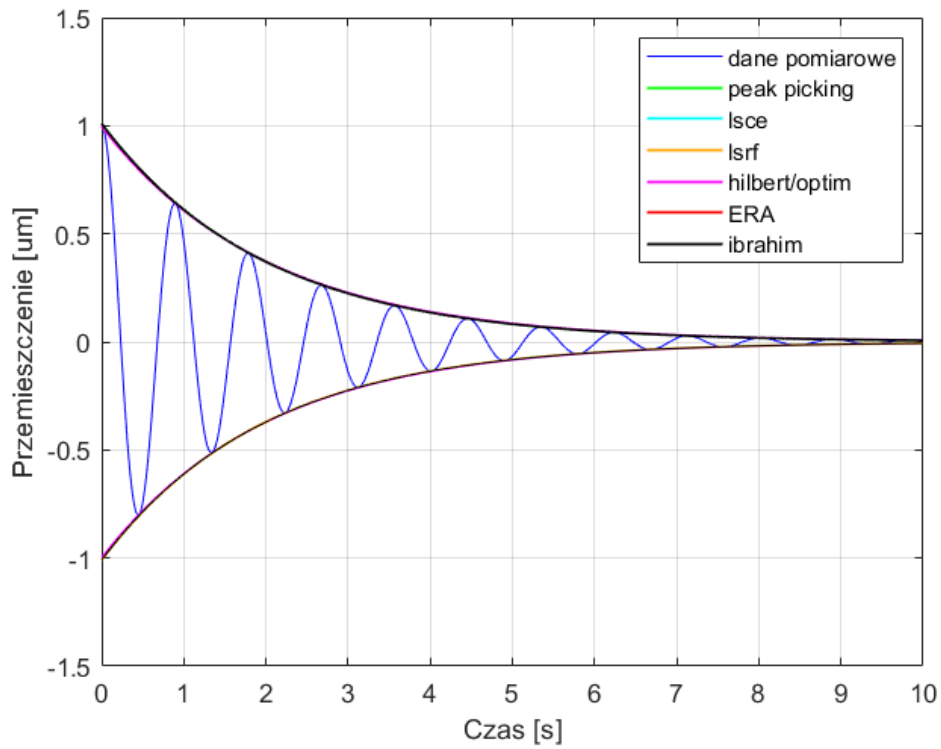


Rysunek 31. Model obiektu testowego o jednym stopniu swobody w programie Simulink.

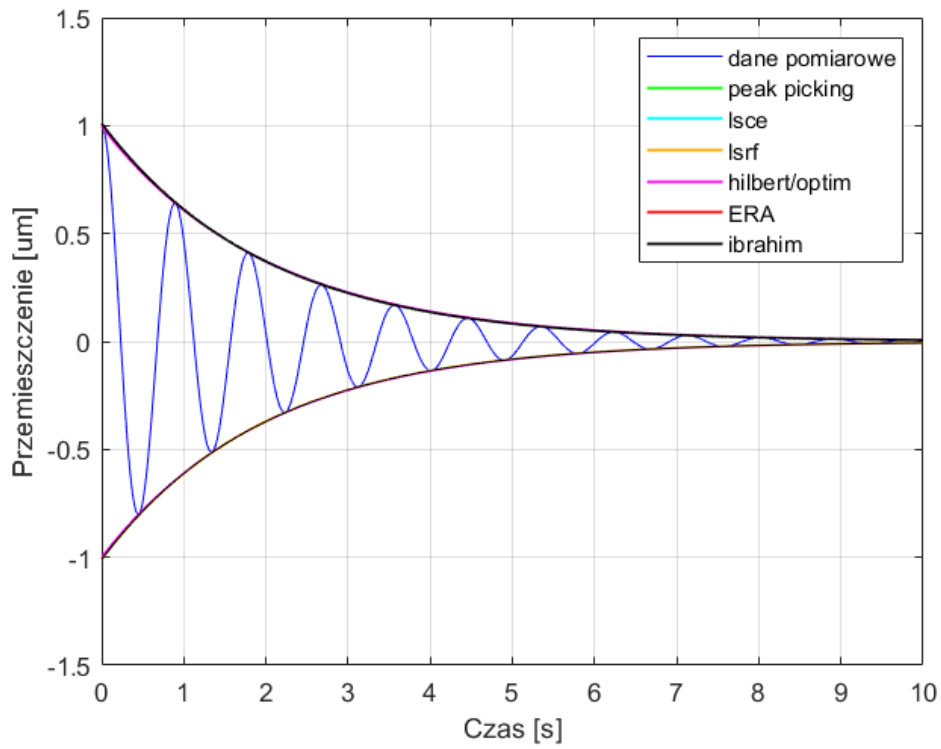
Działanie metody zbadano dla sygnału odpowiedzi impulsowej układu z dodanymi wartościami:

- 0% szumu,
- 1% szumu (ang. *Signal to noise ratio*, SNR = 99),
- 5% szumu (SNR = 19),
- 10% szumu (SNR = 9).

Przebiegi sygnałów z szumem, dla większej czytelności przedstawiono na osobnych rysunkach 32-35. Na rysunkach zaznaczono obwiednię zidentyfikowaną przez algorytm w celu jakościowej analizy działania algorytmu.

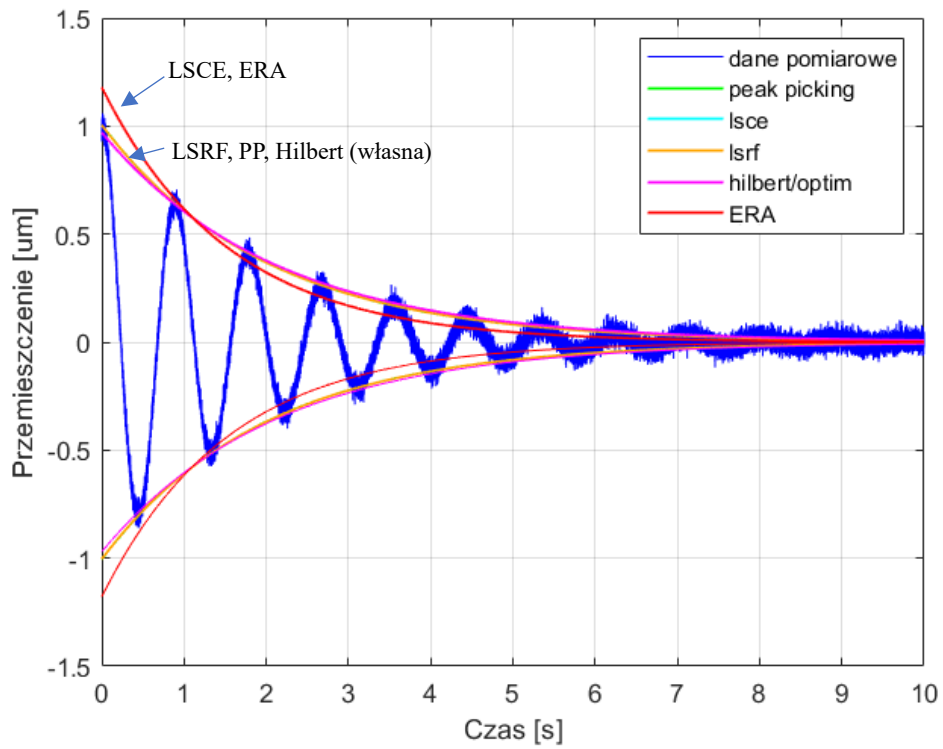


Rysunek 32. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 0% szumu.

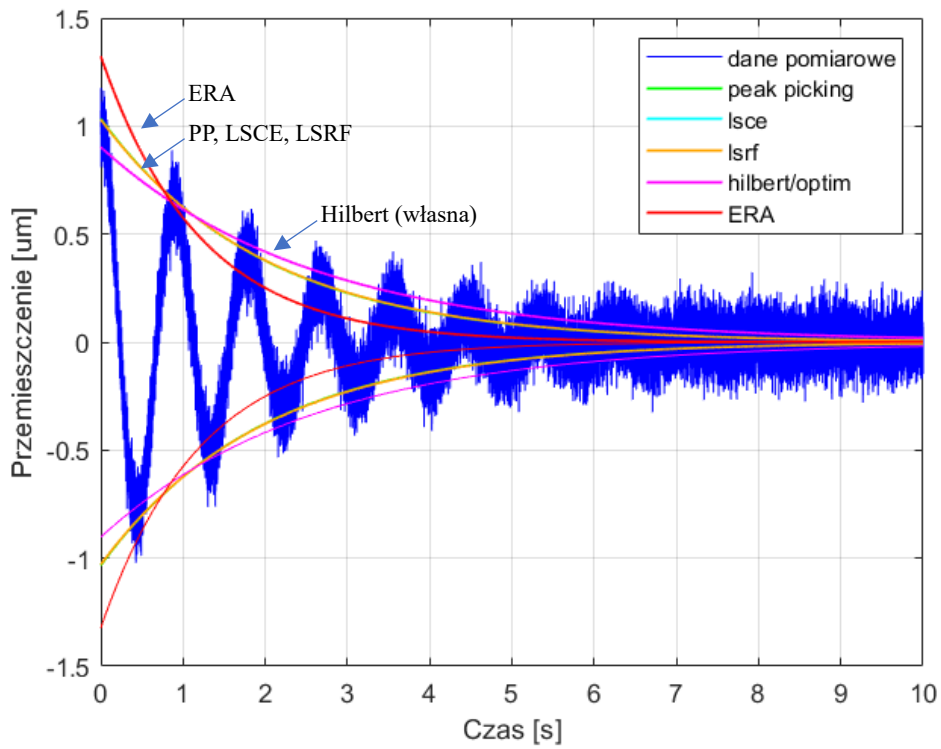


Rysunek 33. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 1% szumu.





Rysunek 34. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 5% szumu.



Rysunek 35. Przebieg odpowiedzi swobodnej układu testowego z 10% szumu.

W tabeli 14 zawarto wyniki działania algorytmu w porównaniu z wybranymi algorytmami. Porównano zidentyfikowane współczynniki tłumienia z wartością referencyjną.

Tabela 14. Porównanie wartości współczynników tłumienia zidentyfikowanych przy pomocy różnych metod.

| Procent szumu        | 0%      | 1%      | 5%      | 10%      |
|----------------------|---------|---------|---------|----------|
| Wartość referencyjna | 7,0711% |         |         |          |
| ITD                  | 7,0711% | 7,0711% | -       | -        |
| ERA                  | 7,0711% | 7,0711% | 3,5240% | 18,2610% |
| PP                   | 7,0772% | 7,0772% | 7,1073% | 7,0934%  |
| LSRF                 | 7,0711% | 7,0711% | 7,0763% | 0,0379%  |
| własna               | 7,0711% | 7,0711% | 6,6704% | 5,4453%  |

W tabeli 15 zawarto błędy procentowe identyfikacji względem wartości referencyjnej obliczonej ze wzoru:

$$\zeta_{ref} = \frac{\beta}{\omega_0} = \frac{\frac{c}{2m}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}. \quad (191)$$

Błąd procentowy  $\epsilon_i$  zidentyfikowanego współczynnika tłumienia  $\zeta_i$  obliczono zgodnie ze wzorem:

$$\epsilon_i = \left| \frac{\zeta_i - \zeta_{ref}}{\zeta_{ref}} \right| \cdot 100\%. \quad (192)$$

Zestawienie błędów procentowych przedstawiono w tabeli 15.

Tabela 15. Porównanie błędów identyfikacji współczynnika tłumienia różnych metod.

| Procent szumu | 0%    | 1%    | 5%     | 10%     |
|---------------|-------|-------|--------|---------|
| ITD           | 0,00% | 0,00% | -      | -       |
| ERA           | 0,00% | 0,00% | 50,16% | 158,25% |
| PP            | 0,09% | 0,09% | 0,51%  | 0,32%   |
| LSRF          | 0,00% | 0,00% | 0,07%  | 99,46%  |
| własna        | 0,00% | 0,00% | 5,67%  | 22,99%  |

Dla danych testowych, najlepiej sprawowały się metody działające w dziedzinie częstotliwości: PP oraz LSRF, co spowodowane być może faktem, że szum biały stosunkowo łatwo jest oddzielić od danych w dziedzinie częstotliwości. Spośród pozostałych metod, najlepiej zadziałała własna, dając stosunkowo dobre wyniki nawet przy zaszumionych danych. W praktyce, udział szumu powyżej 10% uniemożliwia przeprowadzenie identyfikacji (patrz rysunek 35). Brak danych w wierszu ITD oznacza, że algorytm nie pozwolił uzyskać wyniku z powodu zbyt wysokiego poziomu szumu.

## 8.4 Dane pomiarowe

Porównanie działania algorytmów na rzeczywistych danych pomiarowych uzyskanych w eksperymencie opisano w podrozdziałach 9.3 i 9.4.

## 8.5 Identyfikacja parametrów modalnych układów niestacjonarnych

Opisane w rozdziale 7 metody stosowane są co do zasady do identyfikacji parametrów modalnych układów stacjonarnych. W równaniu konstytutywnym drgań swobodnych, w ogólnym przypadku, każdy składnik może zależeć od czasu:

$$m(t)\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k(t)x = 0. \quad (193)$$

Taki układ nazywany jest niestacjonarnym, w przeciwieństwie do układu stacjonarnego, gdy:



$$m(t) \equiv m = \text{const} \forall t \in \mathbb{R} +, \quad (194)$$

$$c(t) \equiv c = \text{const} \forall t \in \mathbb{R} +, \quad (195)$$

$$k(t) \equiv k = \text{const} \forall t \in \mathbb{R} +. \quad (196)$$

Oznacza to, że w czasie zmieniają się również wartości parametrów modalnych: częstości drgań własnych  $\omega_0$  oraz współczynnika tłumienia  $\zeta$ :

$$\omega_0 = \omega_0(t) \neq \text{const}, \quad (197)$$

$$\zeta = \zeta(t) \neq \text{const}. \quad (198)$$

W artykule [223] z 1974 r. Rao opisuje wyzwania związane z identyfikacją liniowych, niestacjonarnych układów dynamicznych. Podaje również warunki związane z ich obserwowalnością. W ostatnich latach literatura opisuje szereg przykładów identyfikacji układów niestacjonarnych [224]. Dotyczy to szerokiego wachlarza zagadnień inżynierskich, np.: inżynierii lądowej [225], inżynierii medycznej [226], mechaniki płynów [227].

Do identyfikacji parametrów modalnych liniowego układu niestacjonarnego, autorzy Dziedziech, Staszewski i Uhl [228] zastosowali analizę falkową. Staszewski zaproponował metodę analizy ruchomej do identyfikacji współczynnika tłumienia [229]. Podobną technikę zastosowano w celu identyfikacji strumienia ciepła w pracy [230].

Analiza ruchoma (ang. *moving window*) dla pewnego sygnału  $Y$ , składającego się z  $N$  elementów:

$$Y = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_N], \quad (199)$$

polega na wytworzeniu pewnego okna  $O$ , tj. podzbioru całkowitego zbioru danych (np. pierwszych  $k$  elementów, gdzie  $k \ll N$ ):

$$O_0 = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_k] \quad (200)$$

i rozwiązaniu zadania (tj. identyfikacji parametrów modalnych) dla tego podzbioru. Następnie, okno przesuwa się, tj. tworzony jest nowy podzbiór:



$$O_1 = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{k+1}], \quad (201)$$

a w ogólnym zapisie:

$$O_j = [y_j \ y_{j+1} \ \dots \ y_{j+k}]. \quad (202)$$

Można w takim wypadku zdefiniować  $N - k$  okien od  $O_0$  do  $O_{N-k}$ . Jeśli zdefiniujemy zidentyfikowany parametr  $\xi_j$ , na oknie  $O_j$ , zapisać można wektor  $R$  przebiegu czasowego parametru w dziedzinie czasu:

$$R = [\xi_0 \ \xi_1 \ \dots \ \xi_{N-k}]. \quad (203)$$

Wadą metody jest to, że nie pozwoli ona na zidentyfikowanie parametru dla czasu odpowiadającego pierwszym  $k - 1$  próbkom. Przy odpowiednim doborze  $k$  względem  $N$  i odpowiednio długim przebiegu czasowym możliwe jest zastosowanie opisanej w tym rozdziale metody do identyfikacji współczynnika tłumienia modelu niestacjonarnego.

## 9 Program badań

### 9.1 Plan eksperymentu

W celu zweryfikowania hipotezy sformułowanej we wstępie, że środowisko i warunki mocowania elementu mają wpływ na jego drgania, w szczególności na ich tłumienie, zaplanowano przeprowadzenie eksperymentu. Celem eksperymentu było stwierdzenie, które spośród wybranych czynników (ciśnienie powietrza  $p$  i moment dokręcania  $\tau$ ) oddziałują na współczynnik tłumienia przebiegu drgań swobodnych w sposób istotny, a także skwantyfikowanie tej istotności.

W tym celu wykorzystano odpowiednie testy statystyczne. Jako, że przebadano wpływ więcej niż jednego czynnika, skorzystano z planu statycznego [231] zdeterminowanego kompletnego (PS/DK – oznaczenie wg [232]). Jest to program eksperymentu, w którym czynniki wejściowe przyjmowane są na konkretnej liczbie poziomów zmienności (nie ma losowości doboru). Plan eksperymentu przedstawiono w tabeli 16.

Tabela 16. Plan statyczny zdeterminowany kompletny eksperymentu rozważany w tym rozdziale.

| Ciśnienie powietrze [mbar] | Moment dokręcania [Nm] |               | $\bar{\zeta}_j$                      |
|----------------------------|------------------------|---------------|--------------------------------------|
|                            | 24 (i=1)               | 48 (i=2=p)    |                                      |
| 100 ( $j = 1$ )            | $\zeta_{1,1}$          | $\zeta_{2,1}$ | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,1}}{p}$ |
| 200 ( $j = 2$ )            | $\zeta_{1,2}$          | $\zeta_{2,2}$ | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,2}}{p}$ |
| 300 ( $j = 3$ )            | $\zeta_{1,3}$          | $\zeta_{2,3}$ | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,3}}{p}$ |
| 400 ( $j = 4$ )            | $\zeta_{1,4}$          | $\zeta_{2,4}$ | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,4}}{p}$ |
| 500 ( $j = 5$ )            | $\zeta_{1,5}$          | $\zeta_{2,5}$ | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,5}}{p}$ |

|                       |                                      |                                      |   |
|-----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---|
| 600 ( $j = 6$ )       | $\zeta_{1,6}$                        | $\zeta_{2,6}$                        | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,6}}{p}$                                    |
| 700 ( $j = 7$ )       | $\zeta_{1,7}$                        | $\zeta_{2,7}$                        | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,7}}{p}$                                    |
| 800 ( $j = 8$ )       | $\zeta_{1,8}$                        | $\zeta_{2,8}$                        | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,8}}{p}$                                    |
| 900 ( $j = 9$ )       | $\zeta_{1,9}$                        | $\zeta_{2,9}$                        | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,9}}{p}$                                    |
| 1000 ( $j = 10 = q$ ) | $\zeta_{1,10}$                       | $\zeta_{2,10}$                       | $\frac{\sum_{i=1}^p \zeta_{i,10}}{p}$                                   |
| $\bar{\zeta}_i$       | $\frac{\sum_{j=1}^q \zeta_{1,j}}{q}$ | $\frac{\sum_{j=1}^q \zeta_{2,j}}{q}$ | $\bar{\zeta} = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \zeta_{i,j}}{p \cdot q}$ |

W niniejszej pracy skorzystano ze statystyk F Fishera-Snedecora. Obliczono je dla każdego z badanych czynników wejściowych na podstawie zależności:

$$F_I = \frac{S_I}{S_R} \cdot \frac{(p-1)(q-1)}{(p-1)}, \quad (204)$$

$$F_{II} = \frac{S_{II}}{S_R} \cdot \frac{(p-1)(q-1)}{(p-1)} \quad (205)$$

gdzie:  $p$  – liczba różnych poziomów zmienności momentu dokręcania ( $p = 2$ ),  
 $q$  – liczba różnych poziomów zmienności ciśnienia powietrza ( $q = 10$ ),  
a sumy kwadratów  $S_I$ ,  $S_{II}$  i  $S_R$  można obliczyć ze wzorów:

$$S_I = q \sum_{i=1}^p \bar{y}_i^2 - pq\bar{y}^2, \quad (206)$$

$$S_{II} = p \sum_{j=1}^q \bar{y}_j^2 - pq\bar{y}^2, \quad (207)$$

$$S_R = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q y_{ij}^2 - q \sum_{i=1}^p \bar{y}_i^2 - p \sum_{j=1}^q \bar{y}_j^2 + pq\bar{y}^2. \quad (208)$$

Otrzymane wartości współczynników porównuje się z wartością krytyczną  $F(kr)$  rozkładu  $F$  Fishera Snedecora przy przyjętym poziomie istotności  $\alpha$  oraz liczbie stopni swobody dla mianownika  $f_2$ :

$$f_2 = (p - 1)(q - 1) = (2 - 1)(10 - 1) = 1 \cdot 9 = 9 \quad (209)$$

oraz dla licznika  $f_1$  (odpowiednio dla momentu dokręcania oraz ciśnienia powietrza):

$$f_{1I} = p - 1 = 2 - 1 = 1, \quad (210)$$

$$f_{1II} = q - 1 = 10 - 1 = 9. \quad (211)$$

Spełnienie warunku:

$$F_I > F_{I(kr)} \quad (212)$$

oznaczać będzie, że moment dokręcania  $\tau$  w istotny sposób wpływa na współczynnik tłumienia  $\zeta$ . Spełnienie warunku:

$$F_{II} > F_{II(kr)} \quad (213)$$

oznaczać będzie, że ciśnienie powietrza  $p$  w istotny sposób wpływa na współczynnik tłumienia  $\zeta$ . Plan statyczny zdeterminowany kompletny pozwoli również, w przypadku, gdy wpływ któregoś z warunków wpływa istotnie na współczynnik tłumienia, określenie zależności przy pomocy liniowego równania regresji:

$$\hat{\zeta} = b_0 + b_1 p + b_2 \tau + b_{12} p \tau. \quad (214)$$

W niniejszej pracy rozpatrywano również model kwadratowy zależności między ciśnieniem powietrza  $p$  i momentem dokręcania  $\tau$  a współczynnikiem tłumienia  $\zeta$ :

$$\hat{\zeta} = b_0 + b_1 p + b_2 \tau + b_{12} p \tau + b_{11} p^2 + b_{22} \tau^2. \quad (215)$$

Adekwatność równania oceniono przy pomocy testu  $\chi^2$ . Przyjęty został poziom istotności  $p = 0,05$ . Obliczona została w tym celu statystyka testowa:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(\hat{\zeta}_i - \zeta_i)^2}{\zeta_i}. \quad (216)$$

Porównać ją można z wartością krytyczną  $\chi^2_{kr}$  dla poziomu ufności  $p$  i liczbie stopni swobody  $f$  równej:

$$f = n - k - 1 = 20 - 6 - 1 = 13. \quad (217)$$

Wartość krytyczną  $\chi^2_{kr}$  wynosi:



$$\chi_{kr}^2 = \chi(p = 0.05, f = 13) = 2.616 \cdot 10^{-12}. \quad (218)$$

Spełnienie warunku:

$$\chi^2 < \chi_{kr}^2, \quad (219)$$

oznacza, że równanie (214)/(215) jest adekwatne na poziomie istotności  $p = 0,05$ .

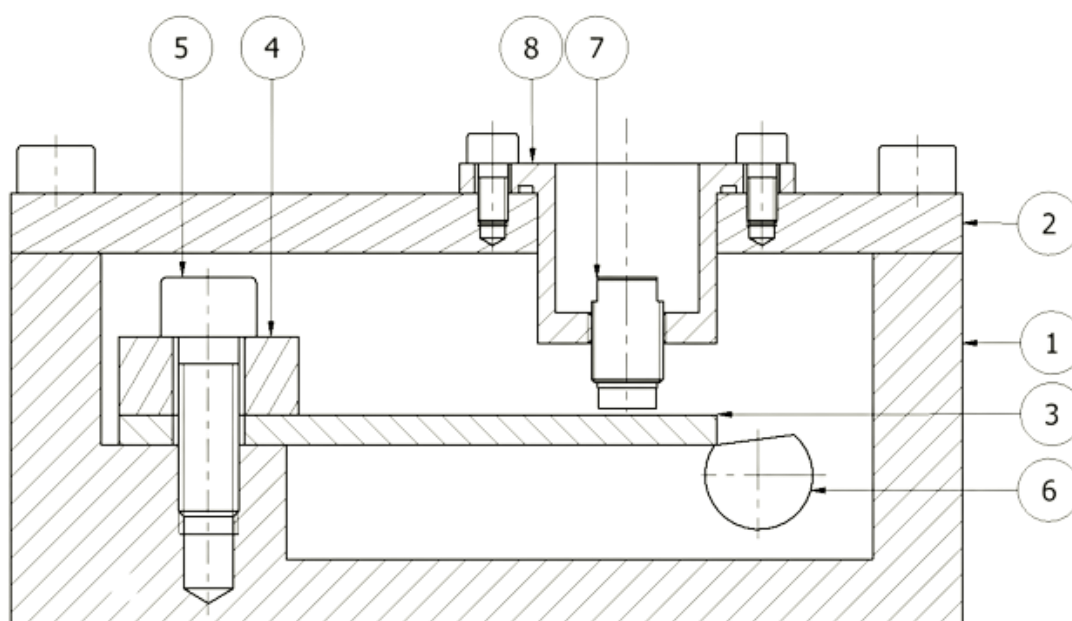
Należy zwrócić uwagę, że przeprowadzono dwa eksperymenty: dla przypadku tarcia suchego oraz dla przypadku smarowanego dwusiarczkiem molibdenu ( $\text{MoS}_2$ ). W obu przypadkach weryfikacja hipotezy przebiegła podobnie.

W podrozdziale 9.2 opisano techniczne zagadnienia przebiegu eksperymentu, tj. opis stanowiska badawczego wraz z uwagami inżynierskimi. W podrozdziale 9.3 opisano przebieg weryfikacji postawionej hipotezy dla przypadku układu bez smaru. W podrozdziale 9.4 opisano przebieg weryfikacji postawionej hipotezy dla przypadku ze smarem  $\text{MoS}_2$ .

## 9.2 Przebieg eksperymentu

### 9.2.1 Stanowisko badawcze

W celu przeprowadzenia opisanego powyżej eksperymentu, skonstruowane zostało stanowisko badawcze (rysunek 36). Opisane ono zostało w publikacji autora niniejszej rozprawy [233]. W celu odwzorowania drgań obiektu o typowych [234] częstościach drgań własnych, zaproponowano stanowisko z taką belką o częstotliwości własnej wynoszącej 360 Hz. W wielu publikacjach dotyczących struktur kosmicznych interfejs rakiet – ładunek użyteczny modelowany jest jako belka jednostronnie utwierdzona (por. rysunek 1) [36], [87], [235]–[237]. Na tej podstawie stwierdzono, że model fizyczny w postaci belki, mimo swojej prostoty będzie w wystarczającym stopniu odwzorowywać najważniejsze charakterystyki dynamiczne ładunku i jego mocowania.

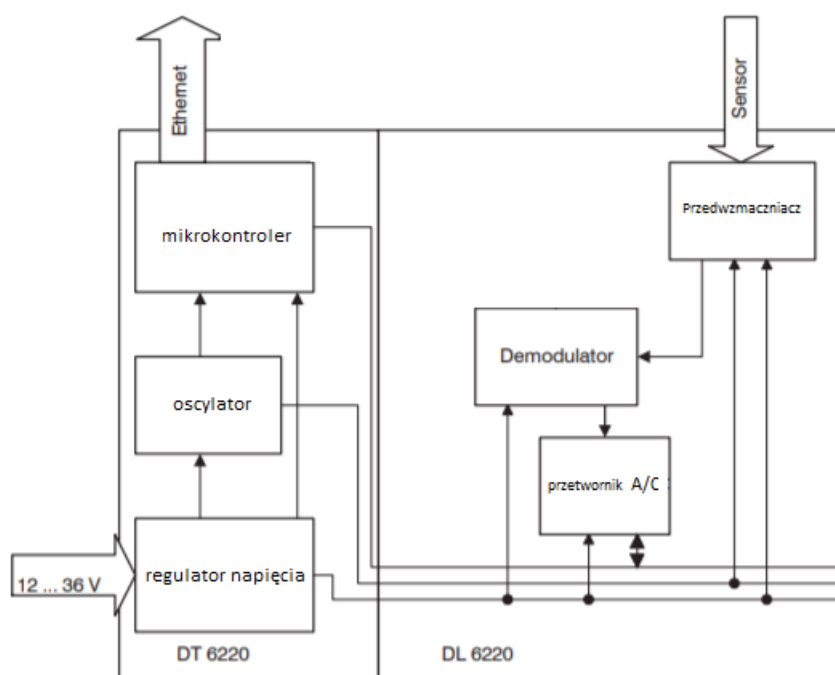


Rysunek 36. Schemat stanowiska badawczego.

Stanowisko składa się z komory próżniowej (1) z pokrywą (2). Wewnątrz zamocowana została belka (3) jednostronnie utwierdzona do komory przez element dociskający (4). Siłę docisku zapewnia śruba M10 (5), która dokręcana jest kluczem dynamometrycznym. Wymuszenie geometryczne (niezerowe położenie początkowe) belki (3) wytwarzane jest przy pomocy wału (6)

ze ściętą częścią, którego część wystaje poza komorę próżniową i możliwe jest jego obracanie przy pomocy napędu ręcznego lub elektrycznego. Pojemnościowy czujnik drgań (7) mierzy przemieszczenia belki (4). Został on zamocowany w pokrywie (2) przy pomocy kołnierza (8) żeby zapewnić odległość od belki (3) zgodną z zakresem pomiarowym czujnika (7). W praktyce, stanowisko zrealizowano jak na rysunku 38.

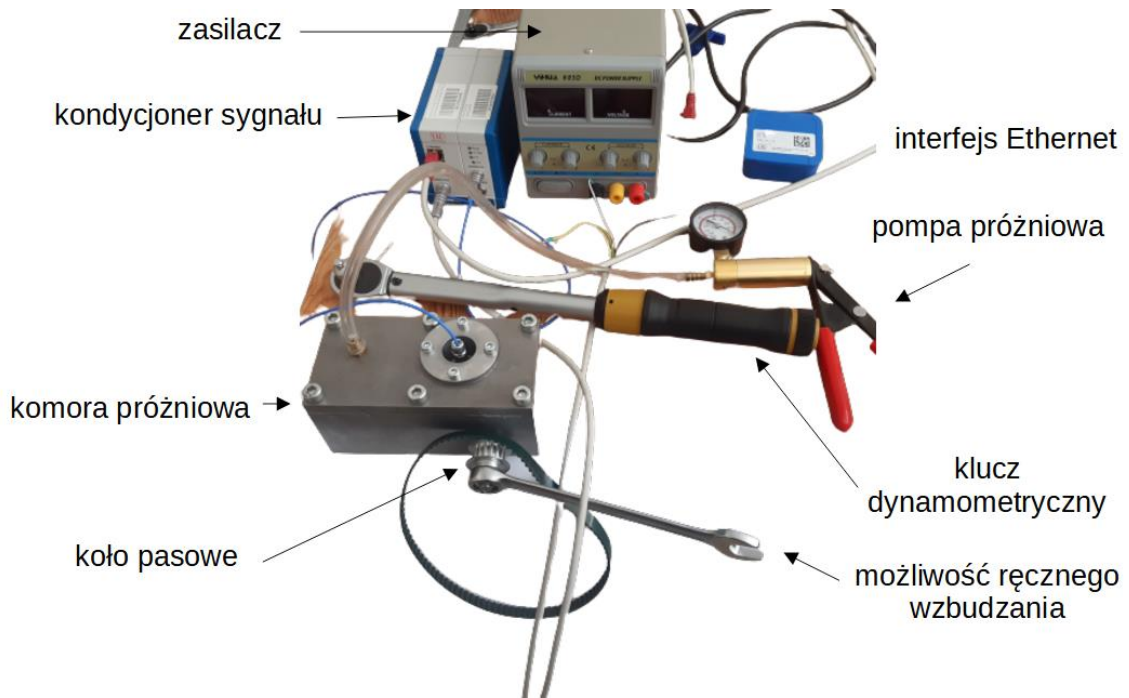
Pojemnościowy czujnik drgań microepsilon CSE1,25/M12 podłączony został do demodulatora ze zintegrowanym przedwzmacniaczem microepsilon DL6222/LC, który współpracuje z kontrolerem microepsilon DT6222, który poprzez interfejs Ethernet połączony jest z komputerem PC. Najważniejsze parametry pomiarowe układu przedstawione zostaną w następnym podrozdziale. Schemat systemu pojemnościowego przedstawiony został na rysunku 37 [77].



Rysunek 37. Schemat pojemnościowego systemu do pomiaru drgań.

Zasada działania pojemnościowego czujnika drgań została opisana w podrozdziale 3.3. Przykrywka komory próżniowej wyposażona jest w króciec pneumatyczny pozwalający na podłączenie ręcznej pompy próżniowej pozwalającej na wytworzenie próżni w komorze. Wał zakończony jest kołem pasowym

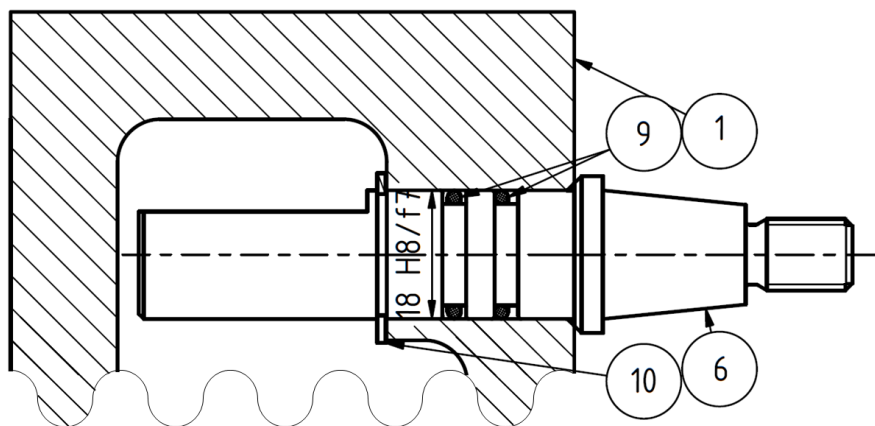
umożliwiającym połączenie go z silnikiem elektrycznym oraz ścięcie umożliwiające obrót kluczem płaskim.



Rysunek 38. Zdjęcie stanowiska badawczego.

## 9.2.2 Uszczelnienie dynamiczne

Jednym z wyzwań technicznych konstrukcji stanowiska pomiarowego było zapewnienie szczelności komorze próżniowej przy jednoczesnym pozostawieniu możliwości obrotu wału wymuszającego drgania belki. Wymagane było zatem zastosowanie uszczelnienia dynamicznego jak przedstawiono na rysunku 39.



Rysunek 39. Uszczelnienie dynamiczne.

Wał (6) współpracuje z otworem w komorze próżniowej (1) w ramach pasowania H8/f7 (zasada stałego otworu). Ze strony zewnętrznej, wał jest ustalony przy pomocy kołnierza, a ze strony wewnętrznej przy pomocy pierścienia osadczego (10). Wewnątrz otworu zostały umieszczone dwa pierścienie uszczelniające o-ring. Dobór wymiarów został dokonany na podstawie [238].

### 9.2.3 Parametry stanowiska

Stanowisko umożliwia przeprowadzenie badań zgodnie z planem eksperymentu opisanym w podrozdziale 9.1. Zakres zmiany ciśnienia atmosferycznego wyniósł od 1000 mbar do 100 mbar. Odpowiada to co prawda wysokościami od 0 km do około 15 km (patrz rysunek 27), jednak pozwala określić wpływ ciśnienia na zjawiska drgań i ewentualnie ekstrapolować wyniki dotyczące lepszej jakości próżni. Badania wskazują na niską zmienność własności mechanicznych MoS<sub>2</sub> dla ciśnień poniżej 100 mbar [239].

Z kolei zakres zmiany momentu dokręcania wyniósł od 20 Nm do 100 Nm. Maksymalny możliwy moment dokręcania jest większy niż moment dokręcania śruby M10 ([240], patrz rysunek 36).

Tabela 17 przedstawia zmienne wejściowe, które są kontrolowane w eksperymencie, które są mierzone wraz z niedokładnością i zakresem pomiaru.

Tabela 18 przedstawia zmienne eksperymentalne, które są mierzone wraz z częstotliwością, niedokładnością i zakresem pomiaru.

Tabela 17. Zmienne wejściowe.

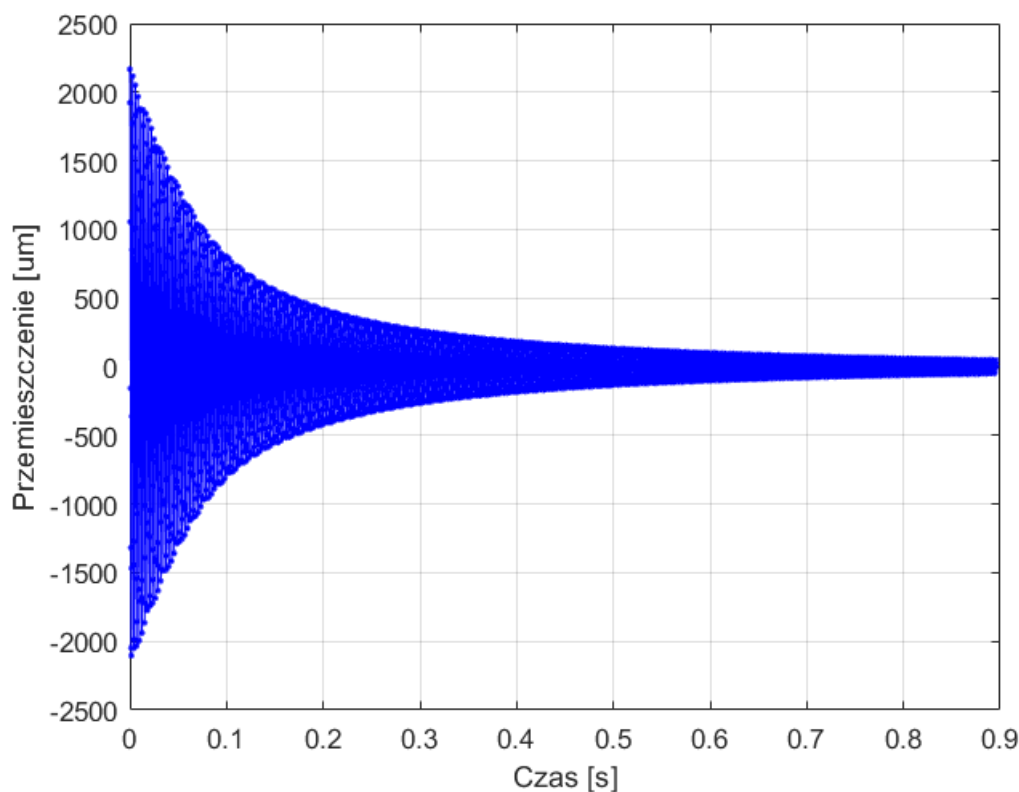
|        | Zmienna eksperymentalna | Sposób nastawy                       | Niedokładność | Zakres                |
|--------|-------------------------|--------------------------------------|---------------|-----------------------|
| $p$    | ciśnienie w komorze     | pompa próżniowa                      | 20 mbar       | 100 mbar<br>1000 mbar |
| $\tau$ | moment dokręcania śruby | klucz dynamometryczny Proxxon MC 100 | 2 Nm          | 20 Nm<br>100 Nm       |

Tabela 18. Zmienne wyjściowe.

|     | Zmienna eksperymentalna            | Sposób pomiaru        | Częstotliwość | Niedokładność     | Zakres                |
|-----|------------------------------------|-----------------------|---------------|-------------------|-----------------------|
| $y$ | przemieszczenie (wychylenie) belki | czujnik pojemnościowy | 4000 Hz       | 0,2 $\mu\text{m}$ | 0-10000 $\mu\text{m}$ |

### 9.3 Wyniki pomiarów dla układu bez smaru

Pojedynczy pomiar trwał 1,25 s i zawierał 5000 punktów pomiarowych (zgodnie z tabelą 18). Maksymalne wychylenie belki  $y$  wynosiło ok. 1,5 mm (tj. 1500  $\mu\text{m}$ ). Fragment pojedynczego pomiaru przedstawiono na rysunku 40.



Rysunek 40. Fragment przebiegu pojedynczego pomiaru.

Przy pomocy własnej metody identyfikacji parametrów modalnych (patrz rozdział 8), dla każdego przebiegu wyznaczona została wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia (w [%]). W celu zmniejszenia niepewności, każdy pomiar przeprowadzono 30 razy w takich samych warunkach.

Dla każdego zestawu parametrów przeprowadzono statystyczny test zgodności  $\chi^2$  – nieparametryczny test określający czy odchyłki od wartości średniej są przypadkowe, to znaczy czy rozkład odchyłek jest rozkładem normalnym. Poniżej przedstawiono takie rozumowanie dla kombinacji parametrów  $\tau = 24 \text{ Nm}$ ,  $p = 1000 \text{ mbar}$ .

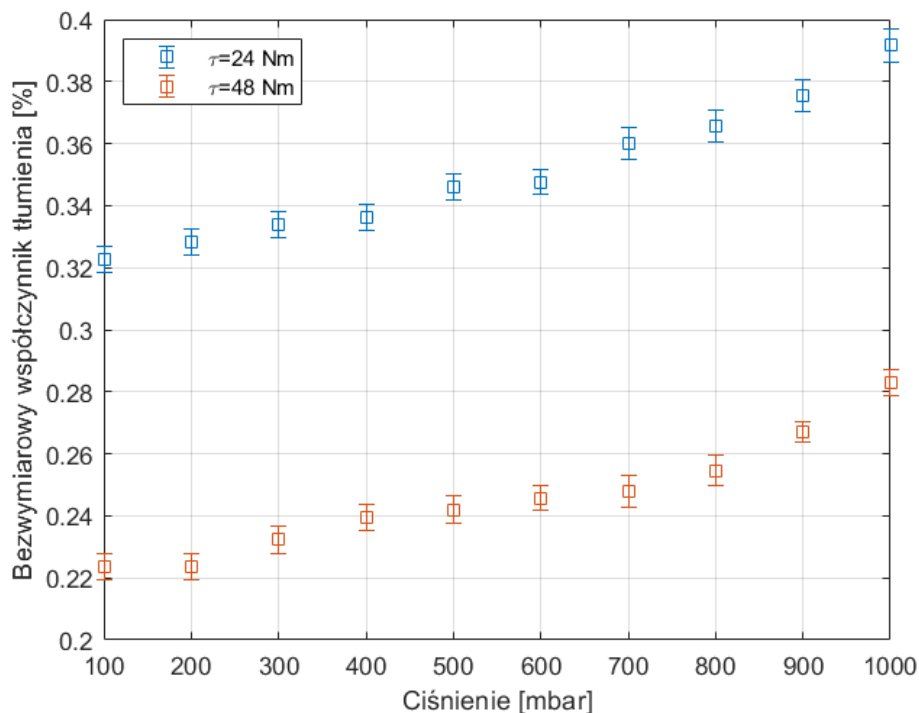
Dla rozkładu 30 powtórzeń pomiaru współczynnika tłumienia wykonano test zgodności  $\chi^2$ . Założono poziom ufności  $p = 0,05$ . Hipotezą zerową sformułowano jako:

Dane z 30 powtórzeń mają rozkład zbliżony do normalnego, a zatem pomiar jest powtarzalny.

Hipotezą alternatywną było:

Dane z 30 powtórzeń nie mają rozkładu zbliżonego do normalnego, a zatem pomiar nie jest powtarzalny.

Wynik wyniósł  $\chi^2 = 0,198 > 0,05$ , a zatem brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Oznacza to, że pomiar jest powtarzalny. Analogiczne testy zgodności wykonano dla każdego zestawu 30 powtórzeń dla wszystkich kombinacji parametrów z tabeli 16. Wszystkie testy wykazały, że pomiar jest powtarzalny. W dalszej części, stosowano już średnie wartości współczynnika tłumienia dla każdego zestawu. Na rysunku 41 przedstawiono zależność między współczynnikiem tłumienia a ciśnieniem powietrza dla momentów dokręcania 24 Nm oraz 48 Nm.



Rysunek 41. Zależność między współczynnikiem tłumienia a ciśnieniem dla różnych momentów dokręcania

Z takiego zestawu danych wyznaczona została średnia wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia oraz odchylenie standardowe. Podobne badania przeprowadzono dla każdej kombinacji parametrów zgodnie z planem eksperymentu przedstawionym w podrozdziale 9.1.

Dane dla przypadku tarcia suchego przedstawiono w tabelach poniżej. Tabela 19 przedstawia średni współczynnik tłumienia. Tabela 20 przedstawia odchylenie standardowe współczynnika tłumienia. Tabela 21 przedstawia wariancję współczynnika tłumienia.

Tabela 19. Średni współczynnik tłumienia dla przypadku bez smaru.

| Ciśnienie powietrze<br>[mbar] | Moment dokręcania [Nm] |         | $\bar{\zeta}_j$          |
|-------------------------------|------------------------|---------|--------------------------|
|                               | 24                     | 48      |                          |
| 100                           | 0,3225%                | 0,2237% | 0,2731%                  |
| 200                           | 0,3283%                | 0,2237% | 0,2760%                  |
| 300                           | 0,3339%                | 0,2323% | 0,2831%                  |
| 400                           | 0,3362%                | 0,2394% | 0,2878%                  |
| 500                           | 0,3459%                | 0,2421% | 0,2940%                  |
| 600                           | 0,3475%                | 0,2458% | 0,2966%                  |
| 700                           | 0,3599%                | 0,2480% | 0,3040%                  |
| 800                           | 0,3655%                | 0,2546% | 0,3100%                  |
| 900                           | 0,3755%                | 0,2672% | 0,3213%                  |
| 1000                          | 0,3916%                | 0,2829% | 0,3373%                  |
| $\bar{\zeta}_i$               | 0,3507%                | 0,2460% | $\bar{\zeta} = 0,2983\%$ |



Tabela 20. Odchylenie standardowe współczynnika tłumienia dla przypadku bez smaru.

| Ciśnienie powietrze [mbar] | Moment dokręcania [Nm] |         |
|----------------------------|------------------------|---------|
|                            | 24                     | 48      |
| 100                        | 0,0021%                | 0,0021% |
| 200                        | 0,0020%                | 0,0020% |
| 300                        | 0,0021%                | 0,0021% |
| 400                        | 0,0020%                | 0,0020% |
| 500                        | 0,0021%                | 0,0021% |
| 600                        | 0,0020%                | 0,0020% |
| 700                        | 0,0025%                | 0,0025% |
| 800                        | 0,0025%                | 0,0025% |
| 900                        | 0,0026%                | 0,0016% |
| 1000                       | 0,0027%                | 0,0021% |

Tabela 21. Wariancja współczynnika tłumienia dla przypadku bez smaru.

| Ciśnienie powietrze [mbar] | Moment dokręcania [Nm] |                       |
|----------------------------|------------------------|-----------------------|
|                            | 24                     | 48                    |
| 100                        | $4,56 \cdot 10^{-10}$  | $4,56 \cdot 10^{-10}$ |
| 200                        | $4,36 \cdot 10^{-10}$  | $4,36 \cdot 10^{-10}$ |
| 300                        | $4,52 \cdot 10^{-10}$  | $4,53 \cdot 10^{-10}$ |
| 400                        | $4,07 \cdot 10^{-10}$  | $4,07 \cdot 10^{-10}$ |
| 500                        | $4,58 \cdot 10^{-10}$  | $4,59 \cdot 10^{-10}$ |
| 600                        | $4,01 \cdot 10^{-10}$  | $4,02 \cdot 10^{-10}$ |
| 700                        | $6,42 \cdot 10^{-10}$  | $6,42 \cdot 10^{-10}$ |
| 800                        | $6,54 \cdot 10^{-10}$  | $6,37 \cdot 10^{-10}$ |
| 900                        | $7,08 \cdot 10^{-10}$  | $2,56 \cdot 10^{-10}$ |
| 1000                       | $7,75 \cdot 10^{-10}$  | $4,55 \cdot 10^{-10}$ |

Postawiona została hipoteza zerowa:

Ciśnienie powietrza oraz moment dokręcania  
nie mają wpływu na współczynnik tłumienia.

Przyjęty został poziom istotności  $p = 0,05$ . Obliczona została liczba stopni swobody mianownika, zgodnie ze wzorem (209):

$$f_2 = (p - 1)(q - 1) = (2 - 1)(10 - 1) = 1 \cdot 9 = 9 \quad (220)$$

oraz dla licznika  $f_1$  (odpowiednio dla momentu dokręcania oraz ciśnienia powietrza), zgodnie ze wzorami (210) i (211):

$$f_{1I} = p - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (221)$$

$$f_{1II} = q - 1 = 10 - 1 = 9. \quad (222)$$

Zostały obliczone wyrażenia  $S_I$ ,  $S_{II}$  oraz  $S_R$ , zgodnie ze wzorami (206), (207) oraz (208):

$$S_I = q \sum_{i=1}^p \bar{y}_i^2 - pq\bar{y}^2 = 5,484 \cdot 10^{-6}, \quad (223)$$

$$S_{II} = p \sum_{j=1}^q \bar{y}_j^2 - pq\bar{y}^2 = 7,428 \cdot 10^{-7}, \quad (224)$$

$$S_R = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q y_{ij}^2 - q \sum_{i=1}^p \bar{y}_i^2 - p \sum_{j=1}^q \bar{y}_j^2 + pq\bar{y}^2 = 1,179 \cdot 10^{-8}. \quad (225)$$

Na podstawie zależności (204) i (205) obliczono wskaźniki  $F_I$  oraz  $F_{II}$ :

$$F_I = \frac{S_I}{S_R} \cdot \frac{(p-1)(q-1)}{(p-1)} = 465,15 \quad (226)$$

$$F_{II} = \frac{S_{II}}{S_R} \cdot \frac{(p-1)(q-1)}{(p-1)} = 63,01. \quad (227)$$

Wyznaczono wartości krytyczne  $F_{I(kr)}$  oraz  $F_{II(kr)}$  rozkładu  $F$  Fishera-Snedecora dla mianownika o  $f_2 = 9$  stopniach swobody oraz licznikach odpowiednio  $f_{1I} = 1$  i  $f_{1II} = 9$  stopniach swobody i poziomu istotności  $p = 0,05$ :

$$F_{I(kr)} = F(p, f_{1I}, f_2) = 5,1174 \quad (228)$$

$$F_{II(kr)} = F(p, f_{1II}, f_2) = 3,1789. \quad (229)$$

Stwierdzono, że oba warunki (212) i (213) zostały spełnione, a zatem prawdziwa jest hipoteza:

Zarówno ciśnienie powietrza jak i moment dokręcania  
mają istotny wpływ na współczynnik tłumienia.

Oznacza to potwierdzenie hipotezy niniejszej pracy:

Środowisko i warunki mocowania elementu  
mają wpływ na jego drgania, w szczególności na ich tłumienie.

### 9.3.1 Model liniowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań

W celu kwantyfikacji wpływu ciśnienia powietrza  $p$  i momentu dokręcania  $\tau$  na współczynnik tłumienia drgań  $\zeta$ , na podstawie danych doświadczalnych zawartych w tabelach 19-21, przygotowano plan dwupoziomowy z uwzględnieniem interakcji [231]. Matrycę planu PS/DK  $2^2$  z uwzględnieniem interakcji przedstawiono w tabeli 22.

Tabela 22: Matryca planu PS/DK  $2^2$  z uwzględnieniem interakcji

| i | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1x_2$ | $\bar{y}$ | $S^2(y)$              | $\hat{y}$ |
|---|-------|-------|-------|----------|-----------|-----------------------|-----------|
| 1 | +1    | +1    | +1    | +1       | 0,2829%   | $4,56 \cdot 10^{-10}$ | 0,2726%   |
| 2 | +1    | +1    | -1    | -1       | 0,3916%   | $7,75 \cdot 10^{-10}$ | 0,3830%   |
| 3 | +1    | -1    | +1    | -1       | 0,2237%   | $4,56 \cdot 10^{-10}$ | 0,2193%   |
| 4 | +1    | -1    | -1    | +1       | 0,3225%   | $4,56 \cdot 10^{-10}$ | 0,3184%   |

Zdefiniowano dwa parametry wejściowe:

- $x_1 \rightarrow p$  – ciśnienie powietrza, zmienne w zakresie 500-1000 mbar,
- $x_2 \rightarrow \tau$  – moment dokręcania, zmienny w zakresie 24-48 Nm.

Obliczono jednostki zmienności:

$$\Delta x_1 = \frac{p_{max} - p_{min}}{2} = \frac{1000 - 500}{2} = 250 \text{ [mbar]}, \quad (230)$$

$$\Delta x_2 = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{48 - 24}{2} = 12 \text{ [Nm]}. \quad (231)$$

Obliczono wartości centralnych czynników wejściowych:

$$x_{10} = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} = \frac{1000 + 500}{2} = 750 \text{ [mbar]}, \quad (232)$$

$$x_{20} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{48 + 24}{2} = 36 \text{ [Nm]}. \quad (233)$$

Zakodowano zatem parametry:



$$x_1 = \frac{\widehat{x}_1 - \widehat{x}_{10}}{\Delta x_1} = \frac{p-550}{450} [mbar], \quad (234)$$

$$x_2 = \frac{\widehat{x}_2 - \widehat{x}_{20}}{\Delta x_2} = \frac{\tau-36}{12} [Nm], \quad (235)$$

$$y = \zeta. \quad (236)$$

W ten sposób wartości  $x_1$  i  $x_2$  zostały unormowane na zakres -1 do +1. Na podstawie danych z tabeli 22, obliczono wartości współczynników regresji:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{0i} \bar{y}_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{0i} \bar{y}_i = \quad (237)$$

$$\frac{1}{4} \cdot (0,2829\% + 0,3916\% + 0,2237\% + 0,3225\%) = 3,052 \cdot 10^{-3}$$

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i} \bar{y}_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{1i} \bar{y}_i = \quad (238)$$

$$\frac{1}{4} \cdot (0,2829\% + 0,3916\% - 0,2237\% - 0,3225\%) = 3,207 \cdot 10^{-4}$$

$$b_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{2i} \bar{y}_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{2i} \bar{y}_i = \quad (239)$$

$$\frac{1}{4} \cdot (0,2829\% - 0,3916\% + 0,2237\% - 0,3225\%) = -5,187 \cdot 10^{-4}$$

$$b_{12} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i} \bar{y}_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{1i} x_{2i} \bar{y}_i = \quad (240)$$

$$\frac{1}{4} \cdot (+0,2829\% - 0,3916\% - 0,2237\% + 0,3225\%) = -2,489 \cdot 10^{-5}$$

Obliczona została wariancja błędów pomiarów:

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S^2(y)_i = \quad (241)$$

$$\frac{1}{4} \cdot (4,56 \cdot 10^{-10} + 7,75 \cdot 10^{-10} + 4,56 \cdot 10^{-10} + 4,56 \cdot 10^{-10}) = 5,354 \cdot 10^{-10}$$

W celu określenia istotności współczynników równania regresji, skorzystano z testu t-Studenta. Liczba stopni swobody wynosi  $f = 4$ . Dla poziomu istotności  $p = 0,05$ , wartość krytyczna współczynnika  $t_{kr}$  wynosi:

$$t_{kr} = t(p, f) = t(0,05, 4) = 0,3744. \quad (242)$$

Wartość krytyczna dla współczynników regresji wynosi:

$$b_{kr} = t(p, f) \sqrt{S^2 \frac{(y)}{N}} = 4,332 \cdot 10^{-6}. \quad (243)$$

Ponieważ spełnione są warunki:

$$|b_0| > b_{kr}, \text{ więc } b_0 \text{ jest istotny,} \quad (244)$$

$$|b_1| > b_{kr}, \text{ więc } b_1 \text{ jest istotny,} \quad (245)$$

$$|b_2| > b_{kr}, \text{ więc } b_2 \text{ jest istotny,} \quad (246)$$

$$|b_{12}| > b_{kr}, \text{ więc } b_{12} \text{ jest istotny.} \quad (247)$$

Równanie regresji ma zatem postać:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 = 3,052 \cdot 10^{-3} + 3,207 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 - 5,187 \cdot 10^{-4} \cdot x_2 + 1,439 \cdot 10^{-3} \cdot x_1 x_2 \quad (248)$$

Wartości ( $\hat{y}$ ) obliczone z równania (248) zamieszczono w ostatniej kolumnie tabeli 22. Jak widać, zgadzają się one do 2 miejsc po przecinku. Adekwatność równania można ocenić obliczając wartość wariancji adekwatności:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{N} = 2,022 \cdot 10^{-9}. \quad (249)$$

Empiryczną wartość współczynnika  $F$  Fischera-Snedecora można obliczyć ze wzoru:

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S^2(y)} = 9,404 \cdot 10^{-3} \quad (250)$$

a wartość  $F_{kr}$  wynosi:



$$F_{kr} = F(p, f) = F(0,05,4) = 0,3804 \quad (251)$$

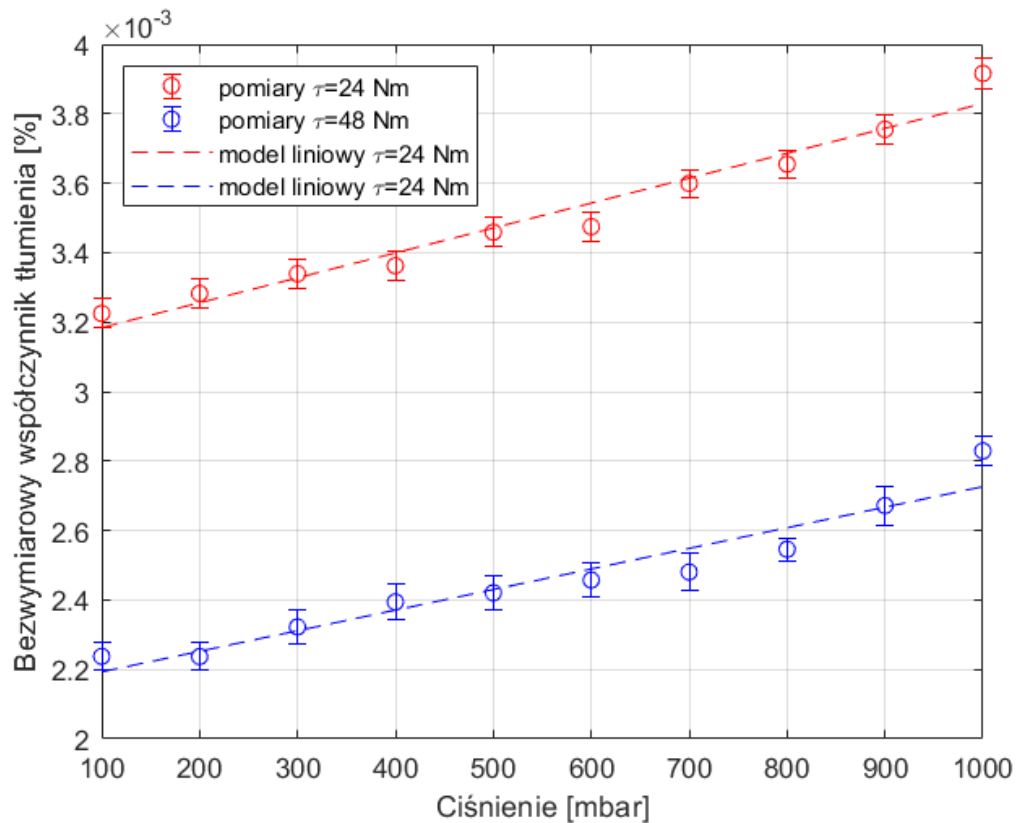
Spełniony jest zatem warunek:  $F < F_{kr}$ , a zatem równanie regresji (248) można uznać za adekwatne na poziomie istotności  $p = 0,05$ . Po podstawieniu równań kodujących (234) i (235) do równania regresji (248), otrzymujemy zależność współczynnika tłumienia  $\zeta$  od ciśnienia powietrza  $p$  oraz momentu dokręcania  $\tau$ :

$$\hat{\zeta} = 3,052 \cdot 10^{-3} + 3,207 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{(p-550)}{450} + \\ -5,187 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{(\tau-36)}{12} + 1,439 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(p-550)(\tau-36)}{450 \cdot 12} \quad (252)$$

a po uproszczeniu:

$$\hat{\zeta} = (4,091 \cdot 10^{-3}) + (8,414 \cdot 10^{-7}) \cdot p + (-4,079 \cdot 10^{-5}) \cdot \tau - \\ (-5,180 \cdot 10^{-9}) \cdot p \cdot \tau, \quad (253)$$

gdzie wartości  $p$  powinny być podstawiane w [mbar], a  $\tau$  w [Nm]. Zależność otrzymaną dzięki modelowi liniowemu przedstawiono na rysunku. Rysunek 42 przedstawia porównanie pomiędzy modelem liniowym a danymi pomiarowymi.



Rysunek 42. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania — model liniowy wraz z danymi pomiarowymi.

### 9.3.2 Model kwadratowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań

Opracowano również kwadratowy model zależności między ciśnieniem powietrza  $p$  oraz momentem dokręcania  $\tau$  a współczynnikiem tłumienia  $\zeta$ . Model kwadratowy ma postać:

$$\hat{\zeta} = b_0 + b_1 p + b_2 \tau + b_{12} p \tau + b_{11} p^2 + b_{22} \tau^2. \quad (254)$$

Wykonanych zostało  $n = 20$  pomiarów (patrz tabela 19). Oszacować należy  $k = 6$  współczynników, które zapisać można w formie wektora:



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{22} \end{pmatrix} \quad (255)$$

Układ równań powstały w wyniku podstawienia  $n = 20$  pomiarów do równania (254) można podsumować równaniem:

$$\begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_0 & \tau_0 & p_0 \tau_0 & p_0^2 & \tau_0^2 \\ 1 & p_1 & \tau_1 & p_1 \tau_1 & p_1^2 & \tau_1^2 \\ & & & \vdots & & \\ 1 & p_n & \tau_n & p_n \tau_n & p_n^2 & \tau_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{22} \end{pmatrix}, \quad (256)$$

co można zapisać w formie wektorowej:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}, \quad (257)$$

gdzie: wektor  $\mathbf{Z}$  ma wymiar  $n$  na  $1$ , macierz  $\mathbf{X}$  ma wymiar  $n$  na  $k$ , a wektor  $\mathbf{B}$  ma wymiar  $k$  na  $1$ . Jako że w ogólnym przypadku, liczba pomiarów  $n$  nie jest równa liczbie współczynników  $k$ :

$$n = 20 \neq k = 6, \quad (258)$$

nie jest możliwe odwrócenie macierzy  $\mathbf{X}$ . W takim wypadku, wektor  $\mathbf{B}$  współczynników  $b$  można obliczyć przy pomocy pseudoodwrotności, inaczej uogólnionej macierzy odwrotnej:

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}^+ \cdot \mathbf{Z}, \quad (259)$$

gdzie  $\mathbf{X}^+$  oznacza uogólnioną macierz odwrotną:

$$\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T. \quad (260)$$

Wzór (260) obowiązuje tylko jeśli macierz  $\mathbf{X}$  jest liniowo niezależna, a zatem gdy macierz  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$  jest odwracalna. W niniejszym przypadku każdy wiersz macierzy  $\mathbf{X}$  opisuje inny zestaw parametrów wejściowych, więc warunek jest spełniony.

Po obliczeniu wyrażenia (263), otrzymano:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1,379 \cdot 10^{-5} \\ +3,163 \cdot 10^{-7} \\ +2,206 \cdot 10^{-4} \\ -5,180 \cdot 10^{-9} \\ +4,774 \cdot 10^{-10} \\ -3,631 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad (261)$$

Zatem zależność między ciśnieniem powietrza  $p$  oraz momentem dokręcania  $\tau$  a współczynnikiem tłumienia  $\zeta$  wyraża się wzorem:

$$\hat{\zeta} = [1 \ p_0 \ \tau_0 \ p_0 \tau_0 \ p_0^2 \ \tau_0^2] \begin{pmatrix} +1,379 \cdot 10^{-5} \\ +3,163 \cdot 10^{-7} \\ +2,206 \cdot 10^{-4} \\ -5,180 \cdot 10^{-9} \\ +4,774 \cdot 10^{-10} \\ -3,631 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad (262)$$

a zatem:

$$\hat{\zeta} = 1,379 \cdot 10^{-5} + (3,163 \cdot 10^{-7})p - (2,206 \cdot 10^{-4})\tau + (-5,180 \cdot 10^{-9})p\tau + (4,774 \cdot 10^{-10})p^2 - (3,631 \cdot 10^{-6})\tau^2. \quad (263)$$

Adekwatność równania oceniono przy pomocy testu  $\chi^2$ . Przyjęty został poziom istotności  $p = 0,05$ . Obliczona została w tym celu statystyka testowa:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(\hat{\zeta}_i - \zeta_i)^2}{\zeta_i} = 6,037 \cdot 10^{-6}. \quad (264)$$

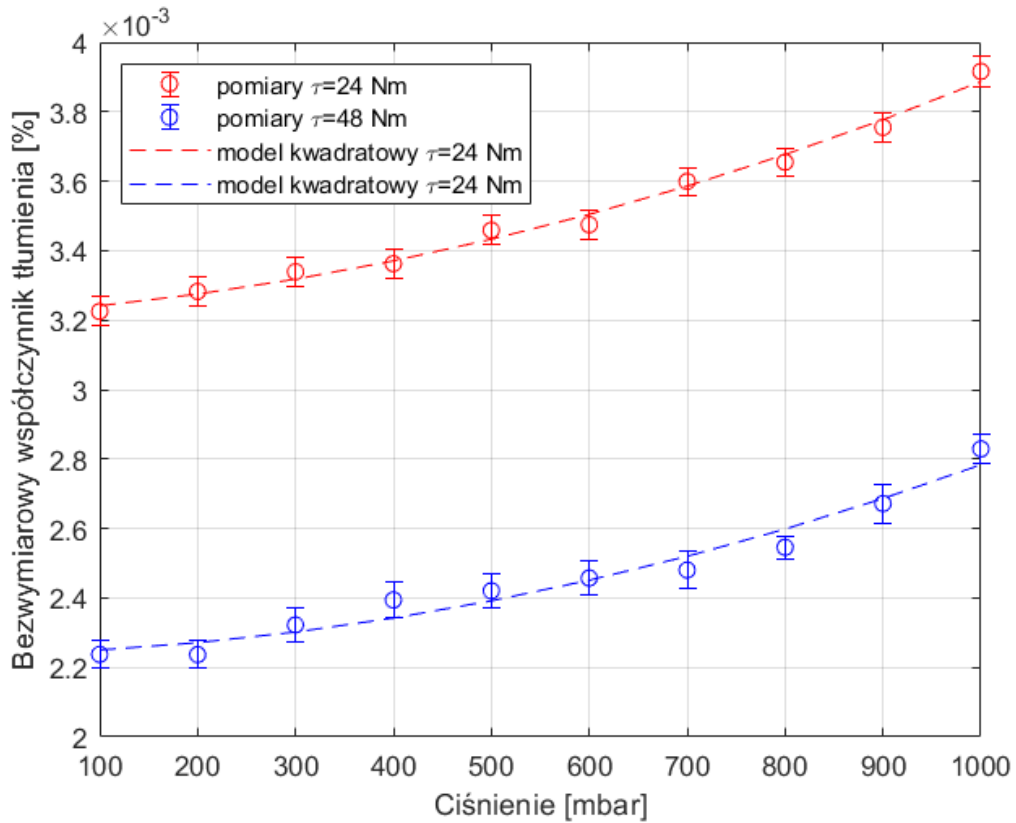
Wartość krytyczną  $\chi_{kr}^2$  wynosi (218):

$$\chi_{kr}^2 = 2,616 \cdot 10^{-12}. \quad (265)$$

Warunek (219):

$$\chi^2 > \chi_{kr}^2, \quad (266)$$

jest spełniony, a zatem równanie (263) jest adekwatne na poziomie istotności  $p = 0,05$ . Zależność otrzymaną dzięki modelowi kwadratowemu przedstawiono na rysunku. Rysunek 43 przedstawia porównanie pomiędzy modelem kwadratowym a danymi pomiarowymi.



Rysunek 43. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania — model kwadratowy wraz z danymi pomiarowymi.

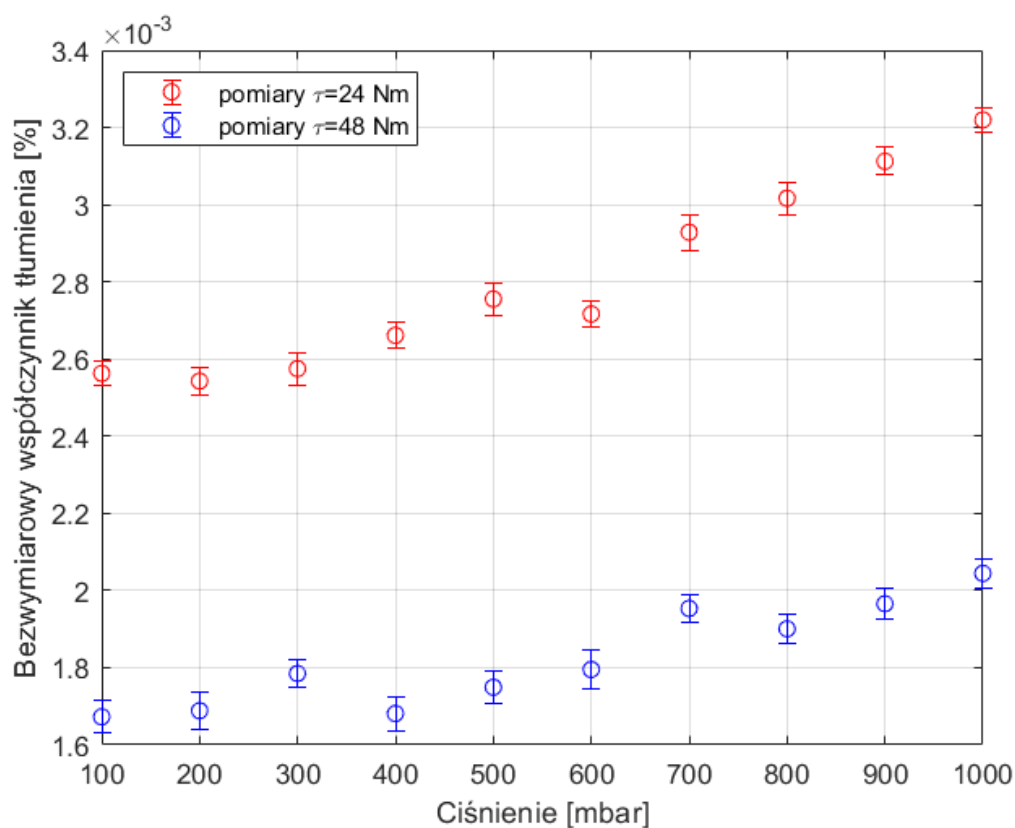
Porównując modele liniowy (rysunek 42) oraz kwadratowy (rysunek 43) można zauważyć, że model kwadratowy lepiej odzwierciedla dane pomiarowe. Sugeruje to kwadratową zależność między ciśnieniem atmosferycznym a bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia drgań:

$$\zeta \sim p^2. \quad (267)$$

Zgodnie z równaniami (5), (23) i (28), współczynnik tłumienia drgań  $\zeta$  jest wprost proporcjonalny do składowej siły oporu. W teorii [13] opór aerohydrodynamiczny jest proporcjonalny do powierzchni rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do wektora prędkości.

## 9.4 Wyniki pomiarów dla układu ze smarem MoS<sub>2</sub>

Podobny pomiar oraz analizę jak w podrozdziale 9.3 wykonano dla układu po naniesieniu warstwy MoS<sub>2</sub>. Tabela 23 przedstawia średni współczynnik tłumienia, tabela 24 odchylenie standardowe współczynnika tłumienia, a tabela 25 wariancję współczynnika tłumienia. Dane z tabeli 23 przedstawiono w formie wykresu na rysunku 44.



Rysunek 44. Zależność między współczynnikiem tłumienia a ciśnieniem dla różnych momentów dokręcania dla przypadku ze smarowaniem MoS<sub>2</sub>.

Tabela 23. Średni współczynnik tłumienia dla przypadku ze smarowaniem MoS<sub>2</sub>.

| Ciśnienie powietrze<br>[mbar] | Moment dokręcania [Nm] |         | $\bar{\zeta}_j$          |
|-------------------------------|------------------------|---------|--------------------------|
|                               | 24                     | 48      |                          |
| 100                           | 0,2563%                | 0,1673% | 0,2118%                  |
| 200                           | 0,2543%                | 0,1688% | 0,2116%                  |
| 300                           | 0,2575%                | 0,1785% | 0,2180%                  |
| 400                           | 0,2661%                | 0,1681% | 0,2171%                  |
| 500                           | 0,2756%                | 0,1749% | 0,2252%                  |
| 600                           | 0,2717%                | 0,1795% | 0,2256%                  |
| 700                           | 0,2928%                | 0,1953% | 0,2441%                  |
| 800                           | 0,3016%                | 0,1901% | 0,2459%                  |
| 900                           | 0,3112%                | 0,1966% | 0,2539%                  |
| 1000                          | 0,3220%                | 0,2044% | 0,2632%                  |
| $\bar{\zeta}_i$               | 0,2809%                | 0,1824% | $\bar{\zeta} = 0,2316\%$ |

Tabela 24. Odchylenie standardowe współczynnika tłumienia dla przypadku ze smarowaniem MoS<sub>2</sub>.

| Ciśnienie powietrze [mbar] | Moment dokręcania [Nm] |         |
|----------------------------|------------------------|---------|
|                            | 24                     | 48      |
| 100                        | 0,0021%                | 0,0021% |
| 200                        | 0,0020%                | 0,0020% |
| 300                        | 0,0021%                | 0,0021% |
| 400                        | 0,0020%                | 0,0020% |
| 500                        | 0,0021%                | 0,0021% |
| 600                        | 0,0020%                | 0,0020% |
| 700                        | 0,0025%                | 0,0025% |
| 800                        | 0,0025%                | 0,0025% |
| 900                        | 0,0026%                | 0,0016% |
| 1000                       | 0,0027%                | 0,0021% |

Tabela 25. Wariancja współczynnika tłumienia dla przypadku ze smarowaniem MoS<sub>2</sub>.

| Ciśnienie powietrze [mbar] | Moment dokręcania [Nm] |                       |
|----------------------------|------------------------|-----------------------|
|                            | 24                     | 48                    |
| 100                        | $2,68 \cdot 10^{-10}$  | $3,01 \cdot 10^{-10}$ |
| 200                        | $4,52 \cdot 10^{-10}$  | $2,93 \cdot 10^{-10}$ |
| 300                        | $4,32 \cdot 10^{-10}$  | $3,16 \cdot 10^{-10}$ |
| 400                        | $5,22 \cdot 10^{-10}$  | $4,32 \cdot 10^{-10}$ |
| 500                        | $3,17 \cdot 10^{-10}$  | $2,66 \cdot 10^{-10}$ |
| 600                        | $4,36 \cdot 10^{-10}$  | $5,96 \cdot 10^{-10}$ |
| 700                        | $2,93 \cdot 10^{-10}$  | $4,94 \cdot 10^{-10}$ |
| 800                        | $4,51 \cdot 10^{-10}$  | $6,06 \cdot 10^{-10}$ |
| 900                        | $3,22 \cdot 10^{-10}$  | $3,50 \cdot 10^{-10}$ |
| 1000                       | $4,14 \cdot 10^{-10}$  | $3,46 \cdot 10^{-10}$ |

Postawiona została hipoteza zerowa:

Ciśnienie powietrza oraz moment dokręcania nie mają wpływu na współczynnik tłumienia dla układu smarowanego MoS<sub>2</sub>.

Przyjęty został poziom istotności  $p = 0,05$ . Na podstawie zależności (204) i (205) obliczono wskaźniki  $F_I$  oraz  $F_{II}$ :

$$F_I = \frac{S_I}{S_R} \cdot \frac{(p-1)(q-1)}{(p-1)} = 65,49 \quad (268)$$

$$F_{II} = \frac{S_{II}}{S_R} \cdot \frac{(p-1)(q-1)}{(p-1)} = 8,64. \quad (269)$$



Stwierdzono, że oba warunki (212) i (213) zostały spełnione, a zatem hipoteza zerowa zostaje odrzucona. Prawdziwa jest zatem hipoteza:

Zarówno ciśnienie powietrza jak i moment dokręcania mają istotny wpływ na współczynnik tłumienia dla układu smarowanego MoS<sub>2</sub>.

Oznacza to potwierdzenie hipotezy niniejszej pracy:

Środowisko i warunki mocowania elementu mają wpływ na jego drgania, w szczególności na ich tłumienie dla układów smarowanych smarem MoS<sub>2</sub>.

### 9.4.1 Model liniowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań

W celu kwantyfikacji wpływu ciśnienia powietrza  $p$  i momentu dokręcania  $\tau$  na współczynnik tłumienia drgań  $\zeta$ , na podstawie danych doświadczalnych zawartych w tabeli 26, przygotowano plan dwupoziomowy z uwzględnieniem interakcji [231]. Matrycę planu PS/DK 2<sup>2</sup> z uwzględnieniem interakcji przedstawiono w tabeli 26.

Tabela 26. Matryca planu PS/DK 2<sup>2</sup> z uwzględnieniem interakcji

| i | x <sub>0</sub> | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>1</sub> x <sub>2</sub> | $\bar{y}$ | S <sup>2</sup> (y)     | $\hat{y}$ |
|---|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-----------|------------------------|-----------|
| 1 | +1             | +1             | +1             | +1                            | 0,2044%   | 3,46·10 <sup>-10</sup> | 0,2007%   |
| 2 | +1             | +1             | -1             | -1                            | 0,3220%   | 4,14·10 <sup>-10</sup> | 0,3160%   |
| 3 | +1             | -1             | +1             | -1                            | 0,1672%   | 3,01·10 <sup>-10</sup> | 0,1640%   |
| 4 | +1             | -1             | -1             | +1                            | 0,2563%   | 2,68·10 <sup>-10</sup> | 0,2458%   |

Równanie regresji ma zatem postać:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 = \\ &= 2,375 \cdot 10^{-3} + 2,571 \cdot 10^{-6} \cdot x_1 - 5,163 \cdot 10^{-4} \cdot x_2 + 7,13 \cdot 10^{-5} \cdot x_1x_2. \end{aligned} \quad (270)$$

Wartości ( $\hat{y}$ ) obliczone z równania (270) zamieszczono w ostatniej kolumnie tabeli 26. Jak widać, zgadzają się one do 2 miejsc po przecinku. Adekwatność równania oceniono obliczając wartość wariancji adekwatności:



$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{N} = 2,967 \cdot 10^{-9}. \quad (271)$$

Empiryczną wartość współczynnika  $F$  Fischera-Snedecora można obliczyć ze wzoru:

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S^2(y)} = 8,935 \cdot 10^{-3} \quad (272)$$

a wartość  $F_{kr}$  wynosi:

$$F_{kr} = F(p, f) = F(0,05, 4) = 0,3804. \quad (273)$$

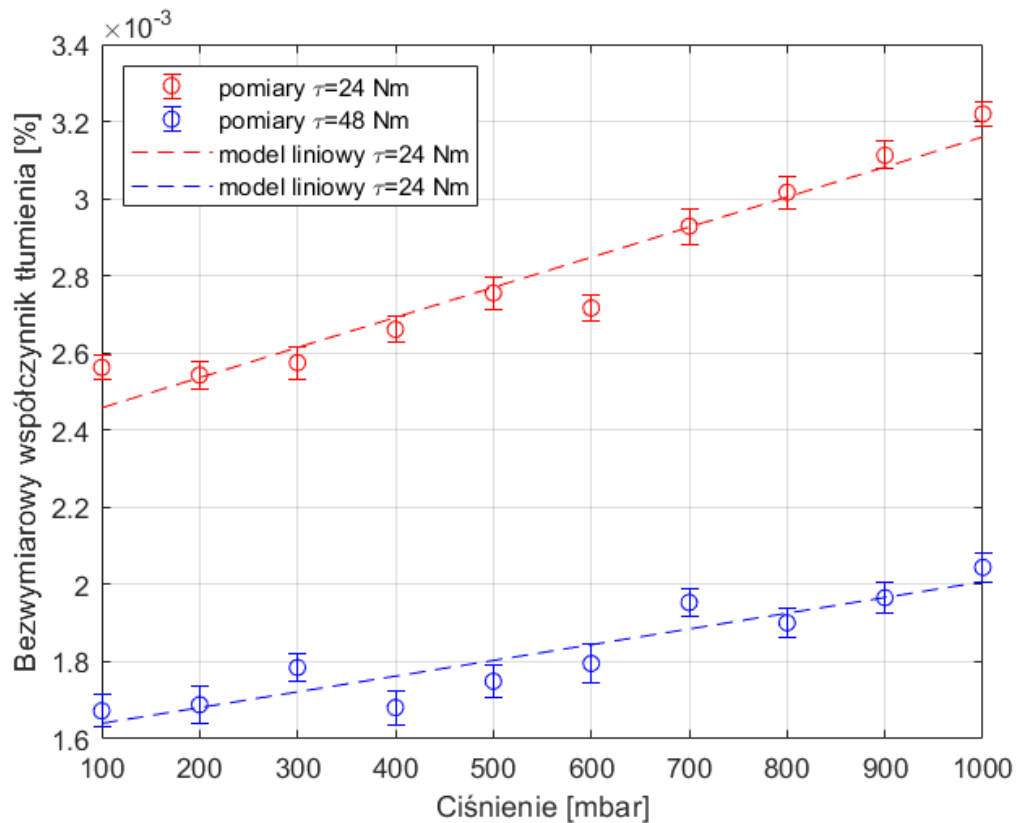
Spełniony jest zatem warunek:  $F < F_{kr}$ , a zatem równanie regresji (270) można uznać za adekwatne na poziomie istotności  $p = 0,05$ . Po podstawieniu równań kodujących (234) i (235) do równania regresji (270), otrzymujemy zależność współczynnika tłumienia  $\zeta$  od ciśnienia powietrza  $p$  oraz momentu dokręcania  $\tau$  dla układu smarowanego smarem MoS<sub>2</sub>:

$$\hat{\zeta} = 2,375 \cdot 10^{-3} + 2,571 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(p-750)}{250} - 5,163 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{(\tau-36)}{12} + 7,132 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(p-750)(\tau-36)}{250 \cdot 12}, \quad (274)$$

a po uproszczeniu:

$$\hat{\zeta} = (3,346 \cdot 10^{-3}) + (1,047 \cdot 10^{-6}) \cdot p - (3,576 \cdot 10^{-5}) \cdot \tau + (1,321 \cdot 10^{-8}) \cdot p \cdot \tau, \quad (275)$$

gdzie wartości  $p$  powinny być podstawiane w [mbar], a  $\tau$  w [Nm]. Zależność otrzymaną dzięki modelowi liniowemu przedstawiono na rysunku. Rysunek 45 przedstawia porównanie pomiędzy modelem liniowym a danymi pomiarowymi.



Rysunek 45. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania dla przypadku ze smarowaniem MoS<sub>2</sub> — model liniowy wraz z danymi pomiarowymi.

### 9.4.2 Model kwadratowy wpływu badanych warunków na tłumienie drgań

Opracowano również kwadratowy model zależności między ciśnieniem powietrza  $p$  oraz momentem dokręcania  $\tau$  a współczynnikiem tłumienia  $\zeta$ . Model kwadratowy ma postać:

$$\hat{\zeta} = b_0 + b_1 p + b_2 \tau + b_{12} p \tau + b_{11} p^2 + b_{22} \tau^2. \quad (276)$$

Podobnie jak w podrozdziale 9.3.2, obliczono wyznaczono zależność korzystając z danych doświadczalnych z tabeli 23. Zależność współczynnika tłumienia  $\zeta$  od ciśnienia powietrza  $p$  oraz momentu dokręcania  $\tau$  dla układu smarowanego smarem MoS<sub>2</sub>:

$$\hat{\zeta} = 1,070 \cdot 10^{-5} + (6,110 \cdot 10^{-7})p + (1,711 \cdot 10^{-4})\tau + (-1,551 \cdot 10^{-8})p\tau + (4,921 \cdot 10^{-10})p^2 + (-2,823 \cdot 10^{-6})\tau^2. \quad (277)$$

Adekwatność równania oceniono przy pomocy testu  $\chi^2$ . Przyjęty został poziom istotności  $p = 0,05$ . Obliczona została w tym celu statystyka testowa:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(\hat{\zeta}_i - \zeta_i)^2}{\zeta_i} = 1,588 \cdot 10^{-5}. \quad (278)$$

Wartość krytyczna  $\chi_{kr}^2$  wynosi (218):

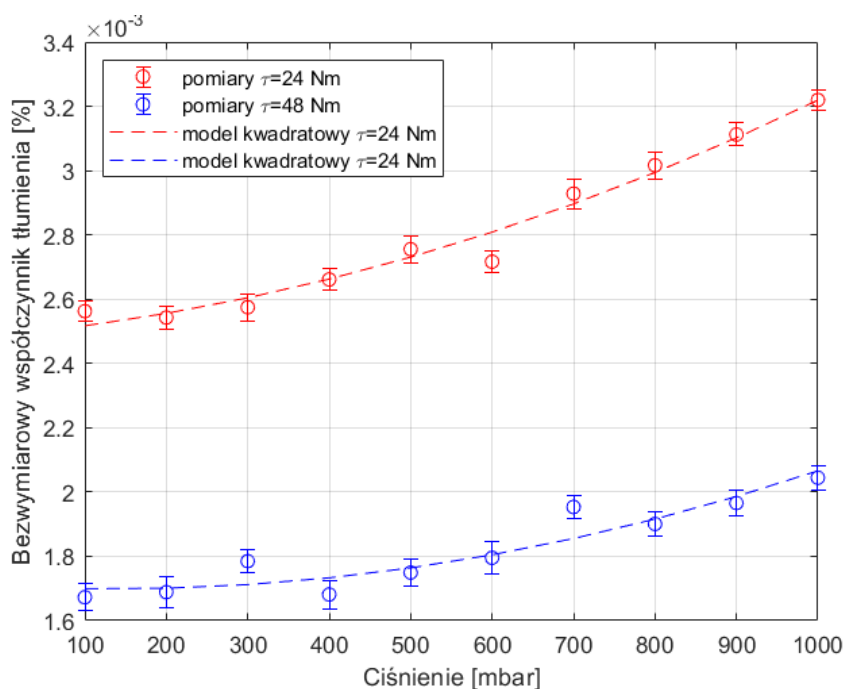
$$\chi_{kr}^2 = 1,800 \cdot 10^{-5}. \quad (279)$$

Warunek (219):

$$\chi^2 < \chi_{kr}^2, \quad (280)$$

jest spełniony, a zatem równanie (277) jest adekwatne na poziomie istotności  $p = 0,05$ .

Zależność otrzymaną dzięki modelowi kwadratowemu przedstawiono na rysunku 46.



Rysunek 46. Zależność pomiędzy bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia od ciśnienia i momentu dokręcania dla przypadku ze smarowaniem MoS<sub>2</sub> — model kwadratowy wraz z danymi pomiarowymi.

Podobnie jak w przypadku bez smarowania, model kwadratowy lepiej odzwierciedla dane pomiarowe, co potwierdza kwadratową zależność między ciśnieniem a bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia (por. (266)).

## 10 Identyfikacja współczynnika tarcia

### 10.1 Wstęp

Autorzy Popp, Panning i Sextro wykazali, że siły tarcia w kontaktach ciernych części maszyn mogą służyć do zwiększenia tłumienia drgań [241]. Pozwoliło to na zmniejszenie ryzyka utraty stateczności i zniszczenia obiektu. W swojej pracy porównali modele kontaktów, a także zaproponowali przykłady wykorzystania tarcia do tłumienia drgań. Autorzy Pust, Pesek, Radolfowa przedstawili w [242] przegląd modeli matematycznych procesu tarcia z uwzględnieniem wpływu na tłumienie drgań. W [243] Dahl dokonał przeglądu zastosowań zjawiska tarcia w celu tłumienia drgań w inżynierii lotniczej i kosmicznej.

W inżynierii kosmicznej, a w szczególności w pracach dotyczących tribologii kosmicznej, ważnym parametrem jest współczynnik tarcia. Szereg prac i prowadzonych badań ma na celu wyznaczenie wartości współczynnika tarcia dla danego skojarzenia materiałów i warunków. Jak wykazał Łubiński [164], współczynnik tarcia jest cechą systemu, a nie materiału, zatem zależy zarówno od materiałów użytych w układzie, jak i geometrii obciążenia, dynamiki, itd.

W układzie doświadczalnym opisanym w podrozdziale 9.2 niniejszej pracy, występuje kontakt części: belki jednostronnie utwierdzonej i docisku. Modyfikowano środowisko tego kontaktu: termiczne (ciśnienie), mechaniczne (moment dokręcania) oraz tribochemiczne (brak smaru oraz dwusiarczek molibdenu jako smar). W podrozdziałach 9.3 i 9.4, wyznaczona została doświadczalnie zależność pomiędzy warunkami a współczynnikiem tłumienia.

W celu uzyskania kompletności badań, zaproponowano wyznaczenie wpływu warunków zamocowania i środowiskowych na współczynnik tarcia. Wyznaczono zależność pomiędzy współczynnikiem tarcia a współczynnikiem tłumienia drgań.

Współczynnik tarcia jest parametrem wejściowym modelu przy rozwiązywaniu zagadnień typu *transient*. W takim razie, problem jego wyznaczenia na podstawie przebiegu przemieszczeń układu jest zadaniem odwrotnym [244]. W niniejszej pracy zaproponowano alternatywne podejście. Spodziewany zidentyfikowany współczynnik tarcia  $\mu$  jest z liczbą rzeczywistą z zakresu [0; 1]. Rozwiązano wielokrotnie zagadnienie proste wyznaczenia przebiegu drgań

swobodnych układu dla zadanego za każdym razem innego zbioru współczynników tarcia  $\mu$ :

$$\mu \in [0,02 \ 0,04 \ 0,06 \dots \ 0,50]. \quad (281)$$

Na podstawie przebiegu czasowego uzyskanego w wyniku symulacji, zidentyfikowano współczynnik tłumienia zgodnie z metodą opisaną w rozdziale 8. Następnie wyznaczono doświadczalnie zależność współczynnika tłumienia  $\zeta$  od współczynnika tarcia  $\mu$ :

$$\zeta = \zeta(\mu) \quad (282)$$

a następnie wyznaczono analitycznie zależność odwrotną:

$$\mu = \mu(\zeta). \quad (283)$$

Korzystając z opracowanej w podrozdziale 9.3 zależności pomiędzy współczynnikiem tłumienia  $\zeta$  a wybranymi warunkami, opracowano zależność współczynnika tarcia  $\mu$  od ciśnienia  $p$  i momentu dokręcania  $\tau$  w danym zadaniu:

$$\mu = \mu(p, \tau). \quad (284)$$

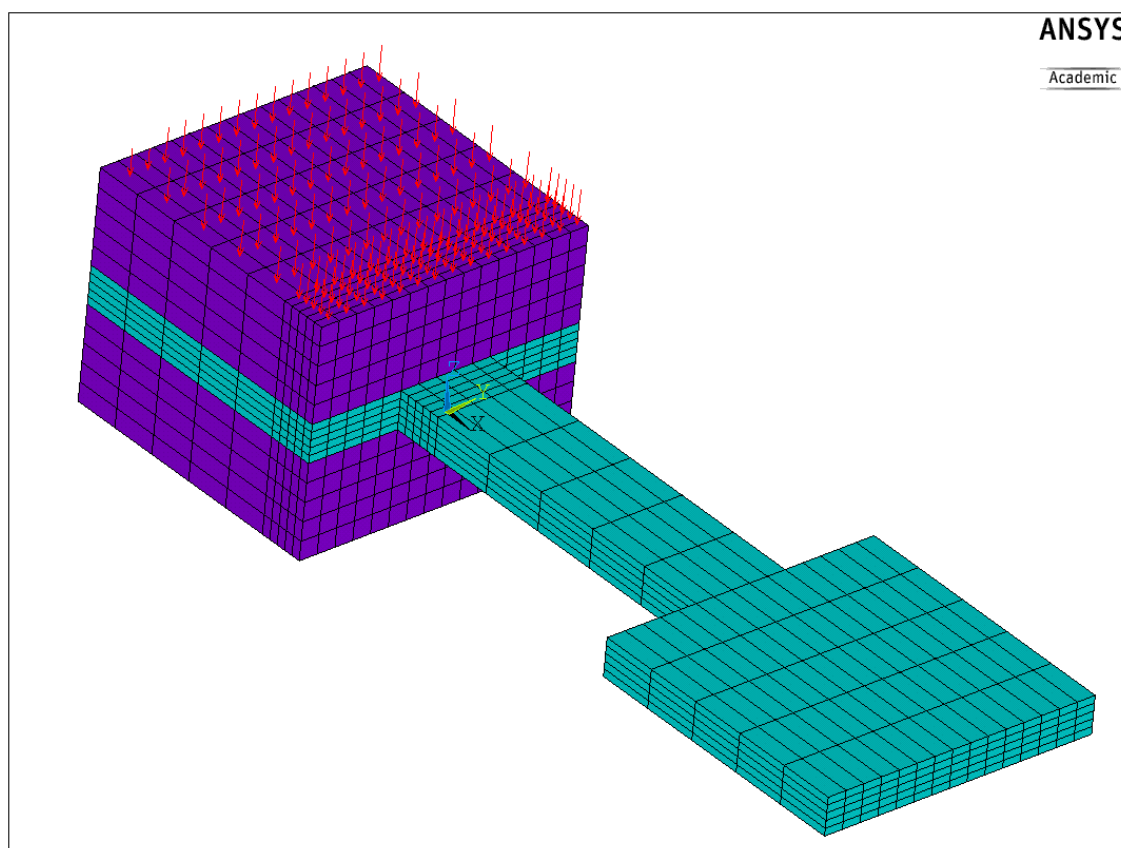
## 10.2 Model obliczeniowy

Aby zasymulować przemieszczenia pod wpływem niezerowego warunku początkowego (odchylenie początkowe) układu doświadczalnego, posłużono się modelem w konwencji metody elementów skończonych (MES) w środowisku ANSYS 21. Danymi do modelu była geometria układu pozyskana z modelu CAD (patrz rysunek 36), parametry materiałowe (patrz tabela 27 [245]) oraz współczynnik tarcia.

Tabela 27. Dane materiałowe użyte w zadaniu.

| <b>dana materiałowa</b> | <b>oznaczenie</b>           | <b>Aluminium PA 47 [245] Stal St5 [245]</b> |                     |
|-------------------------|-----------------------------|---|---------------------|
| gęstość                 | $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | $2,78 \cdot 10^3$                           | $7,81 \cdot 10^3$   |
| moduł Younga            | $E$ [Pa]                    | $7,0 \cdot 10^{10}$                         | $2,1 \cdot 10^{11}$ |
| liczba Poissona         | $\nu_{rxy}$ [-]             | 0,3   | 0,3                 |

Na rysunku 47 przedstawiono podział modelu na elementy skończone. Fioletowe elementy skończone odpowiadają elementom wykonanym ze stali, zielone — elementom wykonanym z aluminium.



Rysunek 47. Podział zadania na elementy skończone.

Nacisk zamodelowano jako ciśnienie  $p_{na}$  przyłożone do górnej powierzchni docisku (patrz rysunek 47). Wartość nacisku  $p_{na}$  została wyznaczona na podstawie siły osiowej  $F$  w śrubie dokręcaniej momentem  $\tau$ :

$$p_{na} = \frac{F(\tau)}{A_{docisk}}, \quad (285)$$

gdzie  $A_{docisk}$  oznacza pole powierzchni docisku. Wartość siły  $F$  została obliczona wg [240]:

$$F(\tau) = \frac{2 \cdot \tau}{d_p \cdot \tan(\rho + \gamma) + D_t \cdot \mu}, \quad (286)$$

gdzie:  $D_t$  jest średnicą, na której działa siła tarcia:

$$D_t = \frac{D_0 + d_0}{2}, \quad (287)$$

$d_0$  jest średnicą otworu,  $D_0$  jest średnicą łba śruby,  $\gamma$  kątem wzniosu linii śrubowej:

$$\gamma = \operatorname{atan}\left(\frac{h}{\pi \cdot d_p}\right), \quad (288)$$

$h$  jest skokiem gwintu,  $\rho$  jest kątem tarcia:

$$\rho = \operatorname{atan}(\mu), \quad (289)$$

a  $d_p$  jest średnicą podziałową śruby. Warunkiem początkowym w zadaniu było odkształcenie statyczne belki o wartość  $x_0 = 1,0$  mm.

Do zamodelowania struktury obiektu użyto elementów typu SOLID186. Do zamodelowania kontaktu użyto elementów typu CONTA174 i TARGE170. W tabeli 28 przedstawiono podsumowanie typów elementów. Szczegółowy opis elementów zawarto w rozdziale 5.

Tabela 28. Podsumowanie parametrów elementów skończonych.

| typ elementu skończonego | rysunek | liczba węzłów | wymiary |
|--------------------------|---------|---------------|---------|
| <b>SOLID186</b>          |         | 20            | 3D      |
| <b>CONTA174</b>          |         | 8             | 3D      |

|          |  |   |    |
|----------|--|---|----|
| TARGE170 |  | 8 | 3D |
|----------|--|---|----|

### 10.3 Obliczenia na superkomputerze Tryton

Jak wspomniano wyżej, przeprowadzono szereg obliczeń dla różnych wartości współczynnika tarcia. Obliczenia wykonano na komputerach Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej (w szczególności z użyciem superkomputera Tryton zlokalizowanego na Politechnice Gdańskiej) [246]. Każde zadanie obliczeniowe było rozwiązywane przy użyciu 16 rdzeni. Parametry superkomputera Tryton [247] przedstawiono w tabeli 29. Pojedyncze zadanie (symulacja przebiegu przemieszczeń o czasie trwania ok. 2 s) trwało 36 godzin.

Tabela 29. Parametry superkomputera Tryton.

|                          |  |
|--------------------------|--|
| <b>Procesory</b>         | 3214 procesorów Intel® Xeon® Processor E5 v3 @ 2,3 GHz, 12-core (Haswell)  |
| <b>Akceleratory</b>      | Nvidia Tesla, Intel Xeon Phi, AMD FirePro                                  |
| <b>Pamięć</b>            | 128/256 GB RAM DDR4 na serwer  |
| <b>Sieć</b>              | InfiniBand FDR 56 Gb/s, topologia <i>fat tree</i> , przełączniki Mellanox  |
| <b>Razem</b>             | 1607 serwerów, 3214 procesorów, 38568 rdzeni, 48 akceleratorów, 218 TB RAM |
| <b>Szafy</b>             | 44 szt.  |
| <b>System operacyjny</b> | Linux  |
| <b>Moc obliczeniowa</b>  | 1,48 PFLOPS  |



## 10.4 Wyniki

Na rysunku 48 przedstawiono przykładowy symulowany przebieg przemieszczeń dla współczynnika tarcia  $\mu = 0,02$ . Na rysunku 49 przedstawiono podsumowanie opisanych powyżej symulacji – zmienność współczynnika tłumienia  $\zeta$  w zależności od współczynnika tarcia  $\mu$ .

Zależność pomiędzy współczynnikiem tłumienia  $\zeta$  a współczynnikiem tarcia  $\mu$  można przybliżyć funkcją liniową. Współczynnik korelacji Pearsona dla uzyskanych danych wynosi  $R = 0,9933$ . Można zatem zapisać zidentyfikowaną relację jako:

$$\zeta = 7,7562 \cdot 10^{-4} + 2,324 \cdot 10^{-3} \cdot \mu, \quad (290)$$

a zależność odwrotną jako:

$$\mu = 430,03 \cdot (\zeta - 7,7562 \cdot 10^{-4}). \quad (291)$$

Korzystając z wyznaczonej w podrozdziale 9.3.2 zależności pomiędzy współczynnikiem tłumienia a warunkami środowiskowymi (263), wyznaczyć można zależność  $\mu = \mu(p, \tau)$ , co było celem niniejszego rozdziału:

$$\hat{\mu} = (9.307 \cdot 10^{-2})p - (1.007 \cdot 10^{-3})\tau - (5.055 \cdot 10^{-6})p\tau + (1.212 \cdot 10^{-3})p^2 + (6.080 \cdot 10^{-7})\tau^2 - 3.2773 \cdot 10^{-1} \quad (292)$$

W tabeli 30 zamieszczono wartości współczynnika tarcia zidentyfikowane przy użyciu wzoru (292) na podstawie danych z pomiarów dla przypadku bez smaru (por. tabela 19).

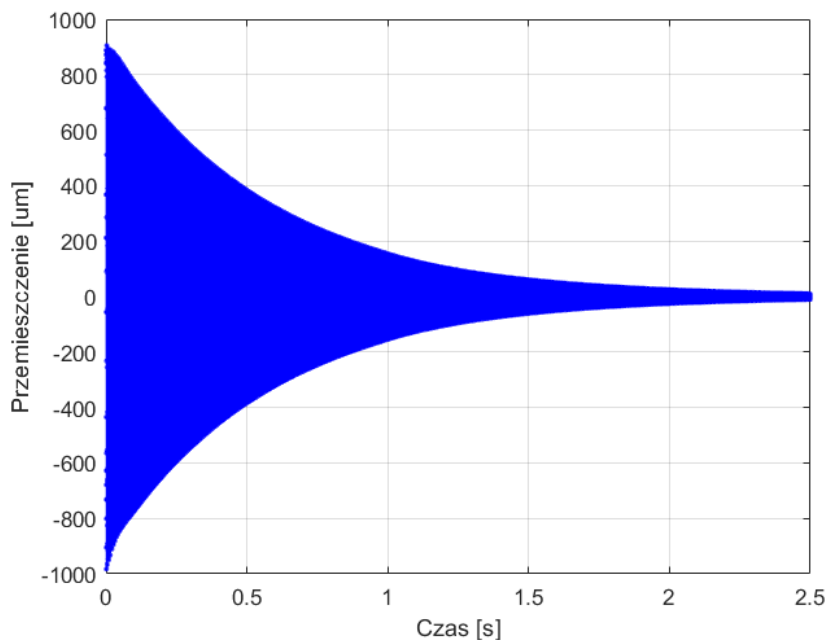
Tabela 30. Zidentyfikowane wartości współczynnika tarcia dla pomiarów bez smaru.

| Moment dokręcania [Nm] | Ciśnienie powietrza [mbar] |        |        |        |        |        |
|------------------------|----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        | 500                        | 600    | 700    | 800    | 900    | 1000   |
| 24                     | 0,6813                     | 0,6881 | 0,6987 | 0,7226 | 0,7485 | 0,7920 |

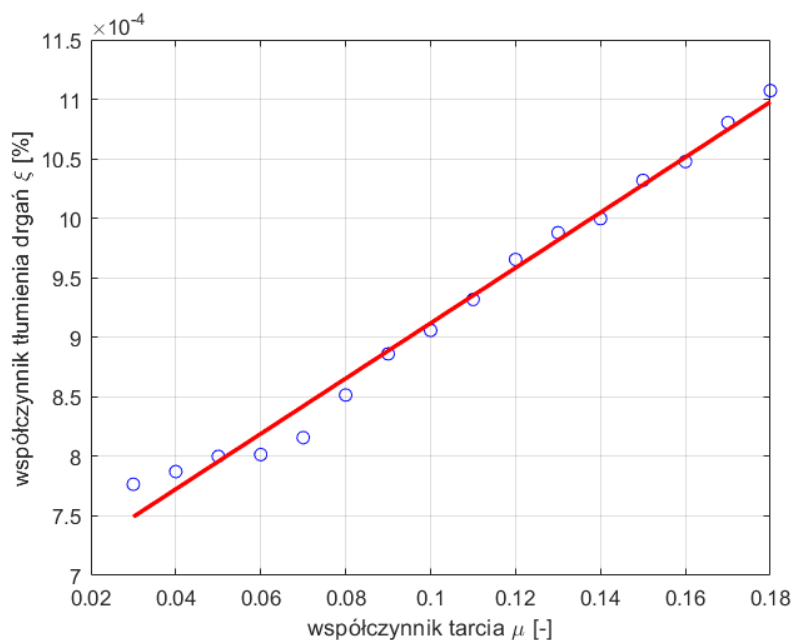
Wartości z tabeli 30 można porównać z tablicowym współczynnikiem tarcia stal-aluminium [245]:

$$\mu_{Al-Steel} = 0,61. \quad (293)$$

Wartość tablicowa współczynnika tarcia z równania (293) pochodzi z pomiaru tribometrycznego przeprowadzonego w określonych warunkach. Różnica między nim a zidentyfikowanym, oraz fakt, że zidentyfikowane współczynniki zmieniają się wraz ze zmianą ciśnienia powietrza potwierdza, że współczynnik tarcia powinien być rozumiany jako cecha systemu, a nie tylko skojarzenia materiałowego [164].



Rysunek 48. Przebieg przemieszczeń dla współczynnika tarcia  $\mu = 0.02$ .



Rysunek 49. Zależność pomiędzy współczynnikiem tłumienia  $\zeta$  a współczynnikiem tarcia  $\mu$ .

## 11 Wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono szereg rozważań literaturowych dotyczących drgań elementów obiektów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną. Przedstawiono także wyniki symulacji komputerowych oraz badań doświadczalnych. Łącznie, pozwalają one na sformułowanie poniższych wniosków dotyczących wpływu warunków zamocowania na drgania.

1. Środowisko dynamiczne obiektu wynoszonego w przestrzeń kosmiczną jest niezwykle wymagające w zakresie drgań. Istnieje więc potrzeba opracowania nowych metod modelowania takich drgań dla celów inżynierii kosmicznej.
2. Używane powszechnie w inżynierii kosmicznej smary stałe wykazują dużą zmienność parametrów pod wpływem środowiska i warunków zamocowania. Skutkuje to niepewnością co do wydajności pracy mechanizmów kosmicznych.
3. Powszechnie stosowane metody identyfikacji parametrów modalnych są czułe na szumy w danych pomiarowych. Ważny jest zatem dobór metody do specyfiki zagadnienia.
4. Autorska metoda identyfikacji współczynnika tłumienia oparta na transformacie Hilberta daje zadowalające wyniki na danych pomiarowych otrzymanych w ramach eksperymentów przeprowadzonych w niniejszej pracy.
5. Przedstawione badania eksperymentalne, które polegały na modyfikacji środowiska i warunków mocowania: termicznych (ciśnienie), mechanicznych (moment dokręcania) oraz tribochemicznych (brak smaru oraz dwusiarczek molibdenu jako smar) wraz z ich statystyczną analizą pozwoliły udowodnić następujące hipotezy:
  - a. Zarówno ciśnienie powietrza jak i moment dokręcania mają istotny wpływ na współczynnik tłumienia w warunkach bez smarowania.
  - b. Środowisko i warunki mocowania elementu mają wpływ na jego drgania, w szczególności na ich tłumienie w warunkach bez smarowania.
  - c. Zarówno ciśnienie powietrza jak i moment dokręcania mają istotny wpływ na współczynnik tłumienia dla układu smarowanego MoS<sub>2</sub>.

- d. Środowisko i warunki mocowania elementu mają wpływ na jego drgania, w szczególności na ich tłumienie dla układów smarowanych smarem MoS<sub>2</sub>.
6. Na podstawie badań doświadczalnych oraz symulacji komputerowej sformułowano zależność między współczynnikiem tłumienia a współczynnikiem tarcia. Pozwoliło to na opracowanie zależności pomiędzy środowiskiem i warunkami mocowania a współczynnikiem tarcia.

Potwierdzono zatem postawioną we wstępie tezę pracy, tj. potwierdzono, że tłumienie w warunkach wynoszenia ładunku w przestrzeń kosmiczną wynika głównie z tribochemicznych mechanizmów tarcia i tłumienia materiałowego oraz możliwy jest ilościowy opis wpływu tych parametrów na tłumienie.

Metody stosowane w poniższej pracy mogą posłużyć analizie drgań innych obiektów. W szczególności dotyczy to mechanizmów i struktur wynoszonych raketami w przestrzeń kosmiczną.

## 12 Literatura

- [1] W. J. Fiebig, *Drgania i hałas w inżynierii maszyn*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2020.
- [2] Z. Osiński, *Teoria drgań*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1980.
- [3] K. J. Kaliński, M. Chodnicki, i M. A. Galewski, „A mechatronic procedure of vibration surveillance during milling of a flexible workpiece”, w *Projektowanie mechatroniczne: zagadnienia wybrane: praca zbiorowa*, T. Uhl, Red. Kraków: Wydawnictwo AGH, 2012, ss. 56–63.
- [4] J. M. M. Silva i N. M. M. Maia, *Modal analysis and testing*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999. doi: 10.1007/978-94-011-4503-9.
- [5] W. Heylen, S. Lammens, i P. Sas, *Modal analysis theory and testing*. Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, 1998.
- [6] D. E. Brehl i T. A. Dow, „Review of vibration-assisted machining”, *Precision Engineering*, t. 32, nr 3, ss. 153–172, lip. 2008, doi: 10.1016/j.precisioneng.2007.08.003.
- [7] E. B. Magrab, *Vibrations of Elastic Systems*, t. 184. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. doi: 10.1007/978-94-007-2672-7.
- [8] M. L. Magnusson i M. H. Pope, „A review of the biomechanics and epidemiology of working postures (it isn't always vibration which is to blame!)”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 215, nr 4, ss. 965–976, sie. 1998, doi: 10.1006/jsvi.1998.1677.
- [9] E. Wittbrodt i S. Sawiak, *Mechanika ogólna: teoria i zadania*. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2014.
- [10] J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, i A. F. Vakakis, *Nonlinear Dynamics of Continuous Elastic Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. doi: 10.1007/978-3-662-08992-7.
- [11] M. Gürgöze, „On the representation of a cantilevered beam carrying a tip mass

- by an equivalent spring–mass system”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 282, nr 1–2, ss. 538–542, kwi. 2005, doi: 10.1016/J.JSV.2004.04.006.
- [12] J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.
- [13] D. Halliday, R. Resnick, i J. Walker, *Podstawy fizyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2015.
- [14] K. J. Kaliński, *Nadzorowanie procesów dynamicznych w układach mechanicznych*. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2012.
- [15] W. M. Siebert, *Circuits, Signals, and Systems*. MIT Press, 1985.
- [16] M. A. Galewski, „Spectrum-based modal parameters identification with Particle Swarm Optimization”, *Mechatronics*, t. 37, ss. 21–32, sie. 2016, doi: 10.1016/j.mechatronics.2015.11.006.
- [17] P.-Y. Lin, W.-B. Shieh, i D.-Z. Chen, „Design of perfectly statically balanced one-DOF planar linkages with revolute joints only”, *Journal of Mechanical Design*, t. 131, nr 5, ss. 0510041–0510049, maj 2009, doi: 10.1115/1.3087548.
- [18] M. A. Koç, „Fuzzy logic control of vibrations due to interaction one DOF vehicle suspension and flexible structure with tuned mass damper”, *Journal of Smart Systems Research (JOINSSR)*, t. 1, nr 1, ss. 1–10, 2020.
- [19] K. Nandakumar i M. Wiercigroch, „Stability analysis of a state dependent delayed, coupled two DOF model of drill-stringvibration”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 332, nr 10, ss. 2575–2592, maj 2013, doi: 10.1016/j.jsv.2012.12.020.
- [20] F. Ayazi, „Multi-DOF inertial MEMS: from gaming to dead reckoning”, w *2011 16th International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference*, cze. 2011, ss. 2805–2808. doi: 10.1109/TRANSDUCERS.2011.5969885.
- [21] M. A. Underwood i T. Keller, „Applying coordinate transformations to multi-DOF shaker control”, *Sound and Vibration*, t. 40, nr 1, ss. 22–27, 2006.
- [22] W. Ma, Y. Yang, i J. Yu, „General routine of suppressing single vibration mode by multi-DOF tuned mass damper: Application of three-DOF”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 121, ss. 77–96, kwi. 2019, doi:

10.1016/J.YMSSP.2018.11.010.

- [23] G. Quintana i J. Ciurana, „Chatter in machining processes: A review”, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, t. 51, nr 5, ss. 363–376, maj 2011, doi: 10.1016/J.IJMACHTOOLS.2011.01.001.
- [24] F. Lane, „System mode shapes in the flutter of compressor blade rows”, *Journal of the Aeronautical Sciences*, t. 23, nr 1, ss. 54–66, sty. 1956, doi: 10.2514/8.3502.
- [25] C. Collette, S. Janssens, i K. Artoos, „Review of active vibration isolation strategies”, *Recent Patents on Mechanical Engineering*, t. 4, nr 3, ss. 212–219, wrz. 2011, doi: 10.2174/2212797611104030212.
- [26] S. E. Ruiz, „Review of guidelines for seismic design of structures with damping systems”, *The Open Civil Engineering Journal*, t. 12, nr 1, ss. 195–204, cze. 2018, doi: 10.2174/1874149501812010195.
- [27] D. Greatrix i P. Harris, „Structural vibration considerations for solid rocket internal ballistics modeling”, *36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, lip. 2000, doi: 10.2514/6.2000-3804.
- [28] V. Ramamurti, S. Rajarajan, i G. V. Rao, „Elastic response of a typical CFRP payload fairing due to separation impulse”, *Composite Structures*, t. 45, nr 2, ss. 147–154, cze. 1999, doi: 10.1016/S0263-8223(99)00017-3.
- [29] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006. doi: 10.1002/9780470117866.
- [30] H. Ding, Y. Li, i L.-Q. Chen, „Nonlinear vibration of a beam with asymmetric elastic supports”, *Nonlinear Dynamics*, t. 95, nr 3, ss. 2543–2554, 2019, doi: 10.1007/s11071-018-4705-0.
- [31] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, i J. Z. Zhu, *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier, 2013. doi: 10.1016/C2009-0-24909-9.
- [32] J. Kruszewski, S. Sawiak, i E. Wittbrodt, *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji*. Warszawa: Wydawnictwo WNT, 1999.

- [33] E. Wittbrodt, I. Adamiec-Wójcik, i S. Wojciech, *Dynamics of flexible multibody systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. doi: 10.1007/978-3-540-32352-5.
- [34] J. Warminski i K. Kecik, „Autoparametric vibrations of a nonlinear system with pendulum”, *Mathematical Problems in Engineering*, t. 2006, s. 80705, 2006, doi: 10.1155/MPE/2006/80705.
- [35] F. C. Moon i S. W. Shaw, „Chaotic vibrations of a beam with non-linear boundary conditions”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, t. 18, nr 6, ss. 465–477, sty. 1983, doi: 10.1016/0020-7462(83)90033-1.
- [36] J. J. Wijker, *Random vibrations in spacecraft structures design*, t. 165. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009. doi: 10.1007/978-90-481-2728-3.
- [37] P. Wilke, C. Johnson, P. Grosserode, i D. Sciulli, „Whole-spacecraft vibration isolation for broadband attenuation”, *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, t. 4, ss. 315–321, 2000, doi: 10.1109/AERO.2000.878442.
- [38] A. R. Kolaini, W. Tsuha, i J. P. Fernandez, „Spacecraft vibration testing: benefits and potential issues”, *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, t. 5, nr 2, ss. 165–175, 2018, doi: 10.12989/aas.2018.5.2.165.
- [39] J. D. Smith, *Vibration measurement and analysis*. Elsevier, 1989. doi: 10.1016/C2013-0-04117-5.
- [40] G. Buzdugan, E. Mihăilescu, i M. Radeş, *Vibration measurement*, t. 8. Dordrecht: Springer Netherlands, 1986. doi: 10.1007/978-94-017-3645-9.
- [41] A. Zatorski i R. Sroka, *Podstawy metrologii elektrycznej. Przykłady i testy*. Kraków: Wydawnictwo AGH, 2018.
- [42] C. Walber, P. L. Walter, i S. Seidlitz, *Sensors and instrumentation, aircraft/aerospace, energy harvesting & dynamic environments testing*, 7. wyd. Cham: Springer International Publishing, 2021. doi: 10.1007/978-3-030-47713-4.
- [43] C. D. Johnson i P. S. Wilke, „Whole-spacecraft shock isolation system”, *Smart Structures and Materials 2002: Damping and Isolation*, t. 4697, ss. 1–8, cze.



2002, doi: 10.1117/12.472644.

- [44] „ADXL1001 Datasheet and Product Info”, *Analog Devices*, 2021.  
<https://www.analog.com/en/products/adxl1001.html> (udostępniono sie. 28, 2021).
- [45] A. C. Tribble, *The Space Environment*. Princeton University Press, 2004. doi: 10.1515/9780691213071.
- [46] B. Żółtowski i M. Łukasiewicz, *Diagnostyka drganiowa maszyn*. Bydgoszcz: Sieć Badawcza Łukasiewicz - Instytut Technologii Eksploatacji z siedzibą w Radomiu, 2012.
- [47] S. Shokrollahi, F. Adel, i H. Ahmadian, „An investigation into the accelerometer mounting effects on signal transmissibility in modal measurements”, *Scientia Iranica*, t. 24, nr 5, ss. 2436–2444, 2017, doi: 10.24200/sci.2017.4244.
- [48] „TN-5 Mounting techniques”, *PCB Piezotronics*, 2022.  
[https://www.pcb.com/contentstore/mktgcontent/linkedddocuments/technotes/TN\\_5\\_MountingTechniques.pdf](https://www.pcb.com/contentstore/mktgcontent/linkedddocuments/technotes/TN_5_MountingTechniques.pdf)
- [49] T. Dobrowolski, J. Tomasik, K. Tandecka, M. Magdziak, i R. Reizer, „Measuring noise as a component of uncertainty measurements of the surface texture”, *Mechanik*, t. 91, nr 12, ss. 1132–1135, grudz. 2018, doi: 10.17814/mechanik.2018.12.202.
- [50] P. R. Saulson, „Thermal noise in mechanical experiments”, *Physical Review D*, t. 42, nr 8, s. 2437, paź. 1990, doi: 10.1103/PhysRevD.42.2437.
- [51] F. A. Levinzon, „Fundamental noise limit of piezoelectric accelerometer”, *IEEE Sensors Journal*, t. 4, nr 1, ss. 108–111, luty 2004, doi: 10.1109/JSEN.2003.820366.
- [52] L. Yuntao, L. Xiaowei, C. Weiping, i W. Qun, „Design and noise analysis of a sigma–delta capacitive micromachined accelerometer”, *Journal of Semiconductors*, t. 31, nr 5, s. 055006, maj 2010, doi: 10.1088/1674-4926/31/5/055006.
- [53] M. Lobur, Y. Darnobyty, i R. Kryvyty, „Methods of car speed measurement based

on Doppler's effect", w *2011 11th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM)*, 2011, ss. 394–396.

- [54] K. Pelzner, „Optymalizacja procesu pomiaru parametrów termicznych dla modelu rakiety”, praca magisterska, Politechnika Gdańska, 2019.
- [55] A. Gierse *i in.*, „Experimental in-flight modal-analysis of a sounding rocket structure”, w *21st ESA Symposium on Rocket and Ballon related Research*, cze. 2013, ss. 341–346.
- [56] M. Baader, „FLOMESS - Flight Loading Measurement System for Sounding Rockets”, w *Proceedings of the 3rd Symposium on Space Educational Activities*, lip. 2020, ss. 198–203. doi: 10.29311/2020.49.
- [57] A. Dąbrowski, K. Pelzner, S. Krawczuk, J. Goczkowski, i A. Elwertowska, „Preliminary results from HEDGEHOG REXUS project – A sounding rocket experiment on accelerations, vibrations and heat flow”, *Acta Astronautica*, t. 177, ss. 80–85, grudz. 2020, doi: 10.1016/j.actaastro.2020.07.016.
- [58] A. Sabato, M. Q. Feng, Y. Fukuda, D. L. Carni, i G. Fortino, „A novel wireless accelerometer board for measuring low-frequency and low-amplitude structural vibration”, *IEEE Sensors Journal*, t. 16, nr 9, ss. 2942–2949, maj 2016, doi: 10.1109/JSEN.2016.2522940.
- [59] T. K. Sethuramalingam i A. V. Juliet, „Measuring low frequency vibration using MEMS based accelerometer”, *5th International Conference on MEMS NANO, and Smart Systems, ICMENS 2009*, ss. 162–165, 2009, doi: 10.1109/ICMENS.2009.27.
- [60] Y. Nemirovsky, A. Nemirovsky, P. Muralt, i N. Setter, „Design of novel thin-film piezoelectric accelerometer”, *Sensors and Actuators A: Physical*, t. 56, nr 3, ss. 239–249, wrz. 1996, doi: 10.1016/S0924-4247(96)01324-6.
- [61] Y.-H. Wang *i in.*, „A paper-based piezoelectric accelerometer”, *Micromachines*, t. 9, nr 1. 2018. doi: 10.3390/mi9010019.
- [62] K. K. Sappati i S. Bhadra, „Piezoelectric polymer and paper substrates: a

- review”, *Sensors (Basel, Switzerland)*, t. 18, nr 11, paź. 2018, doi: 10.3390/s18113605.
- [63] M. Miłek, *Metrologia elektryczna wielkości nieelektrycznych*. Zielona Góra: Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, 2006.
- [64] M. Varanis, A. Silva, A. Mereles, i R. Pederiva, „MEMS accelerometers for mechanical vibrations analysis: a comprehensive review with applications”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, t. 40, nr 11, s. 527, 2018, doi: 10.1007/s40430-018-1445-5.
- [65] H. R. Shea, „Reliability of MEMS for space applications”, w *Proc. SPIE 6111, Reliability, Packaging, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS*, sty. 2006, t. 6111, s. 61110A. doi: 10.1117/12.651008.
- [66] H. L. Libby, „Eddy current ultrasonic transducer”, Richland, WA, USA, 1959. [Online]. Dostępne na: <https://www.osti.gov/biblio/4171175>
- [67] M. Stencel i P. Piwowar, „Model i badania czujnika wiroprowadowego”, *Pomiary-Automatyka-Kontrola*, t. 56, 2010.
- [68] M. K. Markelov i P. P. Churakov, „A device with an eddy current transducer for monitoring vibration parameters”, *Measurement Techniques*, t. 56, nr 12, ss. 1406–1411, 2014, doi: 10.1007/s11018-014-0391-6.
- [69] M. Mirzaei, P. Ripka, J. Vyhnánek, A. Chirtsov, i V. Grim, „Rotational eddy current speed sensor”, *IEEE Transactions on Magnetics*, t. 55, nr 9, ss. 1–10, 2019, doi: 10.1109/TMAG.2019.2918163.
- [70] C. Huai-ning, „An investigation of microweighing with an eddy current transducer”, *Review of Scientific Instruments*, t. 59, nr 10, ss. 2297–2299, paź. 1988, doi: 10.1063/1.1139952.
- [71] D. Rifai, A. Abdalla, K. Ali, i R. Razali, „Giant magnetoresistance sensors: a review on structures and non-destructive eddy current testing applications”, *Sensors*, t. 16, nr 3, s. 298, luty 2016, doi: 10.3390/s16030298.
- [72] A. A. Michelson i E. W. Morley, „On the relative motion of the Earth and the

- luminiferous ether”, *American Journal of Science*, t. s3-34, nr 203, ss. 333–345, lis. 1887, doi: 10.2475/ajs.s3-34.203.333.
- [73] A. Javan, W. R. Bennett, i D. R. Herriott, „Population inversion and continuous optical maser oscillation in a gas discharge containing a He-Ne mixture”, *Phys. Rev. Lett.*, t. 6, nr 3, ss. 106–110, 1961, doi: 10.1103/PhysRevLett.6.106.
- [74] A. Umeda *i in.*, „Calibration of three-axis accelerometers using a three-dimensional vibration generator and three laser interferometers”, *Sensors and Actuators A: Physical*, t. 114, nr 1, ss. 93–101, sie. 2004, doi: 10.1016/j.sna.2004.03.011.
- [75] C. J. D. Pickering, N. A. Halliwell, i T. H. Wilmshurst, „The laser vibrometer: A portable instrument”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 107, nr 3, ss. 471–485, cze. 1986, doi: 10.1016/S0022-460X(86)80119-5.
- [76] A. B. Stanbridge i D. J. Ewins, „Modal testing using a scanning laser doppler vibrometer”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 13, nr 2, ss. 255–270, mar. 1999, doi: 10.1006/mssp.1998.1209.
- [77] microepsilon, „Operating Instructions capaNCDT 6200 Non-contact Capacitive Displacement Measuring”, Ortenburg, 2019. Udostępniono: luty 17, 2022. [Online]. Dostępne na: <https://www.micro-epsilon.com/download/manuals/man-capaNCDT-6200--en.pdf>
- [78] E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, i B. N. Taylor, „The 2018 CODATA recommended values of the fundamental physical constants”, *National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899*, 2020. <http://physics.nist.gov/constants>
- [79] Y. K. Thong, M. S. Woolfson, J. A. Crowe, B. R. Hayes-Gill, i D. A. Jones, „Numerical double integration of acceleration measurements in noise”, *Measurement*, t. 36, nr 1, ss. 73–92, lip. 2004, doi: 10.1016/j.measurement.2004.04.005.
- [80] A. Brandt i R. Brincker, „Integrating time signals in frequency domain – comparison with time domain integration”, *Measurement*, t. 58, ss. 511–519,

grudz. 2014, doi: 10.1016/j.measurement.2014.09.004.

- [81] J.-F. Castet i J. H. Saleh, „Satellite and satellite subsystems reliability: Statistical data analysis and modeling”, *Reliability Engineering & System Safety*, t. 94, nr 11, ss. 1718–1728, lis. 2009, doi: 10.1016/j.ress.2009.05.004.
- [82] J.-F. Castet i J. H. Saleh, „Beyond reliability, multi-state failure analysis of satellite subsystems: A statistical approach”, *Reliability Engineering & System Safety*, t. 95, nr 4, ss. 311–322, kwi. 2010, doi: 10.1016/j.ress.2009.11.001.
- [83] D. Wang, F. Fu, W. Li, Y. Tu, C. Liu, i W. Liu, „A review of the diagnosability of control systems with applications to spacecraft”, *Annual Reviews in Control*, t. 49, ss. 212–229, 2020, doi: 10.1016/j.arcontrol.2020.03.004.
- [84] Y. Liu, Y. Zhao, C. Tan, H. Liu, i Y. Liu, „Economic value analysis of on-orbit servicing for geosynchronous communication satellites”, *Acta Astronautica*, t. 180, ss. 176–188, mar. 2021, doi: 10.1016/j.actaastro.2020.11.040.
- [85] J. Bouwmeester, A. Menicucci, i E. K. A. Gill, „Improving CubeSat reliability: Subsystem redundancy or improved testing?”, *Reliability Engineering & System Safety*, t. 220, s. 108288, kwi. 2022, doi: 10.1016/j.ress.2021.108288.
- [86] A. Gorbenko, V. Kharchenko, O. Tarasyuk, i S. Zasukha, „A Study of Orbital Carrier Rocket and Spacecraft Failures: 2000-2009”, *Information & Security: An International Journal*, t. 28, ss. 179–198, 2012, doi: 10.11610/isij.2815.
- [87] J. J. Wijker, *Spacecraft structures*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. doi: 10.1007/978-3-540-75553-1.
- [88] „ECSS-E-ST-10-03C – Testing (1 June 2012)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2012. <https://ecss.nl/standard/ecss-e-st-10-03c-testing/> (udostępniono sie. 30, 2021).
- [89] F. E. Ostrem, „NASA-SP-8077 Transportation and handling loads”, Hampton, VA, USA, 1971. [Online]. Dostępne na: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19720005242>
- [90] T. Sarafin i T. Sarafin, „Designing effective static tests for spacecraft structures”,

sty. 1997. doi: 10.2514/6.1997-882.

- [91] D. Kaufman, „Best practices for use of sine burst testing”, *NASA Engineering and Safety Center Technical Bulletin*, t. 15, nr 02, 2015, Udostępniono: luty 13, 2022. [Online]. Dostępne na: <https://www.nasa.gov/offices/nesc/articles/best-practices-for-use-of-sine-burst-testing.html>
- [92] S. Laborde i A. Calvi, „Spacecraft base-sine vibration test data uncertainties investigation based on stochastic scatter approach”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 32, ss. 69–78, paź. 2012, doi: 10.1016/J.YMSSP.2012.04.017.
- [93] „ECSS-E-HB-32-26A: Spacecraft mechanical loads analysis handbook (19 lutego 2013)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2013. <https://ecss.nl/hbstms/ecss-e-hb-32-26a-spacecraft-mechanical-loads-analysis-handbook/> (udostępniono grudz. 19, 2021).
- [94] C. Liu, X. Jing, S. Daley, i F. Li, „Recent advances in micro-vibration isolation”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 56–57, ss. 55–80, maj 2015, doi: 10.1016/J.YMSSP.2014.10.007.
- [95] D. R. Mulville, „NASA-STD-5002, Load analyses of spacecraft and payloads”, 1996.
- [96] W. Nowakowski, *Podstawowe wiadomości z teorii lotu*. Wydawnictwo Ligi Lotniczej, 1953.
- [97] T. Wacker, L. Weimer, i K. Eckert, „GOCE platform micro-vibration verification by test and analysis”, w *Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005*, sty. 2005, t. 581, s. 40. [Online]. Dostępne na: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2005ESASP.581E..40W>
- [98] H. P. Simon i C. D. Roach, „Measurement of the cross-country terrain environment”, *The Shock and Vibration Bulletin*, t. 30, nr 3, 1962.
- [99] C. W. Law, „Instrumentation for high-speed railroad research project”, w *22nd Annual Instrument Society of America Conference*, 1967, ss. 23-2-TID-67.

- [100] A. G. Piersol i T. L. Paez, *Harris' shock and vibration handbook*, 6. wyd. Nowy York: McGraw-Hill Education, 2010.
- [101] R. W. Trudell i K. E. Elliott, „The dynamic environment of S-IV stage during transportation”, *The Shock and Vibration Bulletin*, t. 33, nr 4, ss. 111–125, 1964.
- [102] „NASA-SP-8057 Structural design criteria applicable to a space shuttle”, *NASA*, 1972. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19730009154>
- [103] „Soyuz at the Guiana Space Centre User's Manual Issue 2-Revision 0”, *Arianespace*, 2012. <https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2015/09/Soyuz-Users-Manual-March-2012.pdf> (udostępniono grudz. 21, 2021).
- [104] „NASA-M09-0763 Dynamic (vibration) testing: design-certification of aerospace system”, *NASA*, 2010. <https://ntrs.nasa.gov/citations/20110002782>
- [105] „ECSS-E-ST-10-06C – Technical requirements specification (6 March 2009)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2009. <https://ecss.nl/standard/ecss-e-st-10-06c-technical-requirements-specification/> (udostępniono sie. 31, 2021).
- [106] „ECSS-S-ST-00-01C – Glossary of terms (1 października 2012)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2012. <https://ecss.nl/standard/ecss-s-st-00-01c-glossary-of-terms-1-october-2012/> (udostępniono sie. 31, 2021).
- [107] Y. Zheng, Y. Rong, i Z. Hou, „The study of fixture stiffness part I: a finite element analysis for stiffness of fixture units”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 2007 36:9, t. 36, nr 9, ss. 865–876, sty. 2007, doi: 10.1007/S00170-006-0908-5.
- [108] I. Boyle, Y. Rong, i D. C. Brown, „A review and analysis of current computer-aided fixture design approaches”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, t. 27, nr 1, ss. 1–12, luty 2011, doi: 10.1016/J.RCIM.2010.05.008.
- [109] N. M. Kumbhar, G. S. Patil, S. S. Mohite, i M. A. Sutar, „Finite element modelling and analysis of workpiece-fixture system”, *International Journal of*

*Applied Research in Mechanical Engineering*, t. 2, nr 2, ss. 207–212, sty. 2013, doi: 10.47893/IJARME.2013.1087.

- [110] A. Gameros, S. Lowth, D. Axinte, A. Nagy-Sochacki, O. Craig, i H. R. Siller, „State-of-the-art in fixture systems for the manufacture and assembly of rigid components: a review”, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, t. 123, ss. 1–21, grudz. 2017, doi: 10.1016/J.IJMACHTOOLS.2017.07.004.
- [111] M. Mazur, M. A. Galewski, i K. J. Kaliński, „Estymacja współczynników sztywności zamocowania podatnego przedmiotu obrabianego na stole frezarki”, w *Projektowanie i dynamika urządzeń mechatronicznych. Zagadnienia wybrane*, M. Mańka, Red. Kraków: Wydawnictwo AGH, 2019, ss. 189–196.
- [112] T. S. Reddy, „Design and analysis of vibration test bed fixtures for space launch vehicles”, *Indian Journal of Science and Technology*, t. 3, nr 05, ss. 592–595, mar. 2010, doi: 10.17485/ijst/2010/v3i5.15.
- [113] „ECSS-E-ST-32-02C Rev.1 – Structural design and verification of pressurized hardware (15 listopada 2008)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2008. <https://ecss.nl/standard/ecss-e-st-32-02c-rev-1-structural-design-and-verification-of-pressurized-hardware/> (udostępniono grudz. 19, 2021).
- [114] U. Füllekrug, „Utilization of multi-axial shaking tables for the modal identification of structures”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, t. 359, nr 1786, ss. 1753–1770, wrz. 2001, doi: 10.1098/rsta.2001.0872.
- [115] „ECSS-E-HB-32-23A – Threaded fasteners handbook (16 kwietnia 2010)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2010. <https://ecss.nl/hbstms/ecss-e-hb-32-23a-threaded-fasteners-handbook/> (udostępniono grudz. 19, 2021).
- [116] „ECSS-E-HB-32-21A: Adhesive bonding handbook (20 marca 2011)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2011. <https://ecss.nl/hbstms/ecss-e-hb-32-21a-adhesive-bonding-handbook/> (udostępniono grudz. 19, 2021).



- [117] „ECSS-E-ST-32-10C Rev.2 Corr.1 – Structural factors of safety for spaceflight hardware (1 sierpnia 2019)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2019. <https://ecss.nl/standard/ecss-e-st-32-10c-rev-2-corr-1-structural-factors-of-safety-for-spaceflight-hardware-1-august-2019/> (udostępniono grudz. 19, 2021).
- [118] J. M. Dickens, M. J. Wittbrodt, M. M. Gate, L. H. Li, i A. Stroeve, „Coupled loads analysis accuracy from the space vehicle perspective”, *Acta Astronautica*, t. 48, nr 1, ss. 21–28, sty. 2001, doi: 10.1016/S0094-5765(00)00122-3.
- [119] „ECSS-E-ST-10-02C Rev.1 – Verification (1 lutego 2018)”, *European Cooperation for Space Standardization*, 2018. <https://ecss.nl/standard/ecss-e-st-10-02c-rev-1-verification-1-february-2018/> (udostępniono grudz. 19, 2021).
- [120] H. C. Lambert, „NSTS 14046 Revision E - Payload verification requirements”, Houston, TX, mar. 2000.
- [121] A. Dąbrowski, „Metody testowania wibracyjnego elementów wynoszonych w przestrzeń kosmiczną”, w *Od metody elementów skończonych do mechatroniki stony*, K. Kaliński i K. Lipiński, Red. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2017, ss. 119–127.
- [122] Y. Soucy i A. Côté, „Reduction of overtesting during vibration tests of space hardware”, *Canadian Aeronautics and Space Journal*, t. 48, nr 1, ss. 77–86, mar. 2002, doi: 10.5589/q02-006.
- [123] A. Calvi i S. Laborde, „An investigation on the uncertainty in spacecraft base-drive sine vibration test data”, w *Proceedings of the 24th International Conference on Noise and Vibration engineering*, 2010, ss. 5093–5102.
- [124] Y. Soucy, „On force limited vibration for testing space hardware”, w *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, 2011, t. 1, ss. 63–71. doi: 10.1007/978-1-4419-9302-1\_6.
- [125] „PT-TE-1413, “Random vibration testing””, *NASA*, sty. 31, 1991. [https://extapps.ksc.nasa.gov/Reliability/Documents/Preferred\\_Practices/1413.pdf](https://extapps.ksc.nasa.gov/Reliability/Documents/Preferred_Practices/1413.pdf) (udostępniono grudz. 21, 2021).
- [126] A. Girard i D. Moreau, „Derivation of satellite equipment test specification from

vibration and acoustic test data”, *ESA Journal*, 1986.

- [127] A. Girard, J. F. Imbert, i D. Moreau, „Derivation of European satellite equipment test specifications from vibro-acoustic test data”, *Acta Astronautica*, t. 19, nr 10, ss. 797–803, paź. 1989, doi: 10.1016/0094-5765(89)90016-7.
- [128] N.-H. Kim, *Introduction to nonlinear finite element analysis*. New York, NY: Springer US, 2015. doi: 10.1007/978-1-4419-1746-1.
- [129] S. Piechnik, *Wytrzymałość materiałów*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1980.
- [130] A. M. Dagro i K. T. Ramesh, „Nonlinear contact mechanics for the indentation of hyperelastic cylindrical bodies”, *Mechanics of Soft Materials*, t. 1, nr 1, s. 7, 2019, doi: 10.1007/s42558-019-0006-0.
- [131] V. P. Zhuravlev, „Ill-posed problems in mechanics”, *Mechanics of Solids*, t. 51, nr 5, ss. 538–541, 2016, doi: 10.3103/S0025654416050046.
- [132] J. Sokolowski i J.-P. Zolesio, „Introduction to shape optimization”, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992, ss. 5–12. doi: 10.1007/978-3-642-58106-9\_1.
- [133] B. W. Kort i D. P. Bertsekas, „A new penalty function method for constrained minimization”, w *Proceedings of the 1972 IEEE Conference on Decision and Control and 11th Symposium on Adaptive Processes*, 1972, ss. 162–166. doi: 10.1109/CDC.1972.268971.
- [134] R. Bellman, „Dynamic programming and lagrange multipliers”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 42, nr 10, ss. 767–769, paź. 1956, doi: 10.1073/pnas.42.10.767.
- [135] E. Pichelin, K. Mocellin, L. Fourment, i J.-L. Chenot, „An application of a master-slave algorithm for solving 3D contact problems between deformable bodies in forming processes”, *Revue Européenne des Éléments Finis*, t. 10, nr 8, ss. 857–880, sty. 2001, doi: 10.1080/12506559.2001.9737573.
- [136] R. L. Jackson i I. Green, „On the modeling of elastic contact between rough

- surfaces”, *Tribology Transactions*, t. 54, nr 2, ss. 300–314, sty. 2011, doi: 10.1080/10402004.2010.542277.
- [137] G. Duvaut i J. L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*, t. 219. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1976. doi: 10.1007/978-3-642-66165-5.
- [138] N. Kikuchi i J. T. Oden, *Contact problems in elasticity*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988. doi: 10.1137/1.9781611970845.
- [139] E. Popova i V. L. Popov, „The research works of Coulomb and Amontons and generalized laws of friction”, *Friction*, t. 3, nr 2, ss. 183–190, 2015, doi: 10.1007/s40544-015-0074-6.
- [140] T. Stolarski, Y. (Yuji) Nakasone, i S. (Shigeoka) Yoshimoto, *Engineering Analysis with ANSYS Software*. Elsevier, 2018. doi: 10.1016/C2016-0-01966-6.
- [141] E. Rank i I. Babuška, „An expert system for the optimal mesh design in thehp-version of the finite element method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 24, nr 11, ss. 2087–2106, lis. 1987, doi: 10.1002/nme.1620241106.
- [142] T. A. Burkhart, D. M. Andrews, i C. E. Dunning, „Finite element modeling mesh quality, energy balance and validation methods: A review with recommendations associated with the modeling of bone tissue”, *Journal of Biomechanics*, t. 46, nr 9, ss. 1477–1488, maj 2013, doi: 10.1016/j.jbiomech.2013.03.022.
- [143] K. Ho-Le, „Finite element mesh generation methods: a review and classification”, *Computer-Aided Design*, t. 20, nr 1, ss. 27–38, sty. 1988, doi: 10.1016/0010-4485(88)90138-8.
- [144] B. Głut, T. Jurczyk, i M. Pietrzyk, „Adaptacja siatek w modelowaniu metodą elementów skończonych procesów przepływu ciepła”, *Informatyka w Technologii Materiałów*, t. T. 1, Nr 2, ss. 90–103, 2001.
- [145] Ł. Łaciński i R. Wyrzykowski, „Równoległa generacja siatek dla metody elementów skończonych”, *Informatyka Teoretyczna i Stosowana*, t. R. 1, nr 1, ss. 71–80, 2001.

- [146] M. Dobija, „Algorytm konstrukcji drzew podziałów siatki dla metody elementów skończonych”, Uniwersytet Jagielloński, 2020. [Online]. Dostępne na: <https://ruj.uj.edu.pl/xmlui/handle/item/249312>
- [147] *ANSYS Contact Technology Guide*, 9. wyd. 2004. Udostępniono: sie. 30, 2021. [Online]. Dostępne na: <http://www.ansys.com>
- [148] P. Solin, K. Segeth, i I. Dolezel, *Higher-order finite element methods*. Chapman and Hall/CRC, 2003. doi: 10.1201/9780203488041.
- [149] T. A. Laursen, *Computational contact and impact mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. doi: 10.1007/978-3-662-04864-1.
- [150] A. J. Rogers, „Modified Lagrange multiplier tests for problems with one-sided alternatives”, *Journal of Econometrics*, t. 31, nr 3, ss. 341–361, kwi. 1986, doi: 10.1016/0304-4076(86)90065-5.
- [151] Q. J. Wang i Y.-W. Chung, *Encyclopedia of tribology*, 1. wyd. Boston, MA, USA: Springer US, 2013. doi: 10.1007/978-0-387-92897-5.
- [152] R. Stribeck, „Kugellager für beliebige Belastungen”, *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, t. 45, 1901.
- [153] M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov, i L. Pogliani, „On the barometric formula”, *American Journal of Physics*, t. 65, nr 5, ss. 404–412, maj 1997, doi: 10.1119/1.18555.
- [154] J. E. Oliver, „Standard atmosphere”, w *Climatology*, Boston, MA: Springer US, 1987, ss. 801–803. doi: 10.1007/0-387-30749-4\_167.
- [155] J. P. W. Stark, „The spacecraft environment and its effect on design”, w *Spacecraft Systems Engineering*, Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2011, ss. 11–47. doi: 10.1002/9781119971009.ch2.
- [156] Z. Jiao, L. Jiang, J. Sun, J. Huang, i Y. Zhu, „Outgassing environment of spacecraft: An overview”, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, t. 611, nr 1, s. 012071, paź. 2019, doi: 10.1088/1757-899X/611/1/012071.

- [157] E. V Appleton, „Departure of long-wave solar radiation from black-body intensity”, *Nature*, t. 156, nr 3966, ss. 534–535, 1945, doi: 10.1038/156534b0.
- [158] E. W. Roberts, Red., „Space Tribology Handbook”, *European Space Tribology Laboratory*, grudz. 1997. <https://www.esrtechnology.com/index.php/sectors/26-centres/estl/61-space-tribology-handbook> (udostępniono grudz. 21, 2021).
- [159] C. J. Savage, „Thermal control of spacecraft”, w *Spacecraft Systems Engineering*, Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2011, ss. 357–394. doi: 10.1002/9781119971009.ch11.
- [160] A. Neyman, *Fretting w elementach maszyn*. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2003.
- [161] Y. Duan, S. Qu, C. Yang, X. Li, i F. Liu, „Drop tower experiment to study the effect of microgravity on friction behavior: experimental set-up and preliminary results”, *Microgravity Science and Technology*, t. 32, nr 6, ss. 1095–1104, grudz. 2020, doi: 10.1007/S12217-020-09838-4/FIGURES/8.
- [162] W. R. Jones, „Properties of perfluoropolyethers for space applications”, *Tribology Transactions*, t. 38, nr 3, ss. 557–564, sty. 1995, doi: 10.1080/10402009508983442.
- [163] S. F. Murray i H. Heshmat, „Accelerated testing of space mechanisms”, NASA. Lewis Research Center, Latham, NY, US, grudz. 1995. Udostępniono: grudz. 21, 2021. [Online]. Dostępne na: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19960009110>
- [164] J. I. Łubiński, *Wpływ wybranych właściwości maszyny badawczej na wynik eksperymentu tribologicznego z tarciem ślizgowym*. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2017.
- [165] K. S. Sree Harsha, *Principles of vapor deposition of thin films*. Elsevier, 2006. doi: 10.1016/B978-0-08-044699-8.X5000-1.
- [166] M. R. Vazirisereshk, A. Martini, D. A. Strubbe, i M. Z. Baykara, „Solid Lubrication with MoS<sub>2</sub>: A Review”, *Lubricants 2019, Vol. 7, Page 57*, t. 7, nr 7, s. 57, lip. 2019, doi: 10.3390/LUBRICANTS7070057.
- [167] C. Donnet, J. M. Martin, T. Le Mogne, i M. Belin, „Super-low friction of MoS<sub>2</sub>

coatings in various environments”, *Tribology International*, t. 29, nr 2, ss. 123–128, luty 1996, doi: 10.1016/0301-679X(95)00094-K.

- [168] J. M. Cunningham, M. J. Anderson, i S. G. Gould, „The tribology of some MoS<sub>2</sub>-lubricated engineering ceramics”, w *Fifth European Space Mechanisms and Tribology Symposium*, lis. 1991, ss. 1–45.
- [169] O. Amman, T. von Kármán, i G. Woodruff, „The failure of the Tacoma Narrows bridge”, 1941, Udostępniono: sie. 30, 2021. [Online]. Dostępne na: <https://authors.library.caltech.edu/45680/>
- [170] L. Hermans i H. Van Der Auweraer, „Modal testing and analysis of structures under operational conditions: industrial applications”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 13, nr 2, ss. 193–216, mar. 1999, doi: 10.1006/mssp.1998.1211.
- [171] R. A. F. Díaz, M. H. Sarellano, P. C. Alcantar, i I. M. Verduzco, „Dynamic response in non-perpendicular stiff main directional rotors using coordinate transformation”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, t. 37, nr 6, ss. 1615–1622, 2015, doi: 10.1007/s40430-015-0327-3.
- [172] M. L. Chandravanshi i A. K. Mukhopadhyay, „Analysis of variations in vibration behavior of vibratory feeder due to change in stiffness of helical springs using FEM and EMA methods”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, t. 39, nr 9, ss. 3343–3362, 2017, doi: 10.1007/s40430-017-0767-z.
- [173] L. Zhang, T. Wang, i Y. Tamura, „A frequency–spatial domain decomposition (FSDD) method for operational modal analysis”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 24, nr 5, ss. 1227–1239, lip. 2010, doi: 10.1016/j.ymssp.2009.10.024.
- [174] M. A. Galewski i K. J. Kaliński, *Nadzorowanie drgań przy frezowaniu szybkościowym smukłymi narzędziami ze zmienną prędkością obrotową*. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2009.
- [175] A. Brandt, „Modal analysis theory”, w *Noise and Vibration Analysis*, Chichester,

UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2011, ss. 119–146. doi:  
10.1002/9780470978160.ch6.

- [176] S.-Q. Wang i H.-J. Li, „Assessment of structural damage using natural frequency changes”, *Acta Mechanica Sinica*, t. 28, nr 1, ss. 118–127, 2012, doi:  
10.1007/s10409-012-0017-7.
- [177] L.-H. Xu, Z.-X. Li, i J.-R. Qian, „Test analysis of detection of damage to a complicated spatial model structure”, *Acta Mechanica Sinica*, t. 27, nr 3, ss. 399–405, 2011, doi: 10.1007/s10409-011-0437-9.
- [178] K. J. Kaliński i M. Mazur, „Optimal control at energy performance index of the mobile robots following dynamically created trajectories”, *Mechatronics*, t. 37, ss. 79–88, sie. 2016, doi: 10.1016/j.mechatronics.2016.01.006.
- [179] S. R. Ibrahim i E. C. Mikulcik, „A method for the direct identification of vibration parameters from the free response”, *The Shock and Vibration Bulletin*, t. 57, ss. 183–196, 1977.
- [180] D. L. Brown, R. J. Allemang, R. Zimmerman, i M. Mergeay, „Parameter estimation techniques for modal analysis”, luty 1979. doi: 10.4271/790221.
- [181] J.-N. Juang i R. S. Pappa, „An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, t. 8, nr 5, ss. 620–627, wrz. 1985, doi: 10.2514/3.20031.
- [182] A. K. Chopra, *Dynamics of structures*. Pearson, 2011.
- [183] J. M. Leuridan, D. L. Brown, i R. J. Allemang, „Time domain parameter identification methods for linear modal analysis: a unifying approach”, *Journal of Vibration and Acoustics*, t. 108, nr 1, ss. 1–8, sty. 1986, doi: 10.1115/1.3269298.
- [184] S. R. Ibrahim, „Time-domain quasilinear identification of nonlinear dynamic systems”, *AIAA Journal*, t. 22, nr 6, ss. 817–823, cze. 1984, doi: 10.2514/3.8686.
- [185] P. Olsen i R. Brincker, „Using Random Response Input in Ibrahim Time Domain”, w *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series Vol. 6*, 2013, t. 6, ss. 281–287. doi: 10.1007/978-1-4614-6546-1\_29.

- [186] P. Mohanty i D. J. Rixen, „A modified Ibrahim time domain algorithm for operational modal analysis including harmonic excitation”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 275, nr 1–2, ss. 375–390, sie. 2004, doi: 10.1016/j.jsv.2003.06.030.
- [187] E. Bosco, A. Chiplunkar, i J. Morlier, „ModalID - Modal Identification and Diagnosis User Guide”, Toulouse, 2012. [Online]. Dostępne na: [https://personnel.isae-supaero.fr/IMG/pdf/ModalID\\_-\\_Modal\\_Identification\\_and\\_Diagnosis.pdf](https://personnel.isae-supaero.fr/IMG/pdf/ModalID_-_Modal_Identification_and_Diagnosis.pdf)
- [188] R. S. Minette, S. F. SilvaNeto, L. A. Vaz, i U. A. Monteiro, „Experimental modal analysis of electrical submersible pumps”, *Ocean Engineering*, t. 124, ss. 168–179, wrz. 2016, doi: 10.1016/j.oceaneng.2016.07.054.
- [189] B. Chomette i J.-L. Le Carrou, „Operational modal analysis applied to the concert harp”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 56–57, ss. 81–91, maj 2015, doi: 10.1016/j.ymsp.2014.10.011.
- [190] T. Argentini, M. Belloli, L. Rosa, E. Sabbioni, A. Zasso, i M. Villani, „Modal identification of a cable-stayed bridge by means of truck induced vibrations”, w *Topics on the Dynamics of Civil Structures, Volume 1. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, J. M. Caicedo, F. N. Catbas, A. Cunha, V. Racic, P. Reynolds, i K. Salyards, Red. New York, NY: Springer New York, 2012, ss. 165–172. doi: 10.1007/978-1-4614-2413-0\_17.
- [191] Z. Liu i Q. Gao, „Analytical investigation on tire dynamics by rigid–elastic coupled tire model with nonlinear sidewall stiffness”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, t. 40, nr 2, s. 80, luty 2018, doi: 10.1007/s40430-018-1024-9.
- [192] R. Mandard, J.-F. Witz, Y. Desplanques, J. Fabis, i J. Meriaux, „Wavelet Analysis of Experimental Blade Vibrations During Interaction With an Abradable Coating”, *Journal of Tribology*, t. 136, nr 3, lip. 2014, doi: 10.1115/1.4027438.
- [193] A. Kayran, „Aeroelastic Stability of a Transport Aircraft With Wing Mounted Store Suspension: Part I — Analysis”, w *Proceedings of the ASME 7th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, lip. 2004, ss. 179–189. doi: 10.1115/ESDA2004-58467.



- [194] M. Ozbek, F. Meng, D. J. Rixen, i M. J. L. van Tooren, „Identification of the Dynamics of Large Wind Turbines by Using Photogrammetry”, T. Proulx, Red. New York, NY: Springer New York, 2011, ss. 351–359. doi: 10.1007/978-1-4419-9716-6\_32.
- [195] H. Chen i J. De Baerdemaeker, „Total Least Square Technique for Estimating the Vibration Parameters of the Apple from the Time Domain Impulse Response Signal”, *Journal of Agricultural Engineering Research*, t. 61, nr 4, ss. 283–290, sie. 1995, doi: 10.1006/jaer.1995.1056.
- [196] T. Kaczorek, A. Dzieliński, W. Dąbrowski, i R. Łopatka, *Podstawy teorii sterowania*. Warszawa: Wydawnictwo WNT, 2016.
- [197] R. Pappa i J.-N. Juang, „Galileo spacecraft modal identification using an eigensystem realization algorithm”, maj 1984. doi: 10.2514/6.1984-1070.
- [198] J. J. Sanchez-Gasca, „Computation of turbine-generator subsynchronous torsional modes from measured data using the eigensystem realization algorithm”, w *2001 IEEE Power Engineering Society Winter Meeting. Conference Proceedings (Cat. No.01CH37194)*, 2001, t. 3, ss. 1272–1276 t.3. doi: 10.1109/PESW.2001.917259.
- [199] J. M. Caicedo, S. J. Dyke, i E. A. Johnson, „Natural excitation technique and eigensystem realization algorithm for phase I of the IASC-ASCE benchmark problem: simulated data”, *Journal of Engineering Mechanics*, t. 130, nr 1, ss. 49–60, sty. 2004, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:1(49).
- [200] G. A. Papagiannopoulos i G. D. Hatzigeorgiou, „On the use of the half-power bandwidth method to estimate damping in building structures”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, t. 31, nr 7, ss. 1075–1079, lip. 2011, doi: 10.1016/j.soildyn.2011.02.007.
- [201] H. Naderpour i P. Fakharian, „A synthesis of peak picking method and wavelet packet transform for structural modal identification”, *KSCE Journal of Civil Engineering*, t. 20, nr 7, ss. 2859–2867, 2016, doi: 10.1007/s12205-016-0523-4.
- [202] W. Shi, J. Shan, i X. Lu, „Modal identification of Shanghai World Financial

Center both from free and ambient vibration response”, *Engineering Structures*, t. 36, ss. 14–26, mar. 2012, doi: 10.1016/j.engstruct.2011.11.025.

- [203] A. Arda Ozdemir i S. Gumussoy, „Transfer function estimation in system identification toolbox via vector fitting”, *IFAC-PapersOnLine*, t. 50, nr 1, ss. 6232–6237, lip. 2017, doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.1026.
- [204] F. Magalhaes, E. Reynders, A. Cunha, i G. De Roeck, „Online automatic identification of modal parameters of a bridge using the p-LSCF method”, w *Proceedings of the 3rd International Operational Modal Analysis Conference*, maj 2009, ss. 21–28. Udostępniono: sie. 30, 2021. [Online]. Dostępne na: <https://lirias.kuleuven.be/1569855>
- [205] B. Peeters, H. Van der Auweraer, P. Guillaume, i J. Leuridan, „The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?”, *Shock and Vibration*, t. 11, ss. 395–409, 2004.
- [206] J. R. Ragazzini i L. A. Zadeh, „The analysis of sampled-data systems”, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, t. 71, nr 5, ss. 225–234, 1952, doi: 10.1109/TAI.1952.6371274.
- [207] B. Cauberghe, „Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis”, Vrije Universiteit Brussel, 2004. [Online]. Dostępne na: <https://researchportal.vub.be/en/studentTheses/applied-frequency-domain-system-identification-in-the-field-of-ex>
- [208] M. Boeswald, D. Goege, U. Fuellekrug, i Y. Govers, „A review of experimental modal analysis methods with respect to their applicability to test data of large aircraft structures”, w *Proc. of the international conference on noise and vibration engineering ISMA*, 2006, ss. 2461–2482.
- [209] H. Luo, X. Fang, i B. Ertas, „Hilbert transform and its engineering applications”, *AIAA Journal*, t. 47, nr 4, ss. 923–932, kwi. 2009, doi: 10.2514/1.37649.
- [210] M. Feldman i S. Seibold, „Damage diagnosis of rotors: application of hilbert transform and multihypothesis testing”, *Journal of Vibration and Control*, t. 5, nr

3, ss. 421–442, maj 1999, doi: 10.1177/107754639900500305.

- [211] S. Lin, J. N. Yang, i L. Zhou, „Damage identification of a benchmark building for structural health monitoring”, *Smart Materials and Structures*, t. 14, nr 3, ss. S162–S169, cze. 2005, doi: 10.1088/0964-1726/14/3/019.
- [212] S. T. Quek, P. S. Tua, i Q. Wang, „Detecting anomalies in beams and plate based on the Hilbert–Huang transform of real signals”, *Smart Materials and Structures*, t. 12, nr 3, ss. 447–460, cze. 2003, doi: 10.1088/0964-1726/12/3/316.
- [213] J. P. Amezcua-Sanchez, H. S. Park, i H. Adeli, „A novel methodology for modal parameters identification of large smart structures using MUSIC, empirical wavelet transform, and Hilbert transform”, *Engineering Structures*, t. 147, ss. 148–159, wrz. 2017, doi: 10.1016/j.engstruct.2017.05.054.
- [214] Z. Wang i G. Chen, „Analytical mode decomposition with Hilbert transform for modal parameter identification of buildings under ambient vibration”, *Engineering Structures*, t. 59, ss. 173–184, luty 2014, doi: 10.1016/j.engstruct.2013.10.020.
- [215] K. Karami, P. Fatehi, i A. Yazdani, „On-line system identification of structures using wavelet-Hilbert transform and sparse component analysis”, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, t. 35, nr 8, ss. 870–886, sie. 2020, doi: 10.1111/mice.12552.
- [216] M. Feldman, „Non-linear free vibration identification via the hilbert transform”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 208, nr 3, ss. 475–489, grudz. 1997, doi: 10.1006/jsvi.1997.1182.
- [217] E. Reynders, „System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, t. 19, nr 1, ss. 51–124, 2012, doi: 10.1007/s11831-012-9069-x.
- [218] Y. Liu, K. Xin, J. Fan, i D. Cui, „A review of structure modal identification methods through ambient excitation”, *Engineering Mechanics*, t. 31, nr 31(4), ss. 46–53, 2014, doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.11.0873.
- [219] B. Peeters i G. De Roeck, „Stochastic system identification for operational modal

analysis: a review”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, t. 123, nr 4, ss. 659–667, luty 2001, doi: 10.1115/1.1410370.

- [220] A. Dąbrowski, „Sterowanie układem ogniskowania teleskopu”, Politechnika Gdańska, 2014.
- [221] J. A. Nelder i R. Mead, „A Simplex Method for Function Minimization”, *The Computer Journal*, t. 7, nr 4, ss. 308–313, sty. 1965, doi: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [222] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, i P. E. Wright, „Convergence properties of the nelder--mead simplex method in low dimensions”, *SIAM Journal on Optimization*, t. 9, nr 1, ss. 112–147, sty. 1998, doi: 10.1137/S1052623496303470.
- [223] P. RAMAKRISHNA RAO, „Identification of linear non-stationary dynamical systems”, *International Journal of Systems Science*, t. 5, nr 2, ss. 117–129, luty 1974, doi: 10.1080/00207727408920082.
- [224] M. Bertha i J.-C. Golinval, „Identification of non-stationary dynamical systems using multivariate ARMA models”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 88, ss. 166–179, maj 2017, doi: 10.1016/j.ymssp.2016.11.024.
- [225] P. Singh i A. Sadhu, „Limited sensor-based bridge condition assessment using vehicle-induced nonstationary measurements”, *Structures*, t. 32, ss. 1207–1220, sie. 2021, doi: 10.1016/j.istruc.2021.03.091.
- [226] J. Kohlmorgen, K.-R. Müller, J. Rittweger, i K. Pawelzik, „Identification of nonstationary dynamics in physiological recordings”, *Biological Cybernetics*, t. 83, nr 1, ss. 73–84, 2000, doi: 10.1007/s004220000144.
- [227] Z.-S. Ma, Q. Ding, i Y. Tang, „Operational modal analysis of a liquid-filled cylindrical structure with decreasing filling mass by multivariate stochastic parameter evolution methods”, *International Journal of Mechanical Sciences*, t. 172, s. 105420, kwi. 2020, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105420.
- [228] K. Dziedziech, W. J. Staszewski, i T. Uhl, „Wavelet-based modal analysis for time-variant systems”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 50–51, ss. 323–337, sty. 2015, doi: 10.1016/j.ymssp.2014.05.003.

- [229] W. J. Staszewski, „Identification of damping in mdof systems using time-scale decomposition”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 203, nr 2, ss. 283–305, cze. 1997, doi: 10.1006/jsvi.1996.0864.
- [230] A. Dąbrowski i L. Dąbrowski, „Inverse heat transfer problem solution of sounding rocket using moving window optimization”, *PLOS ONE*, t. 14, nr 6, s. e0218600, cze. 2019, doi: 10.1371/journal.pone.0218600.
- [231] M. Korzyński, *Metodyka eksperymentu: planowanie, realizacja i statystyczne opracowanie wyników eksperymentów technologicznych*. Warszawa: Wydawnictwo WNT, 2017.
- [232] Z. Polański, *Planowanie doświadczeń w technice*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1984.
- [233] A. Dąbrowski, M. A. Galewski, i A. Elwertowska, „Wstęp do badań wpływu ciśnienia na drgania mechaniczne na potrzeby modelowania ładunków rakiet kosmicznych”, w *Projektowanie Mechatroniczne Zagadnienia Wybrane*, M. Mańka, Red. Kraków: Wydawnictwo AGH, 2018, ss. 105–112.
- [234] K. Yoshida, „Power spectral density peak estimation from broadband data”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 312, nr 4, ss. 893–905, 2008, doi: 10.1016/j.jsv.2007.11.017.
- [235] T. R. Kane, R. R. Ryan, i A. K. Banerjeer, „Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, t. 10, nr 2, ss. 139–151, mar. 1987, doi: 10.2514/3.20195.
- [236] P. W. Likins, R. E. Roberson, i J. Wittenburg, *Dynamics of Flexible Spacecraft*, t. 103. Wiedeń: Springer, 1971. doi: 10.1007/978-3-7091-2908-1.
- [237] P. Gasbarri, M. Sabatini, N. Leonangeli, i G. B. Palmerini, „Flexibility issues in discrete on–off actuated spacecraft”, *Acta Astronautica*, t. 101, ss. 81–97, sie. 2014, doi: 10.1016/j.actaastro.2014.04.012.
- [238] „Parker O-Ring Handbook ORD5700”, *Parker Hannifin Corporation*, 2021. [https://www.parker.com/Literature/O-Ring Division Literature/ORD 5700.pdf](https://www.parker.com/Literature/O-Ring%20Division%20Literature/ORD%205700.pdf) (udostępniono sie. 31, 2021).

- [239] J. Lee, Z. Wang, K. He, J. Shan, i P. X.-L. Feng, „Air damping of atomically thin MoS<sub>2</sub> nanomechanical resonators”, *Applied Physics Letters*, t. 105, nr 2, s. 023104, lip. 2014, doi: 10.1063/1.4890387.
- [240] R. Maciakowski, *Połączenia śrubowe*. Gdańsk: Wydawnictwo PG, 2002.
- [241] K. Popp, L. Panning, i W. Sextro, „Vibration damping by friction forces: theory and applications”, *Journal of Vibration and Control*, t. 9, nr 3–4, ss. 419–448, mar. 2003, doi: 10.1177/107754603030780.
- [242] L. Půst, L. Pešek, i A. Radolfová, „Various types of dry friction characteristics for vibration damping”, *Engineering MECHANICS*, t. 18, nr 4, ss. 203–224, 2011.
- [243] P. R. Dahl, „Solid friction damping of mechanical vibrations”, *AIAA Journal*, t. 14, nr 12, ss. 1675–1682, grudz. 1976, doi: 10.2514/3.61511.
- [244] A. Gavrus, E. Massoni, i J. L. Chenot, „An inverse analysis using a FE model for identification of rheological parameters”, *Journal of Materials Processing Technology*, t. 60, ss. 447–454, 1996, doi: 10.1016/0924-0136(96)02369-2.
- [245] „Friction and Friction Coefficients”, *Engineering ToolBox*, 2004.  
[https://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d\\_778.html](https://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html)  
(udostępniono sie. 31, 2021).
- [246] H. Krawczyk, M. Nykiel, i J. Proficz, „Tryton Supercomputer Capabilities for Analysis of Massive Data Streams”, *Polish Maritime Research*, t. 22, nr 3, ss. 99–104, wrz. 2015, doi: 10.1515/pomr-2015-0062.
- [247] R. Tylman, „Moc obliczeń”, *CI TASK*, 2021.  
<https://task.gda.pl/pl/zasoby/superkomputer/moc-obliczen/> (udostępniono sie. 31, 2021).