

Imię i nazwisko autora rozprawy: Małgorzata Warecka  
Dyscyplina naukowa: Elektronika

## **ROZPRAWA DOKTORSKA**

Tytuł rozprawy w języku polskim: Techniki zwiększania efektywności metody elementów skończonych poprzez redukcję dziedziny obliczeniowej z wykorzystaniem własności geometrii struktur

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Techniques for increasing the efficiency of the finite element method by reducing the computational domain using the properties of structure geometry

Promotor
<i>podpis</i>
Dr hab. inż. Piotr Kowalczyk

Gdańsk, rok 2022

## OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: Małgorzata Warecka

Ja, niżej podpisany(a), oświadczam, iż jestem świadomy(a), że zgodnie z przepisem art. 27 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2021 poz. 1062), uczelnia może korzystać z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

*Techniki zwiększania efektywności metody elementów skończonych poprzez redukcję dziedziny obliczeniowej z wykorzystaniem własności geometrii struktur* do prowadzenia badań naukowych lub w celach dydaktycznych.<sup>1</sup>

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U.2021.478 t.j.), a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem dr. hab. inż. Piotrem Kowalczykiem.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami, zgodnie z przepisem art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/nie wyrażam zgody\* na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

*\*niepotrzebne usunąć*

<sup>1</sup> Art. 27. 1. Instytucje oświatowe oraz podmioty, o których mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1, 2 i 4–8 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, mogą na potrzeby zilustrowania treści przekazywanych w celach dydaktycznych lub w celu prowadzenia działalności naukowej korzystać z rozpowszechnionych utworów w oryginale i w tłumaczeniu oraz zwielokrotnić w tym celu rozpowszechnione drobne utwory lub fragmenty większych utworów.

2. W przypadku publicznego udostępniania utworów w taki sposób, aby każdy mógł mieć do nich dostęp w miejscu i czasie przez siebie wybranym korzystanie, o którym mowa w ust. 1, jest dozwolone wyłącznie dla ograniczonego kręgu osób uczących się, nauczających lub prowadzących badania naukowe, zidentyfikowanych przez podmioty wymienione w ust. 1.

## STRESZCZENIE

Współczesna elektronika ze względu na swój szybki rozwój wymaga od nas efektywnego modelowania zjawisk polowych. Celem rozprawy jest zwiększanie efektywności metody elementów skończonych poprzez redukcję dziedziny obliczeniowej z wykorzystaniem własności geometrii struktur oraz jej hybrydyzację z użyciem technik analitycznych. Rozprawa zawiera przegląd stanu wiedzy na temat dostępnych obecnie technik modelowania jak również opis kluczowych aspektów metody elementów skończonych. W ramach przeprowadzonych badań powstało pięć algorytmów, które obejmują zarówno rozpraszanie fali elektromagnetycznej jak i analizy przewodnic falowych czy struktur rezonansowych. Zaprezentowane techniki wykorzystują między innymi symetrię osiową czy dekompozycję dziedziny. Praca zawiera hybrydyzację metody elementów skończonych wykorzystującą uogólnioną macierz impedancji, która pozwala w łatwy sposób modelować otwartą przestrzeń. Przebadane zostały również ograniczenia związane z jej wykorzystaniem do modelowania struktur periodycznych w porównaniu z periodycznymi warunkami brzegowymi. Praca obejmuje dwie struktury rezonansowe, przy czym jedna z nich wymaga rozwiązania nieliniowego problemu własnego. Dla wszystkich zaproponowanych technik w celu potwierdzenia poprawności prezentowanych podejść, otrzymane wyniki porównano z rezultatami dostępnymi w literaturze oraz otrzymanymi innymi uznanymi metodami.

## ABSTRACT

Modern electronics, due to its rapid development, requires us to effectively model field phenomena. The aim of the dissertation is to increase the efficiency of the finite element method by reducing the computational domain using the properties of structure geometry and its hybridization using analytical techniques. The dissertation contains an overview of state of the art on currently available modeling techniques as well as a description of key aspects of the finite element method. As part of the research, five algorithms were developed that cover both electromagnetic wave scattering and the analysis of waveguides or resonance structures. The presented techniques use, among others, axial symmetry or domain decomposition. The work contains a hybridization of the finite element method using the generalized impedance matrix, which allows for easy modeling of open space. Limitations related to its use for modeling periodic structures in comparison with periodic boundary conditions were also examined. The work includes two resonance structures, one of which requires solving a nonlinear eigenproblem. For all proposed techniques, in order to confirm the correctness of the presented approaches, the obtained results were compared with the results available in the literature and obtained with other recognized methods.

## Spis treści

<b>Spis najważniejszych oznaczeń</b>	<b>5</b>
<b>1. Wstęp</b>	<b>6</b>
1.1. Stan wiedzy . . . . .	6
1.2. Cele i tezy pracy . . . . .	8
<b>2. Metoda elementów skończonych</b>	<b>10</b>
2.1. Sformułowanie i agregacja . . . . .	10
2.2. Dyskretyzacja dziedziny obliczeniowej . . . . .	11
2.2.1. Współrzędne barycentryczne . . . . .	12
2.2.2. Elementy krzywoliniowe . . . . .	13
2.3. Funkcje bazowe . . . . .	14
2.3.1. Skalarne funkcje bazowe . . . . .	14
2.3.2. Wektorowe funkcje bazowe . . . . .	15
2.4. Redukcja dziedziny obliczeniowej . . . . .	15
2.4.1. Jednorodność wzdłuż wybranej osi . . . . .	16
2.4.2. Symetria osiowa . . . . .	18
<b>3. Aplikacje metod hybrydowych</b>	<b>20</b>
3.1. Rozpraszanie fal elektromagnetycznych . . . . .	20
3.1.1. Struktury jednorodne w jednym kierunku . . . . .	20
3.1.2. Struktury niejednorodne o symetrii osiowej . . . . .	23
3.2. Prowadnice falowe . . . . .	26
3.2.1. Sekcje falowodowe o symetrii osiowej . . . . .	26
3.2.2. Macierz impedancji - falowód cylindryczny . . . . .	27
3.2.3. Struktury periodyczne . . . . .	28
3.3. Struktury rezonansowe . . . . .	30
3.3.1. Rezonator Fabry-Pérot . . . . .	30
3.3.2. Ferrytowy rezonator sferyczny . . . . .	32
<b>4. Podsumowanie i kierunki dalszego rozwoju</b>	<b>39</b>
4.1. Podsumowanie . . . . .	39
4.2. Kierunki dalszego rozwoju . . . . .	40
<b>Lista publikacji</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>44</b>
<b>Sylwetka autorki</b>	<b>50</b>

## SPIS NAJWAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- $\vec{\alpha}_j^e$  - skalarna funkcja bazowa w elemencie  $e$  węzła  $j$   
 $\gamma$  - współczynnik propagacji  
 $\partial$  - operator pochodnej cząstkowej  
 $\varepsilon_r$  - względna przenikalność elektryczna  
 $\vec{E}$  - wektor natężenia pola elektrycznego  
 $\vec{E}_\alpha$  - składowa wektora natężenia pola elektrycznego  $\alpha \in \{x, y, z, \rho, \varphi\}$   
 $\vec{E}_t$  - składowa poprzeczna wektora natężenia pola elektrycznego  
 $F_\alpha$  - funkcja testująca (skalarna), gdzie  $\alpha \in \{z, \varphi\}$   
 $\vec{F}_t$  - funkcja testująca (wektorowa)  
 $\vec{H}$  - wektor natężenia pola magnetycznego  
 $H_m^{(2)}(\cdot)$  - funkcja Hankela drugiego rodzaju  $m$ -tego rzędu  
 $\vec{i}_\alpha$  - wersor osi  $0\alpha$ , gdzie  $\alpha \in \{x, y, z, \rho, \varphi, \theta\}$   
 $J_m(\cdot)$  - funkcja Bessla  $m$ -tego rzędu  
 $k_0$  - liczba falowa w wolnej przestrzeni  
 $\mu_r$  - względna przenikalność magnetyczna  
 $m$  - zmienność kąтова pola elektrycznego/magnetycznego po  $\varphi$   
 $n$  - zmienność kąтова pola elektrycznego/magnetycznego po  $\theta$   
 $P_n^m(\cdot)$  - stowarzyszony wielomian Legendre'a  
 $\mathbf{S}$  - macierz rozproszenia  
 $\vec{W}_j^e$  - wektorowa funkcja bazowa w elemencie  $e$  krawędzi  $j$   
 $\mathbf{U}$  - macierz jednostkowa  
 $\mathbf{z}$  - unormowana uogólniona macierz impedancji  
 $\mathbf{Z}$  - uogólniona macierz impedancji  
 $\vec{\nabla} \times$  - operator rotacji  
 $\vec{\nabla} \cdot$  - operator dywergencji  
 $x, y, z$  - współrzędne w kartezjańskim układzie współrzędnych  
 $\rho, \varphi, z$  - współrzędne w cylindrycznym układzie współrzędnych

## 1. WSTĘP

Współczesna elektronika i telekomunikacja w coraz większym stopniu polegają na efektywnych i dokładnych metodach symulacji rozkładu pól elektromagnetycznych w różnego typu strukturach czy urządzeniach. Rozwój elektrodynamiki obliczeniowej otworzył drzwi chociażby dla łączności satelitarnej, telefonii komórkowej piątej generacji czy też internetu rzeczy. Oczekiwania względem parametrów urządzeń rosną z dnia na dzień, a to wiąże się z koniecznością dokładnej symulacji coraz bardziej złożonych układów w jak najkrótszym czasie.

### 1.1. Stan wiedzy

Istnieje wiele technik, które różnią się między sobą zarówno efektywnością jak i uniwersalnością. Wciąż jeszcze to do projektanta należy wybór, którą z nich należy wybrać, aby osiągnąć satysfakcjonujące rezultaty. Każda posiada swoje ograniczenia, stąd też ich ogromna mnogość. Obecnie metody obliczeniowe podzielić można na kilka podgrup. Największą dokładnością a jednocześnie krótkim czasem obliczeń cieszą się metody analityczne. Ich zastosowanie jest jednak znacząco ograniczone do struktur o prostych geometriach takich jak cylindry (także o przekroju eliptycznym) czy sfery. W takich przypadkach pole elektromagnetyczne opisać można za pomocą funkcji Bessla lub Hankela (dla struktur eliptycznych za pomocą funkcji Mathieu) i zastosować metodę dopasowania rodzajów/pól [1–11]. Niestety w praktyce, w wielu przypadkach metody te nie są wystarczająco elastyczne a ich stosowanie wymaga od użytkownika dużego zaangażowania implementacyjnego. Kolejną, bardziej uniwersalną, grupą metod są metody równań całkowych bazujące na funkcji Greena [12–19]. Jednak ich większa uniwersalność okupiona jest kilkoma problemami takimi jak całkowanie osobliwości w obrębie funkcji Greena czy konieczność odpowiedniego doboru funkcji bazowych. Do tej grupy należy również metoda momentów (ang. method of moments MoM) [20–23]. Istnieją dwa typy metody momentów: jedna oparta na równaniu całkowym po objętości (ang. volume integral equation VIE) oraz druga wykorzystująca równanie całkowite po powierzchni (ang. surface integral equation SIE). Obie metody z niezwykłą łatwością modelują przestrzeń otwartą. Szczególnie drugi typ zyskał dużą popularność ze względu na większą efektywność w stosunku do MoM-VIE. Niestety pomimo dość dużej elastyczności nadal występują trudności w modelowaniu materiałów niejednorodnych oraz anizotropowych (zasada równoważności powierzchni nie ma wówczas zastosowania).

Za grupę najbardziej uniwersalnych metod uznaje się metody dyskretne. Dwie najpopularniejsze to metoda różnic skończonych (ang. finite difference FD) [24–26] i metoda elementów skończonych (ang. finite element method FEM) [27, 28]. Dla metod dyskretnych nie ma nałożonych ograniczeń na geometrię struktury, stąd też metody te często znajdują zastosowanie w komercyjnych pakietach oprogramowania do komputerowego wspomaganie projektowania. Niemniej jednak skomplikowane struktury pod względem geometrii wymagają często zastosowania bardzo gęstej siatki co znacząco wpływa na czas obliczeń. Kolejnym problemem jest zakończenie dziedzin dla zagadnień radiacyjnych, tak aby zasymulować przestrzeń otwartą. Jednym z bardziej znanych rozwiązań jest zastosowanie warstwy, w literaturze nazywanej PML (ang. perfectly matched layer) [29, 30], która ma na celu zniwelować odbicie od brzegu dziedziny. Takie podejście wymaga jednak doboru zestawu parametrów, które mogą mieć wpływ na dokładność symulacji, jak również poszerzenia dziedziny obliczeniowej.

Odpowiedzią na powyższe problemy wydają się być metody hybrydowe [31–36], które łączą zalety wspomnianych technik. Takie rozwiązania pozwalają między innymi na zachowanie

elastyczności metod dyskretnych, zwiększenie ich dokładności przy jednoczesnej redukcji złożoności obliczeniowej. Większość tego typu podejść bazuje na dekompozycji dziedziny na mniejsze obszary w zależności od geometrii czy materiału. W różnych podobszarach stosowane są różne metody odpowiadające zadany problemom.

Dla obiektów dużych elektrycznie i wieloskalowych, takich jak anteny czy szyki antenowe wzniesione na platformach, ze względu na bardzo dużą liczbę niewiadomych uzyskanych dla metody momentów, zaproponowane zostały metody hybrydowe mające na celu poprawienie wydajności MoM. W literaturze często pojawia się połączenie metody momentów z jednolitą geometryczną teorią dyfrakcji MoM-UTD (ang. method of moments - uniform geometrical theory of diffraction) [37, 38] oraz metody momentów z optyką fizyczną MoM-PO (ang. method of moments - physical optics) [39–41]. Oba rozwiązania zaimplementowane zostały w symulatorze FEKO [42, 43]. Podejście UTD nadaje się do analizy dużych obiektów jest jednak bardzo silnie ograniczone do bardzo prostych geometrii. Połączenie MoM-UTD zwiększa zakres możliwych geometrii podlegających analizie dzięki MoM przy jednoczesnym umożliwieniu analizy z włączeniem platform. Warto tu jednak zaznaczyć, że takie połączenie jest nadal silnie ograniczone w regionach zastosowania UTD do powierzchni regularnych takich jak płaszczyzny, cylindry czy sfery. Połączenie MoM-PO pozwala na znacznie większą elastyczność względem analizowanych struktur. Niemniej w obu metodach problematyczna jest analiza struktur niejednorodnych czy anizotropowych. Kolejnym problemem jest wpływ odległości pomiędzy rejonem MoM a rejonem PO i wzajemnego sprzężenia na dokładność obliczeń.

Inną technikę modelowania stanowi połączenie podejścia globalnego (równania całkowego) i lokalnego (równania różniczkowego). Wymaga ona dekompozycji dziedziny, a następnie zastosowania równania całkowego dla podobszaru stanowiącego metal oraz równania różniczkowego w pozostałej części dziedziny (ang. surface integral equation partial differential equation SIE-PDE) [44, 45]. Główną zaletą tej metody jest skuteczne modelowanie efektu naskórkowości. W podejściu tym podobszary nachodzą na siebie (ang. overlapping) a sam problem nie wymaga dodatkowych warunków brzegowych. Nie jest ono jednak wolne od konieczności odwracania dużych macierzy oraz problemów związanych z zastosowaniem funkcji Greena. Co więcej, dziedziny nie mogą być dyskretyzowane niezależnie i wymagana jest siatka konforemna co znacząco ogranicza zastosowanie metody. Powoduje to również, że każdorazowa zmiana siatki w obszarze SIE wymusza konieczność ponownego dyskretyzowania całej dziedziny. Niedawno zaproponowana została modyfikacja sformułowania SIE-PDE, która rozwiązuje ostatnie dwa problemy [46].

Jedną z dobrze znanych grup metod hybrydowych jest połączenie metody elementów skończonych wraz z metodą równań całkowych w literaturze znanych jako FE-BI [47, 48] czy też FEM/MoM [49–51]. Metody te umożliwiają analizę ośrodków niejednorodnych i anizotropowych (dzięki wykorzystaniu metody elementów skończonych) w wolnej przestrzeni przy jednoczesnej redukcji błędów wynikających z zakończenia dziedziny (dzięki metodzie momentów). Połączenie metody elementów skończonych wraz z metodą elementu brzegowego umożliwia analizę struktur niejednorodnych czy anizotropowych. Wymaga ona jednak dodatkowych założeń na granicy dziedzin, które nie zawsze mogą być spełnione. Może to wpływać na dokładność obliczeń w polu bliskim, stąd też metody te używane są głównie do obliczania pola w strefie dalekiej. Rozwiązanie powyższego problemu zostało niedawno zaproponowane w [52]. Niestety, połączenie to tak jak inne metody wykorzystujące funkcje Greena nie jest wolne od problemów związanych z koniecznością wybrania odpowiednich funkcji bazowych/testujących [53] jak również z całkowaniem osobliwości. W zależności od sformułowania mogą pojawiać się również rozwiązania pasożytnicze [54, 55]. Co więcej macierz wynikową opisać można częściowo jako macierz gęstą częściowo zaś jako macierz rzadką. Tak sformułowany problem jest dużym wyzwaniem w kontekście numerycznym.

Jego rozwiązania obejmują zarówno metody bezpośrednie [56] jak i iteracyjne z użyciem operatora ściskającego [53, 57]

Inną propozycją jest połączenie metody elementów skończonych z techniką dopasowania rodzajów [58, 59], przy czym w obu przypadkach podejście analityczne wykorzystane jest do opisu pola we wrotach falowodu. Wrota te mogą zostać uogólnione do otwartej przestrzeni dla problemów radiacyjnych. Część analityczna stanowi jednak jedynie warunki brzegowe, a więc cała dziedzina obliczeniowa musi zostać zdyskretyzowana. Połączenie to niedawno wykorzystane zostało do analizy mikroskopijnych metapowierzchni z wykorzystaniem periodycznych warunków brzegowych [60]. Ze względu na redukcję dziedziny jest ono niezwykle wydajne dla struktur, w których warstwy są względem siebie równoległe (podejście to wiąże się jednak z poszukiwaniem wielu wartości własnych, co jest zadaniem wymagającym pod względem numerycznym).

Podsumowując, analiza struktur o złożonej geometrii, będących obiektem zainteresowań współczesnej techniki mikrofalowej, wiąże się z koniecznością stosowania wysublimowanych technik modelowania elektromagnetycznego. W praktyce duża część tych układów modelowana jest za pomocą metod dyskretnych (np. metody elementów skończonych). Niewątpliwa uniwersalność i elastyczność metody elementów skończonych powoduje, że jest ona zaimplementowana w znacznej części oprogramowania komercyjnego. Niestety jej bezpośrednie stosowanie może być nieefektywne lub nawet niemożliwe ze względu na ograniczone zasoby, co przyczynia się do wzrostu popularności różnego rodzaju technik hybrydowych czy też modyfikacji metody elementów skończonych. Rozwijane podejścia zachowują dużą elastyczność szczególnie w kwestii doboru materiałów przy jednoczesnym ograniczeniu niezbędnych zasobów i są jednym z trwających trendów elektrodynamiki obliczeniowej.

## **1.2. Cele i tezy pracy**

Niniejsza praca oraz załączone w niej publikacje dotyczą zwiększenia efektywności metody elementów skończonych poprzez jej hybrydyzację. Najważniejsze tezy pracy przedstawione zostały w następujących punktach:

1. znaczną poprawę efektywności analizy uzyskać można redukując trójwymiarową dziedzinę obliczeniową do dziedziny dwuwymiarowej ze względu na symetrię osiową struktury
2. dekompozycja dziedziny obliczeniowej z zastosowaniem hybrydyzacji metody elementów skończonych i metody dopasowania rodzajów pozwala istotnie zredukować nakłady obliczeniowe oraz czas analizy (ograniczenie dyskretyzowanej części dziedziny obliczeniowej)
3. metody hybrydowe umożliwiają poprawę dokładności analizy przy wykorzystaniu tych samych zasobów (możliwość stosowania bardzo gęstej siatki)
4. redukcja liczby zmiennych umożliwia analizę układów o dużej złożoności obliczeniowej (np. rozwiązywanie nieliniowych problemów własnych)

Algorytmy potwierdzające powyższe tezy przedstawione zostały na kartach pięciu artykułów z listy filadelfijskiej jak również na licznych konferencjach międzynarodowych.

Rozdział pierwszy jest częścią wprowadzającą i prezentuje obecny stan wiedzy wraz z całą mnogością istniejących już algorytmów jak również tezy niniejszej pracy. W rozdziale drugim zaprezentowane zostały podstawowe założenia metody elementów skończonych jak również przyjęte w analizie funkcje bazowe skalarnie oraz wektorowe. Znajduje się tu opis współrzędnych barycentrycznych, konieczny do zdefiniowania elementów krzywoliniowych (elementów wyższych rzędów), a również przedstawiona została ogólna idea redukcji dziedziny obliczeniowej poprzez jej dekompozycję czy wykorzystanie cech szczególnych struktury. Rozdział ten przedstawia jak wykorzystać



symetrię osiową struktury oraz zawiera szczegółowy opis stosowanego w pracy sformułowania mieszanego tj. skalarno-wektorowego. Znajduje się tu zarówno sformułowanie dopuszczające wymuszenie na brzegu dziedziny (np. struktura zawierająca wrota - problem deterministyczny) jak i sformułowanie bezźródłowe (np. do analiz problemów własnych). Kolejny rozdział (rozdział trzeci) skupia się na aplikacjach oraz prezentuje metody hybrydowe, a jednocześnie stanowi on opis głównych osiągnięć niniejszej pracy. Przedstawiona została w nim metoda wyznaczenia uogólnionej macierzy impedancji dla dwóch typów struktur. Pierwszym z nich są obiekty homogeniczne w jednym kierunku, drugim zaś niejednorodne, posiadające jednakże symetrię osiową. W obu przypadkach podejście to obejmuje redukcję zagadnienia trójwymiarowego do analizy struktury zdyskretyzowanej w dwóch wymiarach. Następnie zdefiniowana została uogólniona macierz impedancji dla sekcji falowodowych jak również opisano dwa podejścia do analizy struktur periodycznych: periodyczne warunki brzegowe oraz wykorzystanie macierzy rozproszenia. Kolejno, podejście z macierzą rozproszenia zastosowane zostało do analizy otwartego rezonatora Fabry-Perot. Ostatnią część tego rozdziału stanowi rozwiązanie nieliniowych problemów własnych na przykładzie sferycznego rezonatora obciążonego ferrytową kulą. W rozdziale czwartym zaprezentowane wyniki oraz tezy pracy zostały krótko podsumowane.

## 2. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Początki metody elementów skończonych sięgają lat czterdziestych dwudziestego wieku. Pierwszy opis, autorstwa Richarda L. Couranta [61], dotyczył rozwiązywania problemów mechanicznych. Metoda ta znalazła zastosowanie w zagadnieniach elektromagnetycznych prawie dwadzieścia lat później (problemy z dziedziny mikrofal opisane zostały wówczas w dwóch niezależnych artykułach [62, 63]). Swoją popularność FEM zdobył wraz z rozwojem coraz szybszych komputerów.

Metoda elementów skończonych jest wariacyjną metodą rozwiązywania równań różniczkowych, w tym również równań Maxwella. Podejście to polega na podziale dziedziny obliczeniowej na mniejsze podobszary, nazywane elementami skończonymi, a następnie znalezieniu rozwiązania w postaci kombinacji liniowej funkcji aproksymujących (funkcji bazowych) zdefiniowanych na tych podobszarach. Zastosowanie takiej aproksymacji pozwala sprowadzić problem do układu równań algebraicznych, którego wielkość związana jest z liczbą elementów. Sam układ składa się z odpowiednich iloczynów skalarnych funkcji bazowych (oraz ich gradientów czy rotacji), a szukane współczynniki reprezentują wagi tych funkcji w końcowym rozwiązaniu. W ten sposób otrzymywane jest optymalne rozwiązanie, w sensie wartości średnich, a jego dokładność rośnie wraz ze wzrostem liczby elementów. Istotny wpływ na wyniki ma rząd funkcji bazowych, który przekłada się również na liczbę funkcji aproksymujących zastosowanych w obrębie elementu i ostatecznie na obniżenie błędu aproksymacji oraz poprawę zbieżności metody.

### 2.1. Sformułowanie i agregacja

Dwie najpopularniejsze metody rozwiązywania problemu brzegowego równania różniczkowego to metoda Ritza (zwana również metodą Rayleigha-Ritza) oraz metoda Galerkinia [27, 64]. Zaczniemy od zdefiniowania problemu w dziedzinie  $\Omega$  jako

$$\mathcal{L}f = g \quad (2.1)$$

gdzie  $f$  jest szukaną funkcją,  $\mathcal{L}$  liniowym operatorem różniczkowym,  $g$  natomiast funkcją pobudzenia lub wymuszenia. Przy czym operator różniczkowy jest operatorem samosprężonym, to znaczy:

$$\langle \mathcal{L}f, h \rangle = \langle f, \mathcal{L}h \rangle \quad (2.2)$$

dla iloczynu skalarnego (przy pominięciu warunków brzegowych) zdefiniowanego jako:

$$\langle f, h \rangle = \int_{\Omega} f h^* d\Omega \quad (2.3)$$

jak i jest on dodatnio określony

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle \begin{cases} > 0 & f \neq 0 \\ = 0 & f = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Metoda Ritza dla tak zdefiniowanego problemu polega więc na znalezieniu punktu stacjonarnego następującego funkcjonału

$$F(\tilde{f}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}\tilde{f}, \tilde{f} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{f}, g \rangle - \frac{1}{2} \langle g, \tilde{f} \rangle \quad (2.5)$$

przy czym  $\tilde{f}$  jest funkcją próbną. Inne podejście reprezentuje metoda Galerkina, gdzie określane jest residuum

$$r = \mathcal{L}\tilde{f} - g \quad (2.6)$$

i poszukiwane jest rozwiązanie dla którego przyjmuje ono najmniejszą wartość. Dla metod residuów ważonych wymuszany jest warunek

$$\int_{\Omega} w_i r \, d\Omega = 0 \quad (2.7)$$

gdzie  $w_i$  jest funkcją testującą. W metodzie Galerkina funkcje te powinny być tożsame z funkcjami aproksymującymi. Jeśli operator  $\mathcal{L}$  jest samosprężony to zarówno metoda Galerkina jak i metoda Ritza są równoważne i prowadzą do następującego układu równań

$$\mathbf{Kc} = \mathbf{b} \quad (2.8)$$

gdzie

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_i \mathcal{L}w_j + w_j \mathcal{L}w_i) \, d\Omega \quad (2.9)$$

oraz

$$b_i = \int_{\Omega} w_i g \, d\Omega \quad (2.10)$$

a aproksymowane rozwiązanie przyjmuje postać

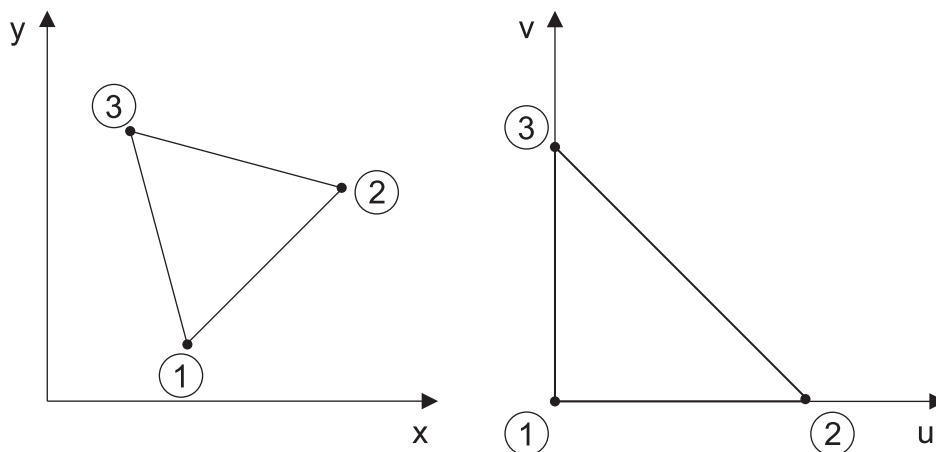
$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^N c_j w_j \quad (2.11)$$

Warto zauważyć również, że o ile metoda Ritza skupia się na każdym elemencie o tyle metoda Galerkina wykracza dziedziną poza pojedynczy element. Więcej szczegółów dotyczących rozwiązywania problemu brzegowego równania różniczkowego znaleźć można w [27].

Warto mieć na uwadze, że tak zdefiniowana macierz  $\mathbf{K}$  zależy od wygenerowanej siatki. Dyskretyzacja dziedziny obliczeniowej prowadzi do utworzenia struktury, dla której poszczególne elementy posiadają odpowiednią liczbę węzłów i krawędzi (w problemach trójwymiarowych również ścian), przy czym pomiędzy poszczególnymi elementami występują części wspólne (wierzchołki, krawędzie, ściany). Stworzenie układu równań (2.8) wymaga więc obliczenia macierzy lokalnych (dla pojedynczych elementów) a następnie utworzenie macierzy globalnej poprzez agregację [64]. Innymi słowy wyliczenia iloczynów skalarnych dla poszczególnych elementów a następnie odpowiedniego zawarcia ich w macierzy globalnej. Załóżmy, że problem który opisujemy związany jest z dwuwymiarową dyskretyzacją dziedziny. Wówczas w pierwszym kroku utworzenie macierzy globalnej wymaga od nas utworzenia zerowej macierzy  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ , gdzie  $\mathcal{K}$  jest wymiarem problemu, na którego wielkość wpływa liczba wierzchołków, krawędzi czy rząd funkcji aproksymujących. Następnie macierze wyliczone dla elementu o numeracji lokalnej wprowadzamy do macierzy globalnej zgodnie z jej numeracją. Przykładowo niech wierzchołki o numerze 1 i 2 dla elementu numer 8 oraz 2 i 3 dla elementu 9 stanowią wierzchołki 5 i 6 w numeracji globalnej, wówczas podmacierz dotycząca tych wierzchołków stanowi sumę podmacierzy wyżej wspomnianych elementów (8 i 9) w rzędzie 5 kolumnie 6 oraz rzędzie 6 i kolumnie 5.

## 2.2. Dyskretyzacja dziedziny obliczeniowej

Dyskretyzacja dziedziny obliczeniowej jest najbardziej charakterystycznym a jednocześnie kluczowym elementem metody elementów skończonych. Polega ona na podziale nieregularnej a również często niejednorodnej dziedziny na skończoną liczbę wielokątów (zagadnienia dwu-



**Rys. 2.1.** Element siatki: po transformacji w układzie  $(x, y)$  oraz przed transformacją w układzie  $(u, v)$

wymiarowe) albo wielościanów (zagadnienia trójwymiarowe) tzn. elementów skończonych. Taka dyskretyzacja jest zasadniczo zastąpieniem dziedziny o nieskończonej liczbie stopni swobody ekwiwalentnym układem z ich ograniczoną liczbą. Elementy powstałe w procesie dyskretyzacji nie mogą nakładać się na siebie ani pozostawiać wolnych przestrzeni. Ich węzły powinny znajdować się w miejscu węzłów innych elementów a same elementy nie powinny być zbyt wąskie (nie posiadać małych kątów wewnętrznych) [65]. Te ostatnie choć są dopuszczalne, mogą powodować wzrost błędu aproksymacji co nie jest pożądane. Najczęściej używanymi elementami są elementy trójkątne dla zagadnień dwuwymiarowych oraz czworościany dla zagadnień trójwymiarowych ze względu na łatwość odwzorowywania nieregularnych dziedzin. Dyskretyzacja wraz z numerowaniem globalnym jest procesem skomplikowanym i podlega optymalizacji. W niniejszej pracy do dyskretyzacji dziedziny użyto programu Netgen [66].

### 2.2.1. Współrzędne barycentryczne

Metoda elementów skończonych wymaga wyliczenia wartości odpowiednich iloczynów skalarnych dla wszystkich elementów. Obliczenia te wykonać można dla każdego podobszaru osobno lub też utworzyć element wzorcowy zwiększając tym samym efektywność. Zabieg ten umożliwia łatwiejsze wyliczenie wartości rotacji czy też gradientu a nawet całego iloczynu skalarnego. Choć możliwe są różne figury geometryczne będące wzorcami, w niniejszych rozważaniach ograniczę się do trójkątów. Wówczas elementem wzorcowym jest równoramienny trójkąt prostokątny o przyprostokątnych o długości jednostkowej. Element ten zdefiniowany jest w oddzielnym układzie współrzędnych nazywanych współrzędnymi barycentrycznymi.

Niech wyżej wymieniony trójkąt prostokątny znajduje się w układzie  $(u, v)$  (patrz Rys. 2.1), wówczas współrzędne punktów w odpowiadającym mu układzie  $(x, y)$  wyrazić można w następujący sposób:

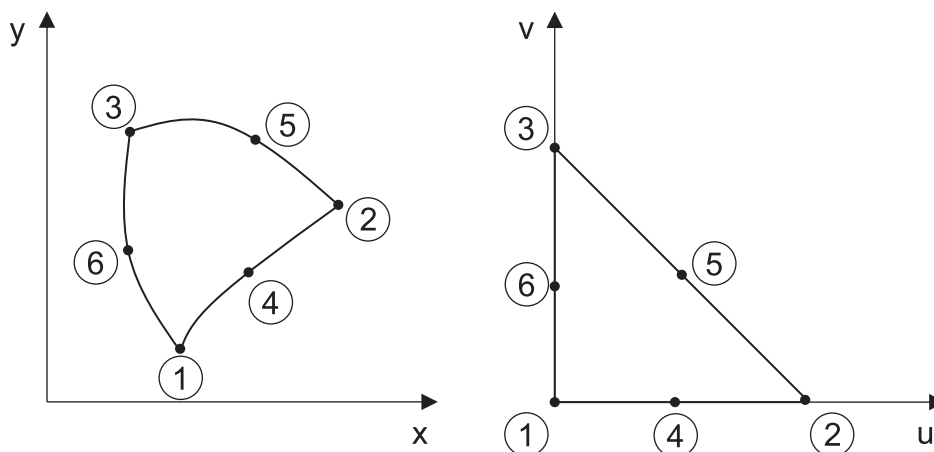
$$x = a_0 + a_1u + a_2v \quad (2.12)$$

$$y = b_0 + b_1u + b_2v \quad (2.13)$$

Podstawiając współrzędne kolejnych wierzchołków  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  oraz  $(x_3, y_3)$ , za pomocą kilku prostych przekształceń, otrzymujemy:

$$x = x_1(1 - u - v) + x_2u + x_3v \quad (2.14)$$

$$y = y_1(1 - u - v) + y_2u + y_3v \quad (2.15)$$



**Rys. 2.2.** Element krzywoliniowy: po transformacji w układzie  $(x, y)$  oraz przed transformacją w układzie  $(u, v)$

co stanowi relację transformacji między układami - definiuje jacobian, który wykorzystywany jest w dalszych obliczeniach.

### 2.2.2. Elementy krzywoliniowe

Elementy trójkątne cieszą się popularnością ze względu na łatwość zagęszczania siatki w miejscach o dużej zmienności pola. Niemniej, odwzorowywanie krzywizn struktury może wymagać znaczącego zagęszczenia siatki w obrębie krzywej a w rezultacie możliwe jest znaczne obniżenie efektywności obliczeniowej modelu. W takim przypadku zastosowanie elementów krzywoliniowych może przyczynić się do skrócenia czasu obliczeń. Wymaga to jednak zastosowania elementów krzywoliniowych, a co za tym idzie zwiększenia liczby funkcji bazowych na elemencie. Elementy te pozwalają na uzyskanie szybszej zbieżności w stosunku do elementów pierwszego rzędu. Oznacza to, że błąd aproksymacji maleje szybciej względem zagęszczania siatki. Elementy wyższych rzędów powodują też o wiele mniejszą dyspersję numeryczną, dzięki czemu są chętnie używane dla struktur dużych elektrycznie. Aby zdefiniować elementy drugiego rzędu ponownie należy skorzystać ze współrzędnych barycentrycznych opisanych w powyższym punkcie. W elemencie wzorcowym pomiędzy każdą parę wierzchołków dodawany jest dodatkowy węzeł (patrz Rys. 2.2). Tak jak wcześniej współrzędne elementu siatki wyrażamy za pomocą układu  $(u, v)$ :

$$x = a_0 + a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4v^2 + a_5uv \quad (2.16)$$

$$y = b_0 + b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4v^2 + b_5uv \quad (2.17)$$

W efekcie otrzymujemy następujące relacje transformacyjne do układu  $(x, y)$

$$x = (1 - 3u - 3v + 2u^2 + 2v^2 + 4uv)x_1 + (2v^2 - v)x_2 + (2u^2 - u)x_3 + (4v - 4v^2 - 4uv)x_4 + 4uvx_5 + (4u - 4u^2 - 4uv)x_6 \quad (2.18)$$

$$y = (1 - 3u - 3v + 2u^2 + 2v^2 + 4uv)y_1 + (2v^2 - v)y_2 + (2u^2 - u)y_3 + (4v - 4v^2 - 4uv)y_4 + 4uvy_5 + (4u - 4u^2 - 4uv)y_6 \quad (2.19)$$

Co ważne, węzły o numerach 4, 5 i 6 (patrz Rys. 2.2) nie muszą leżeć na prostych łączących wierzchołki 1, 2 i 3, a tym samym powstały element może nie być trójkątem (staje się on elementem krzywoliniowym).

### 2.3. Funkcje bazowe

Funkcje bazowe są funkcjami aproksymującymi szukane rozwiązanie (może być to np. pole elektryczne) i posiadają wartość niezerową wyłącznie w obrębie elementu. Ostateczne rozwiązanie opisywane jest jako suma współczynników (wag) i poszczególnych funkcji bazowych. Funkcje te zwyczajowo dzielimy na funkcje skalarne oraz funkcje wektorowe. Przy czym stopień swobody przypisany jest do węzłów siatki dla funkcji skalarnych i do krawędzi siatki dla funkcji wektorowych.

#### 2.3.1. Skalarne funkcje bazowe

Funkcje kształtu są funkcjami skalarnymi i aproksymują wartość szukanej funkcji we wnętrzu odpowiadającego im elementu. Przeważnie reprezentowane są w postaci wielomianów przy czym rząd aproksymacji jest rzędem wielomianu. Charakterystyczną cechą tych funkcji jest to, że przyjmują wartość równą jedności w jednym z węzłów oraz zero we wszystkich pozostałych węzłach elementu. Cecha ta gwarantuje ciągłość rozwiązania wzdłuż krawędzi. Funkcje te mogą być konstruowane we wszelaki sposób. Jednym ze sposobów jest wykorzystanie wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a, co pozwala na szybką i prostą konstrukcję funkcji wyższych rzędów.

Dla funkcji pierwszego rzędu rozwiązanie może zostać zapisane jako suma trzech funkcji kształtu  $\alpha_j^e(u, v)$  i odpowiadających im współczynników  $\phi_j$  [27]:

$$\phi = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^e(u, v) \phi_j \quad (2.20)$$

gdzie  $e$  symbolizuje numer elementu, natomiast funkcje  $\alpha_j^e(u, v)$  przyjmują postać

$$\begin{aligned} \alpha_1^e(u, v) &= 1 - u - v, \\ \alpha_2^e(u, v) &= u, \\ \alpha_3^e(u, v) &= v. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dla drugiego rzędu rozwiązanie jest sumą

$$\phi = \sum_{j=1}^6 \alpha_j^e(u, v) \phi_j \quad (2.22)$$

a funkcje kształtu prezentują się następująco:

$$\begin{aligned} \alpha_1^e(u, v) &= (1 - u - v)(1 - 2u - 2v), & \alpha_2^e(u, v) &= u(2u - 1) \\ \alpha_3^e(u, v) &= v(2v - 1), & \alpha_4^e(u, v) &= 4(1 - u - v)u \\ \alpha_5^e(u, v) &= 4uv, & \alpha_6^e(u, v) &= 4(1 - u - v)v \end{aligned} \quad (2.23)$$

Warto zaznaczyć, że funkcje bazowe nie muszą być tego samego rzędu co element. Elementy, dla których rząd funkcji bazowych zgadza się z rzędem elementu, nazywamy elementami izometrycznymi. Jeśli natomiast rząd funkcji interpolującej jest niższy, mamy do czynienia z elementami subparametrycznymi (wyższy - superparametrycznymi) [67].

### 2.3.2. Wektorowe funkcje bazowe

Opis problemów elektromagnetycznych wyłącznie za pomocą funkcji skalarnych wiąże się z kilkoma problemami. Przede wszystkim zagadnienia, w których pole elektryczne lub magnetyczne posiada więcej niż jedną składową, wymagają modelowania każdej składowej pola oddzielnie. Jest to jednak nieefektywne i nie zapewnia spełnienia warunku zerowej dywergencji. Co więcej, wymuszenie warunków brzegowych na granicy ośrodków oraz powierzchniach przewodzących bywa kłopotliwe, podobnie jak modelowanie pola przy występowaniu osobliwości. Rozwiązaniem powyższych problemów stały się elementy wektorowe pierwszy raz zaproponowane przez Hasslera i Whitneya [68] i zastosowane w zagadnieniach elektromagnetycznych przez Jean-Claude Nedeleca [69]. Funkcje wektorowe  $\vec{W}$  przypisują stopień swobody do krawędzi elementu nie zaś do węzłów jak to miało miejsce dla funkcji skalarnych. Właściwością tych funkcji jest niezerowa składowa styczna wyłącznie wzdłuż krawędzi elementu co pozwala zapewnić ciągłość. Wymuszenie ciągłości pola stycznego przy jednoczesnym braku konieczności ciągłości składowej normalnej jest szczególnie korzystne przy modelowaniu ośrodków niejednorodnych. Inną ważną właściwością jest zapewnienie warunku dywergencyjnego  $\vec{\nabla} \circ \vec{W} = 0$  w obrębie elementu, co pozwala na użycie ich w analizie problemów bezźródłowych. Dla funkcji pierwszego rzędu rozwiązanie przyjmuje postać:

$$\psi = \sum_{j=1}^3 \vec{W}_j^e(u, v) \psi_j \quad (2.24)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \vec{W}_1^e(u, v) &= \alpha_1^e \nabla \alpha_2^e - \alpha_2^e \nabla \alpha_1^e, \\ \vec{W}_2^e(u, v) &= \alpha_2^e \nabla \alpha_3^e - \alpha_3^e \nabla \alpha_2^e, \\ \vec{W}_3^e(u, v) &= \alpha_3^e \nabla \alpha_1^e - \alpha_1^e \nabla \alpha_3^e. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dla elementów krzywoliniowych drugiego rzędu funkcje drugiego rzędu wyglądają następująco:

$$\psi = \sum_{j=1}^8 \vec{W}_j^e(u, v) \psi_j \quad (2.26)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \vec{W}_1^e(u, v) &= \alpha_1^e \nabla \alpha_2^e - \alpha_2^e \nabla \alpha_1^e, & \vec{W}_2^e(u, v) &= \alpha_2^e \nabla \alpha_3^e - \alpha_3^e \nabla \alpha_2^e \\ \vec{W}_3^e(u, v) &= \alpha_3^e \nabla \alpha_1^e - \alpha_1^e \nabla \alpha_3^e, & \vec{W}_4^e(u, v) &= \alpha_1^e \nabla \alpha_2^e + \alpha_2^e \nabla \alpha_1^e \\ \vec{W}_5^e(u, v) &= \alpha_2^e \nabla \alpha_3^e + \alpha_3^e \nabla \alpha_2^e, & \vec{W}_6^e(u, v) &= \alpha_3^e \nabla \alpha_1^e + \alpha_1^e \nabla \alpha_3^e \\ \vec{W}_7^e(u, v) &= 2\alpha_2^e \alpha_3^e \nabla \alpha_1^e - \alpha_3^e \alpha_1^e \nabla \alpha_2^e - \alpha_1^e \alpha_2^e \nabla \alpha_3^e, & \vec{W}_8^e(u, v) &= 2\alpha_3^e \alpha_1^e \nabla \alpha_2^e - \alpha_1^e \alpha_2^e \nabla \alpha_3^e - \alpha_2^e \alpha_3^e \nabla \alpha_1^e \end{aligned} \quad (2.27)$$

### 2.4. Redukcja dziedziny obliczeniowej

Zwiększanie liczby elementów siatki jest bezpośrednio związane ze zwiększeniem rozmiarów problemu. To zaś wiąże się z wydłużeniem czasu obliczeń jak również większymi wymaganiami dotyczącymi pamięci. Redukcja dziedziny obliczeniowej pozwala więc na znaczące obniżenie wykorzystanych zasobów. Zmniejszenie dziedziny otrzymać można wykorzystując cechy szczególne struktur jak również poprzez hybrydyzację metody obliczeniowej.

Najbardziej znanym podejściem redukcji dziedziny jest zastosowanie opisu analitycznego w kierunku propagacji oraz wykorzystanie symetrii osiowej. Pierwszy z nich pozwala na analizę struktury w dwóch wymiarach przy jednoczesnym założeniu zmienności pola w kierunku prostopadłym do przekroju poprzecznego, o ile struktura jest jednorodna w tym kierunku. Dla przykładu, jeśli struktura jest nieskończona w kierunku  $z$  to jej zmienność w tymże kierunku zapisać można jako  $e^{-\gamma z}$  dla zagadnień propagacyjnych. Dla struktur rezonansowych w kierunku  $z$  natomiast, pola zapisane są za pomocą sinusów i kosinusów. Innym podejściem jest wykorzystanie osi symetrii układu i podejście to nazywamy BOR (ang. Body-of-Revolution). Zmienność kątową pola opisujemy wówczas jako  $e^{jm\varphi}$  i niejako zakładamy zmienność po  $\varphi$  reprezentowaną literą  $m$ . Funkcje  $e^{jm\varphi}$  dla różnych  $m$  są względem siebie ortogonalne, i o ile nie występuje sprzężenie to różne zmienności mogą być rozpatrywane oddzielnie. Wówczas pomimo, że struktura jest skończoną strukturą trójwymiarową możliwa jest jej analiza wyłącznie poprzez dyskretyzację przekroju poprzecznego, który podlega obrotowi tworząc analizowaną bryłę obrotową.

W praktyce geometrię struktury, którą badamy opisujemy w trzech wymiarach. Analiza takich struktur przy użyciu metody elementów skończonych wiąże się jednak z koniecznością zdefiniowania brył przestrzennych jako elementów skończonych a co za tym idzie znacznie większej liczby węzłów/krawędzi siatki. Przedstawiona powyżej redukcja dziedziny, dla której niejako zmieniamy wymiar analizy z trójwymiarowej na tak zwaną dwuipółwymiarową wymaga wciąż zamodelowania wszystkich trzech składowych pola elektrycznego lub magnetycznego. Problemy te nie są jednak problemami dwuwymiarowymi jak sugeruje dziedzina obliczeniowa. Aby zamodelować całkowite pole korzystne jest zapisanie go w postaci sumy dwóch pól: składowej skalarnej oraz wektorowej. Przy czym składowa skalarna związana jest z kierunkiem, w którym zmienność pola jest założona, natomiast składowa wektorowa wyraża pozostałe dwie składowe (poprzeczne). Takie podejście wymaga wykorzystania zarówno funkcji bazowych skalarnych jak i wektorowych do pełnego zamodelowania analizowanej struktury.

Innym podejściem jest połączenie metody dyskretnej (w naszym przypadku metody elementów skończonych) z metodą analityczną czy też quasi-analityczną. Wówczas dziedzina obliczeniowa dzielona jest na dwa lub więcej podobszarów. Część układu najbardziej skomplikowana pod względem geometrii czy też opisu matematycznego materiału modelowana jest za pomocą metod dyskretnych, a następnie zapisywana w sposób, który pozwala na połączenie tej części z metodą analityczną. Fragmenty układu takie jak falowody czy wolną przestrzeń modelujemy w sposób analityczny a w kolejnym kroku części te zostają połączone. Taka hybrydyzacja pozwala na wykorzystanie trzech największych zalet metod analitycznych: szybkości obliczeń, łatwości modelowania wolnej przestrzeni oraz braku dyspersji numerycznej związanej z dyskretyzacją dziedziny, przy jednoczesnym zachowaniu dość dużej uniwersalności metod dyskretnych. Do opisu części dyskretnej wykorzystać można na przykład macierz rozproszenia, macierz impedancji czy macierz transmisji. Jednakże niniejsza praca skupia się szczególnie na dwóch macierzach: uogólnionej macierzy impedancji oraz macierzy rozproszenia. Co więcej, powstałe w taki sposób macierze można wykorzystać w analizie układu więcej niż raz, a zatem jeśli dany element występuje wielokrotnie w obrębie analizowanej struktury jego macierz może zostać wielokrotnie użyta, jeszcze bardziej redukując wykorzystywane zasoby.

#### 2.4.1. Jednorodność wzdłuż wybranej osi

Dla struktur jednorodnych wzdłuż wybranej osi możliwe jest zapisanie pola elektrycznego lub też magnetycznego w postaci iloczynu składnika opisującego daną wielkość w przekroju poprzecznym oraz czynnika w kierunku propagacji. Dla zachowania zwięzłości niniejszego rozdziału



przeanalizowany zostanie wyłącznie przypadek propagacji wzdłuż osi  $z$ , dalej wykorzystywany w rozdziale trzecim. Dla tak zdefiniowanego problemu wektor pola elektrycznego zapisać można w następujący sposób:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{-\gamma z} \quad (2.28)$$

gdzie  $\gamma$  jest zespolonym współczynnikiem propagacji wzdłuż osi  $z$ . Wówczas pole elektryczne wyrazić można jako sumę składowej poprzecznej i wzdłużnej:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_t(x, y, z) + \vec{E}_z(x, y, z) \quad (2.29)$$

gdzie

$$\vec{E}_t(x, y, z) = E_x(x, y)e^{-\gamma z} \vec{i}_x + E_y(x, y)e^{-\gamma z} \vec{i}_y \quad (2.30)$$

$$\vec{E}_z(x, y, z) = E_z(x, y)e^{-\gamma z} \vec{i}_z \quad (2.31)$$

Jeśli operator nabra zapisany zostanie w następujący sposób

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z \quad (2.32)$$

gdzie

$$\vec{\nabla}_t = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.33)$$

$$\vec{\nabla}_z = \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.34)$$

to po podstawieniu (2.30),(2.31) oraz (2.32) do równania falowego

$$\vec{\nabla} \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E}) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (2.35)$$

uzyskujemy następujące równania

$$\vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_z \times \vec{E}_t) + \vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_z = 0 \quad (2.36)$$

oraz

$$\vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) + \vec{\nabla}_z \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z) + \vec{\nabla}_z \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_z \times \vec{E}_t) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t = 0 \quad (2.37)$$

Postać słaba powyższych równań po zastosowaniu własności (2.28) jest punktem wyjścia do analizy metodą elementów skończonych i przyjmuje formę

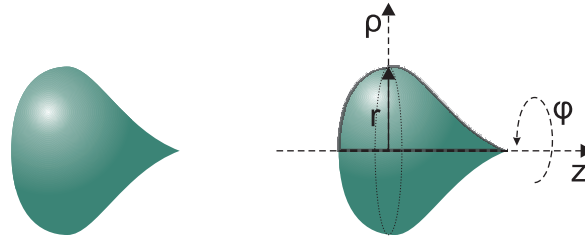
$$\begin{aligned} & - \iint_S \vec{\nabla}_t F_z \circ (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{\nabla}_t E_z) ds - k_0^2 \iint_S F_z \epsilon_r E_z ds \\ & - \gamma \iint_S \vec{\nabla}_t F_z \circ (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{E}_t) ds = j\omega\mu_0 \oint_L F \vec{i}_z \circ (\vec{i}_\rho \times \vec{H}_\phi) dl \end{aligned} \quad (2.38)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \gamma \iint_S \vec{F}_t \circ (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{\nabla}_t E_z) + \iint_S (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) ds \\ & - k_0^2 \iint_S \vec{F}_t \circ \bar{\epsilon}_r \vec{E}_t ds + \gamma^2 \iint_S \vec{F}_t \circ (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{E}_t) ds \\ & = j\omega\mu_0 \oint_L \vec{F}_t \circ (\vec{i}_\rho \times \vec{H}_z) dl \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.4.2. Symetria osiowa

Wykorzystanie osi symetrii struktury jest możliwe wyłącznie jeśli mamy do czynienia z bryłą obrotową (patrz Rys. 2.3). Zakładając układ cylindryczny  $(\rho, \varphi, z)$ , oś obrotu przebiega wzdłuż



**Rys. 2.3.** Przykładowa bryła obrotowa

osi  $z$ , obrót zaś zgodnie z wektorem  $\vec{i}_\varphi$ . Zmiennosc po  $\varphi$  jest z góry założona a całkowite pole elektryczne (jak również jego dowolna składowa) może zostać wyrażone w następujący sposób:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}(\rho, z) e^{jm\varphi} \quad (2.40)$$

gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą oznaczającą zmiennosc po  $\varphi$ . W ogólnym przypadku całkowite pole jest sumą poszczególnych pól o różnym  $m$ . Analogicznie, rzecz się ma w przypadku pola magnetycznego, jednak dla zachowania zwięzłości w niniejszej pracy zaprezentowane zostaną sformułowania dla pola elektrycznego. Pole elektryczne wyrazić można jako sumę dwóch składowych:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \vec{E}_t(\rho, \varphi, z) + \vec{E}_\varphi(\rho, \varphi, z) \quad (2.41)$$

gdzie

$$\vec{E}_t(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( E_\rho(\rho, z) e^{jm\varphi} \vec{i}_\rho + E_z(\rho, z) e^{jm\varphi} \vec{i}_z \right) \quad (2.42)$$

stanowi składową poprzeczną do kierunku wersora  $\vec{i}_\varphi$ , natomiast

$$\vec{E}_\varphi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_\varphi(\rho, z) e^{jm\varphi} \vec{i}_\varphi \quad (2.43)$$

składową wzdłużną. Analogicznie operator nabla zapisać można następująco:

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_\varphi \quad (2.44)$$

gdzie indeksy  $t$  i  $\varphi$  reprezentują odpowiednio składową poprzeczną i wzdłużną

$$\vec{\nabla}_t = \vec{i}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.45)$$

$$\vec{\nabla}_\varphi = \vec{i}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.46)$$

Podstawiając wyrażenia (2.41) i (2.44) do równania falowego (2.35) otrzymujemy dwie sprzężone relacje

$$\vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_\varphi \times \vec{E}_t) + \vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_\varphi) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_\varphi = 0 \quad (2.47)$$

oraz

$$\vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) + \vec{\nabla}_\varphi \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_\varphi) + \vec{\nabla}_\varphi \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_\varphi \times \vec{E}_t) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t = 0 \quad (2.48)$$

zaprezentowane w [MW2]. Przy czym dla układu współrzędnych cylindrycznych częściowe operatory rotacji zdefiniowane są następująco:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho \vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

oraz

$$\vec{\nabla}_\varphi \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho \vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

Projekcja równań (2.47) i (2.48) przy pomocy funkcji testujących  $F_\varphi$  (skalarnej) i  $\vec{F}_t$  (wektorowej) prowadzi do sformułowania słabego. Przyjmując, że analizowana struktura posiada co najmniej jedno wrota, równania zapisać możemy następująco dla założonej zmienności  $m$ :

$$\begin{aligned} & - \iint_S \frac{j m}{\rho} \left[ \vec{\nabla}_t(\rho F_\varphi) \circ \mu_r^{-1} \vec{E}_t \right] d\rho dz - k_0^2 \iint_S \rho F_\varphi \varepsilon_r E_\varphi d\rho dz \\ & + \iint_S \frac{1}{\rho} \left[ \left( \vec{\nabla}_t(\rho F_\varphi) \right) \circ \left( \mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi) \right) \right] d\rho dz + j\omega\mu_0 \oint_L F_\varphi (\vec{i}_\varphi \times \vec{H}_t^p) \circ \vec{i}_p \rho d\rho = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \iint_S \rho (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) d\rho dz - k_0^2 \iint_S \rho \vec{F}_t \circ \varepsilon_r \vec{E}_t d\rho dz + \iint_S \frac{j m}{\rho} \vec{F}_t \circ \left[ \mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi) \right] d\rho dz \\ & + \iint_S \frac{m^2}{\rho} \vec{F}_t \circ (\mu_r^{-1} \vec{E}_t) d\rho dz + j\omega\mu_0 \oint_L \rho (\vec{F}_t \times \vec{H}_\varphi) \circ \vec{i}_p d\rho = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

gdzie  $\vec{\nabla}_t f = \vec{i}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z}$ ,  $S$  oznacza powierzchnię dziedziny obliczeniowej a  $L$  brzeg dziedziny zawierający wrota. Jeśli struktura jest zamknięta lub też nie będzie łączona z metodą analityczną, całki po konturze są równe zero co wiąże się z usunięciem ich z równań i uproszczeniem sformułowania do postaci:

$$\begin{aligned} & - \iint_S \frac{j m}{\rho} \left[ \vec{\nabla}_t(\rho F_\varphi) \circ \mu_r^{-1} \vec{E}_t \right] d\rho dz - k_0^2 \iint_S \rho F_\varphi \varepsilon_r E_\varphi d\rho dz \\ & + \iint_S \frac{1}{\rho} \left[ \left( \vec{\nabla}_t(\rho F_\varphi) \right) \circ \left( \mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi) \right) \right] d\rho dz = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \iint_S \rho (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) d\rho dz - k_0^2 \iint_S \rho \vec{F}_t \circ \varepsilon_r \vec{E}_t d\rho dz \\ & + \iint_S \frac{j m}{\rho} \vec{F}_t \circ \left[ \mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi) \right] d\rho dz + \iint_S \frac{m^2}{\rho} \vec{F}_t \circ (\mu_r^{-1} \vec{E}_t) d\rho dz = 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

### 3. APLIKACJE METOD HYBRYDOWYCH

Hybrydowe metody obliczeniowe łączą ze sobą uniwersalność metod dyskretnych i zalety metod analitycznych takie jak szybkość obliczeń, łatwość modelowania wolnej przestrzeni czy brak dyspersji numerycznej związanej z dyskretyzacją. Takie podejście wymaga od nas przede wszystkim podziału na podobszary, w których zastosujemy różne metody. Następnie wybrać należy sposób w jaki opiszemy część układu analizowaną metodą dyskretną. Wiąże się to ze zdefiniowaniem powierzchni na granicach podobszarów, które staną się interfejsem pozwalającym na połączenie metod. Dwoma dobrze znanymi sposobami opisu części dyskretnej są macierz rozproszenia  $S$  oraz uogólniona macierz impedancji  $Z$  (ang. generalized impedance matrix GIM), które zostaną zaprezentowane w niniejszej pracy. **Rozdział ten zawiera osiągnięcia główne autorki.**

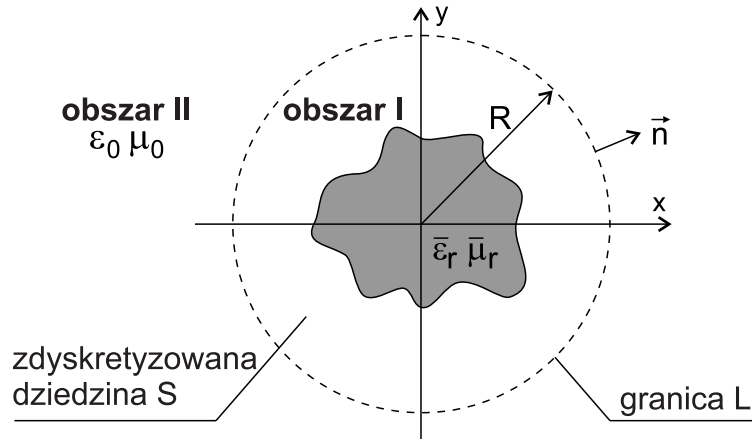
#### 3.1. Rozpraszanie fal elektromagnetycznych

Zjawisko rozpraszania fal elektromagnetycznych w otwartej przestrzeni wiąże się z koniecznością modelowania pola w strefie dalekiej. Dyskretyzacja tak wielkiego obszaru ze względu na zasoby obliczeniowe oraz dyspersję numeryczną jest podejściem nieefektywnym, wręcz niemożliwym, a co za tym idzie niezbędne są inne zabiegi pozwalające na skuteczne symulacje takich problemów. Niewątpliwą zaletą podejścia hybrydowego jest łatwość modelowania otwartej przestrzeni, która nie wprowadza też dodatkowych rozwiązań pasożytniczych i pozwala na osiągnięcie lepszej dokładności w stosunku na przykład do wspomnianej wcześniej metody PML. W niniejszej pracy zaproponowana została uogólniona macierz impedancji, która jest macierzą niezależną od pobudzenia. Wyznaczona w danym punkcie częstotliwości, może być więc pobudzana różnymi falami padającymi bez konieczności jej rekalkulacji. Uogólniona macierz impedancji jest macierzą, która pozwala na wyliczenie z niej wielu innych macierzy takich jak macierz rozproszenia (co zostanie zaprezentowane w dalszej części rozdziału) czy macierz transmisji. Opisuje ona relację między polami elektrycznym i magnetycznym, i jest najbardziej uniwersalną macierzą ze wszystkich wyżej wymienionych.

W niniejszej pracy przedstawione zostały dwa typy struktur, dla których wykorzystano techniki oparte na uogólnionej macierzy impedancji. Pierwszym z nich są struktury jednorodne w jednym kierunku, dla których przedstawiony zostanie problem rozpraszania na obiektach o dowolnym przekroju poprzecznym. Drugim typem struktur są struktury niejednorodne posiadające jednak symetrię osiową. Symetria ta, jak zostało zaprezentowane w poprzednim rozdziale, pozwala na znaczącą redukcję dziedziny obliczeniowej (rozmiaru problemu) a więc również czasu obliczeń.

##### 3.1.1. Struktury jednorodne w jednym kierunku

Załóżmy, że analizowany obiekt ma dowolny przekrój poprzeczny w płaszczyźnie  $(x, y)$  i jest jednorodny wzdłuż osi  $z$ . Wówczas zmienność w kierunku  $\vec{i}_z$  opisać można jako  $e^{-\gamma z}$  a problem zredukować do problemu dwuwymiarowego. Aby jeszcze bardziej ograniczyć dziedzinę obliczeniową poprzez wykorzystanie uogólnionej macierzy impedancji, dzielimy ją na dwa podobszary jak zaprezentowano na Rys. 3.1. Kontur  $L$  jest granicą dwóch podobszarów, przy czym w pierwszym podobszarze wykorzystana jest metoda elementów skończonych, w drugim zaś metoda dopasowania pól/rodzajów. Macierz impedancji opisana jest na powierzchni walcowej, która reprezentowana jest w przestrzeni dwuwymiarowej przez kontur  $L$ . W podobszarze II pole



Rys. 3.1. Podział dziedziny na podobszary

elektryczne zapisać można następująco:

$$\vec{E}_z^{II}(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M \left( a_m^E J_m(\kappa\rho) + b_m^E H_m^{(2)}(\kappa\rho) \right) e^{-\gamma z} e^{jm\varphi} \vec{i}_z \quad (3.1)$$

$$\vec{H}_z^{II}(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M \left( a_m^H J_m(\kappa\rho) + b_m^H H_m^{(2)}(\kappa\rho) \right) e^{-\gamma z} e^{jm\varphi} \vec{i}_z \quad (3.2)$$

zaś w podobszarze I pole obliczane jest metodą elementów skończonych. Pole na powierzchni cylindra będącego granicą między podobszarami można wyrazić następująco:

$$\vec{E}_\xi(R, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M V_{\xi,m} \vec{e}_{\xi,m}(\varphi, z) \quad (3.3)$$

$$\vec{H}_\xi(R, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M I_{\xi,m} \vec{h}_{\xi,m}(\varphi, z) \quad (3.4)$$

przy czym  $\xi = \{z, \varphi\}$ ,  $m$  opisuje zmienność kątową, funkcje bazowe  $\vec{e}_{\xi,qm}$  oraz  $\vec{h}_{\xi,qm}$  przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{e}_{zm}(\varphi, z) &= e^{-\gamma z} e^{jm\varphi} \vec{i}_z, & \vec{e}_{\varphi m}(\varphi, z) &= -e^{-\gamma z} e^{jm\varphi} \vec{i}_\varphi, \\ \vec{h}_{\varphi m}(\varphi, z) &= e^{-\gamma z} e^{jm\varphi} \vec{i}_\varphi, & \vec{h}_{zm}(\varphi, z) &= e^{-\gamma z} e^{jm\varphi} \vec{i}_z. \end{aligned}$$

Połączenie dwóch podobszarów uzyskać można poprzez uogólnioną macierz impedancji, która jest macierzą opisującą relację pomiędzy polem elektrycznym i magnetycznym na granicy

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (3.5)$$

gdzie wektory  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_\varphi \ \mathbf{V}_z]^T$  i  $\mathbf{I} = [\mathbf{I}_z \ \mathbf{I}_\varphi]^T$  złożone są ze współczynników rozwinięć pola elektrycznego (3.3) i magnetycznego (3.4) a  $\mathbf{Z}$  jest uogólnioną macierzą impedancji. Macierz tę otrzymać można z metody elementów skończonych. W pierwszym etapie podstawiamy (3.3) i (3.4) do równania (2.38) oraz (2.39), jako wymuszenie na brzegu  $L$ . Następnie, w wyniku dyskretyzacji otrzymujemy układ równań

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = j\omega\mu_0 \mathbf{B}\mathbf{I}, \quad (3.6)$$

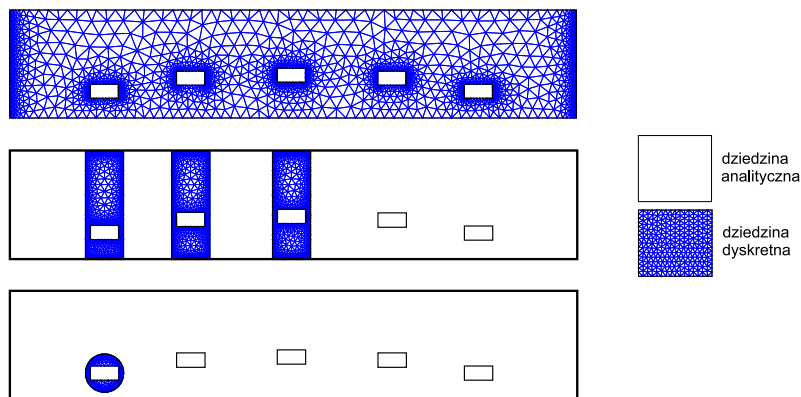
przy czym zarówno macierz  $\mathbf{G}$  jak i macierz  $\mathbf{B}$  zdefiniowane zostały w artykule [MW1]<sup>1</sup> natomiast wektory  $\Phi$  i  $\Psi$  są wektorami współczynników stojących przy funkcjach bazowych odpowiednio skalarnych i wektorowych. Kolejnym krokiem jest powiązanie współczynników wektora  $\mathbf{V}$  ze współczynnikami pola dzięki relacji:

$$\mathbf{B}^H \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{V}, \quad (3.7)$$

Ostateczny wzór na uogólnioną macierz impedancji wygląda następująco:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2\pi R} \mathbf{B}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.8)$$

Rozpraszanie na tak opisanym obiekcie nie musi odbywać się wyłącznie w wolnej przestrzeni, jednak wymaga to ustalonej zmienności wzdłuż osi  $z$ . Podejście to można zatem wykorzystać do modelowania obiektów wewnątrz sekcji falowodowej pod warunkiem, że zajmuje on "pełną wysokość" falowodu. Niewątpliwą zaletą zaproponowanego podejścia jest możliwość wielokrotnego użycia takiej macierzy w różnych częściach układu jak zaprezentowano na Rys. 3.2. Dzięki temu,



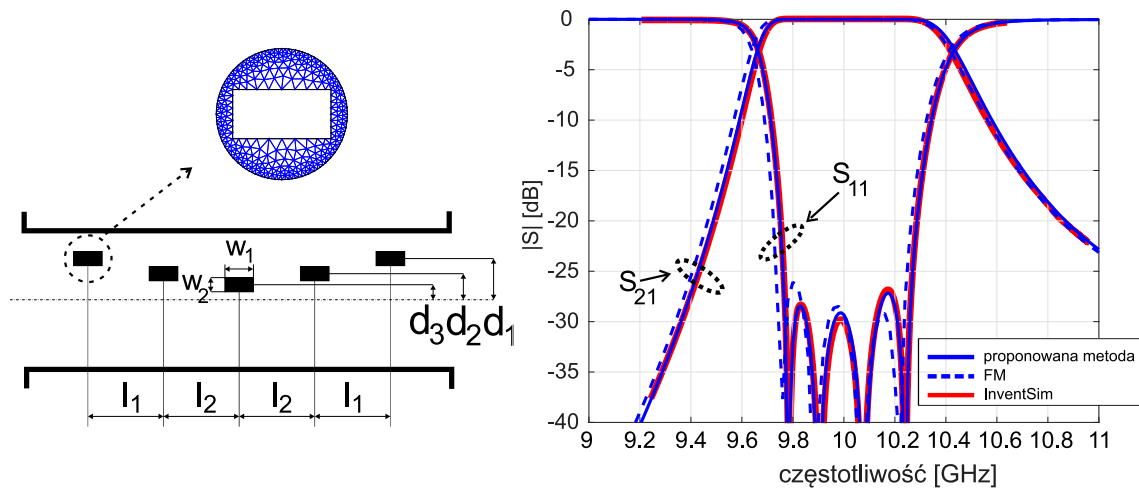
**Rys. 3.2.** Przykłady wielokrotnego użycia pojedynczej uogólnionej macierzy impedancji

że obiekt nie jest konkretnie umiejscowiony względem na przykład ścian falowodu, w kolejnym etapie modelowania możemy ustawiać go dowolnie w falowodzie, powielać a również zmieniać wymiary falowodu w procesie optymalizacji.

Rozważmy filtr składający się z pięciu metalowych kołków zaprezentowany w [70] (patrz Rys. 3.2). Zbudowany jest on z sekcji falowodowej WR-90, w której umieszczone są metalowe prostokątne kołki o wymiarach  $w_1 = 6$  mm,  $w_2 = 3$  mm oraz wysokości równej wysokości falowodu  $h = 10.16$  mm. Rozmieszczenie w obrębie falowodu jest następujące  $d_1 = 5.76$  mm  $d_2 = 3.00$  mm,  $d_3 = 2.27$  mm,  $l_1 = 18.31$  mm oraz  $l_2 = 21.31$  mm a jego schemat znajduje się na Rys. 3.3. Tak zbudowany filtr można analizować, wykorzystując metodę elementów skończonych, na kilka sposobów. Pierwszym z nich jest dyskretyzacja całego filtra, co jest jednak podejściem najbardziej wymagającym obliczeniowo. Możliwy jest także podział struktury na części zawierające metalowe kołki modelowane metodą elementów skończonych oraz części jednorodne modelowane analitycznie jak zaproponowano w [59] (patrz Rys. 3.2). Podejście to pozwala na wykorzystanie symetrii struktury, a więc wyliczenia metodą dyskretną wykonywane są wyłącznie dla trzech fragmentów falowodu. Ostatnim zaproponowanym podejściem jest metoda zaprezentowana w niniejszym rozdziale, gdzie dyskretyzacja następuje wyłącznie dla niewielkiego obszaru wokół kołka. Dla tak zdefiniowanego problemu przeprowadzona została analiza, której wyniki znajdują się po prawej stronie na Rys. 3.3.

<sup>1</sup>W artykule [MW1] wektor współczynników ułożony jest w odwrotnej kolejności, co wpływa na kolejność występowania podmacierzy w macierzy  $\mathbf{G}$  oraz  $\mathbf{B}$ . W niniejszej pracy kolejność ta została zmieniona, aby zachować spójność z pozostałymi artykułami.

Czas symulacji dla analizy metodą elementów skończonych, gdzie dyskretyzacji została poddana cała struktura, wyniósł około 10 minut dla obliczeń wykonanych w 101 punktach częstotliwości (siatka zawierała 3574 elementów). Wykonanie analizy wykorzystując podejście łączące metodę elementów skończonych oraz dopasowania rodzajów zajęło 2 min 13 s (pojedyncza sekcja zawierała 1260 elementów), natomiast czas obliczeń z wykorzystaniem zaproponowanej metody wyniósł 30 s (siatka 556 elementów). Na Rys. 3.3 zaprezentowana została także charakterystyka filtra otrzymana z wykorzystaniem programu InventSim [71], metody dopasowania pól [72] oraz proponowanej techniki, wyniki są względem siebie zgodne.



**Rys. 3.3.** Schemat poglądowy rozmieszczenia postów w obrębie filtra oraz jego charakterystyka

Algorytm ten opisany został na kartach publikacji:

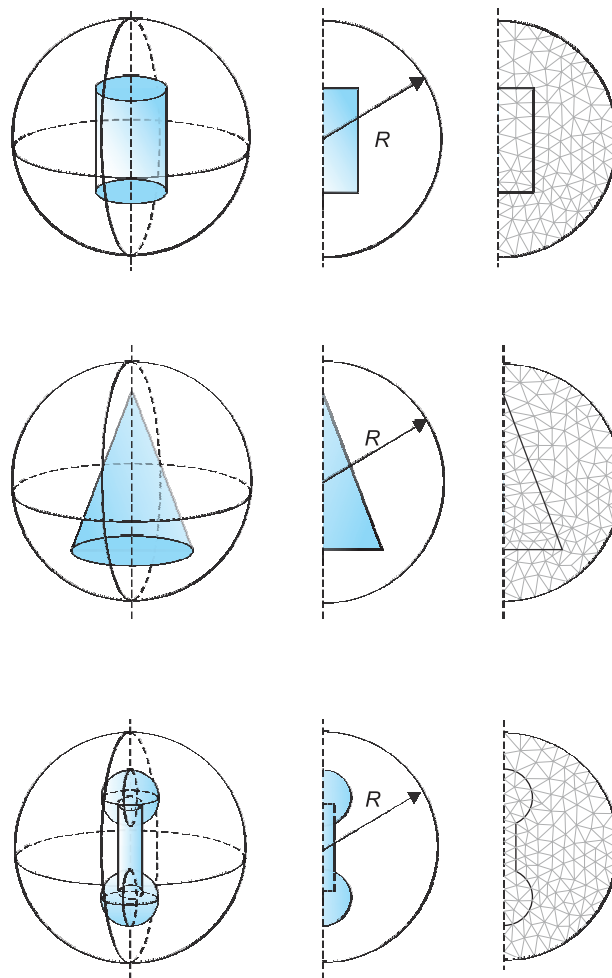
**[MW1]** P. Kowalczyk, R. Lech, **M. Warecka**, A.Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 33.2 (2019): 178-192.

W artykule znajduje się szczegółowy opis wszystkich podmacierzy jak również większa liczba przykładów numerycznych, także dla przestrzeni otwartej, które nie zostały umieszczone w niniejszej pracy w celu zachowania jej zwięzłości. Zawiera on również badanie zbieżności; zbieżność metody została potwierdzona. **Zaprezentowane podejście dowodzi tezy numer dwa** - dekompozycja dziedziny obliczeniowej pozwoliła na około dwudziestokrotne skrócenie czasu w stosunku do metody elementów skończonych z dyskretyzacją całej dziedziny dla przedstawionego filtra. Wkład autorki: optymalizacja kodu, dobór przykładów numerycznych i przeprowadzenie symulacji dla przykładów opisanych w artykule.

### 3.1.2. Struktury niejednorodne o symetrii osiowej

Dla obiektów o skończonych wymiarach możliwe jest otoczenie ich sferą. Powierzchnia sfery staje się powierzchnią wrót, dla których definiujemy uogólnioną macierz impedancji. Załóżmy, że obiekt posiada symetrię osiową. Wówczas problem ponownie redukujemy do problemu dwupółwymiarowego a sfera, na której definiowane są wrota, reprezentowana jest poprzez połowę okręgu (patrz Rys. 3.4). Macierz impedancji zbudowana jest analogicznie do poprzedniego przypadku. Wektory definiujące uogólnioną macierz impedancji we wzorze (3.5) prezentują się następująco

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}^{\text{TE}}, \mathbf{V}^{\text{TM}}] \quad (3.9)$$



**Rys. 3.4.** Przykładowe bryły obrotowe oraz ich dyskretyzacja

oraz

$$\mathbf{I} = [\mathbf{I}^{\text{TE}}, \mathbf{I}^{\text{TM}}] \quad (3.10)$$

przy czym poszczególne podwektory uporządkowane są według schematu

$$\mathbf{V}^{(\cdot)} = [V_{1,-1}^{(\cdot)}, V_{1,0}^{(\cdot)}, V_{1,1}^{(\cdot)}, V_{2,-2}^{(\cdot)}, \dots, V_{N,N-1}^{(\cdot)}, V_{N,N}^{(\cdot)}]^T \quad (3.11)$$

$$\mathbf{I}^{(\cdot)} = [I_{1,-1}^{(\cdot)}, I_{1,0}^{(\cdot)}, I_{1,1}^{(\cdot)}, I_{2,-2}^{(\cdot)}, \dots, I_{N,N-1}^{(\cdot)}, I_{N,N}^{(\cdot)}]^T \quad (3.12)$$

Pole opisane na powierzchni sfery o promieniu  $R$  jest sumą funkcji bazowych i odpowiednich współczynników:

$$\vec{E}(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n (V_{nm}^{\text{TE}} \vec{e}_{nm}^{\text{TE}} + V_{nm}^{\text{TM}} \vec{e}_{nm}^{\text{TM}}) \quad (3.13)$$

$$\vec{H}(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n (I_{nm}^{\text{TE}} \vec{h}_{nm}^{\text{TE}} + I_{nm}^{\text{TM}} \vec{h}_{nm}^{\text{TM}}) \quad (3.14)$$

gdzie funkcje bazowe przyporządkowane zostały w następujący sposób

$$\vec{e}_{nm}^{\text{TM}} = \vec{h}_{nm}^{\text{TE}} = \vec{N}_{nm}^t \quad (3.15)$$

oraz

$$\vec{h}_{nm}^{\text{TM}} = \vec{e}_{nm}^{\text{TE}} = \vec{M}_{nm}^t \quad (3.16)$$



przy czym

$$\vec{N}_{nm}^t = e^{jm\varphi} \left( \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\theta + \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\varphi \right)$$

$$\vec{M}_{nm}^t = e^{jm\varphi} \left( \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\theta - \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\varphi \right)$$

Analogicznie jak w poprzednim przypadku wyniku wyprowadzenia otrzymujemy wzór na uogólnioną macierz impedancji

$$\mathbf{Z} = j\omega\mu_0\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{B}^H\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} \quad (3.17)$$

Zarówno macierz  $\mathbf{B}$  jak i  $\mathbf{G}$  oraz  $\mathbf{\Delta}$  szczegółowo opisane zostały w artykule [MW3]. Pomimo, że wzory (3.17) oraz (3.8) wyglądają podobnie, zarówno macierz  $\mathbf{B}$  jak i macierz  $\mathbf{G}$  są wyrażone różnymi wzorami. Tym razem wynikają one bezpośrednio z równań odpowiednio (2.51) i (2.52) (nie z (2.38) i (2.39)). W wyniku próbkowania zdyskretyzowany zostaje obszar obejmujący połowę koła, następnie możliwe jest policzenie pola rozproszonego na obiekcie umieszczonym w wolnej przestrzeni lub falowodzie czy wnęcie rezonansowej.

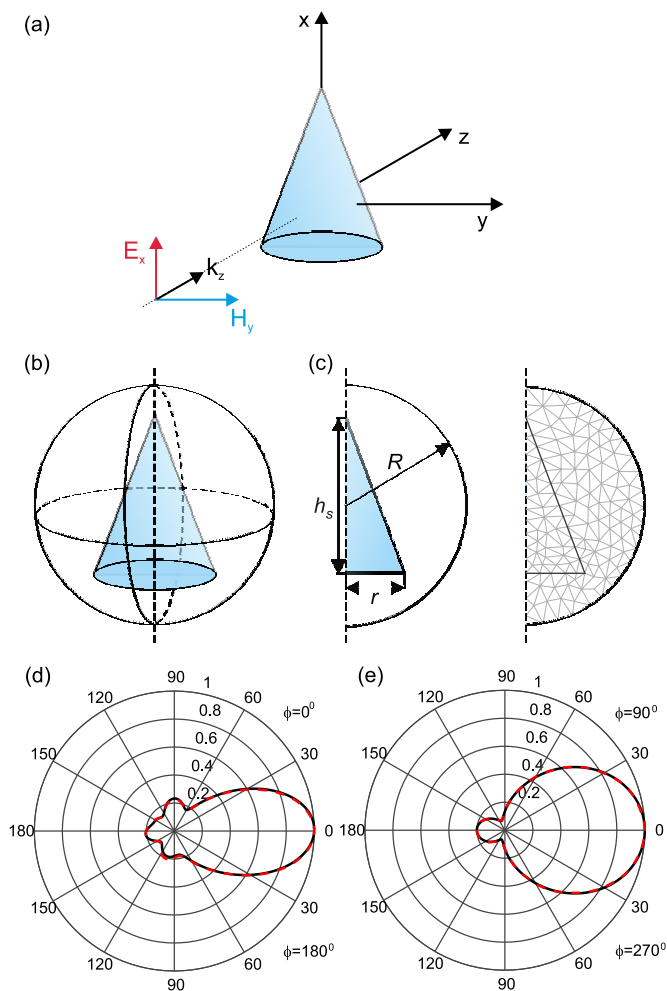
Takie podejście posiada liczne zalety względem innych rozwiązań. Obiekt, dla którego wyliczona jest uogólniona macierz impedancji może być dowolnie obracany, a wszelkie obroty i przemieszczenia w obrębie falowodu nie wymagają ponownego obliczania macierzy impedancji. Część dyskretna jest najbardziej czasochłonną częścią obliczeń, a uniknięcie ponownego wyliczania macierzy impedancji w procesie optymalizacji znacząco przyspiesza obliczenia. Jak w poprzedniej metodzie macierz impedancji może być wykorzystywana wielokrotnie o ile w układzie występują elementy o tej samej geometrii. Obiekty umieszczane są w falowodzie zamodelowanym analitycznie co zmniejsza zarówno obszar podlegający siatkowaniu oraz rozmiar rozwiązywanego problemu jak i zwiększa dokładność obliczeń.

W celu weryfikacji poprawności metody przebadane zostały charakterystyki rozpraszania fali płaskiej na dielektrycznym stożku o wymiarach  $h_s = 20$  mm,  $r = 6$  mm (patrz Rys.3.5). Stożek otoczony został wirtualną sferą o promieniu  $R = 12$  mm i oświetlony falą płaską o kierunku propagacji wzdłuż osi  $z$  i częstotliwości 20 GHz. Wyniki przedstawione zostały na Rys. 3.5 linią ciągłą oraz porównane z wynikami otrzymanymi w programie HFSS (linia przerywana). Uzyskana została dobra zgodność, przy czym w wyniku redukcji wymiaru oraz dziedziny obliczeniowej osiągnięto sześćdziesięciokrotny zysk w stosunku do metody referencyjnej.

Powyższe podejście opublikowane zostało w:

**[MW3] M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk, "Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 68, no. 11, pp. 4528-4535, Nov. 2020, doi: 10.1109/TMTT.2020.3014944.**

Artykuł zawiera szczegółowy opis podmacierzy jak również szeroki zakres przykładów takich jak rozpraszanie w wolnej przestrzeni, filtry czy struktura periodyczna. **Zaprezentowane podejście dowodzi też pierwszej, drugiej i trzeciej** - wykorzystana została tu symetria osiowa do poprawy efektywności co pozwoliło na zastosowanie gęstszych siatek i uzyskanie dokładniejszych wyników, dekompozycja dziedziny przyczyniła się również do poprawy czasu obliczeń. Wkład autorki: modyfikacja sformułowania dla metody elementów skończonych uwzględniającego symetrię osiową struktur obejmująca opis uogólnionej macierzy impedancji na powierzchni sfery oraz jego implementacja, przeprowadzenie analiz numerycznych prezentowanych przykładów.



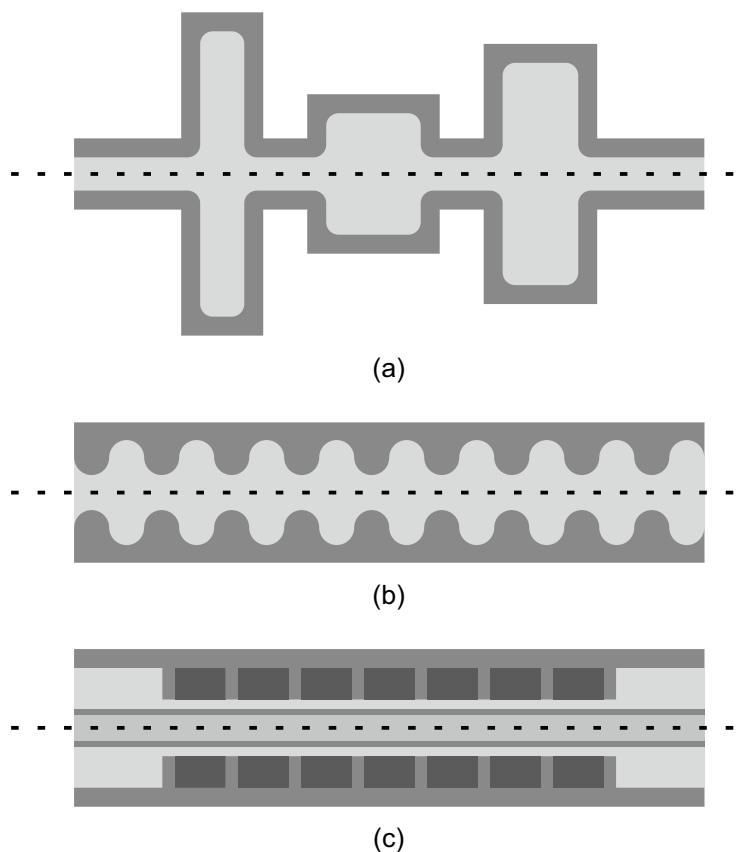
**Rys. 3.5.** Rozpraszanie fali płaskiej na stożku dielektrycznym (a) rysunek poglądowy (b) stożek otoczony sferą (c) opis wymiarów struktury oraz siatka (d) charakterystyka rozproszenia w płaszczyźnie  $xz$  (e) charakterystyka rozproszenia w płaszczyźnie  $yz$

### 3.2. Prowadnice falowe

Od kilkudziesięciu lat rośnie popularność struktur periodycznych ze względu na ich szczególne właściwości takie jak przewodzenie fal typu LH (left-handed) czy fal wstecznych (patrz Rys. 3.6). Struktury te są często skomplikowane pod względem geometrii co nastręcza trudności w analizie i wiąże się z koniecznością poszukiwania sposobów ich efektywnego modelowania. W przeciwieństwie do rozwiązań analitycznych zwykle ograniczonych do prostych struktur opisanych w literaturze [73], metoda elementów skończonych nie wprowadza ograniczeń w kwestii dielektrycznego wypełnienia ani złożonych geometrii metalizacji. W niniejszej części przedstawiony zostanie opis algorytmu pozwalającego na modelowanie zarówno przewodnic periodycznych (o symetrii osiowej) jak i o skończonej długości oraz opisane zostaną ograniczenia wynikające z takiego podejścia.

#### 3.2.1. Sekcje falowodowe o symetrii osiowej

Założmy, że struktura posiada symetrię osiową oraz dwoje wrót (tak jak przedstawiono na Rys. 3.7), które można opisać jako wrota falowodu cylindrycznego. Wówczas dziedzina obliczeniowa ograniczona jest przez cztery krzywe,  $L_1$  oraz  $L_2$  odpowiednio dwa kolejne wrota (patrz



**Rys. 3.6.** Przekrój wzdłuż osi (a) filtra mikrofalowego (b) periodycznej struktury prowadzącej falę spowolnioną (slow wave periodic structure) (c) falowód kołowy prowadzący wiązkę elektronów

Rys. 3.7),  $L_a$  oś symetrii oraz  $L_b$  ściankę falowodu. Wektory  $\vec{i}_1$  oraz  $\vec{i}_2$  są wektorami normalnymi do powierzchni przekroju poprzecznego portu przy czym są one skierowane na zewnątrz dziedziny. Dla tak zdefiniowanej struktury macierz  $S$  obliczyć można korzystając ze sformułowania na uogólnioną macierz impedancji  $Z$  według wzoru [73]:

$$S = (z + U)^{-1}(z - U) \quad (3.18)$$

gdzie  $U$  jest macierzą jednostkową a macierz  $z$  jest unormowaną macierzą impedancji. Macierz  $Z$  normalizujemy w następujący sposób:

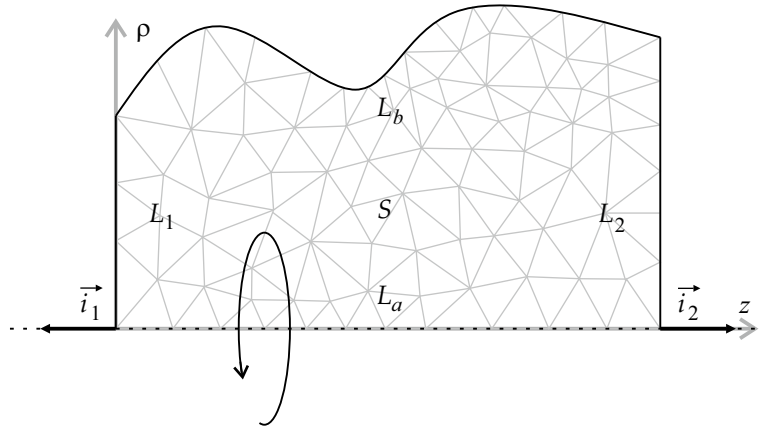
$$z = N^{-1}ZN \quad (3.19)$$

gdzie  $N = \text{diag}\{Z_{01}^{1/2}, Z_{02}^{1/2}\}$  a  $Z_{0i}$  jest wektorem impedancji we wrotach  $i$ -tych, który wygląda następująco  $Z_{0i} = [Z_1^{TE}, \dots, Z_Q^{TE}, Z_1^{TM}, \dots, Z_Q^{TM}]$ . Tak obliczoną macierz rozproszenia połączyć można z sekcją falowodową zamodelowaną analitycznie, z innymi sekcjami lub też korzystając z odpowiednich wzorów stworzyć strukturę periodyczną lub quasi-periodyczną.

### 3.2.2. Macierz impedancji - falowód cylindryczny

Pierwszym krokiem zdefiniowania uogólnionej macierzy impedancji jest opis pól we wrotach struktury. Pole takie wyrazić można z pomocą bazy funkcji odpowiadających kolejnym rodzajom falowodu cylindrycznego i tak pole elektryczne zapisać można jako:

$$\vec{E}_\xi^p = \sum_{q=1}^Q (V_q^{TE,p} \vec{e}_{\xi,q}^{TE,p} + V_q^{TM,p} \vec{e}_{\xi,q}^{TM,p}) \quad (3.20)$$



**Rys. 3.7.** Przykładowa dwuwymiarowa dziedzina obliczeniowa dla sekcji falowodowej, dla której definiowana jest macierz rozproszenia [MW2]

natomiast pole magnetyczne jako:

$$\vec{H}_\xi^p = \sum_{q=1}^Q (I_q^{TE,p} \vec{h}_{\xi,q}^{TE,p} + I_q^{TM,p} \vec{h}_{\xi,q}^{TM,p}) \quad (3.21)$$

przy czym  $\xi = \{t, \varphi\}$  a funkcje  $\vec{e}_{\xi,q}^{(\cdot),p}$ ,  $\vec{h}_{\xi,q}^{(\cdot),p}$  zostały opisane w dodatku A w artykule [MW2]. Analogicznie jak w poprzednich podrozdziałach w wyniku zastosowania metody elementów skończonych otrzymujemy uogólnioną macierz impedancji

$$\mathbf{Z} = j\omega\mu_0\Delta^{-1}\mathbf{B}^H\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}. \quad (3.22)$$

z której wyznaczyć można macierz S. Zarówno macierz  $\mathbf{B}$  jak i  $\mathbf{G}$  oraz  $\Delta$  szczegółowo opisane zostały w artykule [MW2].

### 3.2.3. Struktury periodyczne

Dla struktur periodycznych nie ma konieczności wyznaczania macierzy rozproszenia o ile zastosowane zostaną periodyczne warunki brzegowe. Tu zaznaczyć należy, że takie rozwiązanie problemu prowadzi do problemu własnego. Warunki periodyczne wykorzystują relację pomiędzy polem we wrotach prawych  $L_2$  a polem we wrotach lewych  $L_1$ , przy czym są one ze sobą powiązane poprzez współczynnik propagacji [27, 74]. Takie podejście wiąże się z kilkoma restrykcjami. Przede wszystkim wymaga to wymuszenia węzłów siatki po obu stronach wrót w taki sposób by jedna ze współrzędnych ( $\rho$ ) pozostała niezmienna druga zaś ( $z$ ) była przesunięta o długość sekcji (okres)  $p$  (węzły po lewej ( $\rho_1, z_1$ ) odpowiadają zatem węzłom po prawej ( $\rho_1, z_1 + p$ )). Sekcja podlegająca dyskretyzacji musi być równa okresowi  $p$  struktury periodycznej. Korzystając z tak zdefiniowanej siatki zależność między odpowiednimi polami można zapisać następująco:

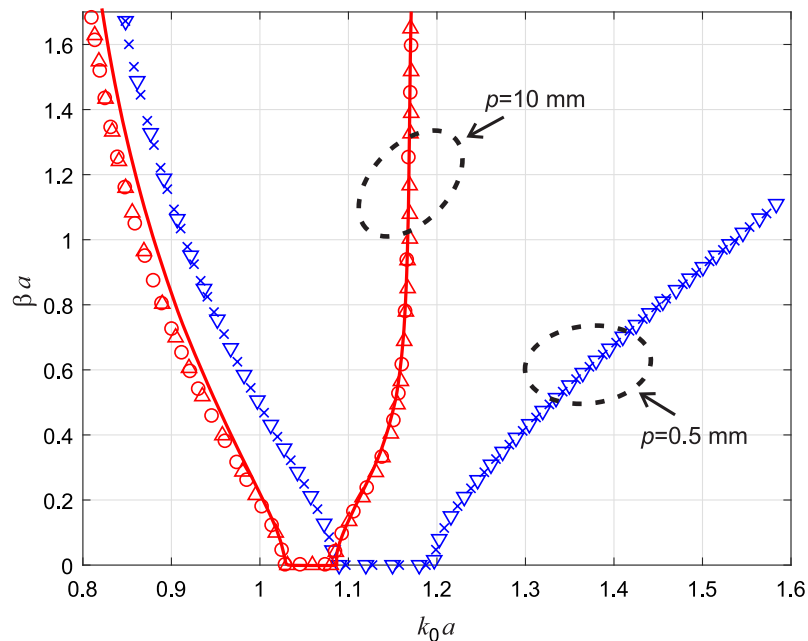
$$\begin{bmatrix} \Phi_R \\ \Psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_L \\ \Psi_L \end{bmatrix} e^{-\gamma p} \quad (3.23)$$

Wykorzystując powyższą relację, eliminując węzły i krawędzie wrót prawych oraz reorganizując równania otrzymujemy problem własny, dla którego  $-e^{-\gamma p}$  jest szukaną wartością własną.

Innym podejściem jest wyznaczenie macierzy rozproszenia a następnie skorzystanie ze wzoru zawartego w [75]. I choć podejścia te dają podobne wyniki (patrz [MW2]) podejście wyko-

rzystujące macierz rozproszenia niesie za sobą pewne ograniczenia. Dla odpowiednio niewielkiego okresu  $p$  występuje problem ze źle uwarunkowaną macierzą. Dla wrót znajdujących się w bliskiej odległości względem kołka pole jest szybko zmienne, a więc niezbędna jest nie tylko gęsta siatka ale też duża liczba funkcji bazowych we wrotach. Z przyczyn numerycznych zastosowanie jednak bardzo dużej liczby funkcji Bessla czy też Hankela zaczyna być kłopotliwe. W takim przypadku użycie periodycznych warunków brzegowych jest więc o wiele bardziej efektywne.

Przykładem wystąpienia takiej trudności jest struktura periodyczna zaproponowana w [11] [patrz Rys. 3(b)] o okresie  $p = 0.5$  mm. Wymiary sekcji były następujące  $a = 9$  mm,  $h = 3$  mm i  $p = 0.1p$  a względna przenikalność elektryczna dielektryka wynosiła  $\epsilon_r = 15$ . Dla porównania przebadana została również identyczna struktura o okresie  $p = 10$  mm a wyniki dla obu sekcji przedstawione zostały na Rys. 3.8 (linia ciągła - podejście z uogólnioną macierzą impedancji,



**Rys. 3.8.** Charakterystyki dyspersyjne struktury periodycznej opisanej w [MW2] o okresie:  $p = 0.5$  mm oraz  $p = 10$  mm

okręgi/krzyżyki - periodyczne warunki brzegowe, trójkąty - wyniki pomiaru [11]). Wyniki otrzymane różnymi metodami są w zgodności względem siebie przy czym dla komórki o okresie 0.5 mm siatka składała się z 1060 elementów natomiast dla komórki o długości 10 mm z 4799 elementów. Powyższe podejście opublikowane zostało w:

**[MW2] M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk, "Efficient Finite Element Analysis of Axially Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 67, no. 11, pp. 4291-4297, Nov. 2019, doi: 10.1109/TMTT.2019.2940021.**

Artykuł zawiera szczegółowy opis wykorzystania symetrii osiowej, porównanie podejścia z macierzą impedancji zdefiniowanej we wrotach z periodycznymi warunkami brzegowymi. Zawiera więcej przykładów oraz szczegółowy opis funkcji aproksymujących jak i formuły konieczne do wyliczenia podmacierzy. **Zaprezentowana metoda dowodzi tezy pierwszej niniejszej pracy.** Wkład autorki: sformułowanie równań dla metody elementów skończonych uwzględniających symetrię osiową, dostosowanie wrót sekcji falowodowej o przekroju kołowym umożliwiające wprowadzenie periodycznych warunków brzegowych, implementacja periodycznych warunków brzegowych

i sformułowania obejmującego wspomnianą symetrię a również wykonanie testów numerycznych dla struktur periodycznych i quasi-periodycznych.

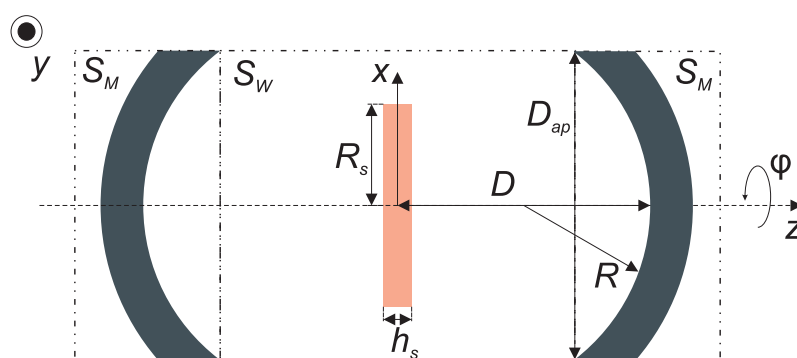
### 3.3. Struktury rezonansowe

Niegasnąca popularność rezonatorów spowodowana jest między innymi możliwością bardzo precyzyjnego pomiaru parametrów materiału (na przykład przenikalności elektrycznej) z ich pomocą. Analiza takich struktur często wymaga jednak rozwiązania problemu własnego, co w przypadku złożonej budowy lub dużych wymiarów elektrycznych może powodować trudności.

#### 3.3.1. Rezonator Fabry-Pérot

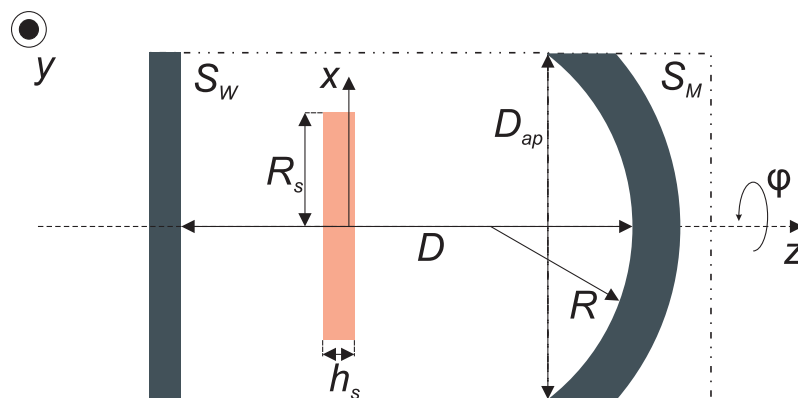
Dla struktur dużych elektrycznie takich jak rezonator Fabry-Pérot podejście, w którym korzystamy wyłącznie z metody elementów skończonych niesie za sobą wiele problemów. Przede wszystkim siatkowanie ze swojej natury obciążone jest dyspersją numeryczną, którą eliminować można poprzez zagęszczanie siatki lub zwiększanie rzędu funkcji bazowych. Oba te rozwiązania znacząco wpływają na efektywność obliczeń. Kolejnym problemem jest sam rozmiar struktury, który wiąże się z koniecznością wprowadzenia ogromnej liczby zmiennych. Oba te problemy mogą zostać rozwiązane przy wykorzystaniu metod hybrydowych.

Rozważmy rezonator Fabry-Pérot - patrz Rys. 3.9. Rezonator ten podzielić można na trzy sekcje: dwie sekcje zawierające zwierciadła oraz jedną, w której znajduje się próbka. Macierze rozproszenia zwierciadeł  $S_M$  obliczane są przy użyciu metody elementów skończonych co pozwala na większą elastyczność i dowolność związaną z kształtem zwierciadeł natomiast część wewnętrzna z próbką modelowana jest analitycznie. W związku z symetrią osiąwą zwierciadeł analizę uprościć można do zagadnienia dwuwymiarowego opisanego w poprzednim rozdziale. Analizowana struktura jest strukturą otwartą, dla której rozważane są wyłącznie rodzaje będące



Rys. 3.9. Otwarty rezonator Fabry-Pérot

wiązką Gaussowską. Pole wiązki jest silnie skoncentrowane w osi i zanika wraz ze wzrostem odległości. Zamknięcie struktury poprzez wykorzystanie falowodu pozwala na znaczące uproszczenie analizy przy jednoczesnym zachowaniu jej dokładności. Jeśli dobierzemy odpowiednio duży promień falowodu, aby pole wiązki w odległości  $D_{ap}/2$  było równe zero, ścianki metalowe nie zaburzą rozkładu pola. W takim przypadku należy jednak odfiltrować część rozwiązań związanych z umieszczonym falowodem. Rozkłady pola związane ze sztucznym zamknięciem struktury falowodem dalej nazywane będą rodzajami falowodowymi. Filtracja rodzajów falowodowych ze zbioru wszystkich rozwiązań w artykule [MW4] została wykonana jako przetwarzanie końcowe. W pierwszym kroku dla wyliczonej częstotliwości rezonansowej wyliczony został wektor własny. Wektor własny użyty został do wyliczenia pola w przekroju poprzecznym falowodu w zakresie od 0 do  $D_{ap}/2$ . W następnym kroku obliczony został iloraz różnicowy w przód. Funkcja Gaussowska jest



Rys. 3.10. Płasko wklęsły otwarty rezonator Fabry-Pérot

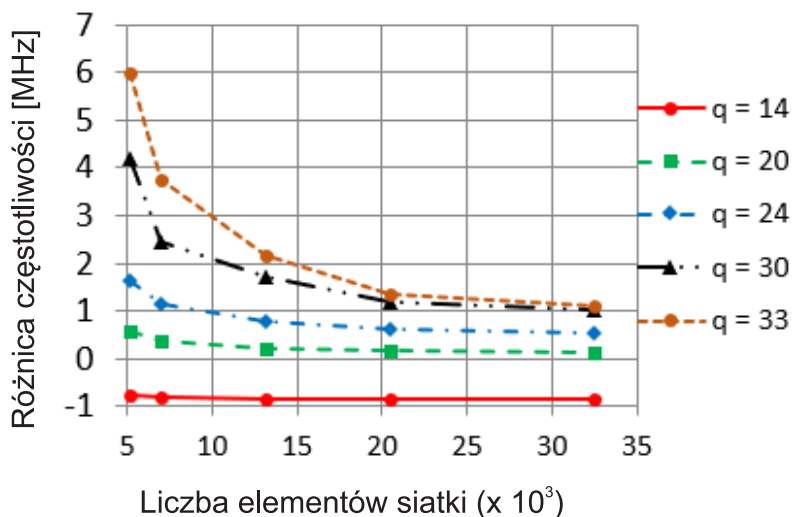
funkcją malejącą na przedziale  $(0, D_{ap}/2)$ , stąd też wszystkie rozwiązania, dla których występuje pochodna dodatnia w podprzedziałach należy odrzucić. Należy jednak uwzględnić przy tym błąd numeryczny w obszarze, dla którego wiązka Gaussowska ma pole bliskie zeru.

Otwarty rezonator Fabry-Pérot jest rezonatorem używanym do pomiarów parametrów materiałowych próbek. Symulacja musi, więc obejmować nie tylko zwierciadła i przestrzeń między nimi, ale też próbkę dielektryczną. Samą próbkę można zamodelować na kilka sposobów. Jeśli próbka ma kształt dysku a jej promień jest wystarczająco duży by jej brzegi nie zaburzały pola wiązki, wówczas możliwe jest modelowanie jej jako fragment falowodu całkowicie wypełnionego dielektrykiem o szerokości  $h_s$ , którego macierz  $S$  obliczona jest analitycznie. Przy takim podejściu macierz  $S_w$  jest kaskadowym połączeniem macierzy fragmentów pustego falowodu oraz falowodu wypełnionego dielektrykiem. Dla płytek, których wielkość promienia  $R_s$  jest mniejsza lub też kształt jest bardziej skomplikowany, taki fragment modelować możemy metodą elementów skończonych, a następnie tak jak w poprzednim przypadku połączyć kaskadowo z pozostałymi sekcjami.

Dla rezonatora zaprezentowanego na Rys. 3.9 macierz zwierciadła  $S_M$  jest macierzą wyliczaną wyłącznie dla jednego zwierciadła, a następnie dwukrotnie wykorzystywana. W tej strukturze próbka zlokalizowana jest dokładnie w środku rezonatora - w maksimum pola elektrycznego dla rezonansów o zmienności nieparzystej wzdłuż osi rezonatora. Niestety, niedawno odkryto występowanie sprzężeń tych rodzajów z wyższymi rodzajami [76] co ogranicza maksymalną grubość badanej próbki (bez ryzyka dodatkowego odchylenia przenikalności). Rozwiązaniem tego problemu może być eliminacja rodzajów parzystych lub nieparzystych poprzez zaburzenie symetrii tak aby sprzężenie to nie było możliwe. Niedawno zaproponowany został rezonator nie posiadający takiej symetrii [MW4] (patrz Rys. 3.10) - jedno ze zwierciadeł jest płaskie - rozwiązujący ten problem.

Dla tak zbudowanej struktury maksimum pola nie przypada w środku rezonatora dla rodzajów nieparzystych. Wymaga to poszukiwania maksimum poprzez przesuwanie próbki w obrębie środkowej sekcji falowodowej. Zarówno dyskretne jak i analityczne podejście uwzględniające próbkę jako oddzielną macierz rozproszenia pozwala na minimalizację nakładu związanego z obliczeniami. W takim przypadku macierz  $S$  próbki obliczana jest dla konkretnej częstotliwości a następnie łączona jest kaskadowo z różnej długości częściami falowodu modelowanymi analitycznie.

Dla przedstawionej struktury rezonatora Fabry-Pérot przeprowadzona została analiza zbieżności wraz ze wzrostem liczby elementów siatki dla różnych zmienności pola wzdłuż osi a jej wyniki zaprezentowane zostały na Rys. 3.11. Symulacje wykonane zostały dla pustego rezonatora płasko-wklęsłego o wymiarach  $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm,  $D_{ap} = 180$  mm (patrz Rys. 3.10). Najniższa częstotliwość podlegająca analizie wynosiła 21.44 GHz natomiast najwyższa 49.92 GHz a jako wartość referencyjną przyjęto wyniki otrzymane metodą [77]. Tabela 3.1 przedstawia zmiany



**Rys. 3.11.** Analiza zbieżności dla płasko-wklęsłego otwartego rezonatora Fabry-Pérot

częstotliwości rezonansowej wraz ze zmianą położenia płytki dielektrycznej całkowicie wypełniającej falowód o grubości  $h_s = 2$  mm. W tabeli znajduje się częstotliwość rezonansowa otrzymana opisywaną metodą (kolor czarny) oraz metodą funkcji Greena [77] (kolor brązowy) a również procentowy błąd względny. Badanie zmiany częstotliwości rezonansowej wraz z położeniem płytki wykonano również dla dwóch innych grubości  $h_s = 0.1$  mm oraz  $h_s = 0.5$  mm a wyniki zaprezentowano na Rys. 3.12 (linia przerywana reprezentuje wyniki otrzymane [77] natomiast wyniki oznaczone znacznikami proponowaną metodą hybrydową). Wyniki analizy rezonatora Fabry-Pérot opublikowane zostały w artykule:

**[MW4]** B. Salski, T. Karpisz, **M. Warecka**, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022, doi: 10.1109/TMTT.2022.3152511.

W tej publikacji została wykorzystana metoda hybrydowa opisana powyżej. **Otrzymane wyniki dowodzą też pierwszej i drugiej.** Analiza bez wykorzystanych zabiegów byłaby silnie utrudniona ze względu na potrzebny czas obliczeń oraz zasoby. Wkład autorki: opracowanie i implementacja algorytmu hybrydowego (połączenie metody elementów skończonych i dopasowania rodzajów) pozwalającego na analizę rezonatora Fabry-Pérot. Wykonanie badania zbieżności oraz analiz porównawczych dotyczących wpływu położenia płytki dielektrycznej na częstotliwość rezonansową.

### 3.3.2. Ferrytowy rezonator sferyczny

Ostatnie rozwiązanie zaproponowane w niniejszej pracy dotyczy rezonatora sferycznego obciążonego ferrytową kulą (patrz Rys. 3.13). Ferryt jest materiałem silnie zależnym od częstotliwości, którego przenikalność magnetyczną wyrazić można za pomocą tensora Poldera [78]:

$$\bar{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (3.24)$$



Re( $f_r$ ) [GHz] - FEM Re( $f_r$ ) [GHz] - metoda [77] błąd względny					
ds [mm]	$\epsilon_r$				
	2	5	10	12	15
1	21.3193	20.7608	20.4149	20.3696	20.3234
	21.3197 (0.0019 %)	20.7611 (0.0016 %)	20.4156 (0.0033 %)	20.3704 (0.0035 %)	20.3241 (0.0035 %)
3	21.1052	20.7602	20.5779	20.4766	20.1673
	21.1058 (0.0027 %)	20.7609 (0.0037 %)	20.5787 (0.0038 %)	20.4773 (0.0035 %)	20.1678 (0.0024 %)
5	21.2629	21.0797	20.8232	20.5948	20.1338
	21.2636 (0.0031 %)	21.0805 (0.0037 %)	20.8239 (0.0033 %)	20.5954 (0.0027 %)	20.1344 (0.0031 %)
7	21.4087	21.2758	20.7409	20.4886	20.2575
	21.4092 (0.0025 %)	21.2762 (0.0019 %)	20.7410 (0.0003 %)	20.4890 (0.0018 %)	20.2582 (0.0039 %)
9	21.1758	20.6415	20.4247	20.3792	20.3074
	21.1760 (0.0010 %)	20.6420 (0.0024 %)	20.4255 (0.0042 %)	20.3800 (0.0039 %)	20.3080 (0.0029 %)
11	21.1492	20.8678	20.6600	20.5205	20.1395
	21.1499 (0.0035 %)	20.8688 (0.0047 %)	20.6609 (0.0045 %)	20.5212 (0.0038 %)	20.1399 (0.0020 %)

**Tabela 3.1.** Częstotliwość rezonansowa dla płytki umieszczonej w odległości  $ds$  od środka płytki do zwierciadła płaskiego (czarny - częstotliwość rezonansowa FEM+BOR, brązowy - częstotliwość rezonansowa otrzymana metodą [77] oraz błąd względny)

gdzie

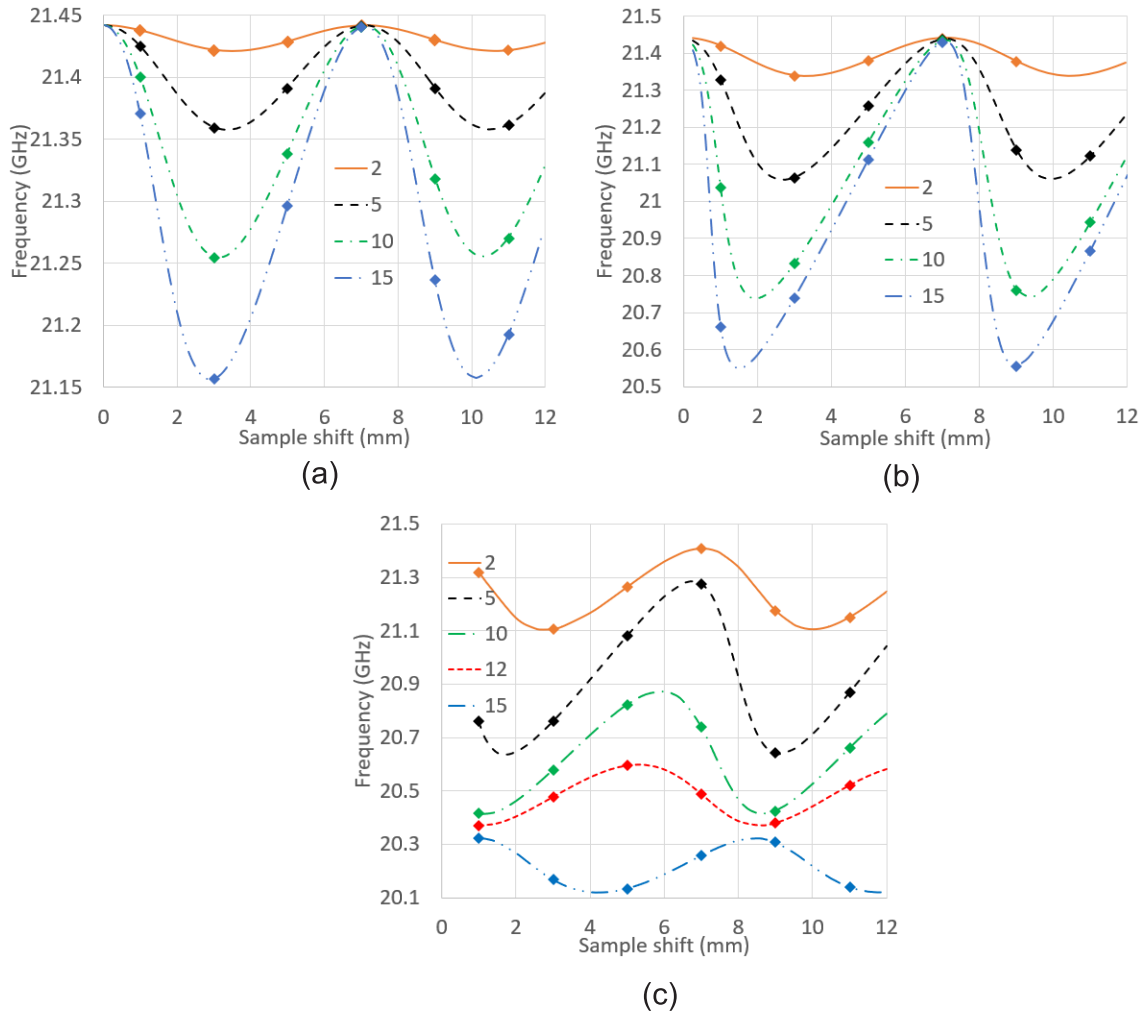
$$\kappa = \frac{w}{H_{0r}^2 - w^2 + 2j\alpha_G H_{0r} w}, \quad \mu = 1 + \frac{H_{0r} + j\alpha_G w}{w/\kappa} \quad (3.25)$$

przy czym zewnętrzne pole magnetyczne zorientowane jest wzdłuż osi  $z$  (osi obrotu) a  $\mu_z = 1$ .  $H_{0r}$  oznacza wewnętrzne pole magnetyczne znormalizowane względem  $M_s$ ,  $\alpha_G$  współczynnik tłumienia Gilberta opisany w artykule [79],  $w = f/(\gamma_e M_s)$ ,  $\gamma_e$  to stosunek magnetogiryczny elektronu,  $f$  jest zespoloną częstotliwością a  $M_s$  magnetyzacją nasycenia. W związku z symetrią osiową struktury ponownie problem redukuje się do dwóch i pół wymiaru.

Podane wcześniej równania (2.53) i (2.54) wymagają modyfikacji ze względu na tensor przenikalności magnetycznej.

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[ \vec{\nabla}(\rho F_\varphi) \circ (\vec{i}_\varphi \times (\eta_{t\varphi}(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t))) \right] dpdz - \iint_S \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(\rho F_\varphi) \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt}(\vec{i}_\varphi \times \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi))]) dpdz \\ & + \iint_S \frac{j\mu}{\rho} \vec{\nabla}(\rho F_\varphi) \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt}(\vec{i}_\varphi \times \vec{E}_t)]) dpdz - k_0^2 \iint_S F_\varphi \epsilon_r E_\varphi \rho dpdz = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \rho(\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ (\eta_{\varphi\varphi}(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t)) dpdz - \iint_S (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ [\eta_{\varphi t}(\vec{i}_\varphi \times \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi))] dpdz \\ & + \iint_S j\mu(\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ (\eta_{\varphi t}(\vec{i}_\varphi \times \vec{E}_t)) dpdz + \iint_S j\mu \vec{F}_t \circ [\vec{i}_\varphi \times (\eta_{t\varphi}(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t))] dpdz \\ & - \iint_S \frac{j\mu}{\rho} \vec{F}_t \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt}(\vec{i}_\varphi \times (\vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi))]) dpdz - \iint_S \frac{m^2}{\rho} \vec{F}_t \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt}(\vec{i}_\varphi \times \vec{E}_t)]) dpdz \\ & - k_0^2 \iint_S \vec{F}_t \circ \epsilon_r \vec{E}_t \rho dpdz = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$



**Rys. 3.12.** Częstotliwości rezonansowe rodzaju  $TEM_{0,0,14}$  w funkcji przesunięcia dla różnych przenikalności i płytek o szerokości (a)  $h_s = 0.1$  mm (b)  $h_s = 0.5$  mm (c)  $h_s = 2.0$  mm

przy czym

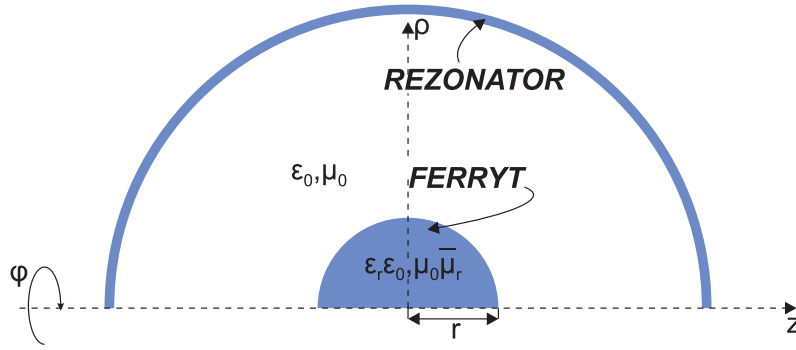
$$\vec{\mu}_r^{-1} = \eta = \begin{bmatrix} \eta_{tt} & \eta_{t\varphi} \\ \eta_{\varphi t} & \eta_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Tak sformułowany problem w metodzie elementów skończonych wiąże się jednak z powstawaniem rodzajów pasożytniczych związanych z osią symetrii układu. Takie rodzaje ze względu na ich znaczącą ilość znacząco utrudniają analizę problemu własnego. W celu eliminacji tych rodzajów zastosowano następujące podstawienie:

$$\tilde{E}_\varphi = \rho E_\varphi \quad (3.29)$$

i ostatecznie równania przyjmują postać

$$\iint_S \left[ \vec{\nabla}(\rho F_\varphi) \circ (\vec{i}_\varphi \times (\eta_{t\varphi}(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t))) \right] d\rho dz - \iint_S \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(\rho F_\varphi) \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt}(\vec{i}_\varphi \times \vec{\nabla}_t \tilde{E}_\varphi)]) d\rho dz + \iint_S \frac{j^m}{\rho} \vec{\nabla}(\rho F_\varphi) \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt}(\vec{i}_\varphi \times \vec{E}_t)]) d\rho dz - k_0^2 \iint_S F_\varphi \varepsilon_r \tilde{E}_\varphi d\rho dz = 0 \quad (3.30)$$



Rys. 3.13. Schemat rezonatora sferycznego obciążonego ferrytową kulką

oraz

$$\begin{aligned}
 & \iint_S \rho (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ (\eta_{\varphi\varphi} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t)) \, d\rho dz - \iint_S (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ [\eta_{\varphi t} (\vec{i}_\varphi \times \vec{\nabla}_t \vec{E}_\varphi)] \, d\rho dz \\
 & + \iint_S jm (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \circ (\eta_{\varphi t} (\vec{i}_\varphi \times \vec{E}_t)) \, d\rho dz + \iint_S jm \vec{F}_t \circ [\vec{i}_\varphi \times (\eta_{t\varphi} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t))] \, d\rho dz \\
 & - \iint_S \frac{jm}{\rho} \vec{F}_t \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt} (\vec{i}_\varphi \times (\vec{\nabla}_t \vec{E}_\varphi))]) \, d\rho dz - \iint_S \frac{m^2}{\rho} \vec{F}_t \circ (\vec{i}_\varphi \times [\eta_{tt} (\vec{i}_\varphi \times \vec{E}_t)]) \, d\rho dz \\
 & - k_0^2 \iint_S \vec{F}_t \circ \epsilon_r \vec{E}_t \rho \, d\rho dz = 0 \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Kolejnym problemem w sformułowaniu tego typu jest występowanie rozwiązań pasożytniczych, dla których nie jest spełniony warunek dywergencyjny

$$\nabla \circ \vec{D} = 0 \tag{3.32}$$

Podjęcie skalarno-wektorowe nie eliminuje rozwiązań z niezerową dywergencją a co za tym idzie, rozwiązania te muszą zostać wyeliminowane w inny sposób. Do rozwiązywania nieliniowego problemu własnego użyta została metoda Beyna [80]. Znakomitą zaletą tej metody jest możliwość rozwiązania nawet bardzo dużych problemów (problemów sformułowanych przez duże macierze). Dla tej metody możliwe jest ograniczenie podprzestrzeni rozwiązań po przez modyfikację wektora własnego. Pierwszym krokiem redukcji podprzestrzeni jest wprowadzenie do analizy warunku dywergencyjnego (3.32). W postaci równania słabego prezentuje się on następująco

$$- \iint_S \nabla_t (\rho F_\varphi) \circ \epsilon \vec{E}_t \, d\rho \, dz + \iint_S \frac{jm}{\rho} (F_\varphi \circ \epsilon \vec{E}_\varphi) \, d\rho \, dz = 0 \tag{3.33}$$

natomiast w odpowiadającej jej postaci macierzowej:

$$\mathbf{D} [\Phi \quad \Psi]^T = \mathbf{0} \tag{3.34}$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_t & \mathbf{D}_\varphi \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

przy czym wykorzystanie skalarnych i wektorowych funkcji bazowych pozwala na wyrażenie powyższych podmacierzy jako

$$[\mathbf{D}_t^{[n]}]_{i,k} = - \iint_S \nabla_t (\rho \alpha_{(i)}^{[n]}) \circ \epsilon \vec{W}_{(k)}^{[n]} \, d\rho \, dz \tag{3.36}$$

liczba momentów $nm$	częstotliwość rezonansowa $f$ [GHz]
1	10.658043318507479 + 0.000002794539791i
2	10.658043175442014 + 0.000002774894560i
3	10.658043193417889 + 0.000002739976263i
4	10.658043178880183 + 0.000002772576215i
5	10.658043179841419 + 0.000002770208034i
6	10.658043179709047 + 0.000002772790430i

**Tabela 3.2.** Tabela zbieżności dla rodzaju  $TM_{101}$  - struktura opisana w [MW5]

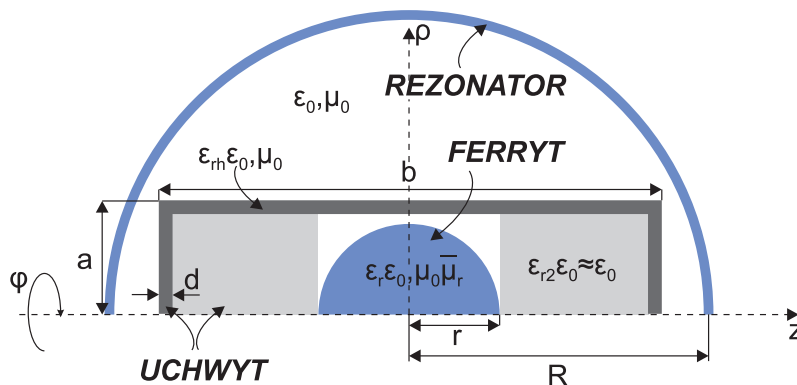
$$[\mathbf{D}_\varphi^{[n]}]_{i,k} = \iint_S \frac{j m}{\rho} (\alpha_{(i)}^{[n]} \circ \varepsilon \alpha_{(k)}^{[n]}) d\rho dz \quad (3.37)$$

Ostatnim etapem procesu ograniczania podprzestrzeni jest podstawienie redukujące podprzestrzeń dla wektora własnego:

$$[\Phi \ \Psi]^T \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{D}^T (\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{D}) [\Phi \ \Psi]^T. \quad (3.38)$$

W ten sposób z podprzestrzeni rozpinającej przestrzeń rozwiązań wycięta zostaje podprzestrzeń, w której znajdują się rozwiązania dla dywergencji niezerowej.

Algorytm Beyna do rozwiązywania nieliniowych problemów własnych wymaga doboru kilku parametrów. Wszystkie poszukiwane wartości własne powinny znajdować się wewnątrz zdefiniowanej przez użytkownika elipsy (parametry: środek elipsy  $f_{cen}$ , osie elipsy wzdłuż osi części rzeczywistej i urojonej  $f_{RE}$  i  $f_{IM}$ ). Kolejną grupą parametrów jest liczba punktów na elipsie  $nq$ , która wpływa na dokładność wyników, oraz liczba momentów  $nm$ , której wybór jest kluczowy dla otrzymania poprawnych wyników analizy. Tabela 3.2 ukazuje zbieżność algorytmu dla rodzaju  $TM_{101}$  opisanego w artykule [MW5] dla ferrytowej kuli znajdującej się w rezonatorze sferycznym, przytrzymywanej przez uchwyt (patrz Rys. 3.14). W dalszych analizach zostało przyjęte  $nm = 2$ .



**Rys. 3.14.** Schemat rezonatora sferycznego obciążonego ferrytową kulką podtrzymywaną przez szklany uchwyt

Na dokładność wyników ma również wpływ gęstość siatki co zostało przebadane i zaprezentowane w Tab. 3.3

W pierwszym kroku weryfikacji poprawności metody otrzymane częstotliwości rezonansowe porównane zostały z wynikami uzyskanymi z analitycznego równania transcendentnego [79]. Przy czym metoda zaprezentowana w [79] ograniczyła zakres analizy do rodzajów  $TE$  oraz budowy rezonatora zaprezentowanej na Rys. 3.13. Kolejnym etapem było porównanie wyników symulacji z wynikami pomiaru (zdjęcie mierzonego układu na Rys. 3.15). Model rezonatora wzbogacony został o szklany uchwyt, który zapewniał mocowanie kulki ferrytowej podczas pomiaru. Wyniki dla różnych wartości zewnętrznego pola magnetycznego zebrane zostały w tabeli 3.5 oraz przed-

liczba elementów	częstotliwość rezonansowa $f$ [GHz]
1483	10.663410186646274 + 0.000002723389368i
2214	10.660166865503147 + 0.000002749357653i
3267	10.658666915329377 + 0.000002770946758i
3796	10.658282198330634 + 0.000002770039691i
4656	10.658043175442014 + 0.000002774894560i

**Tabela 3.3.** Tabela zbieżności dla rodzaju  $TM_{101}$  - struktura opisana w [MW5]

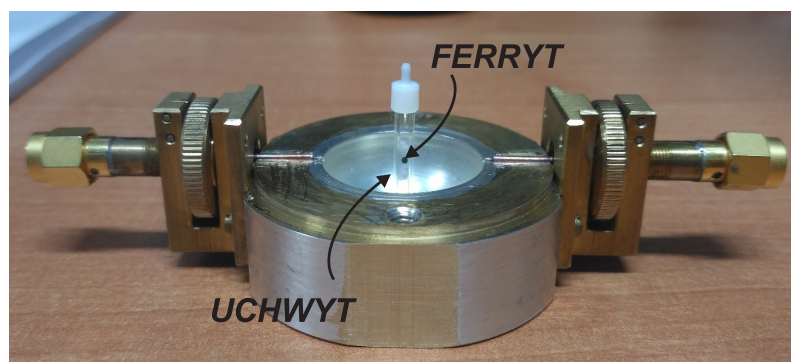
**Tabela 3.4.** Częstotliwości rezonansowe dla rodzaju  $TE_{101}$

$H_{0r}$	TDE [GHz]	ta metoda [GHz]
1	17.847489 + i3.39e-5	17.847459 + i3.47e-5
1.5	17.847506 + i2.41e-5	17.847478 + i2.47e-5
2	17.847526 + i1.94e-5	17.847498 + i1.98e-5
2.5	17.847546 + i1.66e-5	17.847520 + i1.71e-5
3	17.847569 + i1.49e-5	17.847543 + i1.53e-5
3.5	17.847593 + i1.38e-5	17.847568 + i1.42e-5
4	17.847618 + i1.30e-5	17.847595 + i1.34e-5

stawione na Rys. 3.16. Wyniki powyższych badań nad rezonatorem zostały opublikowane w:

**[MW5] M. Warecka**, G. Fotyga, P. Kowalczyk, R. Lech, M. Mrozowski, A. Pacewicz, B. Salski, J. Krupka, "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," IEEE Microwave and Wireless Components Letters, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022, doi: 10.1109/LMWC.2022.3154532.

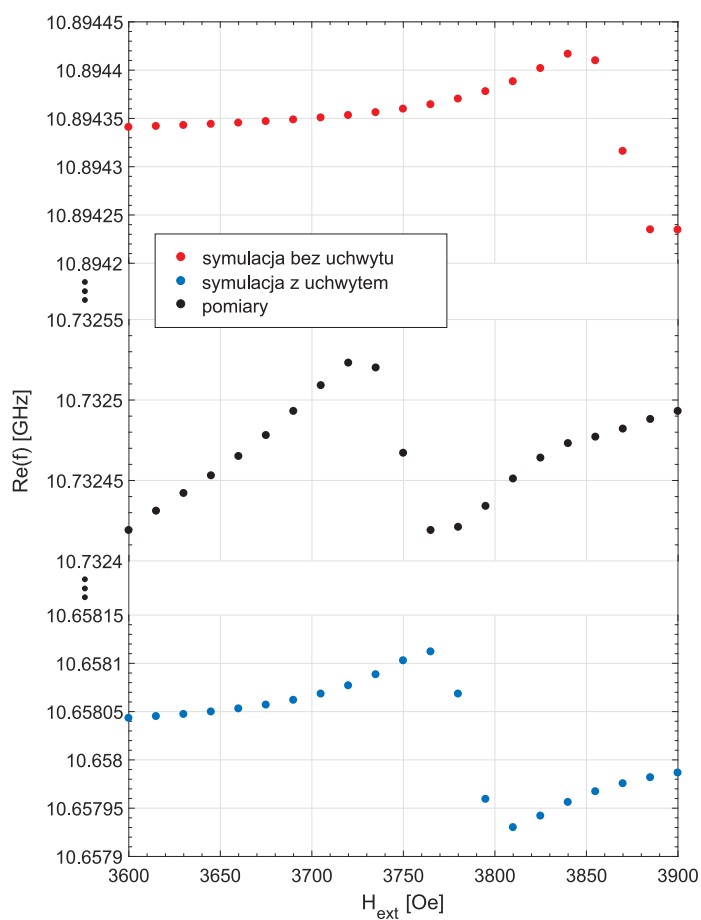
Artykuł zawiera kluczowe informacje związane z przedstawionym podejściem i **dowodzi czwartej tezy niniejszej pracy** - dzięki zaprezentowanej redukcji dziedziny wykonana została modalna analiza rezonatora ferrytowego, która wymaga rozwiązania problemu własnego. Zgodnie z wiedzą autorki jest to pierwsza tego typu analiza z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Wkład autorki: rozszerzenie i implementacja sformułowania dla metody elementów skończonych uwzględniającego symetrię osiową o możliwość analizy ośrodków tensorowych (ferrytowych). Zastosowanie projekcji i podstawienia pozwalających na redukcję rozwiązań pasożytniczych, wykonanie implementacji oraz symulacji opisanych w sekcji wyniki numeryczne.



**Rys. 3.15.** Mierzony rezonator sferyczny obciążony kulką ferrytową

Tabela 3.5. Częstotliwości rezonansowe dla rodzaju  $TM_{101}$

$H_{ext}$ [Oe]	ta metoda		pomiar [GHz]
	bez uchwytu [GHz]	z uchwytem [GHz]	
3600	10.894340 + i1.42e-6	10.658043 + i2.77e-6	10.732419 + i4.53e-4
3615	10.894341 + i1.58e-6	10.658045 + i3.25e-6	10.732431 + i4.54e-4
3630	10.894342 + i1.78e-6	10.658047 + i3.88e-6	10.732442 + i4.55e-4
3645	10.894343 + i2.02e-6	10.658049 + i4.70e-6	10.732453 + i4.56e-4
3660	10.894345 + i2.30e-6	10.658052 + i5.83e-6	10.732464 + i4.58e-4
3675	10.894346 + i2.66e-6	10.658056 + i7.41e-6	10.732478 + i4.62e-4
3690	10.894348 + i3.10e-6	10.658061 + i9.73e-6	10.732493 + i4.71e-4
3705	10.894350 + i3.67e-6	10.658068 + i1.33e-5	10.732509 + i4.85e-4
3720	10.894353 + i4.41e-6	10.658076 + i1.92e-5	10.732523 + i5.10e-4
3735	10.894356 + i5.40e-6	10.658088 + i2.99e-5	10.732519 + i5.54e-4
3750	10.894359 + i6.77e-6	10.658102 + i5.10e-5	10.732467 + i5.84e-4
3765	10.894364 + i8.74e-6	10.658112 + i9.65e-5	10.732419 + i5.40e-4
3780	10.894370 + i1.16e-5	10.658068 + i1.69e-4	10.732421 + i4.98e-4
3795	10.894377 + i1.64e-5	10.657959 + i1.58e-4	10.732434 + i4.73e-4
3810	10.894388 + i2.44e-5	10.657930 + i8.62e-5	10.732450 + i4.62e-4
3825	10.894401 + i3.97e-5	10.657941 + i4.60e-5	10.732464 + i4.58e-4
3840	10.894416 + i7.17e-5	10.657956 + i2.71e-5	10.732473 + i4.59e-4
3855	10.894409 + i1.37e-4	10.657967 + i1.75e-5	10.732476 + i4.57e-4
3870	10.894316 + i1.89e-4	10.657975 + i1.21e-5	10.732481 + i4.55e-4
3885	10.894234 + i1.25e-4	10.657981 + i8.84e-6	10.732488 + i4.53e-4
3900	10.894234 + i6.52e-5	10.657986 + i6.71e-6	10.732493 + i4.51e-4



Rys. 3.16. Częstotliwości rezonansowe dla rodzaju  $TM_{101}$

## 4. PODSUMOWANIE I KIERUNKI DALSZEGO ROZWOJU

Celem niniejszej pracy było zwiększenie efektywności metody elementów skończonych poprzez jej hybrydyzację oraz redukcję dziedziny obliczeniowej z wykorzystaniem własności geometrii struktur. W ramach pracy opracowano pięć algorytmów, których wyniki przedstawione zostały na kartach pięciu dołączonych publikacji.

### 4.1. Podsumowanie

W rozdziale pierwszym zaprezentowane zostały istniejące już algorytmy i przedstawiono, że pomimo rosnącej liczby nowych metod, techniki poprawy efektywności są wciąż ważnym tematem w dziedzinie zarówno projektowania jak i miernictwa. Rozdział drugi zawierał krótkie wprowadzenie do metody elementów skończonych natomiast trzeci zaproponowane metody poprawy efektywności z podziałem na analizowane typy struktur. W tej części dowiedzione zostały również następujące tezy:

1. znaczną poprawę efektywności analizy uzyskać można redukując trójwymiarową dziedzinę obliczeniową do dziedziny dwuwymiarowej ze względu na symetrię osiową struktury

Redukcja dziedziny poprzez wykorzystanie symetrii osiowej użyta została zarówno dla sekcji falowodowych jak i niejednorodnych struktur, rezonatora Fabry-Pérot czy nawet rezonatora obciążonego ferrytem. Redukcja z problemu trójwymiarowego do problemu dwuwymiarowego, a więc dyskretyzowanego w dziedzinie dwuwymiarowej pozwoliło na znaczące zmniejszenie rozmiaru problemu. Dowiedziono poprawności i sprawności takiego rozwiązania. Co więcej, podejście to umożliwiło analizę struktur rezonansowych, których analiza z użyciem metody elementów skończonych w trzech wymiarach nie byłaby możliwa ze względu na ograniczone zasoby.

2. dekompozycja dziedziny obliczeniowej z zastosowaniem hybrydyzacji metody elementów skończonych i metody dopasowania rodzajów pozwala istotnie zredukować nakłady obliczeniowe oraz czas analizy (ograniczenie dyskretyzowanej części dziedziny obliczeniowej)

Dekompozycja dziedziny obliczeniowej została wykorzystana w zagadnieniach obejmujących rozpraszanie fali elektromagnetycznej jak i w analizie rezonatora Fabry-Pérot. Była ona kolejnym elementem, który pozwolił na zmniejszenie dziedziny dyskretyzowanej a tym samym na zmniejszenie rozmiaru rozwiązywanego problemu. Dowiedziono skuteczności tego podejścia, przy czym analiza rezonatora Fabry-Pérot nie byłaby możliwa bez użycia tej techniki ze względu na czas obliczeń oraz dyspersję numeryczną.

3. metody hybrydowe umożliwiają poprawę dokładności analizy przy wykorzystaniu tych samych zasobów (możliwość stosowania bardzo gęstej siatki)

W ramach dwóch wcześniejszych tez dowiedziono, że zaprezentowane techniki hybrydowe umożliwiają redukcję rozmiaru rozwiązywanego problemu, przy czym nie odbywa się to

kosztem dokładności obliczeń. Powszechnie wiadomo, że w metodzie elementów skończonych błąd numeryczny zmniejsza się wraz ze wzrostem gęstości siatki. Obszary opisane analitycznie nie są obciążone błędem dyskretyzacji, więc zagęszczenie siatki w obszarze dyskretyzowanym wpływa na poprawę dokładności.

4. redukcja liczby zmiennych umożliwia analizę układów o dużej złożoności obliczeniowej (np. rozwiązywanie nieliniowych problemów własnych)

Obciążenie rezonatora sferycznego ferrytem sprawia, że problem własny staje się nieliniowy a jego rozwiązanie wymaga zastosowania odpowiednich algorytmów. Te natomiast korzystają z wielokrotnego wyliczenia odpowiednich macierzy metody elementów skończonych dla różnych wartości parametrów znajdujących się na płaszczyźnie zespolonej. W przypadku bardzo dużych macierzy metody te stają się nieefektywne lub nawet niemożliwe do zastosowania z praktycznego punktu widzenia. Przedstawiona redukcja dziedziny poprzez wykorzystanie symetrii osiowej przyczyniła się do zmniejszenia nieliniowego problemu własnego i umożliwiła modalną analizę rezonatora sferycznego obciążonego ferrytem.

Do oryginalnych osiągnięć autora w niniejszej pracy należą:

- modyfikacja sformułowania dla metody elementów skończonych (z wykorzystaniem symetrii osiowej) umożliwiająca zastosowanie uogólnionej macierzy impedancji we wrotach na powierzchni sfery
- implementacja i przeprowadzenie analizy porównawczej sekcji falowodowych dla dwóch sformułowań: opartego na macierzy rozproszenia oraz wykorzystującego periodyczne warunki brzegowe
- opracowanie algorytmu hybrydowego pozwalającego na analizę otwartego rezonatora Fabry-Pérot poprzez dekompozycję dziedziny obliczeniowej (połączenie metody elementów skończonych z techniką dopasowania rodzajów)
- rozszerzenie sformułowania dla metody elementów skończonych (uwzględniającego symetrię osiową) o możliwość analizy ośrodków tensorowych, w szczególności ferrytowych, oraz redukcja rozwiązań pasożytniczych w nieliniowym problemie własnym poprzez zastosowanie odpowiednich podstawień i projekcji na podprzestrzeń o zerowej dywergencji.

#### **4.2. Kierunki dalszego rozwoju**

W ramach dalszego rozwoju niniejszej pracy wyróżnić można trzy kierunki:

1. dekompozycja dziedziny dla sferycznego rezonatora obciążonego ferrytem
2. dekompozycja dziedziny w zagadnieniach trójwymiarowych
3. rozwój metody rozwiązywania nieliniowych problemów własnych

Zauważmy, że rozważany w pracy rezonator sferyczny posiada wewnątrz stosunkowo duży obszar pustej przestrzeni wokół ferrytu (stanowiącej próżnię). Obszar ten nie wymaga dyskretyzacji i mógłby zostać opisany w sposób analityczny. Dekompozycja rezonatora umożliwiłaby znaczną redukcję rozmiaru problemu nieliniowego. Wymagałoby to zdefiniowania odpowiedniego podziału dziedziny oraz przebadania wpływu takiego sformułowania na uwarunkowanie macierzy. Podejście miałoby jednak małą elastyczność i przez to stosunkowo ograniczone zastosowanie.



Drugi z kierunków obejmuje przeniesienie zaproponowanych metod dekompozycji dziedziny do sformułowania trójwymiarowego. Wówczas analiza metodą elementów skończonych wymagałaby dyskretyzacji w przestrzeni trójwymiarowej. Uogólniona macierz impedancji, tak jak w prezentowanym podejściu, może zostać zdefiniowana na powierzchni sfery przy czym brak redukcji dziedziny trójwymiarowej do dwuwymiarowej pozwala na większą ogólność w zakresie analizowanych struktur. Co prawda dla zaprezentowanych zagadnień będzie prowadzić to do obniżenia efektywności, byłby to jednak znaczący postęp w zakresie uniwersalności pod względem geometrii.

Trzecim obszarem rozwoju jest kierunek wyznaczony przez zagadnienie związane z ferrytowym rezonatorem sferycznym. W związku z ograniczoną liczbą dostępnych algorytmów umożliwiających rozwiązywanie dużych nieliniowych problemów własnych, korzystne byłoby stworzenie narzędzia, które działa w sposób efektywny i pewny. Pewne nadzieje budzi pomysł rozwoju istniejących już rozwiązań - algorytmów poszukiwania i śledzenia miejsc zerowych na płaszczyźnie zespolonej (rozwijanych od kilku już lat w naszym zespole). O ile dla dużych problemów nie można definiować funkcji wyznacznikowej, to poprzez rzutowanie na odpowiednią podprzestrzeń możliwa jest redukcja problemu do takiej właśnie funkcji. Rozwój narzędzi umożliwiających rozwiązywanie dużych nieliniowych problemów własnych byłby korzystny nie tylko dla zagadnienia przedstawionego w niniejszej pracy, ale również w badaniu różnego typu nowych sztucznie wytwarzanych materiałów.

## LISTA PUBLIKACJI

Poniżej zaprezentowane zostały artykuły potwierdzające przedstawione tezy oraz oddające w największym stopniu zakres przeprowadzonych badań autorki. Każdy artykuł został krótko opisany a wszystkie wymienione publikacje załączone zostały na końcu rozprawy.

**[MW1]** P. Kowalczyk, R. Lech, **M. Warecka**, A.Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 33, no. 2 pp. 178-192, 2019.

Artykuł zawiera połączenie metody elementów skończonych z metodą dopasowywania rodzajów dla obiektów rozpraszających o nieskończonej długości lub o pełnej wysokości w złączu falowodowym. Metoda elementów skończonych wykorzystana jest do wyznaczenia macierzy impedancji, która to połączona jest z analitycznie zdefiniowaną falą padającą i rozproszoną. Metoda dyskretna wykorzystana jest tylko w bliskiej odległości od obiektu rozpraszającego co redukuje zużycie zasobów obliczeniowych (czasu pracy procesora) i pamięciowych. Co więcej, tak zdefiniowany problem umożliwia wielokrotne oświetlenie obiektu różnymi falami padającymi w danej częstotliwości bez konieczności rekalkulacji części dyskretnej a również wielokrotne wykorzystanie uogólnionej macierzy impedancji w obrębie analizowanej struktury.

**[MW2]** **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Efficient Finite Element Analysis of Axially Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 67, no. 11, pp. 4291-4297, Nov. 2019, doi: 10.1109/TMTT.2019.2940021.

Artykuł przedstawia efektywne wykorzystanie metody elementów skończonych do badań prowadnic posiadających symetrię osiową. Wykorzystanie symetrii pozwala zredukować problem do dziedziny dwuwymiarowej przy uwzględnieniu wszystkich trzech składowych pola. Jest to możliwe poprzez założenie zadanej zmienności względem kąta obrotu (BOR). Metoda umożliwia analizę zarówno falowodów jak i nieciągłości falowodowych znacznie efektywniej niż przy użyciu standardowych metod trójwymiarowych. Zaprezentowane zostały dwa podejścia: wyznaczenie macierzy rozproszenia oraz periodyczne warunki brzegowe, które zostały ze sobą porównane. Artykuł zawiera kilka przykładów potwierdzających poprawność i skuteczność/efektywność proponowanej metody.

**[MW3]** **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 68, no. 11, pp. 4528-4535, Nov. 2020, doi: 10.1109/TMTT.2020.3014944.

W tym artykule zaprezentowane zostało rozszerzenie metody elementów skończonych z wykorzystaniem symetrii osiowej o uogólnioną macierz impedancji zdefiniowaną na powierzchni sfery dla obiektów rozpraszających o skończonych wymiarach. Opis ten umożliwił redukcję dziedziny obliczeniowej, błędu wynikającego z zakończenia dziedziny w zagadnieniach rozpraszania a również możliwość wielokrotnego użycia macierzy przy wielokrotnym wystąpieniu danego obiektu w obrębie struktury. Kilka przykładów rozpraszania fali elektromagnetycznej zarówno w otwartej przestrzeni jak i falowodzie zostało zaprezentowanych w celu potwierdzenia skuteczności metody.



[MW4] B. Salski, T. Karpisz, **M. Warecka**, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022, doi: 10.1109/TMTT.2022.3152511.

W artykule został zaproponowany nowy otwarty płasko-wklęsły rezonator Fabry-Pérot. Rezonator ten został poddany dwóm technikom analizy, w tym metodą elementów skończonych z wykorzystaniem symetrii osiowej. Struktura ta jest duża elektrycznie co w znacznym stopniu utrudnia jej analizę w szczególności metodami dyskretnymi. Na potrzeby modelowania rezonatora Fabry-Pérot zmodyfikowany został algorytm zaprezentowany w [MW2], co pozwoliło na efektywne zamodelowanie zwierciadła wklęsłego metodą elementów skończonych, przy czym pozostała część struktury opisana została analitycznie. Podejście to pozwoliło na ograniczenie dyspersji numerycznej i znacząco skróciło czas obliczeń w stosunku do technik trójwymiarowych obejmujących dyskretyzację. Rezultaty otrzymane zaproponowaną metodą porównane zostały z metodą Greena (poprawność wyników została potwierdzona).

[MW5] **M. Warecka**, G. Fotyga, P. Kowalczyk, R. Lech, M. Mrozowski, A. Pacewicz, B. Salski, J. Krupka, "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022, doi: 10.1109/LMWC.2022.3154532.

Artykuł zawiera sformułowanie nieliniowego problemu własnego dla rezonatora sferycznego obciążonego ferrytową kulką. Rozwiązanie problemu wymagało dodatkowego podstawienia eliminującego rodzaje pasożytnicze związane z osią symetrii oraz ograniczenia podprzestrzeni w metodzie Beyna. Ferryt jest materiałem zależnym od częstotliwości co tworzy problem silnie nieliniowy, który uniemożliwia użycie metod do rozwiązywania liniowych problemów własnych. Algorytmy dla zagadnień nieliniowych wymagają jednak wyliczenia macierzy wykorzystywanych w metodzie elementów skończonych w wielu punktach na płaszczyźnie zespolonej co wiąże się z dużym nakładem numerycznym. Stąd też redukcja wielkości problemu poprzez użycie symetrii osiowej ma znaczący wpływ na czas analizy. Wyniki symulacji porównane zostały zarówno z częstotliwościami otrzymanymi z analitycznego równania transcendentalnego jak i wynikami pomiarów.

## Bibliografia

- [1] L. Tsang, J. A. Kong, and K.-H. Ding, *Scattering of electromagnetic waves: theories and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [2] F. Mitri, "Acoustic backscattering and radiation force on a rigid elliptical cylinder in plane progressive waves," *Ultrasonics*, vol. 66, pp. 27–33, 2016.
- [3] —, "Acoustic scattering of a cylindrical quasi-gaussian beam with arbitrary incidence focused on a rigid elliptical cylinder," *Journal of Applied Physics*, vol. 118, no. 18, p. 184902, 2015.
- [4] R. Gesche and N. Lochel, "Scattering by a lossy dielectric cylinder in a rectangular waveguide," *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 36, no. 1, pp. 137–144, 1988.
- [5] J. J. Bowman, T. B. Senior, and P. L. Uslenghi, "Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes," *John Wiley and Sons*, 1969.
- [6] E. Nielsen, "Scattering by a cylindrical post of complex permittivity in a waveguide," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 17, no. 3, pp. 148–153, 1969.
- [7] K. Harumi, "Scattering of plane waves by a rigid ribbon in a solid," *Journal of Applied Physics*, vol. 32, no. 8, pp. 1488–1497, 1961.
- [8] A. Elsherbeni, M. Hamid, and G. Tian, "Iterative scattering of a gaussian beam by an array of circular conducting and dielectric cylinders," *Journal of Electromagnetic waves and applications*, vol. 7, no. 10, pp. 1323–1342, 1993.
- [9] H. Nakano, "Analysis methods for electromagnetic wave problems," *Yamashita Ed., Norwood, MA: Artech House*, vol. 2, pp. 20–10, 1996.
- [10] S. Amari, R. Vahldieck, J. Bornemann, and P. Leuchtman, "Spectrum of corrugated and periodically loaded waveguides from classical matrix eigenvalues," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, no. 3, pp. 453–460, 2000.
- [11] A. Kusiek and J. Mazur, "Left-handed propagation characteristics of a dielectric and metal-loaded periodic circular waveguide," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 31, no. 16, pp. 1698–1710, 2017.
- [12] A. Valero and M. Ferrando, "Full-wave equivalent network representation for multiple arbitrarily shaped posts in H-plane waveguide," *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 47, no. 10, pp. 1997–2002, 1999.
- [13] N. Okamoto, "Matrix formulation of scattering by a homogeneous gyrotropic cylinder," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 18, no. 5, pp. 642–649, 1970.
- [14] L. Wang, L. Li, and Y. Tan, "A novel approximate solution for electromagnetic scattering by dielectric disks," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 53, no. 5, pp. 2948–2955, 2014.
- [15] F. D. Q. Pereira, A. R. Perez, P. V. Castejón, and A. A. Melcon, "Integral-equation formulation for the analysis of capacitive waveguide filters containing dielectric and metallic arbitrarily shaped objects and novel applications," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 63, no. 12, pp. 3862–3873, 2015.

- [16] Y. Brick, V. Lomakin, and A. Boag, "Fast green's function evaluation for sources and observers near smooth convex bodies," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 62, no. 6, pp. 3374–3378, 2014.
- [17] A. Aydoğan and F. Akleman, "Analysis of direct and inverse problems related to circular waveguides loaded with inhomogeneous lossy dielectric objects," *IEEE transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 62, no. 6, pp. 1291–1300, 2014.
- [18] Y. Okuno and K. Yasuura, "Numerical algorithm based on the mode-matching method with a singular-smoothing procedure for analyzing edge-type scattering problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, no. 4, pp. 580–587, 1982.
- [19] M. Taroncher, A. Vidal, V. E. Boria-Esbert, S. Marini, S. Cogollos, J. Gil, and B. Gimeno, "CAD of complex passive devices composed of arbitrarily shaped waveguides using Nystro/spl uml/m and BI-RME methods," *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 53, no. 6, pp. 2153–2163, 2005.
- [20] J. H. Richmond, "Digital computer solutions of the rigorous equations for scattering problems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, no. 8, pp. 796–804, 1965.
- [21] R. F. Harrington, "Matrix methods for field problems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 55, no. 2, pp. 136–149, 1967.
- [22] M. Djordjevic and B. M. Notaros, "Double higher order method of moments for surface integral equation modeling of metallic and dielectric antennas and scatterers," *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. 52, no. 8, pp. 2118–2129, 2004.
- [23] E. Chobanyan, M. M. Ilić, and B. M. Notaroš, "Double-higher-order large-domain volume/surface integral equation method for analysis of composite wire-plate-dielectric antennas and scatterers," *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. 61, no. 12, pp. 6051–6063, 2013.
- [24] A. Taflove, S. C. Hagness, and M. Piket-May, "Computational electromagnetics: the finite-difference time-domain method," *The Electrical Engineering Handbook*, vol. 3, pp. 629–670, 2005.
- [25] J. Li, J. Liu, G. D. Egbert, R. Liu, R. Guo, and K. Pan, "An efficient preconditioner for 3-D finite difference modeling of the electromagnetic diffusion process in the frequency domain," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 58, no. 1, pp. 500–509, 2019.
- [26] D. Wu, R. Ohnishi, R. Uemura, T. Yamaguchi, and S. Ohnuki, "Finite-difference complex-frequency-domain method for optical and plasmonic analyses," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 30, no. 11, pp. 1024–1027, 2018.
- [27] J.-M. Jin, *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2015.
- [28] K. Morimoto, A. Iguchi, and Y. Tsuji, "Efficient full-vectorial finite element analysis for circularly symmetric waveguides," *Journal of Lightwave Technology*, 2022.
- [29] J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of computational physics*, vol. 114, no. 2, pp. 185–200, 1994.
- [30] G. Pelosi, R. Coccioli, and S. Selleri, *Quick finite elements for electromagnetic waves*. Artech House, 2009.

- [31] G. G. Gentili, M. Khosronejad, R. Nesti, G. Pelosi, and S. Selleri, "An efficient 2.5-D finite-element approach based on transformation optics for the analysis of elliptical horns," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 9, pp. 4782–4790, 2018.
- [32] A. Kusiek and J. Mazur, "Hybrid finite-difference/mode-matching method for analysis of scattering from arbitrary configuration of rotationally-symmetrical posts," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 110, pp. 23–42, 2010.
- [33] A. Kusiek, "Hybrid technique for the analysis of circular waveguide junctions loaded with ferrite posts," *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, vol. 9, no. 8, pp. 781–787, 2015.
- [34] J. Rubio, M. Gonzalez, and J. Zapata, "Analysis of open-ended radiating structures based on SFELP (segmentation approach/finite elements/Lanczos-pade)," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (IEEE Cat. No. 02CH37313)*, vol. 4. IEEE, 2002, pp. 702–705.
- [35] L. Kuhler, N. Raveu, G. Le Fur, and L. Duchesne, "The modal expansion theory applied to 3-D metamaterial waveguides characterization," *Progress In Electromagnetics Research M*, vol. 92, pp. 31–41, 2020.
- [36] G. P. Zouros and G. C. Kokkorakis, "Electromagnetic scattering by an inhomogeneous gyroelectric sphere using volume integral equation and orthogonal Dini-type basis functions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 6, pp. 2665–2676, 2015.
- [37] Z.-L. Liu, J. Yang, and C.-H. Liang, "The hybrid higher order MoM-UTD formulation for electromagnetic radiation problems," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 52, no. 5, pp. 1087–1091, 2010.
- [38] W. Burnside, C. Yu, and R. Marhefka, "A technique to combine the geometrical theory of diffraction and the moment method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 23, no. 4, pp. 551–558, 1975.
- [39] U. Jakobus, F. M. Landstorfer, and S. Member, "Improved PO-MM Hybrid Formulation for Scattering from Three-Dimensional Perfectly Conducting Bodies of Arbitrary Shape," vol. 43, no. 2, 1995.
- [40] M. Chen, Y. Zhang, X.-W. Zhao, and C.-H. Liang, "Analysis of antenna around NURBS surface with hybrid MoM-PO technique," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 55, no. 2, pp. 407–413, 2007.
- [41] L. Xiao, X.-H. Wang, B.-Z. Wang, G. Zheng, and P. Chen, "An efficient hybrid method of iterative MoM-PO and equivalent dipole-moment for scattering from electrically large objects," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 16, pp. 1723–1726, 2017.
- [42] D. B. Davidson, I. P. Theron, U. Jakobus, F. M. Landstorfer, F. J. Meyer, J. Mostert, and J. J. Van Tonder, "Recent progress on the antenna simulation program FEKO," in *Proceedings of the 1998 South African Symposium on Communications and Signal Processing-COMSIG'98 (Cat. No. 98EX214)*. IEEE, 1998, pp. 427–430.
- [43] U. Jakobus and G. Smith, "State of the art of electromagnetic modelling in FEKO," in *2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*. IEEE, 2012, pp. 853–854.

- [44] A. Sun, Z. Zhu, S. Yang, and Z. Chen, "A hybrid SIE-PDE formulation without boundary condition requirement for transverse magnetic electromagnetic analysis," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2022.
- [45] A. Sun, S. Yang, and Z. D. Chen, "A SIE-PDE formulation with non-conformal meshes for electromagnetic analysis," in *2022 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting (AP-S/URSI)*. IEEE, 2022, pp. 1654–1655.
- [46] A. Sun, Z. Zhu, S. Yang, and Z. Chen, "Nonconformal domain decomposition method based on the hybrid SIE-PDE formulation for flexible transverse magnetic analysis," *arXiv preprint arXiv:2206.00825*, 2022.
- [47] X.-Q. Sheng, J.-M. Jin, J. Song, C.-C. Lu, and W. C. Chew, "On the formulation of hybrid finite-element and boundary-integral methods for 3-D scattering," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 46, no. 3, pp. 303–311, 1998.
- [48] Z. Yang, X.-W. Yuan, X.-W. Huang, M.-L. Yang, and X.-Q. Sheng, "Resistive sheet boundary condition based nonconformal domain decomposition FE-BI-MLFMA for electromagnetic scattering from inhomogeneous objects with honeycomb structures," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2022.
- [49] D. J. Hoppe, L. W. Epp, and J.-F. Lee, "A hybrid symmetric FEM/MOM formulation applied to scattering by inhomogeneous bodies of revolution," *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. 42, no. 6, pp. 798–805, 1994.
- [50] M. M. Ilic, M. Djordjevic, A. Z. Ilic, and B. M. Notaro, "Higher order hybrid FEM-MoM technique for analysis of antennas and scatterers," *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. 57, no. 5, pp. 1452–1460, 2009.
- [51] R.-W. Xu, L.-X. Guo, H.-J. He, and W. Liu, "A hybrid FEM/MoM technique for 3-D electromagnetic scattering from a dielectric object above a conductive rough surface," *IEEE geoscience and remote sensing letters*, vol. 13, no. 3, pp. 314–318, 2016.
- [52] H. Dodig, D. Poljak, and M. Cvetković, "On the edge element boundary element method/finite element method coupling for time harmonic electromagnetic scattering problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 122, no. 14, pp. 3613–3652, 2021.
- [53] J. Guan, S. Yan, and J.-M. Jin, "An accurate and efficient finite element-boundary integral method with GPU acceleration for 3-D electromagnetic analysis," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 62, no. 12, pp. 6325–6336, 2014.
- [54] F. Boeykens, H. Rogier, J. Van Hese, J. Sercu, and T. Boonen, "Rigorous analysis of internal resonances in 3-D hybrid FE-BIE formulations by means of the poincaré–steklov operator," *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 61, no. 10, pp. 3503–3513, 2013.
- [55] Y. Ji, H. Wang, and T. H. Hubing, "A numerical investigation of interior resonances in the hybrid FEM/MoM method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 2, pp. 347–349, 2003.
- [56] T. Wan, M. Li, and B. Tang, "A fast FE-BI method for the computation of monostatic radar cross section," in *2018 Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS-Toyama)*. IEEE, 2018, pp. 2287–2290.

- [57] J. Liu and J.-M. Jin, "A highly effective preconditioner for solving the finite element-boundary integral matrix equation of 3-D scattering," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 50, no. 9, pp. 1212–1221, 2002.
- [58] D. Arena, M. Ludovico, G. Manara, and A. Monorchio, "A hybrid mode matching/FEM technique with edge elements for solving waveguides discontinuity problems," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. Transmitting Waves of Progress to the Next Millennium. 2000 Digest. Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (C, vol. 4. IEEE, 2000, pp. 2028–2031.*
- [59] J. Rubio, J. Arroyo, and J. Zapata, "Analysis of passive microwave circuits by using a hybrid 2-D and 3-D finite-element mode-matching method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 9, pp. 1746–1749, 1999.
- [60] J. Liu, N. Liu, and Q. H. Liu, "Microscopic modeling of metasurfaces by the mixed finite element numerical mode-matching method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 68, no. 2, pp. 469–478, 2020.
- [61] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bulletin of the American mathematical Society*, vol. 49, no. 1, pp. 1–23, 1943.
- [62] P. Silvester, "Finite element solution of homogeneous waveguide problems," *Alta Frequenza*, vol. 38, no. 1, pp. 313–317, 1969.
- [63] P. Arlett, A. Bahrani, and O. Zienkiewicz, "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation," in *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 115, no. 12. IET, 1968, pp. 1762–1766.
- [64] D. B. Davidson, *Computational electromagnetics for RF and microwave engineering*. Cambridge University Press, 2010.
- [65] S. McFee and J. Webb, "Automatic mesh generation for h-p adaption," *IEEE transactions on magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1894–1897, 1993.
- [66] J. Schöberl, "NETGEN an advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules," *Computing and visualization in science*, vol. 1, no. 1, pp. 41–52, 1997.
- [67] T. Smitha, K. Nagaraja, and S. Jayan, "MATLAB 2D higher-order triangle mesh generator with finite element applications using subparametric transformations," *Advances in Engineering Software*, vol. 115, pp. 327–356, 2018.
- [68] H. Whitney, "Geometric integration theory," in *Geometric Integration Theory*. Princeton university press, 2015.
- [69] J.-C. Nédélec, "Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ ," *Numerische Mathematik*, vol. 35, no. 3, pp. 315–341, 1980.
- [70] R. Lech, A. Kusiek, and J. Mazur, "Tuning properties of irregular posts in waveguide junctions-tunable filter application," in *18-th INTERNATIONAL CONFERENCE ON MICROWAVES, RADAR AND WIRELESS COMMUNICATIONS*. IEEE, 2010, pp. 1–4.
- [71] EMInvent, "InventSim," <http://www.eminvent.com/>.



- [72] R. Lech, P. Kowalczyk, and A. Kusiek, "Scattering from a cylindrical object of arbitrary cross section with the use of field matching method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 11, pp. 4883–4887, 2016.
- [73] D. M. Pozar, *Microwave engineering*. John Wiley & sons, 2011.
- [74] A. Nicolet, S. Guenneau, C. Geuzaine, and F. Zolla, "Modelling of electromagnetic waves in periodic media with finite elements," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 168, no. 1-2, pp. 321–329, 2004.
- [75] R. Lech and J. Mazur, "Propagation in rectangular waveguides periodically loaded with cylindrical posts," *IEEE microwave and wireless components letters*, vol. 14, no. 4, pp. 177–179, 2004.
- [76] B. Salski, P. Czekala, T. Karpisz, and P. Kopyt, "Mode coupling in a Fabry-Pérot open resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 1, pp. 299–306, 2021.
- [77] B. Salski, T. Karpisz, P. Kopyt, and J. Krupka, "Rigorous scattering matrix analysis of a fabry-pérot open resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 68, no. 12, pp. 5093–5102, 2020.
- [78] D. Polder, "On the theory of ferromagnetic resonance," *Physical Review*, vol. 40, no. 2, pp. 99–115, Jan. 1949.
- [79] J. Krupka, A. Pacewicz, B. Salski, P. Kopyt, J. Bourhill, M. Goryachev, and M. Tobar, "Electrodynamic improvements to the theory of magnetostatic modes in ferrimagnetic spheres and their applications to saturation magnetization measurements," *J. Magn. Magn. Mater.*, vol. 487, p. 165331, Oct. 2019.
- [80] W.-J. Beyn, "An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems," *Linear Algebra Appl.*, vol. 436, no. 10, pp. 3839–3863, May 2012.

## SYLWETKA AUTORKI

Mgr inż. Małgorzata Warecka ukończyła z wyróżnieniem studia magisterskie na wydziale Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki na Politechnice Gdańskiej. Jej praca magisterska pt. "Quasi-analityczna transformacja dyskretnego pola bliskiego do strefy dalekiej" została nagrodzona przez AP/AES/MTT Joint Chapter polskiej sekcji IEEE w 2020 roku w konkursie na najlepszą pracę magisterską. Swoje studia doktoranckie rozpoczęła w roku 2018 w trakcie których była członkiem projektu grantowego EDiSO<sub>n</sub> (Electromagnetic Design of flexible SensOrs) realizowanego w ramach programu TEAM-TECH Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego. Jest współautorką następujących publikacji naukowych z listy JCR:

1. **M. Warecka** et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.
2. B. Salski, T. Karpisz, **M. Warecka**, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022.
3. **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 68, no. 11, pp. 4528-4535, Nov. 2020.
4. **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Efficient Finite Element Analysis of Axially Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 67, no. 11, pp. 4291-4297, Nov. 2019.
5. P. Kowalczyk, R. Lech, **M. Warecka**, A. Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 33, no. 2 pp. 178-192, 2019.
6. **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Propagation in the Open Cylindrical Guide of Arbitrary Cross Section With the Use of Field Matching Method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 6, pp. 3237-3240, June 2018.

oraz komunikatów konferencyjnych:

1. **M. Warecka** et al., "Efficient Fabry-Perot Open Resonator Analysis by the use of a Scattering Matrix Method," *2022 24th International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, 2022, pp. 1-4.
2. S. Dziedziewicz, **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Multipath Complex Root Tracing," *2022 24th International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, 2022, pp. 1-4.
3. P. Czekala, B. Salski, P. Kopyt, **M. Warecka**, S. Dziedziewicz, R. Lech, P. Kowalczyk, "Beam Waist in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *2022 24th International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, 2022, pp. 1-4.
4. **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Hybrid Method Analysis of Unshielded Guiding Structures," *2020 23rd International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, 2020, pp. 398-401.

5. **M. Warecka**, P. Kowalczyk and R. Lech, "Domain Reduction in Hybrid Technique for Electromagnetic Wave Scattering Problems," *2020 23rd International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, 2020, pp. 9-12.
6. **M. Warecka**, P. Kowalczyk and R. Lech, "Quasi-analytical Near-to-Far Field Transformation Based on Field Matching Method for Scattering Problems," *2019 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*, 2019, pp. 1-5.
7. **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "Scattering and Propagation Analysis for the Multi-layered Structures Based on Field Matching Technique," *2019 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*, 2019, pp. 1-4.
8. **M. Warecka**, R. Lech and P. Kowalczyk, "An analysis of periodic arrangements of cylindrical objects of arbitrary convex cross sections with the use of field matching method," *2018 22nd International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, 2018, pp. 442-445.
9. **M. Warecka**, P. Kowalczyk and R. Lech, "Evaluation of propagation parameters of open guiding structures with the use of complex root finding algorithms," *2017 IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on Advanced Materials and Processes for RF and THz Applications (IMWS-AMP)*, 2017, pp. 1-3.

## PODZIĘKOWANIA

Chciałabym z całego serca podziękować mojemu promotorowi dr. hab. inż. Piotrowi Kowalczykowi za trud i zaangażowanie w powstanie niniejszej pracy oraz olbrzymie wsparcie merytoryczne. Był on dla mnie nieustannym źródłem inspiracji do dalszego rozwoju, a jego pomysły i celne uwagi były nie do przecenienia. Jestem również niezwykle wdzięczna za okazaną mi cierpliwość i wsparcie każdego dnia tej podróży.

Dziękuję dr. hab. inż. Rafałowi Lechowi za wszystkie bezcenne rady i uwagi a również za olbrzymią dawkę poczucia humoru w gorsze dni. Jego drzwi zawsze były dla mnie otwarte a możliwość wspólnej pracy była dla mnie niezwykle cennym doświadczeniem.

Dziękuję prof. Mrozowskiemu za jego niewątpliwy wkład w niniejszą rozprawę, za możliwość pracy w ramach projektu EDiSO<sub>n</sub> (Electromagnetic Design of flexible SensOrs, realizowany w ramach programu TEAM-TECH Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej współfinansowanym przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego) oraz życzliwe przyjęcie do grona pracowników katedry.

Dziękuję dr. hab. inż. Grzegorzowi Fotydzę, dr. hab. inż. Bartłomiejowi Salskiemu, dr. inż. Adamowi Pacewiczowi, mgr. inż. Piotrowi Czekale za wspólną pracę w ramach projektu EDiSO<sub>n</sub>, liczne konsultacje i ich trud w powstanie publikacji.

**[MW1] Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique**

P. Kowalczyk, R. Lech, M. Warecka, A. Kusiek

Journal of Electromagnetic Waves and Applications  
vol. 33, no. 2 pp. 178-192, 2019

Wkład autorki:

optymalizacja kodu, dobór przykładów numerycznych i przeprowadzenie symulacji dla przykładów opisanych w artykule



## Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique

Piotr Kowalczyk, Rafal Lech, Malgorzata Warecka & Adam Kusiek

To cite this article: Piotr Kowalczyk, Rafal Lech, Malgorzata Warecka & Adam Kusiek (2019) Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 33:2, 178-192, DOI: [10.1080/09205071.2018.1532323](https://doi.org/10.1080/09205071.2018.1532323)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/09205071.2018.1532323>



Published online: 09 Oct 2018.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 21



View Crossmark data [↗](#)



# Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique

Piotr Kowalczyk , Rafal Lech , Malgorzata Warecka  and Adam Kusiek 

Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland

## ABSTRACT

A hybrid technique combining finite-element and mode-matching methods for the analysis of scattering problems in open and closed areas is presented. The main idea of the analysis is based on the utilization of the finite-element method to calculate the post impedance matrix and combine it with external excitation. The discrete analysis, which is the most time- and memory-consuming, is limited here only to the close proximity of the scatterer. Moreover, once the impedance matrix is calculated, any rotation or shifting of the post can be performed without the need for structure recalculation. All the obtained results have been verified by comparison with simulations performed using the hybrid finite-difference-mode-matching method and commercial software.

## ARTICLE HISTORY

Received 4 June 2018

Accepted 28 September 2018

## KEYWORDS

Cylindrical structure;  
finite-element method;  
mode-matching method;  
scattering

## 1. Introduction

Scattering problems are important issues in the analysis and design of microwave and optical devices. For structures with simple geometries, which can be precisely described by the constant coordinates of orthogonal systems, the analytical methods can be applied (e.g. the mode-matching (MM) method for circular and elliptical rods [1–9]). These techniques are characterized by high efficiency and low numerical costs; however, they are inflexible and are dedicated to a specific structural shape. For more complex structures, integral equation methods [10–17] have been developed, which allow us to examine scattering from almost any obstacle shape. These techniques require the introduction of electric and magnetic currents and the application of proper Green's functions. From a numerical point of view, there are some drawbacks to such an approach. Its efficiency depends on the choice of electric and magnetic current bases, while the use of Green's functions is often complicated by the singular points in the computational domain [18]. The generalization of MM technique which does not involve Green's function is presented in [19]. This solution is simple and intuitive; however, due to the used field description, it is restricted to the convex shapes of the structure's cross section.

Nowadays, with the development of computing power, space discretization methods, such as the finite element method (FEM) [20] or the finite-difference (FD) method [21],

**CONTACT** Rafal Lech  [rafal.lech@eti.pg.edu.pl](mailto:rafal.lech@eti.pg.edu.pl)  Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology, Narutowicza 11/12, 80-233 Gdansk, Poland

© 2018 Informa UK Limited, trading as Taylor & Francis Group

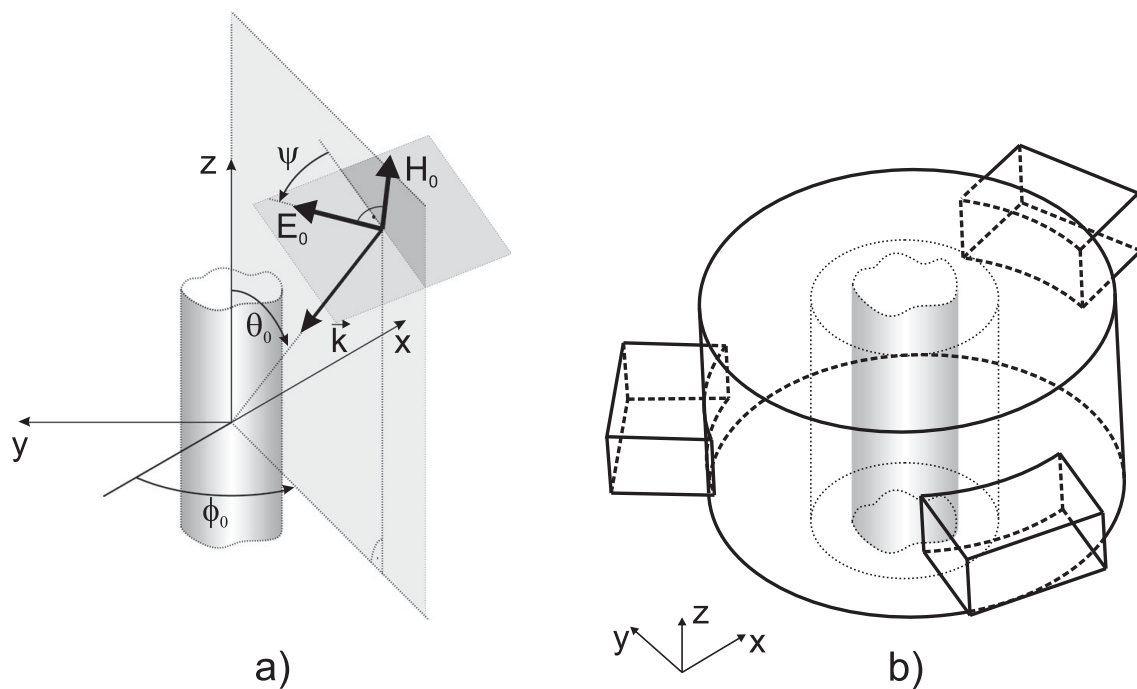
have become more popular. Due to their flexibility and versatility, they are often implemented in commercial software for electromagnetic analysis. The main disadvantage of these techniques is their high numerical cost, which results in low efficiency in the design and optimization of the electromagnetic structures. Moreover, the accuracy of the results depends on the boundary conditions used for domain truncation and near-to-far field transformation.

The third class of methods for scattering problem analysis are hybrid techniques, which combine the advantages of the aforementioned approaches. They allow us to achieve higher flexibility, increase the accuracy and reduce the numerical complexity of the analysis. One of the most popular hybrid methods is based on a combination of the FEM and the boundary integral equation (BIE) [22]. However, this approach still requires the utilization of Green's functions and the correct choice of the current base. The approaches proposed in [23] and [24] do not involve Green's function and the hybridization utilizes analytical description of the field in waveguide cross sections (ports). These ports can be generalized to open space, which was utilized in the analysis of radiating structures where the computational domain was truncated by a hemisphere [25]. However, in these approaches, the entire computational domain is analyzed with the use of discrete method and only the boundary conditions are modeled analytically.

An alternative approach is the utilization of discrete methods only to small fragments of the structure, whereas the rest of the computational domain is analyzed analytically. This allows for the analysis of complex structures more efficiently, as the numerically demanding (discrete) part of the computational domain is significantly reduced. This facilitates multi-object scattering analysis, while the interaction between the obstacles can be modeled using the iterative procedure [26]. Such a technique is especially efficient for structures containing identical objects (fragments of the domain), as their analysis is performed only once and the results can be replicated. In this approach, the object (fragment of the domain) is replaced by a hypothetical circular cylinder, on the surface of which the electric and magnetic fields are derived. In order to obtain the solution which is independent of the external incident field only the relation between the electric and magnetic fields of this abstract (effective) cylinder is determined. This relation can be formulated in a form of a multimode impedance matrix  $\mathbf{Z}$  or transmission matrix [27]. Such an approach allows for the analysis of scattering in different scenarios, e.g. scattering from cylindrical objects located in free space and illuminated obliquely by a plane wave, or located in multiport waveguide junctions and excited from the waveguide ports as presented in Figure 1. For the simple cylindrical structures, the  $\mathbf{Z}$  can be obtained analytically [26, 28]. For the arbitrary geometries, the impedance matrix can be obtained utilizing FD method [29, 30]. However, for complex shapes, the analysis with the use of the FD method requires a very dense mesh or complicated cell modification algorithms (with the introduction of an effective dielectric constant and a locally conformal mesh).

In this paper, we present a FEM formulation for the multimode impedance matrix  $\mathbf{Z}$  calculation, which allows for the analysis of scattering problems in open and closed areas. In contrast to semi-analytical approach described in [19] which is restricted to convex structures, the proposed procedure can be applied to post of fully arbitrary cross-sections (e.g. convex, concave or multilayered structures with injections of different materials). Moreover, FEM formulation allows for easier inclusion of different material types in contrast to FD method due to the possibility of irregular mesh utilization. The discrete analysis, which





**Figure 1.** Open and closed structures: (a) plane wave illumination at an arbitrary angle, (b) waveguide junction.

is the most time- and memory-consuming, is limited here to the close proximity of the scatterer, which improves efficiency of the proposed procedure. The higher efficiency of the proposed hybrid approach, as opposed to discrete formulation in the entire computational domain (with higher flexibility of scatterer shape in contrast to pure analytical methods) allows to utilize the proposed approach in optimization procedures. Moreover, once the impedance matrix is calculated, any rotation or shifting of the post can be performed without the need for discrete part recalculation. All the obtained results have been verified by comparison with simulations performed using the FD/MM method [29] and commercial software [31].

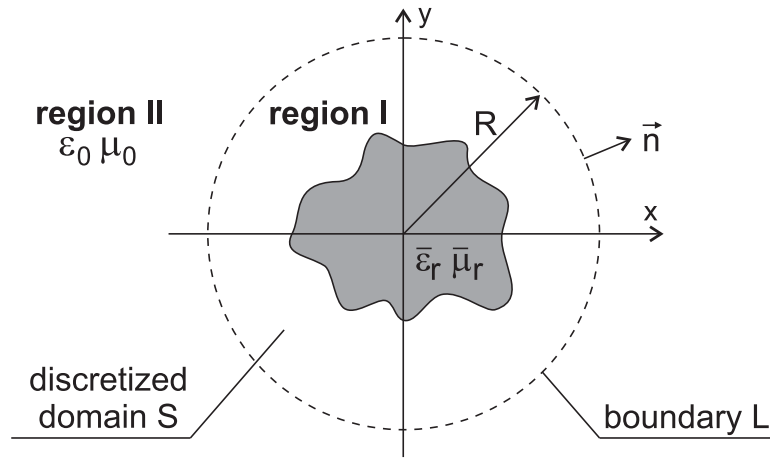
## 2. Formulation of the problem

The considered structure is presented in Figure 2. The cross section of the obstacle is arbitrary, but it is homogeneous in the  $z$  direction (so-called 2.5D problem). Two regions of investigation can be distinguished in the structure: region I, located inside the cylindrical surface of radius  $R$ , and region II, which is outside.

### 2.1. Definition of impedance matrix

The  $z$  components of the electric and magnetic fields in the outer region take the following form (suppressing  $e^{j\omega t}$  time dependence):

$$E_z^{\text{II}} = \sum_{m=-M}^M \left( a_m^E J_m(\kappa\rho) + b_m^E H_m^{(2)}(\kappa\rho) \right) e^{-j\beta z} e^{jm\varphi}, \quad (1)$$



**Figure 2.** The geometry of an investigated structure.

$$H_z^{\text{II}} = \sum_{m=-M}^M \left( a_m^H J_m(\kappa\rho) + b_m^H H_m^{(2)}(\kappa\rho) \right) e^{-j\beta z} e^{jm\varphi}, \quad (2)$$

where  $\kappa = \sqrt{k_0^2 - \beta^2}$ ,  $\beta = k_0 \cos(\theta_0)$ ,  $k_0$  is a wavenumber of free space and  $\theta_0$  is an angle of plane wave incidence, defined with respect to the  $z$  axis, while  $a_m^{(\cdot)}$  and  $b_m^{(\cdot)}$  are the coefficient of incident and scattered fields, respectively. The other transverse components of the electric and magnetic fields (especially  $E_\varphi$  and  $H_\varphi$ ) can be derived from Maxwell's equations, as in [32].

For an assumed incident excitation the coefficients  $a_m^{(\cdot)}$  are known. In order to determine the coefficients of scattered field  $b_m^{(\cdot)}$ , according to the procedure in [26], the impedance relation between electric and magnetic fields on the cylindrical surface of radius  $R$  needs to be derived.

The electric and magnetic fields on the cylindrical surface can be expanded with the following series:

$$\vec{E}_z(R, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M V_{zm} \vec{e}_{zm}(\varphi, z), \quad (3)$$

$$\vec{E}_\varphi(R, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M V_{\varphi m} \vec{e}_{\varphi m}(\varphi, z), \quad (4)$$

$$\vec{H}_\varphi(R, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M I_{\varphi m} \vec{h}_{\varphi m}(\varphi, z), \quad (5)$$

$$\vec{H}_z(R, \varphi, z) = \sum_{m=-M}^M I_{zm} \vec{h}_{zm}(\varphi, z). \quad (6)$$

where  $V_{zm}$ ,  $V_{\varphi m}$ ,  $I_{\varphi m}$  and  $I_{zm}$  are the field coefficients. Since the boundary is represented by a cylindrical surface of radius  $R$ , then it is convenient to assume the following expansion

functions:

$$\begin{aligned}\vec{e}_{zm}(\varphi, z) &= e^{-j\beta z} e^{jm\varphi} \vec{i}_z, \vec{e}_{\varphi m}(\varphi, z) = -e^{-j\beta z} e^{jm\varphi} \vec{i}_\varphi, \\ \vec{h}_{\varphi m}(\varphi, z) &= e^{-j\beta z} e^{jm\varphi} \vec{i}_\varphi, \vec{h}_{zm}(\varphi, z) = e^{-j\beta z} e^{jm\varphi} \vec{i}_z.\end{aligned}$$

Then, the relation between the electric and magnetic fields can be described as follows:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_z \\ \mathbf{V}_\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\varphi \\ \mathbf{I}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{TM, TM} & \mathbf{Z}_{TM, TE} \\ \mathbf{Z}_{TE, TM} & \mathbf{Z}_{TE, TE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\varphi \\ \mathbf{I}_z \end{bmatrix}, \quad (7)$$

where  $\mathbf{V}_{(\cdot)}$  and  $\mathbf{I}_{(\cdot)}$  are column vectors of the field coefficients and  $\mathbf{Z}$  is the impedance matrix.

In the case of perpendicular excitation ( $\theta_0 = 90^\circ$ ), the  $TE^z$  and  $TM^z$  solutions are uncoupled and all the elements of submatrices  $\mathbf{Z}_{TM, TE}$  and  $\mathbf{Z}_{TE, TM}$  equal zero. Therefore, in this case, the analysis can be performed separately for each polarization.

## 2.2. Impedance matrix evaluation with the use of the finite-element method

In this paragraph, the inner region of the structure is considered. Let us assume the relative permeability and permittivity of the post as follows (the algorithm can also be applied in the case of anisotropic media, e.g. ferrite):

$$\bar{\mu}_r = \begin{bmatrix} \mu_{rxx} & \mu_{rxy} & 0 \\ \mu_{ryx} & \mu_{ryy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rxx} & \varepsilon_{rxy} & 0 \\ \varepsilon_{ryx} & \varepsilon_{ryy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{rz} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

In order to obtain the impedance matrix using the FEM, we start from the Maxwell's equations. They can be separated into terms involving transverse and longitudinal components of the fields  $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z$  and  $\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_z$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t &= -j\omega\mu_0\mu_{rz}\vec{H}_z, \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z - j\beta\vec{i}_z \times \vec{E}_t &= -j\omega\mu_0\bar{\mu}_r\vec{H}_t, \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{rz}\vec{E}_z, \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_z - j\beta\vec{i}_z \times \vec{H}_t &= j\omega\varepsilon_0\bar{\varepsilon}_r\vec{E}_t,\end{aligned} \quad (9)$$

where  $\vec{\nabla}_t = \vec{i}_x(\partial/\partial x) + \vec{i}_y(\partial/\partial y)$ . By elimination of the magnetic fields, we get the two following relations:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_t \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1}\vec{i}_z \times \vec{\nabla}_t E_z) \\ + j\beta\vec{\nabla}_t \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1}\vec{i}_z \times \vec{E}_t) &= k_0^2\varepsilon_{rz}E_z\end{aligned} \quad (10)$$

for the longitudinal component (scalar) and:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_t \times \mu_{rz}^{-1}\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t + j\beta\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1}\vec{i}_z \times \vec{\nabla}_t E_z \\ - \beta^2\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1}\vec{i}_z \times \vec{E}_t &= k_0^2\bar{\varepsilon}_r\vec{E}_t\end{aligned} \quad (11)$$

for the transverse component (vector), where  $(\cdot)$  denotes a dot product. Using simple vector identities and Green's theorem, the relations can be transformed into a weak form. Then,

for the scalar component, we get:

$$\begin{aligned}
 & - \iint_S \vec{\nabla}_t F \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{\nabla}_t E_z) \, ds \\
 & - k_0^2 \iint_S F \varepsilon_{rz} E_z \, ds \\
 & - j\beta \iint_S \vec{\nabla}_t F \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{E}_t) \, ds \\
 & = - \oint_L \left[ (F \vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z) \times (\vec{\nabla}_t E_z + j\beta \vec{E}_t) \right] \cdot \vec{n} \, dl
 \end{aligned} \tag{12}$$

and, respectively, for the transverse vector component:

$$\begin{aligned}
 & j\beta \iint_S \vec{\mathcal{F}} \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{\nabla}_t E_z) \, ds \\
 & + \iint_S (\vec{\nabla}_t \times \vec{\mathcal{F}}) \cdot (\mu_{rz}^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \, ds \\
 & - k_0^2 \iint_S \vec{\mathcal{F}} \cdot \bar{\varepsilon}_r \vec{E}_t \, ds \\
 & - \beta^2 \iint_S \vec{\mathcal{F}} \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{E}_t) \, ds \\
 & = \oint_L \left[ \vec{\mathcal{F}} \times (\mu_{rz}^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \right] \cdot \vec{n} \, dl
 \end{aligned} \tag{13}$$

where  $\vec{n}$  is a unit vector directed outside the computational domain  $S$ . The weight functions  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\vec{\mathcal{F}} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  are bounded and quadratically integrable. At the boundary  $L$  (for the assumed circular cylinder boundary  $\vec{n} = \vec{i}_\rho$ ), the electric field can be replaced by a proper magnetic component; hence, the RHS of (12) can be replaced by:

$$\begin{aligned}
 & - \oint_L \left[ (F \vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z) \times (\vec{\nabla}_t E_z + j\beta \vec{E}_t) \right] \cdot \vec{n} \, dl \\
 & = j\omega\mu_0 \oint_L F \vec{i}_z \cdot (\vec{n} \times \vec{H}_t) \, dl \\
 & = j\omega\mu_0 \oint_L F \vec{i}_z \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{H}_\varphi) \, dl
 \end{aligned} \tag{14}$$

and the RHS of (13) by:

$$\begin{aligned}
 & \oint_L \left[ \vec{\mathcal{F}} \times (\mu_{rz}^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \right] \cdot \vec{n} \, dl \\
 & = j\omega\mu_0 \oint_L \vec{\mathcal{F}} \cdot (\vec{n} \times \vec{H}_z) \, dl \\
 & = j\omega\mu_0 \oint_L \vec{\mathcal{F}} \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{H}_z) \, dl.
 \end{aligned} \tag{15}$$

For the above formulation, the standard FEM can be used to determine the electric field corresponding to any excitation represented by the magnetic field ( $H_\varphi$  and  $H_z$ ).

We use standard hierarchical basis functions  $\alpha_{(i)}^{[n]}$  of the second order [20] for the (scalar)  $E_z$  component:

$$E_z = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^6 \Psi_{(i)}^{[n]} \alpha_{(i)}^{[n]} \quad (16)$$

and  $\vec{W}_{(i)}^{[n]}$  for the (vector)  $\vec{E}_t$  component:

$$\vec{E}_t = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^8 \Phi_{(i)}^{[n]} \vec{W}_{(i)}^{[n]}, \quad (17)$$

where  $n$  is the element number,  $i$  represents the local node/edge, and  $\Psi_{(i)}^{[n]}$  and  $\Phi_{(i)}^{[n]}$  are unknown coefficients for the scalar and vector components, respectively. Then, by applying Galerkin's method for (12) (enhanced by (14)), we obtain the following local matrices for each element:

$$\mathbf{G}_{zz}^{[n]} \Psi^{[n]} + \mathbf{G}_{zt}^{[n]} \Phi^{[n]} = \mathbf{B}_\varphi^{[n]} \mathbf{I}_\varphi, \quad (18)$$

where:

$$\begin{aligned} [\Psi^{[n]}]_i &= \Psi_{(i)}^{[n]}, \\ [\Phi^{[n]}]_i &= \Phi_{(i)}^{[n]}, [\mathbf{G}_{zz}^{[n]}]_{p,i} = - \iint_{S^{[n]}} \vec{\nabla}_t \alpha_{(p)}^{[n]} \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{\nabla}_t \alpha_{(i)}^{[n]}) \, ds \\ &\quad - k_0^2 \iint_{S^{[n]}} \alpha_{(p)}^{[n]} \varepsilon_{rz} \alpha_{(i)}^{[n]} \, ds, \\ [\mathbf{G}_{zt}^{[n]}]_{p,i} &= -j\beta \iint_{S^{[n]}} \vec{\nabla}_t \alpha_{(p)}^{[n]} \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \vec{W}_{(i)}^{[n]}) \, ds, \\ [\mathbf{B}_\varphi^{[n]}]_{p,m} &= j\omega\mu_0 \int_{L \cap L^{[n]}} \alpha_{(p)}^{[n]} \vec{i}_z \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{\varphi m}) \, dl. \end{aligned}$$

The surface  $S^{[n]}$  and the curve  $L^{[n]}$  correspond to the area and the boundary of the  $n$ th element ( $S = \bigcup_{n=1}^N S^{[n]}$ ,  $L = \bigcup_{n=1}^N L^{[n]}$ ).

Similarly, by applying Galerkin's method for (13) (enhanced by (15)), we obtain:

$$= \mathbf{G}_{tz}^{[n]} \Psi^{[n]} + \mathbf{G}_{tt}^{[n]} \Phi^{[n]} = \mathbf{B}_z^{[n]} \mathbf{I}_z, \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}_{tz}^{[n]}]_{p,i} &= j\beta \iint_{S^{[n]}} \vec{W}_{(p)}^{[n]} \cdot (\vec{i}_z \times \bar{\mu}_r^{-1} \vec{i}_z \times \nabla_t \alpha_{(i)}^{[n]}) \, ds, \\ [\mathbf{G}_{tt}^{[n]}]_{p,i} &= \iint_{S^{[n]}} (\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_{(p)}^{[n]}) \cdot (\mu_{rz}^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{W}_{(i)}^{[n]}) \, ds \\ &\quad - k_0^2 \iint_{S^{[n]}} \vec{W}_{(p)}^{[n]} \cdot \bar{\varepsilon}_r \vec{W}_{(i)}^{[n]} \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta^2 \iint_{S^{[n]}} \vec{W}_{(p)}^{[n]} \cdot \left( \vec{i}_z \times \vec{\mu}_{rt}^{-1} \vec{i}_z \times \vec{W}_{(i)}^{[n]} \right) ds, \\
 \left[ \mathbf{B}_z^{[n]} \right]_{\rho,m} & = j\omega\mu_0 \int_{L \cap L^{[n]}} \vec{W}_{(p)}^{[n]} \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{zm}) dl.
 \end{aligned}$$

Finally, the global matrices can be constructed and the electric field can be evaluated for any excitation (represented by coefficients  $\mathbf{I}_\varphi$  and  $\mathbf{I}_z$ ):

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\varphi \\ \mathbf{I}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{zz} & \mathbf{G}_{zt} \\ \mathbf{G}_{tz} & \mathbf{G}_{tt} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\varphi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\varphi \\ \mathbf{I}_z \end{bmatrix}. \quad (20)$$

In order to determine the impedance matrix, the electric field coefficients  $V_{zm}$  and  $V_{\varphi m}$  must be evaluated from the electric field. To this extent, relations (3) and (4) can be projected using  $(\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{\varphi m})$  and  $(\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{zm})$ , respectively

$$\begin{aligned}
 & \int_L E_z \vec{i}_z \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{\varphi m})^* dl \\
 & = \sum_{p=-M}^M V_{zp} \int_L \vec{e}_{zp} \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{\varphi m})^* dl = 2\pi R V_{zm}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_L \vec{E}_t \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{zm})^* dl \\
 & = \sum_{p=-M}^M V_{\varphi p} \int_L \vec{e}_{\varphi p} \cdot (\vec{i}_\rho \times \vec{h}_{zm})^* dl = 2\pi R V_{\varphi m}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

By applying matrices  $\mathbf{B}_\varphi$  and  $\mathbf{B}_z$  the previous relations can be written in matrix form:

$$\mathbf{B}_\varphi^H \Psi = 2\pi R \mathbf{V}_z \quad (23)$$

and

$$\mathbf{B}_z^H \Phi = 2\pi R \mathbf{V}_\varphi. \quad (24)$$

Finally, the impedance matrix can be expressed as

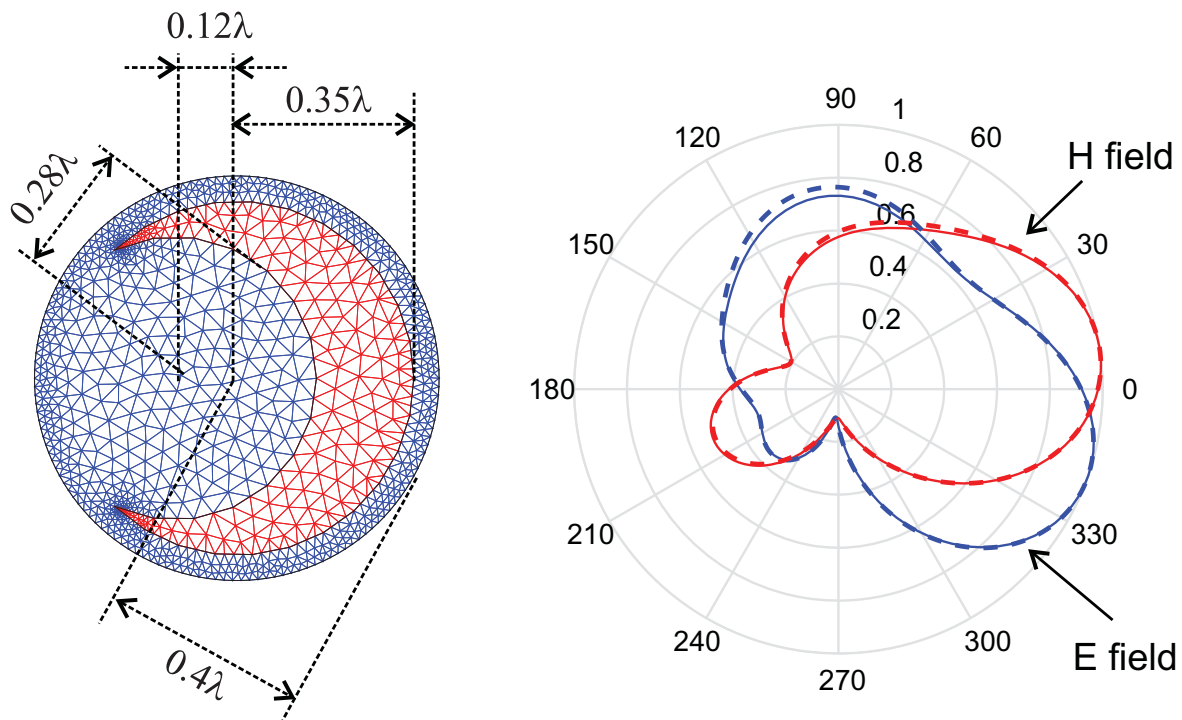
$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2\pi R} \mathbf{B}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \quad (25)$$

The obtained impedance matrix allows for the analysis of scattering in different scenarios, e.g., in waveguides and resonators, as well as in the open region [26].

### 3. Results

In order to verify the validity of the proposed technique, a few examples of electromagnetic field scattering from dielectric, metal and ferrite posts in open and closed structures were analyzed.

The first example considers a plane wave scattering from a dielectric cylinder with a crescent cross section. The relative permittivity of the posts was assumed to be  $\epsilon_r = 5$ , while the



**Figure 3.** Normalized amplitude of scattered electric and magnetic fields from the dielectric ( $\varepsilon_r = 5$ ) crescent cylinder with radius of larger circle  $0.35\lambda_0$ , radius of smaller circle  $0.28\lambda_0$  and offset  $0.12\lambda_0$  for the plane wave incidence angle  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $\phi_0 = 30^\circ$  and  $\psi = 30^\circ$ . Solid line – this method; dashed line – FD/MM method [29].

plane wave illuminated the structures at angles  $\theta_0 = 30^\circ$  and  $\phi_0 = 30^\circ$  with a polarization rotation angle of  $\psi = 30^\circ$ . For the assumed angle of incident (since  $\psi$  is different than  $0^\circ$  and  $90^\circ$ ) the wave has both TE and TM components. The incident field coefficients take the form:

$$a_m^E = E_0 \cos(\psi) \sin(\theta_0) j^{-m} e^{-jm\phi_0}, \quad (26)$$

$$a_m^H = E_0 / \eta_0 \sin(\psi) \sin(\theta_0) j^{-m} e^{-jm\phi_0}, \quad (27)$$

where  $\eta_0 = 120\pi \Omega$  is the outer space electromagnetic wave impedance and  $E_0$  is the field magnitude. The scattered fields in the far zone (at distance  $100\lambda_0$ ) were calculated (see Figure 3) and compared with the results obtained from the FD/MM method [29]. The results agree well with each other.

The convergence of the method is examined in Table 1 with the following definition of error:

$$\begin{aligned} Err^{(M,N)} = \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} & |\hat{F}^{(M,N)}(\varphi, \rho = 100\lambda_0) \\ & - \hat{F}^{(M_R, N_R)}(\varphi, \rho = 100\lambda_0)| \cdot 100\%, \end{aligned} \quad (28)$$

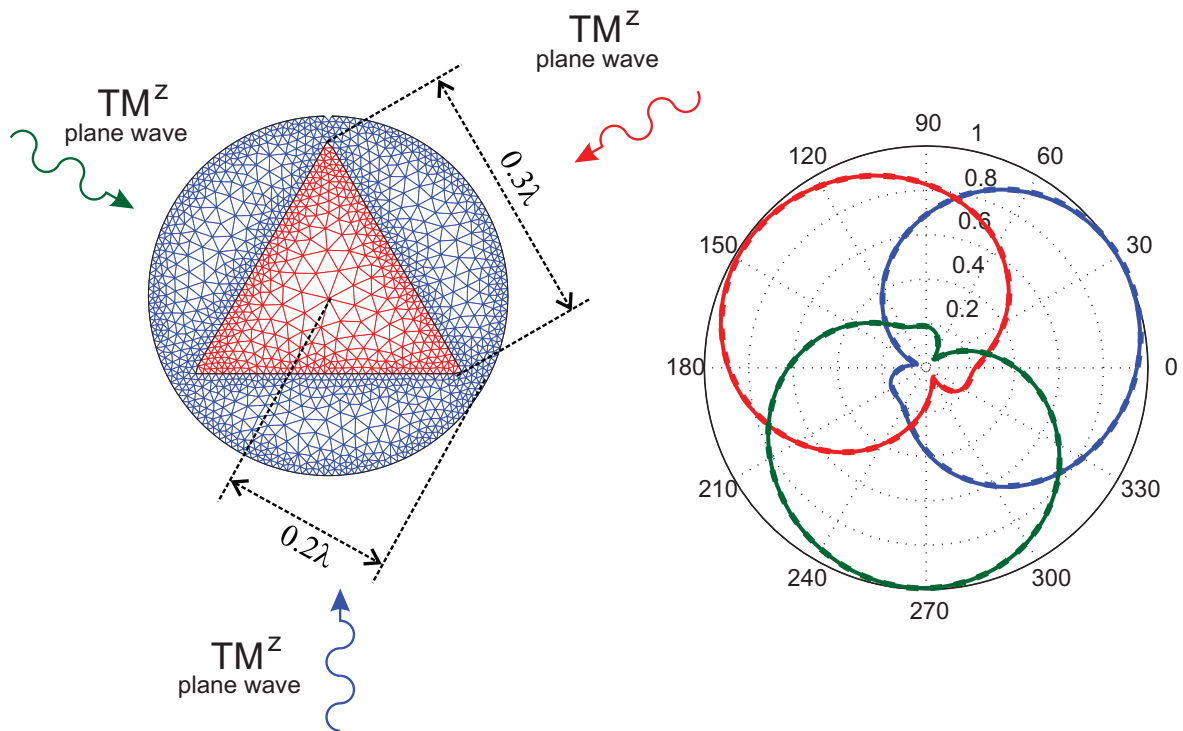
where  $\hat{F}$  is the normalized magnitude of the electric or magnetic fields in the far zone  $\rho = 100\lambda_0$ ,  $M_R = 25$  and  $N_R = 3614$ . As can be observed, the utilization of about  $N = 2000$  triangular elements of the FEM discretization is sufficient to obtain accurate results, with the number of modes not less than  $M = 10$ . The increase of mesh density and number of modes does not significantly reduce the convergence error but increases the analysis time.

**Table 1.** Convergence of the method for the example from Figure 3: the E-field error (H-field error) according to (34), and calculation time in lower row.

$N$	1722	1940	3614
$M = 3$	1.331 (1.140) 6.0 s	1.350 (1.131) 7.0 s	1.350 (1.131) 12.7 s
$M = 5$	0.086 (0.072) 6.4 s	0.068 (0.054) 7.2 s	0.064 (0.048) 13.2 s
$M = 10$	0.028 (0.027) 7.1 s	0.008 (0.007) 8.2 s	0.003 (0.002) 14.7 s
$M = 15$	0.027 (0.024) 7.9 s	0.008 (0.007) 9.0 s	$4.14 \cdot 10^{-4}$ ( $3.07 \cdot 10^{-4}$ ) 16.0 s
$M = 20$	0.027 (0.024) 8.7 s	0.008 (0.007) 9.8 s	$4.85 \cdot 10^{-5}$ ( $3.72 \cdot 10^{-5}$ ) 17.5 s
$M = 25$	0.027 (0.024) 9.5 s	0.008 (0.007) 10.7 s	0 (0) 19.2 s

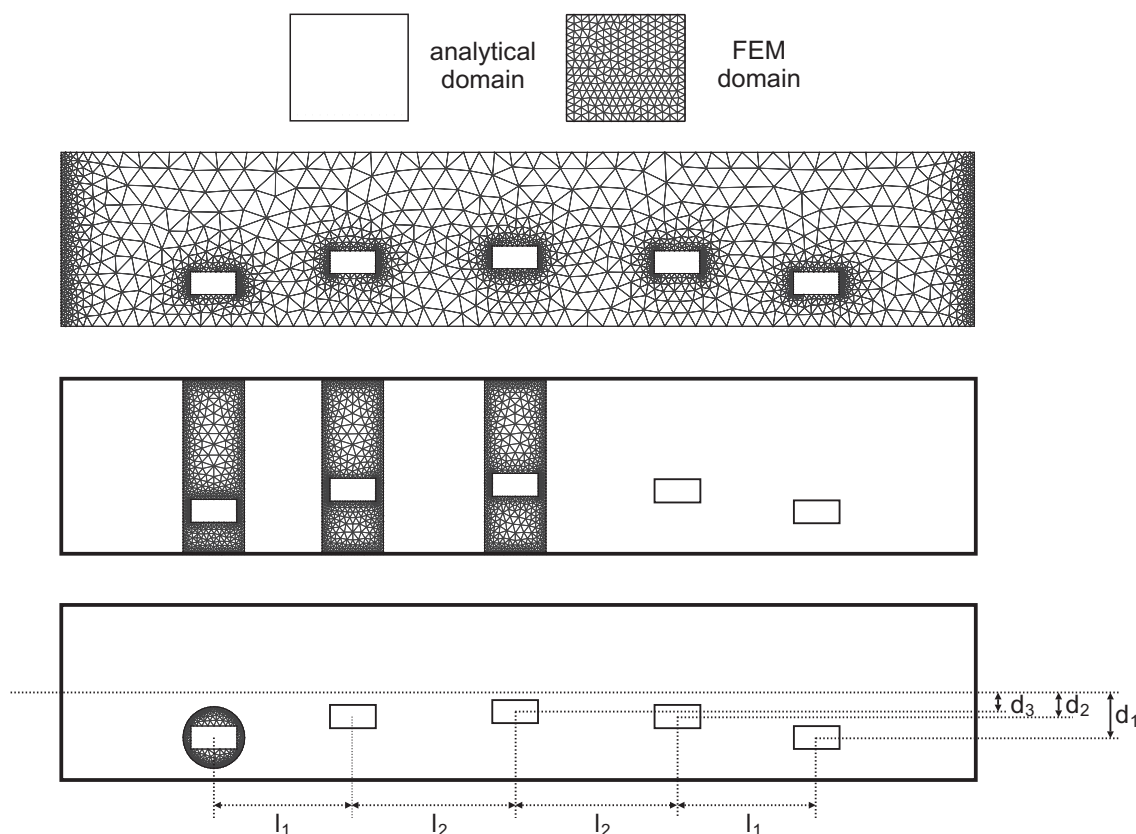
Similar convergence analysis was performed for all the presented examples and the results led to the same conclusion. The calculations were performed in a MATLAB environment on an Intel Core i7-5930 3.5 GHz. For the assumed number of mode expansions ( $M = 10$ ) and the number of elements ( $N = 1940$ ), the calculation of a scattered pattern on a single frequency took approximately 8.2 s. It is worth noting that the calculation of this structure with the use of FD/MM method [29] took 46 s to obtain convergent results, which is over five times longer than with the proposed approach.

The second example considers a ferrite post with a triangular cross section, which can be realized with the use of self-magnetized ferrite material [33], illuminated perpendicularly



**Figure 4.** Normalized amplitude of scattered electric fields for  $TM^z$  scattering from the ferrite cylinder with triangular cross section magnetized in  $+z$  direction. Ferrite post parameters: dimension  $0.15\lambda_0$  (equilateral triangle),  $\epsilon_r = 15$ ,  $H_i = 15$  kA/m,  $M_s = 190$  kA/m and  $f = 10$  GHz. Solid line – this method; dashed line – field matching method [19].





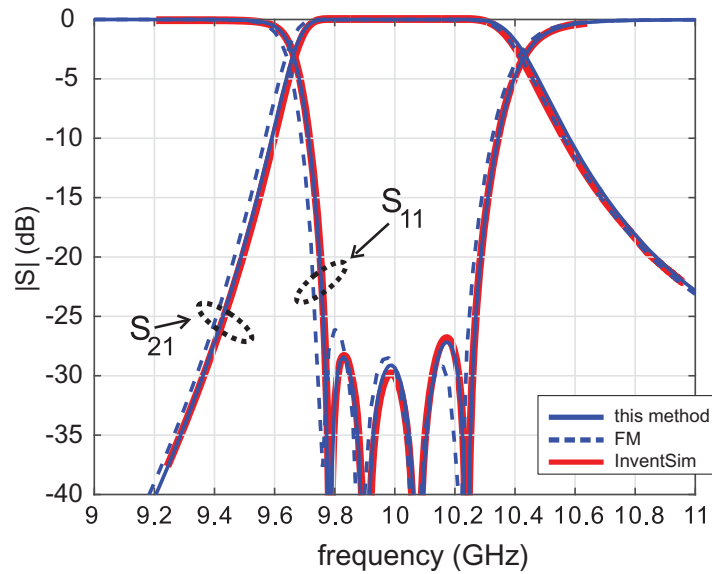
**Figure 5.** The concepts of the analysis of the four-pole filter: full FEM analysis; hybrid method (finite-element and mode-matching methods) analysis; proposed technique analysis.

by a  $TM^z$  polarized plane wave. The calculated far field patterns of the electric field in the case of three angles of excitation ( $\phi_0 = 0^\circ$ ,  $\phi_0 = 120^\circ$  and  $\phi_0 = 240^\circ$ ) are presented in Figure 4. It was assumed that ferrite material had the following parameters:  $\varepsilon_r = 15$ , saturation magnetization  $M_s = 190$  kA/m, and internal bias magnetic field  $H_i = 15$  kA/m. The tensor parameters [34] calculated at  $f = 10$  GHz have the following values:

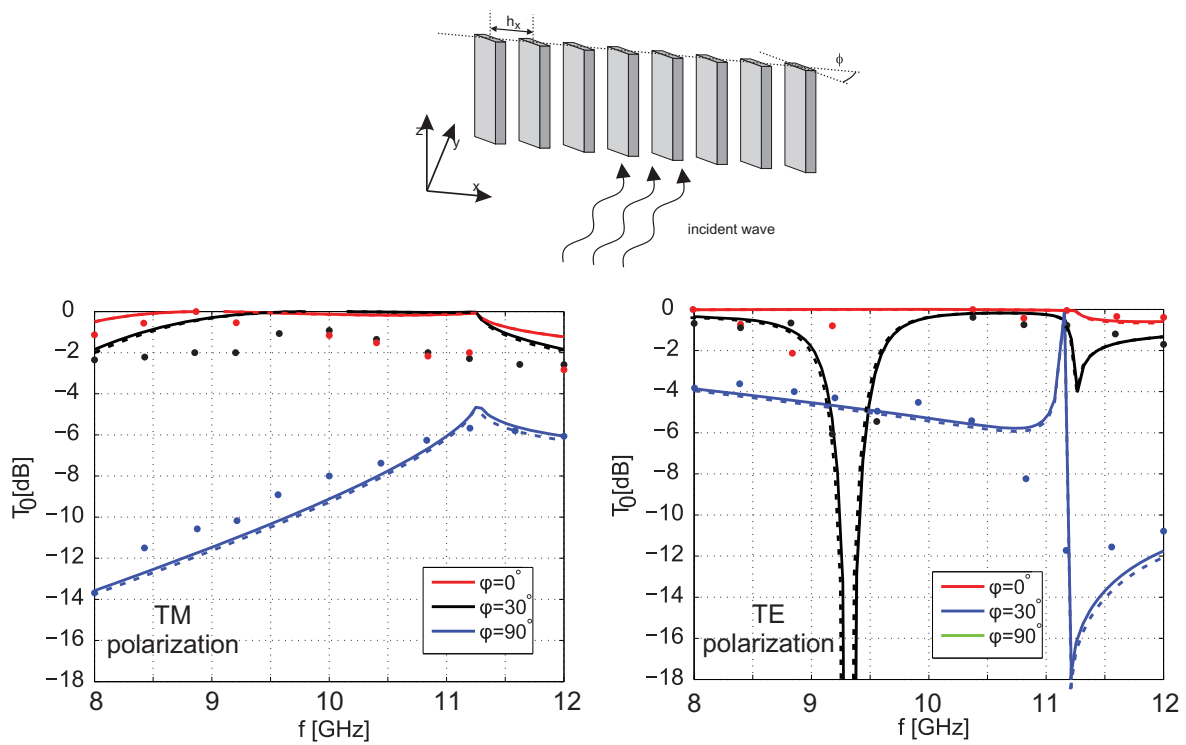
$$\mu_{rxx} = \mu_{ryy} = 1.0353, \mu_{rxy} = -\mu_{ryx} = 0.6704j, \mu_{rzz} = 1.$$

As can be seen, the ferrite post shifts the main lobe of the field pattern by  $60^\circ$  with respect to the plane of excitation. Therefore, a space wave circulation was obtained.

In order to show an obvious advantage of the proposed technique, we analyzed a WR-90 waveguide filter employing five metallic posts of full height with a rectangular cross section [35]. The scattering matrix of the filter can be calculated e.g. in three different ways as illustrated in Figure 5. The most time consuming option is the utilization of full FEM analysis in which the entire structure is discretized. Alternatively, only the fragments of the waveguide in the close proximity of the rectangular posts can be analyzed with the use of FEM, whereas the homogeneous parts are modeled analytically, as proposed in [23]. Then the cascading procedure of scattering matrices is utilized to derive the entire scattering matrix. As the structure is symmetric, only three waveguide fragments need to be considered and the results of the first and the second post are replicated. In the proposed approach the FEM analysis is further limited to the close proximity (circular region) of the scattering object, and in the case where all posts are the same, the analysis can be performed only for a single object. The dimensions and the obtained results are presented in Figure 6. The results



**Figure 6.** Scattering parameters of the four-pole filter. Dimensions:  $w_1 = 6$  mm,  $w_2 = 3$  mm,  $l_1 = 18.31$  mm,  $l_2 = 21.31$  mm,  $d_1 = 5.76$  mm,  $d_2 = 3.00$  mm,  $d_3 = 2.27$  mm; height of the posts  $h = 10.16$  mm.



**Figure 7.** Transmission coefficients for normal plane wave incidence on periodic structures composed of metallic cylinders with rectangular cross section with dimensions  $15 \times 3$  mm arranged with period  $h_x = 26.6$  mm for several angles of posts rotation in the array (solid line – this method, dashed line – HFSS, circles – measurements [36]).

were compared with the calculations using the field matching method [19] and InventSim software [31]; a good agreement was achieved. It is worth noting that the analysis of the entire structure (101 frequency points) with the use of full FEM domain took approximately 10 min (mesh with 3574 elements), the hybrid FEM/MM method took 2 min and 13 s (mesh

of a single section with 1260 elements), whereas the analysis with the use of the proposed technique (mesh with 556 elements) took 30 s.

The last example considers periodic structure from [36] in the form of a linear array of copper posts with rectangular cross-section with dimensions  $15 \times 3$  mm. The objects were arranged with distance  $h_x = 26.6$  mm as depicted in Figure 7 and the calculations were performed assuming perpendicular plane wave illumination for both wave polarizations and three different angles of post rotations. The calculated results, shown in Figure 7 were compared with HFSS calculations and measurements from [36] obtaining satisfactory agreement.

## 4. Conclusion

A new hybrid approach combining the FEM and MM method was proposed for the analysis of anisotropic posts with arbitrary cross sections. Its validity has been verified on structures with different cross-sectional shapes, and the results are in good agreement with other numerical techniques and commercial software.

## Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors.

## Funding

This work was supported in part by the EDISON-Electromagnetic Design of flexible SensOrs Project. The EDISON Project was carried out within the TEAM-TECH Program of the Foundation for Polish Science and the European Union under the European Regional Development Fund, Smart Growth Operational Program 2014-2020 and under funding for Statutory Activities for the Faculty of Electronics, Telecommunication and Informatics, Gdansk University of Technology. Fundacja na rzecz Nauki Polskiej. EDISON-Electromagnetic Design of flexible SensOr.

## Notes on contributors

**Piotr Kowalczyk** was born in Wejherowo, Poland, in 1977. He received the MS degree in applied physics and mathematics and the PhD degree in electrical engineering from Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2001 and 2008, respectively. He is currently with the Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Department of Microwave and Antenna Engineering, Gdansk University of Technology. His current research interests include scattering and propagation of electromagnetic wave problems, algorithms, and numerical methods.

**Rafal Lech** was born in Elblag, Poland, in 1977. He received the MScEE and PhD degrees (with honors) from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2001 and 2007, respectively. He is currently with the Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Department of Microwave and Antenna Engineering, Gdansk University of Technology. His main research interests are electromagnetic-wave scattering, numerical methods, filter design, complex materials, metamaterial applications at microwave frequencies, electromagnetic analysis of periodic structures, and antenna design.

**Malgorzata Warecka** received the MScEE degree from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2018 where she is currently working toward the PhD degree. She is currently with the Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Department of Microwave and Antenna Engineering, Gdansk University of Technology. Her current research interests include scattering and propagation of electromagnetic wave problems, algorithms, and numerical methods.

**Adam Kusiek** was born in Mragowo, Poland, in 1980. He received the MScEE, PhD (with honors) and DSc degrees from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2004, 2011 and 2018, respectively. His research interests include the development of hybrid techniques to the analysis of complex structures, electromagnetic wave scattering, integrated nonreciprocal devices, antennas, and passive structures for antenna feeding systems.

## ORCID

Piotr Kowalczyk  <https://orcid.org/0000-0003-1655-7666>

Rafal Lech  <http://orcid.org/0000-0002-5384-6830>

Malgorzata Warecka  <https://orcid.org/0000-0003-1321-8116>

Adam Kusiek  <http://orcid.org/0000-0002-6477-0480>

## References

- [1] Tsang L, Kong JA, Ding K-H. Scattering of electromagnetic waves: theories and applications. New York: John Wiley and Sons; 2002.
- [2] Elsherbeni AZ, Hamid M, Tian G. Iterative scattering of a Gaussian beam by an array of circular conducting and dielectric cylinders. *J Electromagn Waves Appl.* 1993;7(10):1323–1342.
- [3] Nielsen ED. Scattering by a cylindrical post of complex permittivity in a waveguide. *IEEE Trans Microw Theory Tech.* 1969 Mar;17:148–153.
- [4] Gesche R, Lochel N. Scattering by a lossy dielectric cylinder in a rectangular waveguide. *IEEE Trans Microw Theory Tech.* 1988 Jan;36:137–144.
- [5] Harumi K. Scattering of plane waves by a rigid ribbon in a solid. *J Appl Phys.* 1961 Aug;32:1488–1497.
- [6] Bowman JJ, Senior TBA, Uslenghi PLE. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. Amsterdam: John Wiley and Sons; 1969.
- [7] Yamashita E. Analysis methods for electromagnetic wave problems. Norwood: Artech House; 1990.
- [8] Mitri FG. Acoustic scattering of a cylindrical quasi-gaussian beam with arbitrary incidence focused on a rigid elliptical cylinder. *J Appl Phys.* 2015;118:184902.
- [9] Mitri FG. Acoustic backscattering and radiation force on a rigid elliptical cylinder in plane progressive waves. *Ultrasonics.* 2016 Mar;66:27–33.
- [10] Valero A, Ferrando M. Full-wave equivalent network representation for multiple arbitrary shaped posts in H-plane waveguide. *IEEE Trans Microw Theory Tech.* 1999 Oct;47:1997–2002.
- [11] Okamoto Naomichi. Matrix formulation of scattering by a homogeneous gyrotropic cylinder. *IEEE Trans Antennas Propag.* 1970 Sep;18(5):642–649.
- [12] Zouros GP, Kokkorakis GC. Electromagnetic scattering by an inhomogeneous gyroelectric sphere using volume integral equation and orthogonal dini-type basis functions. *IEEE Trans Antennas Propag.* 2015 Jun;63(6):2665–2676.
- [13] Libo Wang, Lianlin Li, Yunhua Tan. A novel approximate solution for electromagnetic scattering by dielectric disks. *IEEE Trans Geosci Remote Sens.* 2015 May;53(5):2948–2955.
- [14] Quesada Pereira FD, Romera Perez A, Vera Castejon P, Alvarez Melcon A. Integral-equation formulation for the analysis of capacitive waveguide filters containing dielectric and metallic arbitrarily shaped objects and novel applications. *IEEE Trans Microw Theory Tech.* 2015 Dec;63(12):3862–3873.
- [15] Brick Y, Lomakin V, Boag A. Fast green's function evaluation for sources and observers near smooth convex bodies. *IEEE Trans Antennas Propag.* 2014 Jun;62(6):3374–3378.
- [16] Aydogan A, Akleman F. Analysis of direct and inverse problems related to circular waveguides loaded with inhomogeneous lossy dielectric objects. *IEEE Trans Microw Theory Tech.* 2014 Jun;62(6):1291–1300.



- [17] Okuno Y, Yasuura K. Numerical algorithm based on the mode-matching method with a singular-smoothing procedure for analyzing edge-type scattering problems. *IEEE Trans Antennas Propag.* **1982 Jul**;30(4):580–587.
- [18] Gibson WC. *The method of moments in electromagnetics*. Boca Raton (FL): CRC Press Taylor and Francis Group; **2015**.
- [19] Lech R, Kowalczyk P, Kusiek A. Scattering from a cylindrical object of arbitrary cross section with the use of field matching method. *Trans Antennas Propag.* **2016 Nov**;64(11):4883–4887.
- [20] Davidson DB. *Computational electromagnetics for RF and microwave engineering*. Cambridge: Cambridge University Press; **2011**.
- [21] Toflove A, Hagness SC. *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. 3rd ed. Boston: Artech House; **2005**.
- [22] Sheng X-Q, Jin J-M, Song J, et al. On the formulation of hybrid finite-element and boundary-integral methods for 3-D scattering. *IEEE Trans Antennas Propag.* **1998 Mar**;46(3):303–311.
- [23] Rubio J, Arroyo J, Zapata J. Analysis of passive microwave circuits by using a hybrid 2-D and 3-D finite-element mode-matching method. *IEEE Trans Microw Theory Tech.* **1999 Sep**;47(9):1746–1749.
- [24] Arena D, Ludovico M, Manara G, et al. A hybrid mode matching/FEM technique with edge elements for solving waveguides discontinuity problems. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*; Vol. 4. 2000, p. 2028–2031.
- [25] de Aza MAG, Encinar JA, Zapata J, et al. Full-wave analysis of cavity-backed and probe-fed microstrip patch arrays by a hybrid mode-matching generalized scattering matrix and finite-element method. *IEEE Trans Antennas Propag.* **1998 Feb**;46(2):234–242.
- [26] Polewski M, Lech R, Mazur J. Rigorous modal analysis of structures containing inhomogeneous dielectric cylinders. *IEEE Trans Microw Theory Tech.* **2004 May**;52(5):1508–1516.
- [27] Varadan VK, Varadan VV. *Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering focus on the T-matrix approach*. New York: Pergamon; **1980**.
- [28] Lech R, Mazur J. Tunable waveguide filter with bow-tie metallic posts. *IEE Proc Microw Antenna Propag.* **2004 Apr**;151(2):156–160.
- [29] Kusiek A, Lech R, Mazur J. A new hybrid method for analysis of scattering from arbitrary configuration of cylindrical objects. *IEEE Trans Antennas Propag.* **2008 Jun**;56(6):1725–1733.
- [30] Kusiek A, Mazur J. Application of hybrid finite-difference mode-matching method to analysis of structures loaded with axially-symmetrical posts. *Microw Opt Technol Lett.* **2011 Jan**;53(1):189–194.
- [31] <http://www.eminvent.com/>.
- [32] Pozar DM. *Microwave engineering*. 4th ed. Reading, MA: Addison-Wesley; **2012**.
- [33] CK Queck, LE Davis. Self-biased hexagonal ferrite coupled line circulators. *Electron Lett.* **2003**;39(22):1595–1597. 30 Oct.
- [34] Baden Fuller AJ. *Ferrites at microwave frequencies*. London: Peter Peregrinus; **1986**.
- [35] Lech R, Kusiek A, Mazur J. Tuning properties of irregular posts in waveguide junction – tunable filter application. 18th International Conference on Microwave, Radar and Wireless Communications MIKON-2010; 2010 Jun 14–16; Lithuania, Vilnius: p. 705–708.
- [36] Kusiek A, Lech R, Mazur J. Hybrid technique for the analysis of scattering from periodic structures composed of irregular objects. *Prog Electromagn Res PIER.* **2013**;135:657–675.

## **[MW2] Efficient Finite Element Analysis of Axially Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities**

M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk

IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques  
vol. 67, no. 11, pp. 4291-4297, Nov. 2019

Wkład autorki:

sformułowanie równań dla metody elementów skończonych uwzględniających symetrię osiową, dostosowanie wrót sekcji falowodowej o przekroju kołowym umożliwiające wprowadzenie periodycznych warunków brzegowych, implementacja periodycznych warunków brzegowych i sformułowania obejmującego wspomnianą symetrię a również wykonanie testów numerycznych dla struktur periodycznych i quasi-periodycznych

# Efficient Finite Element Analysis of Axially Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities

Malgorzata Warecka<sup>1</sup>, Rafal Lech<sup>1</sup>, *Senior Member, IEEE*, and Piotr Kowalczyk<sup>2</sup>, *Member, IEEE*

**Abstract**—A combination of the body-of-revolution and finite element methods is adopted for full-wave analysis of waveguides and waveguide discontinuities involving angular field variation. Such an approach is highly efficient and much more flexible than analytical techniques. The method is performed in two different cases: utilizing a generalized impedance matrix to determine the scattering parameters of a single waveguide section and utilizing periodic boundary conditions without sources. In order to confirm the validity and efficiency of both approaches, a few examples of axially symmetrical structures have been analyzed. The obtained results are compared to those obtained from commercial software and available in the literature.

**Index Terms**—Cylindrical waveguides, dispersion diagrams, finite element method (FEM), generalized impedance matrix (GIM), metamaterials, periodic boundary conditions (PBCs).

## I. INTRODUCTION

AXIALLY symmetrical structures (see. Fig. 1) have been widely used in microwave technology and optics for many years. For instance, cylindrical waveguides containing different types of discontinuities are commonly applied in passive filtering devices [1]–[4]. In the last few decades, periodic structures known as electric or photonic band-gap materials have also become very popular due to their wide practical applications. Such structures can support left-handed waves as well as backward and slow waves. The specific properties of these systems can be utilized for miniaturization of waveguides or modification of their operating band [5]–[9]. Special attention should also be given to their application in electron beam devices such as gyrotrons, magnetrons, traveling-wave tubes, backward-wave oscillators, gyro-traveling-wave tubes, and accelerators, where the structure is composed of periodic

Manuscript received April 3, 2019; revised July 16, 2019; accepted August 14, 2019. Date of publication October 1, 2019; date of current version November 5, 2019. This work was supported in part by the TEAM-TECH Programme of the Foundation for Polish Science co-financed by the European Union under the European Regional Development Fund through the Electromagnetic Design of flexible SensOrs (EDISOn) Project, in part by the Smart Growth Operational Programme under Grant 2014-2020, and in part by the Faculty of Electronics, Telecommunication and Informatics, Gdansk University of Technology through the funding for Statutory Activities. (Corresponding author: Malgorzata Warecka.)

The authors are with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology, 80-233 Gdansk, Poland (e-mail: warecka.malgorzata@gmail.com; rlech@eti.pg.edu.pl; pio.kow@gmail.com).

Color versions of one or more of the figures in this article are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMTT.2019.2940021

0018-9480 © 2019 IEEE. Personal use is permitted, but republication/redistribution requires IEEE permission.

See [http://www.ieee.org/publications\\_standards/publications/rights/index.html](http://www.ieee.org/publications_standards/publications/rights/index.html) for more information.

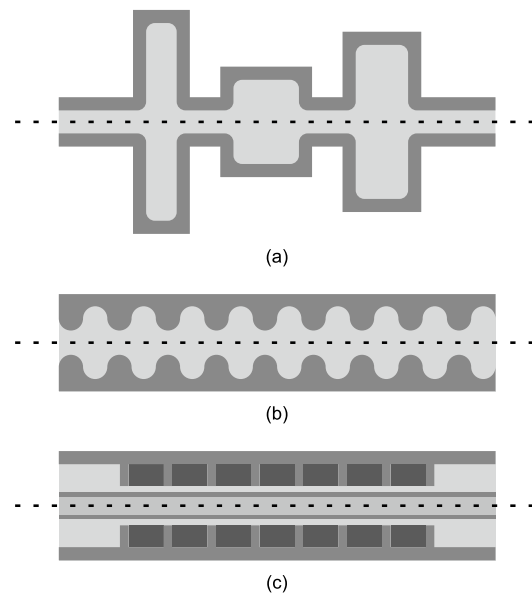


Fig. 1. Axial cross section of (a) microwave filter, (b) slow wave periodic structure, and (c) circular waveguide with electron beam.

metal–dielectric layers [10], [11]. The interaction of an electron beam with the fields supported in a slow wave structure gives these structures potential for terahertz devices.

For a structure with a simple geometry, an analytical method (e.g., mode matching) can be applied [7], [8]; however, in many practical cases, such an approach is not sufficiently flexible. More sophisticated techniques, e.g., boundary integral-resonant-mode expansion (BI-RME) [12], [13], can be used for more complicated geometries; however, their application is less general than discrete numerical techniques, which have recently become the most popular analysis methods. Usually, commercial full-wave simulators based on the finite difference (FD) or finite-element method (FEM) require a discretization of the whole 3-D computational domain inside the structure. For complex geometries, especially containing thin metal–dielectric layers, the discretization must be fine, which results in time and memory-consuming analysis. In such cases, the optimization of the structure (which requires many simulations for different parameters) can be inefficient.

It is well known that the structures of axial symmetry can be analyzed much more simply, taking advantage of the fixed

angular variation of the fields—body-of-revolution (BOR). This feature is widely described in the literature and applied for many different issues involving radiation, propagation, and scattering problems [5], [14]–[20], and for FEM [21]–[31]. However, to the best of authors' knowledge, the BOR approach for periodic and quasi-periodic guiding structures has not been presented in combination with FEM. A recently published article [6] considers this problem only for the case with no angular variation (suggesting that the generalization to arbitrary variation is not possible) which is not useful from a practical point of view.

In this article, a combination of BOR and FEM is adopted for full-wave analysis of waveguides and waveguide discontinuities (involving angular field variation, in contrast to [6]). Such an approach is highly efficient and much more flexible than analytical techniques. The proposed method is performed in two different cases. The first involves a generalized impedance matrix (GIM) to determine the scattering parameters of a single waveguide section. Such results can be used to analyze structures composed of the same or different sections (involving quasi-periodic or even periodic structures). The second method, based on periodic boundary conditions (PBCs) and no sources (modal analysis), can be applied to periodic structures and becomes more efficient than the first for short and complex sections.

In order to confirm the validity and efficiency of both approaches, a few examples of axially symmetrical structures have been analyzed. The obtained results have been compared with those obtained from commercial software and available in the literature.

It is worth noting that the proposed approach can be easily combined with techniques which can significantly improve the efficiency of the analysis and optimization process. One example is the model order reduction [32], which is useful when the analysis is performed in a wide frequency band. Another example is based on a hybridization of the FEM with modal expansion techniques and utilizing surface impedance. If the structure involves homogeneous regions, then the field inside these regions can be expressed in analytical terms, which also improves the efficiency of the simulation [6], [33], [34]. Moreover, in the optimization process, mesh morphing algorithms [35] can be applied to avoid step changes in the results caused by slight modifications of the generated mesh for different simulation parameters.

## II. FORMULATION OF THE PROBLEM

Symmetric structures have some special features that can be used to improve the efficiency of analysis. In this article, a section of a cylindrical waveguide with a symmetry axis is considered. In this case, the structure can be analyzed in cylindrical coordinates in a 2-D domain  $(\rho, \varphi)$  which is "rotated" around the mentioned axis (see Fig. 2). The variation of the electric (and magnetic) field along  $\varphi$  can be expressed as

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \vec{E}(\rho, z)e^{jm\varphi} \quad (1)$$

where  $m$  is an arbitrary integer number (mode number). For the investigated axially symmetrical structures, the analysis can be performed separately for each  $m$ .

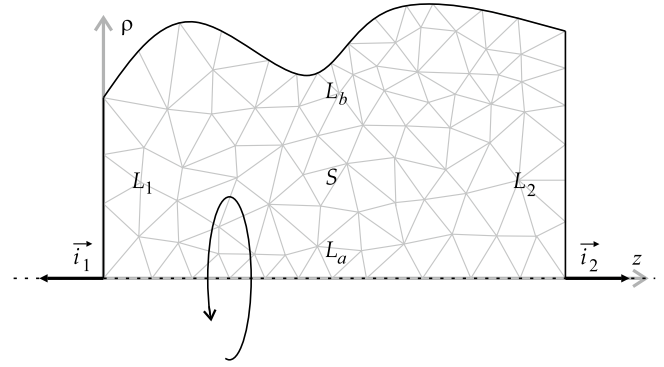


Fig. 2. Example of a 2-D computational domain for BOR combined with FEM.

In the first step, the fields must be separated into two components  $\vec{E}_\varphi(\rho, z) = E_\varphi(\rho, z)\vec{i}_\varphi$  and  $\vec{E}_t(\rho, z) = E_\rho(\rho, z)\vec{i}_\rho + E_z(\rho, z)\vec{i}_z$ . Then, directly from the Maxwell equations one obtains

$$\vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_\varphi \times \vec{E}_t) + \vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_\varphi) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_\varphi = 0 \quad (2)$$

and

$$\vec{\nabla}_t \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) + \vec{\nabla}_\varphi \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_\varphi) + \vec{\nabla}_\varphi \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_\varphi \times \vec{E}_t) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E}_t = 0 \quad (3)$$

where the operators  $\vec{\nabla}_t = \vec{i}_\rho(\partial/\partial\rho) + \vec{i}_z(\partial/\partial z)$  and  $\vec{\nabla}_\varphi = \vec{i}_\varphi(\partial/\partial\varphi)$ . The relative permittivity and permeability of the structure are represented by  $\epsilon_r$  and  $\mu_r$ , respectively, and  $k_0$  is a vacuum wavenumber. A weak form of the considered problem can be obtained (similar to [34] and [33]), taking into account assumption (1), for scalar component  $E_\varphi(\rho, z)$

$$\begin{aligned} & - \iint_S \frac{jm}{\rho} [\vec{\nabla}_t(\rho F_\varphi) \cdot \mu_r^{-1} \vec{E}_t] d\rho dz \\ & - k_0^2 \iint_S \rho F_\varphi \epsilon_r E_\varphi d\rho dz \\ & + \iint_S \frac{1}{\rho} [(\vec{\nabla}_t(\rho F_\varphi)) \cdot (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi))] d\rho dz \\ & + j\omega\mu_0 \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} F_\varphi (\vec{i}_\varphi \times \vec{H}_t^p) \cdot \vec{i}_p \rho d\rho = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

and for vector component  $\vec{E}_t(\rho, z)$

$$\begin{aligned} & \iint_S \rho (\vec{\nabla}_t \times \vec{F}_t) \cdot (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) d\rho dz \\ & - k_0^2 \iint_S \rho \vec{F}_t \cdot \epsilon_r \vec{E}_t d\rho dz \\ & + \iint_S \frac{jm}{\rho} \vec{F}_t \cdot [\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t(\rho E_\varphi)] d\rho dz \\ & + \iint_S \frac{m^2}{\rho} \vec{F}_t \cdot (\mu_r^{-1} \vec{E}_t) d\rho dz \\ & + j\omega\mu_0 \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} \rho (\vec{F}_t \times \vec{H}_\varphi) \cdot \vec{i}_p d\rho = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

where  $F_\varphi$  and  $\vec{F}_t$  are testing functions. The computational domain  $S$  is bounded by  $L$ , which consists of two parts,



$L_1$  and  $L_2$ , the axis of the structure  $L_a$ , and the waveguide boundary  $L_b$  (see Fig. 2). The unit vectors  $\vec{i}_p$  are normal (outside) to the ports' cross sections, and functions  $\vec{H}_t^p$  and  $\vec{H}_\varphi^p$  represent excitation in these ports.

#### A. Calculation of Scattering Parameters With the Use of GIM

The main idea of the GIM is based on finding the relationship between the electric and magnetic fields at the ports of the structure. Let us assume that the fields at the ports are expressed by the modal basis obtained for the regular circular waveguide

$$\vec{E}_\xi^p = \sum_{q=1}^Q \left( V_q^{\text{TE},p} \vec{e}_{\xi,q}^{\text{TE},p} + V_q^{\text{TM},p} \vec{e}_{\xi,q}^{\text{TM},p} \right) \quad (6)$$

$$\vec{H}_\xi^p = \sum_{q=1}^Q \left( I_q^{\text{TE},p} \vec{h}_{\xi,q}^{\text{TE},p} + I_q^{\text{TM},p} \vec{h}_{\xi,q}^{\text{TM},p} \right) \quad (7)$$

where  $Q$  is the number of modes considered in the ports,  $p = \{1, 2\}$  is a port number, and  $\vec{e}_{\xi,q}^{(\cdot),p}$  and  $\vec{h}_{\xi,q}^{(\cdot),p}$  are defined in Appendix A for  $\xi = \{t, \varphi\}$ . In such a case, any electric field at the ports is unambiguously defined by the set of coefficients  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2]^T$ , where

$$\mathbf{V}^p = [V_1^{\text{TE},p}, \dots, V_Q^{\text{TE},p}, V_1^{\text{TM},p}, \dots, V_Q^{\text{TM},p}]^T \quad (8)$$

and similarly a magnetic field by set  $\mathbf{I} = [\mathbf{I}^1, \mathbf{I}^2]^T$ , where

$$\mathbf{I}^p = [I_1^{\text{TE},p}, \dots, I_Q^{\text{TE},p}, I_1^{\text{TM},p}, \dots, I_Q^{\text{TM},p}]^T. \quad (9)$$

Hence, the GIM represented by matrix  $\mathbf{Z}$  is the relation between these coefficients

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}. \quad (10)$$

In order to obtain this matrix, the FEM can be utilized, as has been widely described in the literature [33], [36].

Let us assume that the electric field in the discretized region can be expressed utilizing standard hierarchical (scalar and vector) basis functions [37]  $\alpha_{(\cdot)}^{[n]}$  and  $\vec{W}_{(\cdot)}^{[n]}$  of the second order

$$E_\varphi = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^6 \Psi_{(i)}^{[n]} \alpha_{(i)}^{[n]} \quad \vec{E}_t = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^8 \Phi_{(i)}^{[n]} \vec{W}_{(i)}^{[n]} \quad (11)$$

where  $n = 1, \dots, N$  is the element number with  $N$  being the total number of elements,  $i$  represents the local node/edge, and  $\Psi_{(i)}^{[n]}$  and  $\Phi_{(i)}^{[n]}$  are unknown coefficients for the scalar and vector components, respectively. Starting from the weak form of the problem (4) and (5), a simple system of equations can be obtained (in analogy to [33])

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = j\omega\mu_0 \mathbf{B}\mathbf{I} \quad (12)$$

where global matrices  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{B}$  can be obtained from the aggregation of proper local matrices [33]

$$\mathbf{G}^{[n]} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{t,t}^{[n]} & \mathbf{G}_{t,\varphi}^{[n]} \\ \mathbf{G}_{\varphi,t}^{[n]} & \mathbf{G}_{\varphi,\varphi}^{[n]} \end{bmatrix} \quad (13)$$

and

$$\mathbf{B}^{[n]} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t,\text{TE}}^{[n],1} & \mathbf{B}_{t,\text{TM}}^{[n],1} & \mathbf{B}_{t,\text{TE}}^{[n],2} & \mathbf{B}_{t,\text{TM}}^{[n],2} \\ \mathbf{B}_{\varphi,\text{TE}}^{[n],1} & \mathbf{B}_{\varphi,\text{TM}}^{[n],1} & \mathbf{B}_{\varphi,\text{TE}}^{[n],2} & \mathbf{B}_{\varphi,\text{TM}}^{[n],2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

where the submatrices are described in Appendix B.

From the projection of the electric field at the ports on the basis (7), another simple system of equations can be obtained

$$\mathbf{B}^H \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{V} \quad (15)$$

where

$$\Delta = \text{diag} \left\{ \Delta_1^{\text{TE}}, \Delta_2^{\text{TE}}, \dots, \Delta_1^{\text{TM}}, \Delta_2^{\text{TM}}, \dots \right\} \quad (16)$$

and

$$\Delta_q^{(\cdot)} = \int_L \left( \vec{e}_{t,q}^{(\cdot)} + \vec{e}_{\varphi,q}^{(\cdot)} \right) \cdot \left( \vec{h}_{t,q}^{(\cdot)} + \vec{h}_{\varphi,q}^{(\cdot)} \right)^* \rho d\rho. \quad (17)$$

Finally, the relations (12) and (15) can be combined into a single formula

$$j\omega\mu_0 \mathbf{B}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{I} = \Delta \mathbf{V} \quad (18)$$

which determines the GIM as follows:

$$\mathbf{Z} = j\omega\mu_0 \Delta^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}. \quad (19)$$

From the above GIM  $\mathbf{Z}$ , a multi-mode scattering matrix  $\mathbf{S}$  of the waveguide section can be obtained [38]. Both  $\mathbf{Z}$  and  $\mathbf{S}$  are of dimensions  $4Q \times 4Q$  ( $Q$  modes for TE and TM for each port). Next, such a matrix can be utilized to construct more complicated structures composed of the same or different sections (e.g., periodic/quasi-periodic structures or waveguide filters). In the case of periodic structures, the simple rule described in [39] can be applied to find the structure propagation coefficients from the scattering matrix of a unit cell, which boils down to solving a matrix eigenvalue problem with respect to the propagation coefficient. In the case of other filtering structures, a cascading formula of multimode scattering matrices [40] can be utilized to calculate the structure responses.

#### B. Periodic Boundary Conditions With No Sources

In some cases, especially for periodic structures with short unit cell sections with complex geometry, the approach presented in the previous paragraph can be inefficient or even ineffective due to the huge number of modes required to properly describe a waveguide section. In such a case, the scattering matrix can be numerically ill-conditioned and it is better to introduce PBC, which does not involve modal expression of the fields in the ports.

The implementation of PBC is based on the elimination of the sources in (12)

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

and requires a rearrangement of the unknown variables in vectors  $\Phi$  and  $\Psi$  (similar to the approach proposed in [21]). The fields at the left port ( $L_1$ ) are denoted by  $\Phi_L$  and  $\Psi_L$ ,

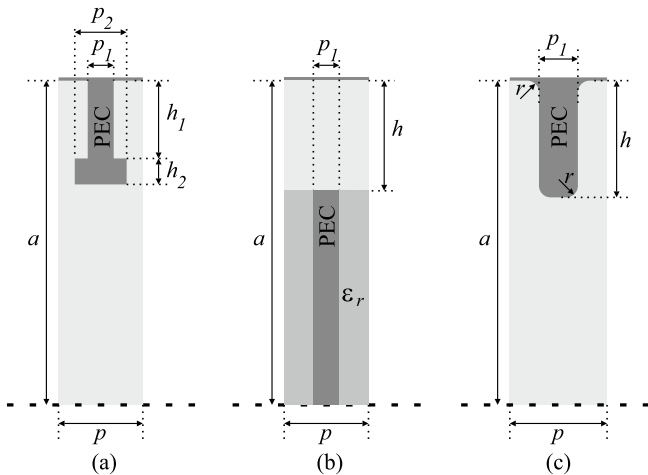


Fig. 3. Axial cross sections of single cells in the considered structures.

whereas at the right port ( $L_2$ ) by  $\Phi_R$  and  $\Psi_R$ . Moreover, they are linked by the following relation:

$$\begin{bmatrix} \Phi_R \\ \Psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_L \\ \Psi_L \end{bmatrix} e^{-\gamma p} \quad (21)$$

where  $\gamma = \alpha + j\beta$  represents the propagation coefficient and  $p$  the length of the unit cell (the period). The other elements of the vectors  $\Phi$  and  $\Psi$  must also be segregated into two groups. The first one contains fields inside the numerical domain  $\Phi_I$  and  $\Psi_I$ , and the second one fields at the boundary described by Dirichlet conditions  $\Phi_D$  and  $\Psi_D$  (which eventually can be neglected). Finally, the system (20) can be reformulated to a more convenient matrix equation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{II} & \mathbf{G}_{IL} & \mathbf{G}_{IR} & \mathbf{G}_{ID} \\ \mathbf{G}_{LI} & \mathbf{G}_{LL} & \mathbf{G}_{LR} & \mathbf{G}_{LD} \\ \mathbf{G}_{RI} & \mathbf{G}_{RL} & \mathbf{G}_{RR} & \mathbf{G}_{RD} \\ \mathbf{G}_{DI} & \mathbf{G}_{DL} & \mathbf{G}_{DR} & \mathbf{G}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Psi_I \\ \Phi_L \\ \Psi_L \\ \Phi_R \\ \Psi_R \\ \Phi_D \\ \Psi_D \end{bmatrix} = 0. \quad (22)$$

After some algebra, involving relation (21), the above system can be reduced to a simple generalized matrix eigenvalue problem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{II} & \mathbf{G}_{IL} \\ \mathbf{G}_{RI} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Psi_I \\ \Phi_L \\ \Psi_L \end{bmatrix} = -e^{-\gamma p} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_{IR} \\ \mathbf{G}_{LI} & \mathbf{G}_{LL} + \mathbf{G}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Psi_I \\ \Phi_L \\ \Psi_L \end{bmatrix}. \quad (23)$$

A solution of this problem provides the characteristic dispersion of the considered mode and the corresponding field distribution inside the structure.

### III. NUMERICAL RESULTS

In order to confirm the validity of the proposed approach, three structures of different geometries were examined (see Fig. 3). The algorithm was implemented in the MATLAB

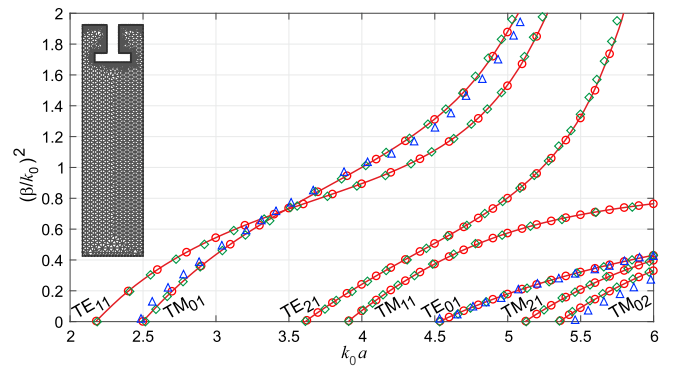


Fig. 4. Dispersion characteristics of periodic structure composed of cells presented in Fig. 3(a). Red line: GIM. Red circles: PBC, Green diamonds: HFSS. Blue triangles: [6].

environment, and all of the tests were performed using an Intel Core i7-2600K CPU 3.40 GHz, 16-GB RAM computer. The results were validated by comparison with those obtained from commercial software and the literature.

The first considered structure was a periodic waveguide whose axial cross sections are presented in Fig. 3(a), and the dimensions are  $p = 13.1125$  mm,  $a = 50$  mm,  $p_1 = 2.6225$  mm,  $p_2 = 7.8675$  mm,  $h_1 = 2.025$  mm, and  $h_2 = 6.075$  mm. The structure is presented in [6]; however, only for  $m = 0$  since the authors claim that a 2-D analysis is not sufficient for  $m \neq 0$  and it requires 3-D discretization. As shown here, this requirement is unnecessary and the dispersion characteristics (for different values of  $m$ ) obtained from the proposed approach are presented in Fig. 4. The simulation was performed for a 2-D mesh composed of  $N = 2416$  triangular elements involving PBC and GIM approaches, with the use of  $Q = 10$  modes for GIM, which was sufficient to obtain accurate results. The increase in the mesh density and the number of modes does not significantly reduce the convergence error but increases the analysis time. The results are compared with those obtained from the HFSS 3-D commercial software and with those from [6] for  $m = 0$ . All of the results are in excellent agreement; however, the computational time of 2-D analysis was shorter by about two orders of magnitude than the full 3-D simulation.

As the second example, a dielectric and metal-loaded periodic circular waveguide [8] was considered [see Fig. 3(b)] for two different unit cell lengths  $p$ . The dimensions of this structure are as follows  $a = 9$  mm,  $h = 3$  mm,  $p = 0.5$  mm, or  $p = 10$  mm,  $p_1 = 0.1p$  and the relative permittivity of the dielectric is  $\epsilon_r = 15$ . In the cases of  $p = 0.5$  mm, due to the short length of the unit cell, the approach involving GIM is ineffective. The high complexity of the fields at the ports requires a huge number of modes and the computation of the scattering matrix can be numerically ill-conditioned so it is better to introduce PBC, which does not involve modal expressions of the fields in the ports. The results presented in Fig. 5 obtained in the analysis involving PBC (with  $N = 1060$  for  $p = 0.5$  mm triangular elements; see Fig. 6) are in excellent agreement with those obtained with the mode matching technique and verified experimentally in [8]. For longer cells ( $p = 10$  mm) in the periodic structures, it was

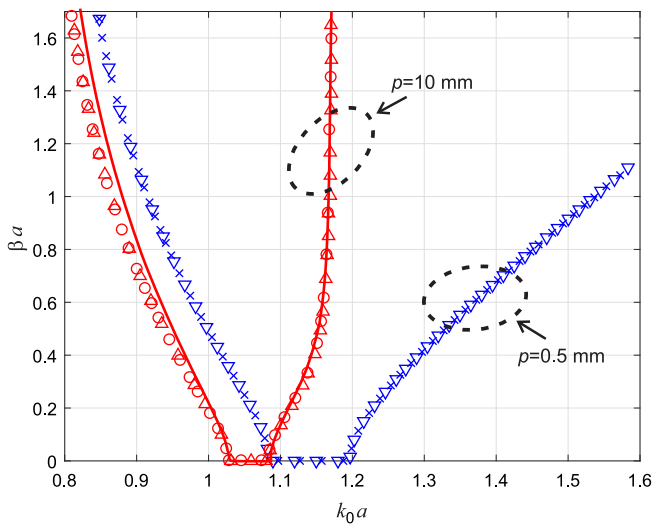


Fig. 5. Dispersion characteristics of periodic structure composed of cells presented in Fig. 3(b) for different unit cell lengths:  $p = 0.5$  mm (crosses: PBC; downward pointing triangles: [8]),  $p = 10$  mm (solid line: GIM; circles: PBC; upward pointing triangles: [8]).

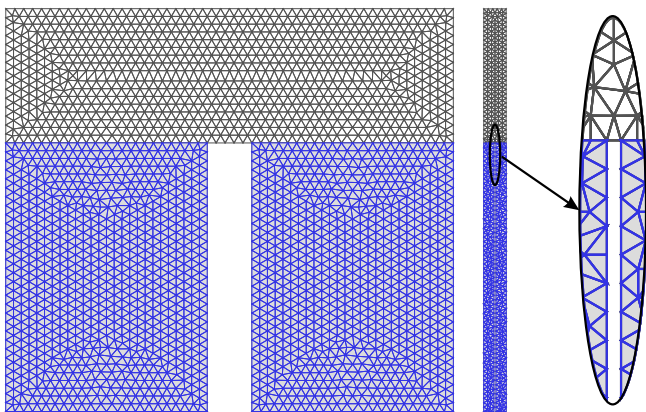


Fig. 6. Meshes for the structure presented in Fig. 3(b) for different unit cell lengths.  $p = 10$  mm and  $p = 0.5$  mm.

sufficient to utilize  $Q = 10$  modes for GIM analysis to obtain consistent results (with  $N = 4799$  triangular elements).

The last structure was a corrugated empty waveguide with rounded edges, as shown in Fig. 3(c). Such common guides are usually considered only for sharp edges [4] even though the roundings are very important from a practical point of view (e.g., due to the manufacturing technology or high power transmission). The analysis was performed for  $a = 25$  mm,  $h = 11$  mm,  $d = 5$  mm,  $p = 15$  mm, and different values of radii:  $r = 0$  mm (with  $N = 1561$  triangular elements) and  $r = 2.38$  mm (with  $N = 1850$  triangular elements). The scattering matrix for  $Q = 6$  modes obtained using the GIM approach agrees very well with the one from the 3-D InventSim analysis—scattering parameters for  $TE_{11}$  are presented in Fig. 7. Also, the results obtained in the analysis of the periodic structure involving both GIM and PBC methods are in excellent agreement (see Fig. 8). As can be seen, the roundings can significantly affect the dispersion

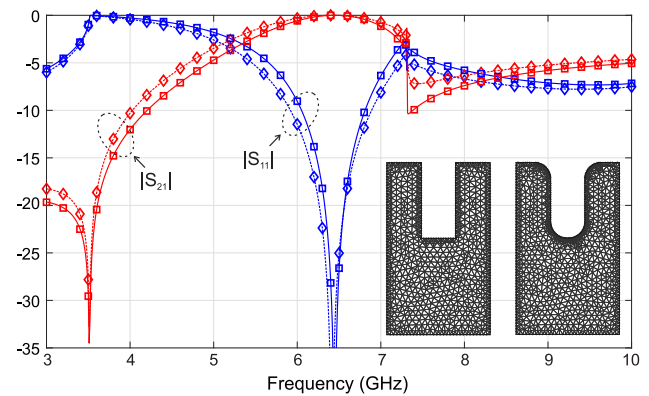


Fig. 7. Scattering parameters of  $TE_{11}$  mode for a single cell from Fig. 3(c) and different rounding radii:  $r = 0$  mm (solid line: GIM; squares: InventSim),  $r = 2.38$  mm (dashed line: GIM; diamonds: InventSim).

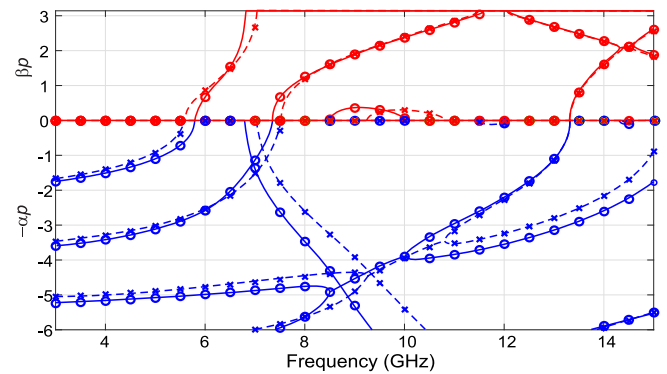


Fig. 8. Normalized propagation coefficients versus frequency for the periodic structure from Fig. 3(c) and different rounding radii:  $r = 0$  mm (solid line: GIM; circles: PBC),  $r = 2.38$  mm (dashed line: GIM; crosses: PBC).

characteristics of this simple structure (e.g., modifying its bands). Similar to the previous examples, the computation time in the case of 2-D analysis was about two orders of magnitude shorter than in commercial software.

#### IV. CONCLUSION

A 2-D FEM has been utilized to investigate axially symmetrical guiding structures. The utilization of BOR significantly improves the efficiency of the discrete analysis reducing the computational time by up to two orders of magnitude. This attribute makes this technique comparable to the analytical approaches while maintaining great flexibility of the algorithm with respect to structure geometry. The proposed approaches allow the study of periodic/quasi-periodic structures as well as whole devices composed of different waveguide sections. The validity and efficiency of the presented technique have been verified, which confirms its usefulness for the design and optimization process.

#### APPENDIX A ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS IN A HOMOGENEOUS CIRCULAR WAVEGUIDE

In order to create a proper basis (7) for GIM definition, the following field distributions in a homogeneous circular

waveguide are required. For TE modes

$$\begin{aligned}\vec{e}_{t,q}^{\text{TE},p} &= \frac{\omega\mu m}{\kappa_q'^2 \rho} J_m(\kappa_q' \rho) \vec{i}_\rho \\ \vec{e}_{\phi,q}^{\text{TE},p} &= \frac{j\omega\mu}{\kappa_q'} J_m(\kappa_q' \rho) \vec{i}_\phi \\ \vec{h}_{t,q}^{\text{TE},p} &= -\frac{\gamma_q'}{\kappa_q'} J_m'(\kappa_q' \rho) \vec{i}_\rho + J_m(\kappa_q' \rho) \vec{i}_z \\ \vec{h}_{\phi,q}^{\text{TE},p} &= -\frac{j m \gamma_q'}{\kappa_q'^2 \rho} J_m'(\kappa_q' \rho) \vec{i}_\phi\end{aligned}$$

and for TM modes

$$\begin{aligned}\vec{e}_{t,q}^{\text{TM},p} &= -\frac{\gamma_q}{\kappa_q} J_m'(\kappa_q \rho) \vec{i}_\rho + J_m(\kappa_q \rho) \vec{i}_z \\ \vec{e}_{\phi,q}^{\text{TM},p} &= -\frac{j m \gamma_q}{\kappa_q^2 \rho} J_m(\kappa_q \rho) \vec{i}_\phi \\ \vec{h}_{t,q}^{\text{TM},p} &= -\frac{j\omega\epsilon}{\kappa_q} J_m'(\kappa_q \rho) \vec{i}_\phi \\ \vec{h}_{\phi,q}^{\text{TM},p} &= -\frac{m\omega\epsilon}{\kappa_q^2 \rho} J_m(\kappa_q \rho) \vec{i}_\rho.\end{aligned}$$

Parameters  $\kappa_q$  and  $\kappa_q'$  represent the sequential roots of the Bessel function of order  $m$  and the roots of its derivative, respectively, divided by the waveguide radius.

## APPENDIX B

### DETAILED FORM OF THE LOCAL FEM MATRICES

The local matrices in (13) have the following form:

$$\begin{aligned}[\mathbf{G}_{t,t}^{[n]}]_{k,i} &= \iint_{S^{[n]}} (\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_{(k)}^{[n]}) \cdot (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{W}_{(i)}^{[n]}) \rho d\rho dz \\ &\quad - k_0^2 \iint_{S^{[n]}} \vec{W}_{(k)}^{[n]} \cdot \bar{\epsilon}_r \vec{W}_{(i)}^{[n]} \rho d\rho dz \\ &\quad + \iint_{S^{[n]}} \frac{m^2}{\rho} \vec{W}_{(k)}^{[n]} \cdot (\mu_r^{-1} \vec{W}_{(i)}^{[n]}) d\rho dz \\ [\mathbf{G}_{t,\phi}^{[n]}]_{k,i} &= \iint_{S^{[n]}} \frac{j m}{\rho} \vec{W}_{(k)}^{[n]} \cdot (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t (\rho \alpha_{(i)}^{[n]})) d\rho dz \\ [\mathbf{G}_{\phi,\phi}^{[n]}]_{k,i} &= \iint_{S^{[n]}} \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_t (\rho \alpha_{(k)}^{[n]}) \cdot (\mu_r^{-1} \vec{\nabla}_t (\rho \alpha_{(i)}^{[n]})) d\rho dz \\ &\quad - k_0^2 \iint_{S^{[n]}} \alpha_{(k)}^{[n]} \epsilon_r \alpha_{(i)}^{[n]} \rho d\rho dz \\ [\mathbf{G}_{\phi,t}^{[n]}]_{k,i} &= - \iint_{S^{[n]}} \frac{j m}{\rho} \vec{\nabla}_t (\rho \alpha_{(k)}^{[n]}) \cdot \mu_r^{-1} \vec{W}_{(i)}^{[n]} d\rho dz\end{aligned}$$

whereas local matrices in (14) are defined by

$$\begin{aligned}[\mathbf{B}_{t,\text{TE}}^{[n],p}]_{k,q} &= \int_{L \cap L^{[n]}} \vec{W}_{(k)}^{[n]} \cdot (\vec{i}_p \times \vec{h}_{\phi,q}^{\text{TE},p}) \rho d\rho \\ [\mathbf{B}_{t,\text{TM}}^{[n],p}]_{k,q} &= \int_{L \cap L^{[n]}} \vec{W}_{(k)}^{[n]} \cdot (\vec{i}_p \times \vec{h}_{\phi,q}^{\text{TM},p}) \rho d\rho \\ [\mathbf{B}_{\phi,\text{TE}}^{[n],p}]_{k,q} &= \int_{L \cap L^{[n]}} \alpha_{(k)}^{[n]} \vec{i}_\phi \cdot (\vec{i}_p \times \vec{h}_{t,q}^{\text{TE},p}) \rho d\rho \\ [\mathbf{B}_{\phi,\text{TM}}^{[n],p}]_{k,q} &= \int_{L \cap L^{[n]}} \alpha_{(k)}^{[n]} \vec{i}_\phi \cdot (\vec{i}_p \times \vec{h}_{t,q}^{\text{TM},p}) \rho d\rho.\end{aligned}$$

## REFERENCES

- [1] C.-J. Lai, C.-I. Hsu, C.-H. Lee, and J.-F. Kiang, "Dispersion properties of circular dielectric waveguides loaded with periodic metal disks," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 49, no. 9, pp. 2057–2061, Sep. 2007.
- [2] J. Bornemann and S. Y. Yu, "Novel designs of polarization-preserving circular waveguide filters," *Int. J. Microw. Wireless Technol.*, vol. 2, no. 6, pp. 531–536, Dec. 2010.
- [3] S. Amari and J. Bornemann, "Design of polarization-preserving circular waveguide filters with attenuation poles," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 31, no. 5, pp. 334–336, Dec. 2001.
- [4] J. Bornemann and S. Y. Yu, "Circular waveguide TM<sub>11</sub>-mode resonators and their application to polarization-preserving bandpass and quasi-highpass filters," in *German Microw. Conf. Dig. Papers*, Apr. 2010, pp. 202–205.
- [5] M.-S. Tong, R. Sauleau, A. Rolland, and T.-G. Chang, "Analysis of electromagnetic band-gap waveguide structures using body-of-revolution finite-difference time-domain method," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 49, no. 9, pp. 2201–2206, Sep. 2007.
- [6] L. Kuhler, G. Le Fur, L. Duchesne, and N. Raveu, "The propagation characteristics of 2-D metamaterial waveguides using the modal expansion theory," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 66, no. 10, pp. 4319–4326, Aug. 2018.
- [7] S. Amari, R. Vahldieck, J. Bornemann, and P. Leuchtmann, "Spectrum of corrugated and periodically loaded waveguides from classical matrix eigenvalues," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 48, no. 3, pp. 453–460, Mar. 2000.
- [8] A. Kusiek and J. Mazur, "Left-handed propagation characteristics of a dielectric and metal-loaded periodic circular waveguide," *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 31, no. 16, pp. 1698–1710, 2017.
- [9] M. Aghadjani and P. Mazumder, "THz polarizer controller based on cylindrical spoof surface plasmon polariton (C-SSPP)," *IEEE Trans. THz Sci. Technol.*, vol. 5, no. 4, pp. 556–563, Jul. 2015.
- [10] J. P. Leite and J. J. Barroso, "The sinusoid as the longitudinal profile in backward-wave oscillators of large cross sectional area," *Brazilian J. Phys.*, vol. 34, no. 4B, pp. 1577–1582, Dec. 2004.
- [11] A. Ashrafi, A. Hasanbeigi, and H. Mehdian, "Dispersion and growth characteristics in a circular waveguide loaded with alternate metal and dielectric discs," *AIP Adv.*, vol. 8, no. 1, Jan. 2018, Art. no. 015322.
- [12] M. Taroncher *et al.*, "Cad of complex passive devices composed of arbitrarily shaped waveguides using Nyström and BI-RME methods," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 53, no. 6, pp. 2153–2163, Jun. 2005.
- [13] M. B. Bressan, S. Battistutta, M. Bozzi, and L. Perreggini, "Modeling of inhomogeneous and lossy waveguide components by the segmentation technique combined with the calculation of Green's function by Ewald's method," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 66, no. 2, pp. 633–642, Jan. 2018.
- [14] D. M. Shyroki, "Efficient cartesian-grid-based modeling of rotationally symmetric bodies," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 55, no. 6, pp. 1132–1138, Jun. 2007.
- [15] B. Fuchs, S. Palud, L. Le Coq, O. Lafond, M. Himdi, and S. Rondineau, "Scattering of spherically and hemispherically stratified lenses fed by any real source," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 2, pp. 450–460, Feb. 2008.
- [16] E. Jørgensen, P. Meincke, and M. Sabbadini, "Fast and accurate design tool for rotationally symmetric reflector antennas with 3D waveguide components and support structures," in *Proc. 34th ESA Antenna Workshop*, 2012, pp. 1–8.
- [17] V. S. Buluygin, T. M. Benson, Y. V. Gandel, and A. I. Nosich, "Full-wave analysis and optimization of a TARA-Like shield-assisted paraboloidal reflector antenna using a Nyström-type method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 10, pp. 4981–4989, Oct. 2013.
- [18] J. Chen, J. Wang, and C. Tian, "Using weakly conditionally stable-body of revolution-finite-difference time-domain method to simulate dielectric film-coated circular waveguide," *IET Microw. Antennas Propag.*, vol. 9, no. 9, pp. 853–860, Jun. 2015.
- [19] G. P. Zouros and G. C. Kokkorakis, "Electromagnetic scattering by an inhomogeneous gyroelectric sphere using volume integral, equation and orthogonal Dini-type basis functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 63, no. 6, pp. 2665–2676, Jun. 2015.
- [20] M. Celuch and W. K. Gwarek, "Industrial design of axisymmetrical devices using a customized FDTD solver from RF to optical frequency bands," *IEEE Microw. Mag.*, vol. 9, no. 6, pp. 150–159, Dec. 2008.
- [21] J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2015.

- [22] A. D. Greenwood and J.-M. Jin, "Finite-element analysis of complex axisymmetric radiating structures," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 8, pp. 1260–1266, Aug. 1999.
- [23] E. A. Dunn, J.-K. Byun, E. D. Branch, and J.-M. Jin, "Numerical simulation of BOR scattering and radiation using a higher order FEM," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 3, pp. 945–952, Mar. 2006.
- [24] G. G. Gentili, P. Bolli, R. Nesti, G. Pelosi, and L. Toso, "High-order FEM mode matching analysis of circular horns with rotationally symmetric dielectrics," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 55, no. 10, pp. 2915–2918, Oct. 2007.
- [25] J. M. Jin, Z. Lou, Y. J. Li, N. W. Riley, and D. J. Riley, "Finite element analysis of complex antennas and arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 8, pp. 2222–2240, Aug. 2008.
- [26] M. M. Ilic, A. Z. Ilic, and B. M. Notaroš, "Continuously inhomogeneous higher order finite elements for 3-D electromagnetic analysis," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 9, pp. 2798–2803, Sep. 2009.
- [27] X. Rui, J. Hu, and Q. H. Liu, "Higher order finite element method for inhomogeneous axisymmetric resonators," *Prog. Electromagn. Res.*, vol. 21, pp. 189–201, 2010.
- [28] Y. B. Zhai *et al.*, "Fast computations to electromagnetic scattering properties of complex bodies of revolution buried and partly buried in layered lossy media," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 49, no. 4, pp. 1431–1440, Apr. 2011.
- [29] D.-Y. Na, B.-H. V. Borges, and F. L. Teixeira, "Finite element time-domain body-of-revolution Maxwell solver based on discrete exterior calculus," *J. Comput. Phys.*, vol. 376, pp. 249–275, Jan. 2019.
- [30] G. G. Gentili, M. Khosronejad, R. Nesti, G. Pelosi, and S. Selleri, "An efficient 2.5-D finite-element approach based on transformation optics for the analysis of elliptical horns," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 66, no. 9, pp. 4782–4790, Sep. 2018.
- [31] G. G. Gentili, M. Khosronejad, G. Pelosi, and S. Selleri, "Analysis of elliptical structures with constant axial ratio by body-of-revolution finite element method and transformation optics," *Int. J. Microw. Wireless Technol.*, vol. 11, nos. 5–6, pp. 501–508, Jun. 2019.
- [32] M. Czarniewska, G. Fotyga, A. Lamecki, and M. Mrozowski, "Parameterized local reduced-order models with compressed projection basis for fast parameter-dependent finite-element analysis," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 66, no. 8, pp. 3656–3667, Aug. 2018.
- [33] P. Kowalczyk, R. Lech, M. Warecka, and A. Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique," *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 33, no. 2, pp. 178–192, 2018.
- [34] J. Rubio, J. Arroyo, and J. Zapata, "Analysis of passive microwave circuits by using a hybrid 2-D and 3-D finite-element mode-matching method," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 47, no. 9, pp. 1746–1749, Sep. 1999.
- [35] A. Lamecki, "A mesh deformation technique based on solid mechanics for parametric analysis of high-frequency devices with 3-D FEM," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 64, no. 11, pp. 3400–3408, Nov. 2016.
- [36] J. Rubio, M. González, and J. Zapata, "Analysis of cavity-backed microstrip antennas by a 3-D finite element/segmentation method and a matrix Lanczos–Padé algorithm (SFELP)," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 1, no. 1, pp. 193–195, Feb. 2002.
- [37] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [38] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2009.
- [39] R. Lech and J. Mazur, "Propagation in rectangular waveguides periodically loaded with cylindrical posts," *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, vol. 14, no. 4, pp. 177–179, Apr. 2004.
- [40] J. Uher, J. Bornemann, and U. Rosenberg, *Waveguide Components for Antenna Feed Systems: Theory and CAD*. Norwood, MA, USA: Artech House, 1993.



**Malgorzata Warecka** received the M.Sc.E.E. degree from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2018, where she is currently pursuing the Ph.D. degree.

She is currently with the Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Department of Microwave and Antenna Engineering, Gdansk University of Technology. Her current research interests include scattering and propagation of electromagnetic wave problems, algorithms, and numerical methods.



**Rafal Lech** (M'14–SM'17) was born in Elblag, Poland, in 1977. He received the M.Sc.E.E., Ph.D. (Hons.), and D.Sc. degrees from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2001, 2007, and 2018, respectively.

He is currently with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology. His current research interests include electromagnetic wave scattering, hybrid methods, filter design, complex materials, metamaterial applications at microwave frequencies, electromagnetic analysis of periodic structures, and antenna design.



**Piotr Kowalczyk** (M'19) was born in Wejherowo, Poland, in 1977. He received the M.Sc.E.E. degree in applied physics and mathematics and the Ph.D. (Hons.), and D.Sc. degrees in electrical engineering from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2001, 2008 and 2018, respectively.

He is currently with the Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Department of Microwave and Antenna Engineering, Gdansk University of Technology. His current research interests include scattering and propagation of electromagnetic wave problems, algorithms, and numerical methods.

## **[MW3] Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects**

M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk

IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques  
vol. 68, no. 11, pp. 4528-4535, Nov. 2020

Wkład autorki:

modyfikacja sformułowania dla metody elementów skończonych  
uwzględniającego symetrię osiową struktur obejmująca opis uogólnionej macierzy  
impedancji na powierzchni sfery oraz jego implementacja, przeprowadzenie analiz  
numerycznych prezentowanych przykładów

# Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects

Malgorzata Warecka<sup>1</sup>, Graduate Student Member, IEEE, Rafal Lech<sup>1</sup>, Senior Member, IEEE, and Piotr Kowalczyk<sup>1</sup>, Member, IEEE

**Abstract**—A hybrid method for the scattering problems in shielded and open structures is presented. The procedure is based on the combination of body-of-revolution involving finite-element methods with impedance matrix formulation and the mode-matching technique, which can be utilized for the analysis of structures with axially symmetrical scatterers. In order to confirm the validity and efficiency of the proposed approach, a few examples of electromagnetic field scattering in open and waveguide structures are analyzed. The results cohere with those obtained by commercial software.

**Index Terms**—Body of revolution (BOR), cylindrical waveguides, finite-element method (FEM), generalized impedance matrix (GIM), periodic structures, scattering, waveguide discontinuities.

## I. INTRODUCTION

SCATTERING and propagation problems are important issues in the analysis and design of microwave, RF, and optical devices (e.g., shaping of radiation patterns, filters, phase shifters, or circulators). There are many different methods for solving such problems. They can be separated in terms of geometrical complexity or divided into analytical and discrete techniques. For simple structures, the analysis can be performed using analytical methods. This provides great accuracy and fast calculations; however, it is associated with an exasperating lack of versatility. They are therefore only used for some structures, such as cylinders, spheres, and ellipsoids. In these cases, the field can be described with the use of the Hankel or Mathieu functions (respectively, for cylindrical and elliptical rods), and the mode-matching method can be utilized [1]–[6]. For slightly more complex structures, a solution can be found with the use of quasi-analytical techniques (for example, the field-matching method), which are more general than the

previous ones and are still quite efficient [7], [8]. Nevertheless, they are limited to rods with convex cross sections in 2.5-D problems. There are other techniques that are much more versatile, for example, integral equation methods that involve Green's functions. However, the improvement of versatility comes at a cost—some problems remain and new ones appear. The first issue is the choice of basis functions (similar to the mode- and field-matching methods), and the second is singularities of Green's functions [9]. The most versatile techniques are discrete methods, such as the finite-element or finite-difference (FD) method. In these techniques, there are no geometrical restrictions imposed, and therefore, they are commonly used in commercial software. Nonetheless, they require fine discretization for complex geometries, which affects calculation time and memory requirements. Another issue for these kinds of methods is domain truncation for unshielded structures. Improper truncation affects accuracy; proper truncation may require a number of ambiguous parameters [as in perfectly matched layer (PML)] and expands the computational domain. To combine the advantages of analytical and discrete techniques, hybrid methods have been developed. The analysis is made faster by a proper division of the computational domain while remaining versatile; in some cases, they also eliminate boundary condition issues.

There are many different hybrid methods [10]–[14], but in this article, we will focus on one of the most effective: a combination of the generalized impedance matrix (GIM) and mode-matching method. In this approach, the domain is divided into two regions: an inner and an outer one. In the inner region, which is represented by GIM, a discrete method can be employed, such as the finite-element method (FEM). Utilization of any discrete method permits calculating GIM at the boundary and, using this model, the entire inner part of the domain. In this way, a very arduous discrete method needs to be used only in a small part of the domain. In the outer region, fields are described analytically by a series of fixed basis functions (as in mode- or field-matching methods). For structures with axial symmetry or with at least one element with such symmetry, the discrete part of the analysis can be further improved. This approach is well known in the literature as body of revolution (BOR) and permits a significant reduction of the problem [15]–[28]. There are many geometrical structures that fulfill the condition of axial symmetry, such as cylinders, cones, hourglass shapes, and many others. In these instances, a calculation of GIM does not require

Manuscript received April 22, 2020; revised June 23, 2020 and July 14, 2020; accepted July 20, 2020. Date of publication August 19, 2020; date of current version November 4, 2020. This work was supported in part by the Ministry Subsidy for Research for Gdansk University of Technology and in part by the “EDISON—Electromagnetic Design of flexIble SensOrs” Project through the TEAM-TECH Programme of the Foundation for Polish Science co-financed by the European Union under the European Regional Development Fund, Smart Growth Operational Programme 2014–2020, under Grant POIR.04.04.00-00-1DC3/16-00 (date 06.12.2016 r.). (Corresponding author: Malgorzata Warecka.)

The authors are with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology, 80-233 Gdansk, Poland (e-mail: warecka.malgorzata@gmail.com; rlech@eti.pg.edu.pl; pio.kow@gmail.com).

Color versions of one or more of the figures in this article are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMTT.2020.3014944

0018-9480 © 2020 IEEE. Personal use is permitted, but republication/redistribution requires IEEE permission.

See <https://www.ieee.org/publications/rights/index.html> for more information.

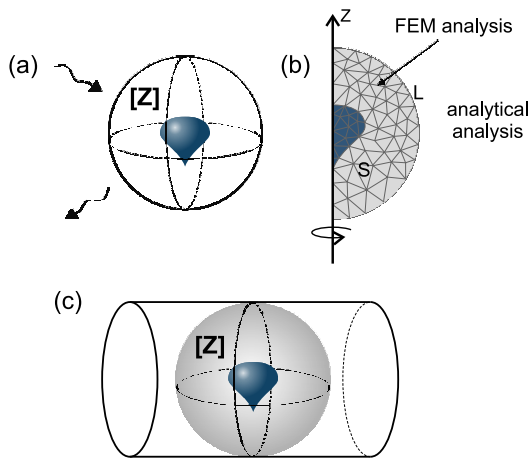


Fig. 1. Schematic views of (a) object illuminated by a plane wave, (b) computational domain, and (c) waveguide with a scatterer.

3-D FEM, but only 2.5-D, which makes the computation more efficient.

In this article, a combination of the FEM with GIM and the mode-matching technique is presented. A mixture of FEM and BOR provides fast determination of GIM and, hence, an effective analysis of the whole structure. A scatterer is surrounded by a semicircular port, which permits an analysis of structures with finite dimensions, as opposed to [29] where infinite cylinders were considered (see Fig. 1). These scatterers can be arbitrarily rotated and placed in waveguides, which makes this method more versatile. The proposed approach is a modification of the technique presented in [10] and [11] where the FD method was used. The discrete part of the proposed approach is based on [30], where axially symmetrical waveguides were analyzed.

Moreover, utilization of FEM instead of FD eliminates the problem of even discretization (used in FD) and permits the use of a sparser mesh. In addition, contrary to FD [10], [11], in FEM, there is no need to employ any effective permittivity or mesh modifications on a metal surface.

This approach also carries great potential for the use of model order reduction in the GIM [31]. In addition, the mesh morphing technique can be utilized [32], which is an undoubted advantage in the context of the design process.

## II. FORMULATION OF THE PROBLEM

The aim of the analysis is to determine scattering fields in open and closed structures consisting of axially symmetrical objects (see Fig. 1).

In Section II-A, it is shown that the GIM can be used in both closed and open structure analyses, i.e., to determine the scattered field from an object at any known excitation. Any scattering object can be replaced with an artificial object (containing the scatterer) of simple geometry on the surface of which the GIM is defined. In other words, the GIM can be applied to simplify the analysis by changing the complex geometric structure to a simple one. This approach allows for the fields to be analytically described outside the object. In Section II-B, the GIM for a spherical subdomain is defined.

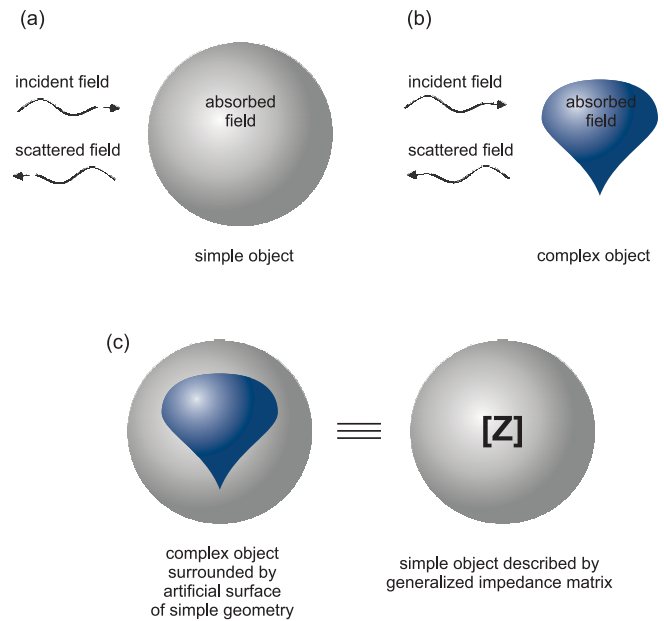


Fig. 2. Idea of simplification involving GIM. (a) Scattering from sphere. (b) Scattering from object with complex geometry. (c) Description of the object by its generalized impedance matrix.

For scattering structures with axial symmetry, the GIM can be determined using FEM with BOR, as shown in Section II-C.

### A. Scattering of EM Waves in Open and Closed Structures

The analysis of electromagnetic field scattering from a material object is based on the assumption of a known incident field illuminating the object and searching for an unknown scattered field from that object. In general, the problem can be described by a set of equations (at the boundary of the scatterer)

$$\vec{E}^{inc} + \vec{E}^{scat} = \vec{E}^{abs} \quad (1)$$

$$\vec{H}^{inc} + \vec{H}^{scat} = \vec{H}^{abs} \quad (2)$$

where superscripts *inc* and *scat* refer, respectively, to the incident and the scattered field by the object, and *abs* refers to the absorbed field in the object. If the geometry of the object is simple [see Fig. 2(a)], e.g., a cylinder, an ellipse, or a sphere, the fields, both inside and outside the object, can be described analytically by expansion in series of appropriate functions (depending on the coordinate system used). In this case, the mode-matching method is commonly utilized, which allows for quickly obtainable, accurate results. When the object is of complex geometry [see Fig. 2(b)], the analytical description is difficult or often impossible; therefore, other numerical techniques need to be employed, such as discrete methods, which, while less efficient, are more versatile. However, if the electromagnetic field is calculated in the vicinity of the object, e.g., on the surface of a cylinder or a sphere, surrounding the object, then in further analysis, this artificial surface can replace the object [see Fig. 2(c)]. It is then possible to combine both methods where the discrete method is utilized only within and in the close proximity of the object, while outside the artificial surface, an analytical description can



be used. Such combination is possible by relating electric and magnetic fields on the artificial surface in the form of impedance. In the algorithm, the electric and magnetic fields are projected on the appropriate sets of orthogonal functions and the impedance relation is described with respect to the coefficients of both fields. In this approach,  $\vec{E}^{\text{abs}}$  and  $\vec{H}^{\text{abs}}$  from (1) and (2) relate to the field inside the artificial object on the surface of which the following relation can be formulated:

$$\mathbf{C}^E = \mathbf{Z}\mathbf{C}^H \quad (3)$$

where  $\mathbf{C}^{E,H}$  denote vectors of coefficients of  $\vec{E}^{\text{abs}}$  and  $\vec{H}^{\text{abs}}$  fields. In order to minimize the computational effort, the discrete domain should be as small as possible, i.e., the surrounding surface should enclose the object in very close proximity. However, due to the possibility of an occurrence of the local singular fields at the sharp edges of the scatterer, the surface cannot be in contact with the object.

Next, utilizing the calculated GIM, a T-matrix on the artificial surface can be easily calculated [10]. The T-matrix relates to the coefficients of incident and scattered fields and with a known excitation allows for the scattered field to be calculated. It is worth noting that such description of the object depends on the geometry and material properties of the object, but is independent of an excitation. Therefore, the analyzed object, which is described by GIM or T-matrix, can be placed in different scenarios, e.g., illuminated by a plane wave while in free space, placed in a waveguide junction and excited by a waveguide field or enclosed by a metallic wall forming a cavity. Such an approach was previously used for the analysis of structures containing inhomogeneous dielectric cylinders [33], cylinders of arbitrary shapes [7], [34], or rotationally symmetrical objects [10], [11] both in closed and open structures.

The algorithm utilized in the described approach can be presented in the form of a flowchart shown in Fig. 3. The first step is to calculate the GIM of the analyzed object. A detailed description of this step is presented in the following. From the GIM, the T-matrix is calculated and object rotation can be performed by a simple multiplication of this matrix by rotation matrices [10] without the need for recalculation of GIM or the T-matrix. Next, the type of analysis is chosen. For open problems, the scattered field in near or far zones is calculated. For closed problems, a scattering matrix of a waveguide junction with the analyzed object is determined. In the case of analysis of filtering structures with multiple sections, cascading formulas for S-matrices are utilized to calculate the scattering parameters of the entire structure.

### B. GIM for a Spherical Subdomain

In the proposed method, a scatterer (or scatterers) is surrounded by a virtual sphere with radius  $R$ , on the surface of which the relation between an electric and magnetic field can be defined. This approach permits an analysis of the structure irrespective of excitation (in a limited or an infinite domain) as well as rotation and duplication of the object without repeating the analysis. Assuming basis functions describing the electric  $\{\vec{e}_{nm}^{\text{TE}}, \vec{e}_{nm}^{\text{TM}}\}$  and magnetic  $\{\vec{h}_{nm}^{\text{TE}}, \vec{h}_{nm}^{\text{TM}}\}$  fields on

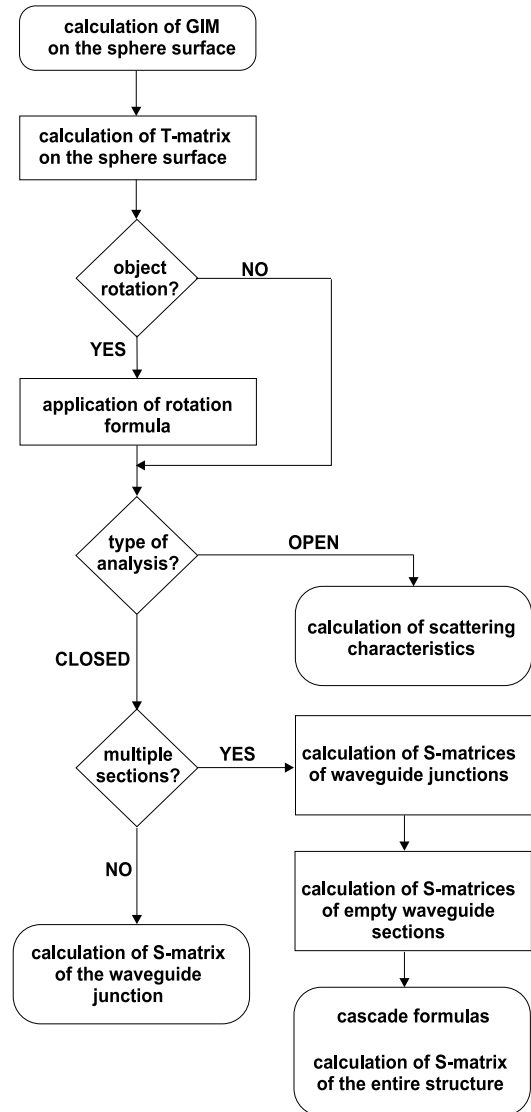


Fig. 3. Flowchart of the algorithm.

the aforementioned spherical surface, the relation between the field expansion coefficients in these bases can be obtained [30]. This relation is well known as GIM (denoted as  $\mathbf{Z}$ )

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (4)$$

where  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}^{\text{TE}}, \mathbf{V}^{\text{TM}}]$ ,  $\mathbf{I} = [\mathbf{I}^{\text{TE}}, \mathbf{I}^{\text{TM}}]$ , and

$$\mathbf{V}^{(\cdot)} = [V_{1,-1}^{(\cdot)}, V_{1,0}^{(\cdot)}, V_{1,1}^{(\cdot)}, V_{2,-2}^{(\cdot)}, \dots, V_{N,N-1}^{(\cdot)}, V_{N,N}^{(\cdot)}]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{I}^{(\cdot)} = [I_{1,-1}^{(\cdot)}, I_{1,0}^{(\cdot)}, I_{1,1}^{(\cdot)}, I_{2,-2}^{(\cdot)}, \dots, I_{N,N-1}^{(\cdot)}, I_{N,N}^{(\cdot)}]^T \quad (6)$$

are vectors containing coefficients of the corresponding electric

$$\vec{E}(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n (V_{nm}^{\text{TE}} \vec{e}_{nm}^{\text{TE}} + V_{nm}^{\text{TM}} \vec{e}_{nm}^{\text{TM}}) \quad (7)$$

and magnetic

$$\vec{H}(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n (I_{nm}^{\text{TE}} \vec{h}_{nm}^{\text{TE}} + I_{nm}^{\text{TM}} \vec{h}_{nm}^{\text{TM}}) \quad (8)$$

fields, where vector spherical harmonics have been adopted as basis functions  $\vec{e}_{nm}^{\text{TM}} = \vec{h}_{nm}^{\text{TE}} = \vec{N}_{nm}^t$  and  $\vec{h}_{nm}^{\text{TM}} = \vec{e}_{nm}^{\text{TE}} = \vec{M}_{nm}^t$  and defined as follows:

$$\begin{aligned}\vec{N}_{nm}^t &= e^{jm\varphi} \left( \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\theta + \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\varphi \right) \\ \vec{M}_{nm}^t &= e^{jm\varphi} \left( \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\theta - \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\varphi \right).\end{aligned}$$

### C. Evaluation of GIM Using FEM Combined With BOR

This part of the proposed algorithm is similar to the procedure described in [30] where the waveguides with axial symmetry were analyzed. The main difference is related to the port definition. In [30], two circular ports were introduced at the ends of the waveguide junction, whereas in the proposed procedure, a single spherical port is utilized. The matrix  $\mathbf{Z}$  is similar and can be determined using the relation

$$\mathbf{Z} = j\omega\mu_0\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{B}^H\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} \quad (9)$$

where matrix  $\mathbf{G}$  takes exactly the same form as in [30]. However, the matrices  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{\Delta}$  need to be changed because they are directly related to boundary conditions. By rewriting fields as a component in the direction  $\varphi$ :  $\vec{E}_\varphi(\rho, z) = E_\varphi(\rho, z)\vec{i}_\varphi$  and as a tangential component:  $\vec{E}_t(\rho, z) = E_\rho(\rho, z)\vec{i}_\rho + E_z(\rho, z)\vec{i}_z$ , a weak form of the wave equation can be written for scalar components as follows:

$$\begin{aligned}- \iint_S \frac{jm}{\rho} \mathbf{grad}_t(\rho F_\varphi) \cdot \mu_r^{-1} \vec{E}_t \, d\rho dz \\ - k_0^2 \iint_S \rho F_\varphi \varepsilon_r E_\varphi \, d\rho dz \\ + \iint_S \frac{1}{\rho} \mathbf{grad}_t(\rho F_\varphi) \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{grad}_t(\rho E_\varphi) \, d\rho dz \\ + 2\pi R^2 j\omega\mu_0 \int_L F_\varphi(\vec{i}_\varphi \times \vec{H}_t) \cdot \vec{i}_r \sin\theta d\theta \\ = 0\end{aligned} \quad (10)$$

and for vector components

$$\begin{aligned}\iint_S \rho \mathbf{curl}_t \vec{F}_t \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{curl}_t \vec{E}_t \, d\rho dz \\ - k_0^2 \iint_S \rho \vec{F}_t \cdot \varepsilon_r \vec{E}_t \, d\rho dz \\ + \iint_S \frac{jm}{\rho} \vec{F}_t \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{grad}_t(\rho E_\varphi) \, d\rho dz \\ + \iint_S \frac{m^2}{\rho} \vec{F}_t \cdot \mu_r^{-1} \vec{E}_t \, d\rho dz \\ + 2\pi R^2 j\omega\mu_0 \int_L (\vec{F}_t \times \vec{H}_\varphi) \cdot \vec{i}_r \sin\theta d\theta \\ = 0\end{aligned} \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}_t \vec{A}_t &= \vec{i}_\varphi \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \\ \mathbf{grad}_t f &= \vec{i}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}$$

The relative permittivity and permeability of the structure are represented by  $\varepsilon_r$  and  $\mu_r$ , respectively, and  $k_0$  is a vacuum

wavenumber.  $F_\varphi$  and  $\vec{F}_t$  are testing functions. The computational domain  $S$  is represented by a semicircle bounded by  $L$ . The magnetic field on the boundary is decomposed and expressed in spherical coordinates as a component in the direction  $\varphi$ :  $\vec{H}_\varphi(R, \theta) = H_\varphi(R, \theta)\vec{i}_\varphi$  and the tangential component:  $\vec{H}_t(R, \theta) = H_r(R, \theta)\vec{i}_r + H_\theta(R, \theta)\vec{i}_\theta$ .

The local matrix  $\mathbf{B}$  for each element  $q$  (i.e., the element of finite element mesh) is defined as follows:

$$\mathbf{B}^{[q]} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t,\text{TE}}^{[q]} & \mathbf{B}_{t,\text{TM}}^{[q]} \\ \mathbf{B}_{\varphi,\text{TE}}^{[q]} & \mathbf{B}_{\varphi,\text{TM}}^{[q]} \end{bmatrix} \quad (12)$$

and its terms take form

$$\begin{aligned}[\mathbf{B}_{t,\text{TE}}^{[q]}]_{k,v} &= 2\pi R^2 \int_L \vec{W}^{[q]} \cdot (\vec{i}_r \times \vec{h}_{\varphi,nm}^{\text{TE}}) \sin\theta \, d\theta \\ [\mathbf{B}_{t,\text{TM}}^{[q]}]_{k,v} &= 2\pi R^2 \int_L \vec{W}^{[q]} \cdot (\vec{i}_r \times \vec{h}_{\varphi,nm}^{\text{TM}}) \sin\theta \, d\theta \\ [\mathbf{B}_{\varphi,\text{TE}}^{[q]}]_{k,v} &= 2\pi R^2 \int_L \alpha_{(k)}^{[q]} \vec{i}_\varphi \cdot (\vec{i}_r \times \vec{h}_{t,nm}^{\text{TE}}) \sin\theta \, d\theta \\ [\mathbf{B}_{\varphi,\text{TM}}^{[q]}]_{k,v} &= 2\pi R^2 \int_L \alpha_{(k)}^{[q]} \vec{i}_\varphi \cdot (\vec{i}_r \times \vec{h}_{t,nm}^{\text{TM}}) \sin\theta \, d\theta\end{aligned}$$

where  $v = 1, 2, \dots, N(N+2)$  corresponds to a specific mode  $nm$  by relation  $v = n^2 + 3n + m + 1$ . In the analysis, the standard hierarchical (scalar and vector) basis functions [35]  $\alpha_{(k)}^{[q]}$  and  $\vec{W}_{(k)}^{[q]}$  of the second order were assumed. The matrix  $\mathbf{\Delta}$  is defined as follows:

$$\mathbf{\Delta} = \text{diag}\{\mathbf{\Delta}^{\text{TE}}, \mathbf{\Delta}^{\text{TM}}\} \quad (13)$$

where

$$[\mathbf{\Delta}^{\text{TE}}]_{v,v} = -2\pi R^2 \int_L \vec{i}_r \cdot (\vec{e}_t^{\text{TE}} \times \vec{h}_t^{\text{TE}*}) \sin\theta \, d\theta \quad (14)$$

$$[\mathbf{\Delta}^{\text{TM}}]_{v,v} = -2\pi R^2 \int_L \vec{i}_r \cdot (\vec{e}_t^{\text{TM}} \times \vec{h}_t^{\text{TM}*}) \sin\theta \, d\theta. \quad (15)$$

### III. NUMERICAL RESULTS

In order to validate the proposed method, a few examples were analyzed (both scattering and propagation problems) and compared to commercial software or the literature. The algorithm was implemented in the MATLAB environment, and all of the tests were performed using an Intel Xenon X5690 3.47 GHz (two processors), 64-GB RAM computer.

The first structure investigated was a cylinder, whose dimensions are presented in Fig. 4 and relative permittivity was assumed to be  $\varepsilon_r = 3$ . It was located along the  $x$ -axis and illuminated by a plane wave propagated along the  $z$ -axis and polarized in the  $y$ -direction. All calculations were performed at a frequency of 8 GHz, and the number of modes considered in this analysis was  $N = 8$ . The results presented in Fig. 4 were compared with the hybrid method (a combination of the FD and mode-matching methods) [10] and found to be concordant.

The second considered scatterer was a dielectric cone (see Fig. 5). In this case, the material's parameters were the same as in the aforementioned example and the number of modes was set to  $N = 10$ . The dimensions of the structure and the scattering characteristics are shown in Fig. 5. The orientation of the scatterer and the plane wave illumination

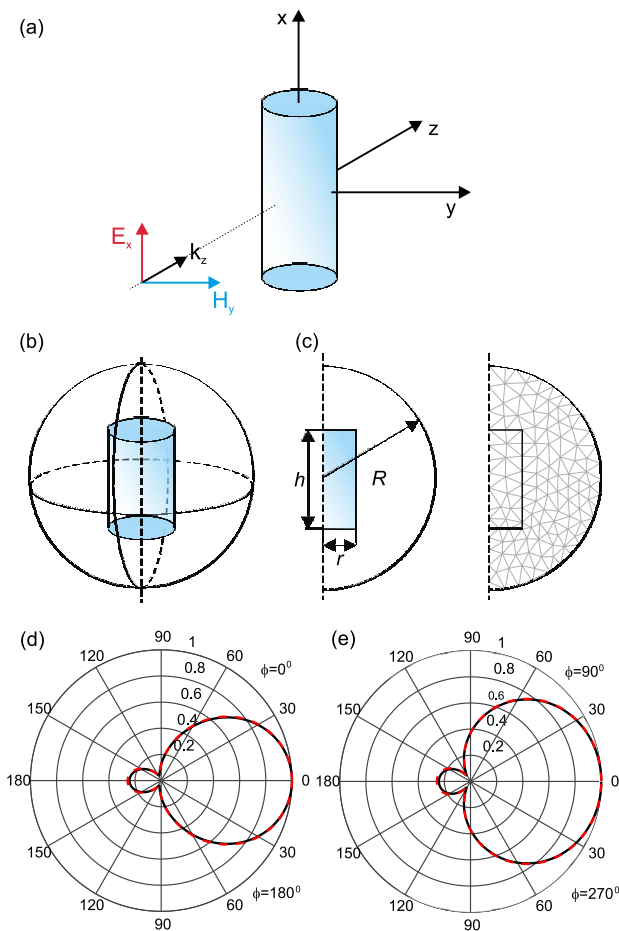


Fig. 4. Plane wave scattering on single dielectric cylinder at (a) plane wave illumination, (b) schematic, and (c) dimensions:  $h = 20$  mm,  $r = 6$  mm, and  $R = 12$  mm; normalized scattered field at frequency 8 GHz in (d)  $xz$  plane and (e)  $yz$  plane. Solid line: this method. Dashed line: FD/MM method.

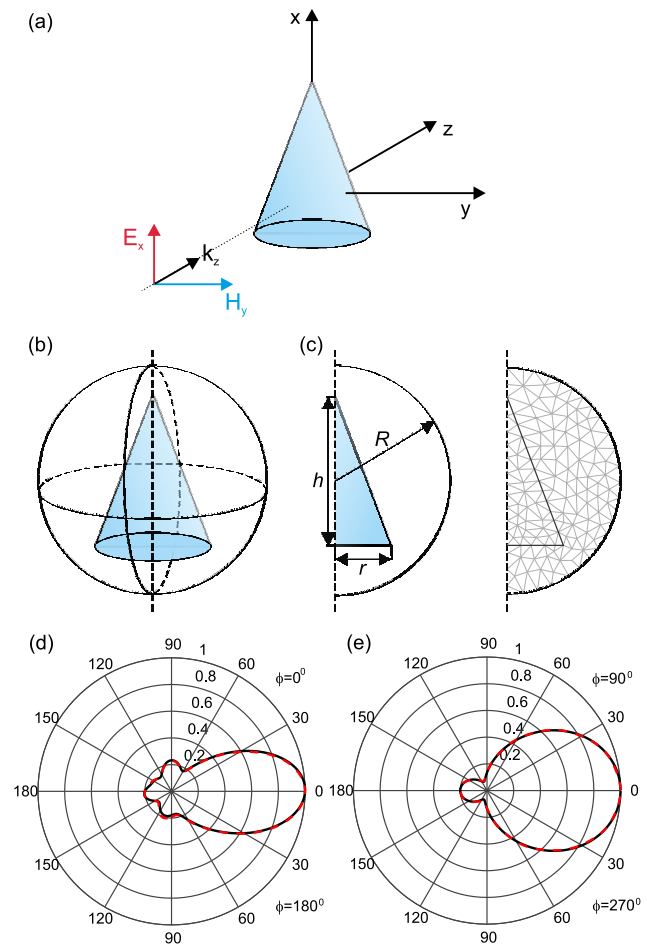


Fig. 5. Plane wave scattering on single dielectric cone at (a) plane wave illumination, (b) schematic, and (c) dimensions:  $h = 20$  mm,  $r = 6$  mm, and  $R = 12$  mm; normalized scattered field at frequency 20 GHz in (d)  $xz$  plane and (e)  $yz$  plane. Solid line: this method. Dashed line: HFSS.

angle was the same as in the first example. The results were compared with the HFSS commercial software (red dashed line) and a good agreement was achieved.

The third example was a dielectric post in the shape of a dumbbell. As in the previous cases, the relative permittivity was set to  $\epsilon_r = 3$ , with the dimensions and results shown in Fig. 6, and the number of modes required for the calculations increased to  $N = 15$ . The orientation of the scatterer and the plane wave illumination angle was the same as in the previous examples. The results were again compared with HFSS, obtaining good agreement.

In all of the previously presented cases, the total computational time was less than 1 min (including mesh generation, mode matching, and FEM analysis). For comparison, the calculation time of the analysis using the 3-D commercial software (HFSS) was about 1 h (see Table III).

In order to present the application of the method for closed structures, the investigated obstacles were placed in a circular waveguide. The analyzed structure consisted of two metal cylinders ( $R = 2.3$  mm and  $h = 10$  mm) placed in a waveguide with radius  $R = 10$  mm at distance  $l_1 = 39$  mm. The scattering parameters were collected and shown in Fig. 7.

Both polarizations with respect to the cylinder axis were considered and are denoted by index) along the axis and perpendicular to the cylinder axis. For all obtained results, excellent agreement with commercial software calculations was achieved. The analysis was performed with spherical modes determined by  $N = 8$ , and waveguide modes were determined by parameter  $N_f = 8$  [11]. Such a choice was a consequence of the convergence examination presented in Tables I and II for different distances between the cylinders  $l_1$ . The percentage error was evaluated according to the following formula:

$$\delta S_{11} = \frac{\|S_{11} - S_{11}^{\text{HFSS}}\|}{\|S_{11}^{\text{HFSS}}\|} \quad (16)$$

where

$$\|S\| = \sqrt{\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} |S(f)|^2 df} \quad (17)$$

$f_{\min}$  and  $f_{\max}$  define the frequency range, whereas the references were obtained from HFSS simulations.

The next example considers the filtering structure presented in Fig. 8 consisting of a waveguide with radius  $R = 10$  mm

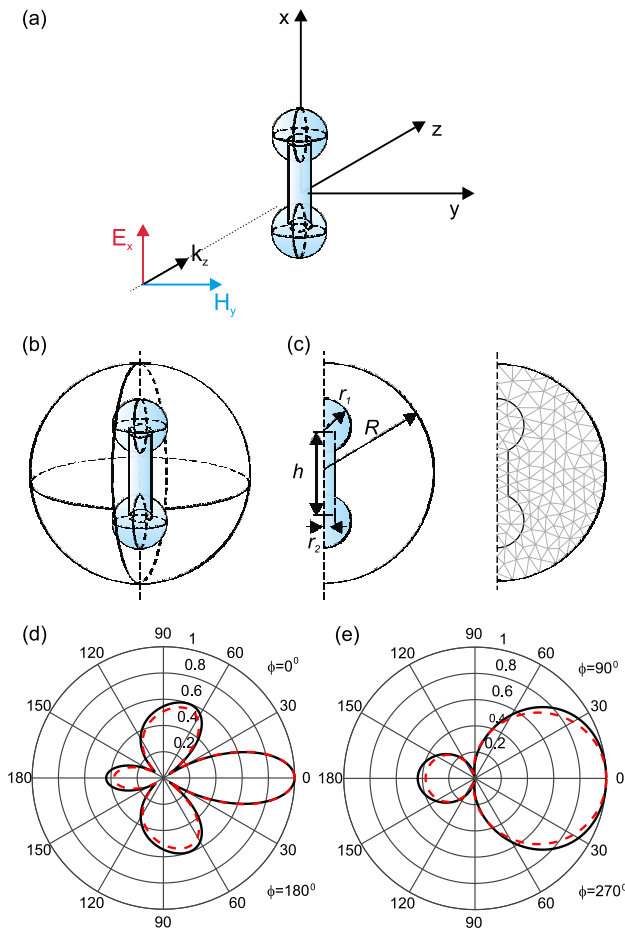


Fig. 6. Plane wave scattering on single dielectric dumbbell at (a) plane wave illumination, (b) schematic view, and (c) dimensions:  $r_1 = 3$  mm,  $r_2 = 1.5$  mm,  $h = 14$  mm, and  $R = 12$  mm; normalized scattered field at frequency 20 GHz in (d)  $xz$  plane and (e)  $yz$  plane. Solid line: this method. Dashed line: HFSS.

TABLE I  
PERCENTAGE ERROR  $\delta S_{11}$  OF SCATTERING PARAMETERS FOR STRUCTURE FROM FIG. 7 WITH  $l_1 = 19$  mm

$N_f$	$N$	number of mesh elements		
		55	110	232
2	2	23.25	22.81	22.72
	4	2.21	1.44	1.27
	6	1.58	0.82	0.65
	8	1.56	0.80	0.64
4	2	37.13	36.77	36.70
	4	1.89	1.12	0.95
	6	1.41	0.66	0.50
	8	1.39	0.64	0.48
6	2	40.85	40.47	40.40
	4	1.87	1.10	0.94
	6	1.41	0.66	0.50
	8	1.39	0.64	0.48
8	2	43.57	43.17	43.10
	4	1.88	1.11	0.94
	6	1.41	0.66	0.50
	8	1.39	0.64	0.48

and three metal cylinders. The dimensions of the middle cylinder were  $r = 0.51$  mm and  $h = 13.1$  mm and of the two side cylinders,  $r = 0.51$  mm and  $h = 10.3$  mm. The

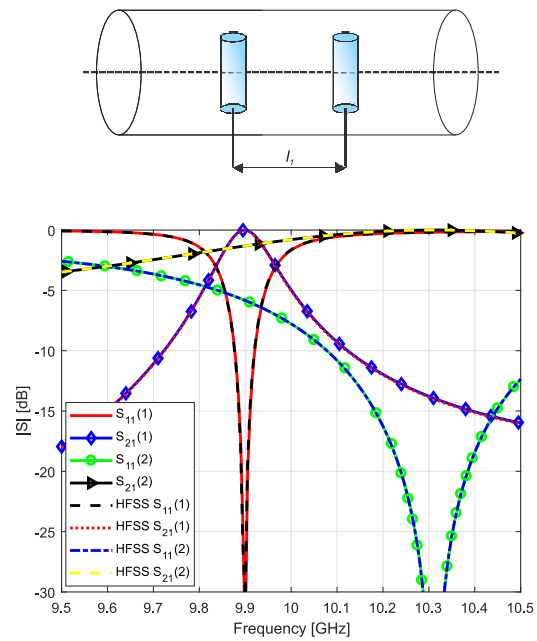


Fig. 7. Schematic of the structure ( $l_1 = 39$  mm) and scattering parameters of two metal cylinders placed in a waveguide.

TABLE II  
PERCENTAGE ERROR  $\delta S_{11}$  OF SCATTERING PARAMETERS FOR STRUCTURE FROM FIG. 7 WITH  $l_1 = 14$  mm

$N_f$	$N$	number of mesh elements		
		55	110	232
2	2	9.22	9.09	9.07
	4	1.73	1.23	1.12
	6	1.01	0.52	0.42
	8	1.03	0.54	0.44
4	2	11.75	11.90	11.93
	4	1.22	0.74	0.64
	6	0.90	0.41	0.31
	8	0.89	0.40	0.30
6	2	19.98	19.71	19.66
	4	1.21	0.71	0.60
	6	0.85	0.35	0.25
	8	0.89	0.40	0.30
8	2	13.45	13.30	13.28
	4	1.26	0.76	0.65
	6	0.72	0.28	0.00.22
	8	0.90	0.41	0.31

distance between the cylinder centers was  $l_1 = 36$  mm. The scattering parameters of the filter are presented in Fig. 8. The obstacles used in the previous example affected both polarizations as they were both long and thick. The reduction of the obstacle dimensions in one direction allows its influence to be decreased for a chosen wave. Therefore, in this example, the cylindrical posts were very thin that resulted in the complete transmission of perpendicular polarization through the structure.

The computational time of the considered waveguide examples was about ten times shorter than the calculation performed in the 3-D commercial software (see Table III).

As the last example, a periodic structure composed of dielectric cylinders of radius  $r = 2.3$  mm, height  $h = 10$  mm, and dielectric permittivity  $\epsilon_r = 12$  was calculated. Such

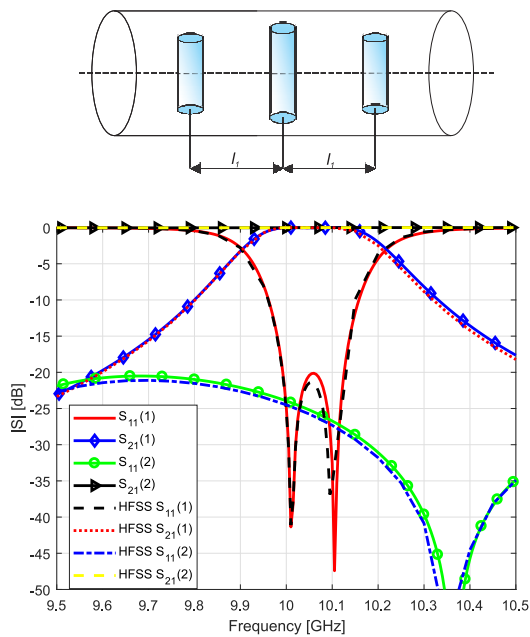


Fig. 8. Schematic of the two-pole filter ( $l_1 = 36$  mm) and scattering parameters of the filter.

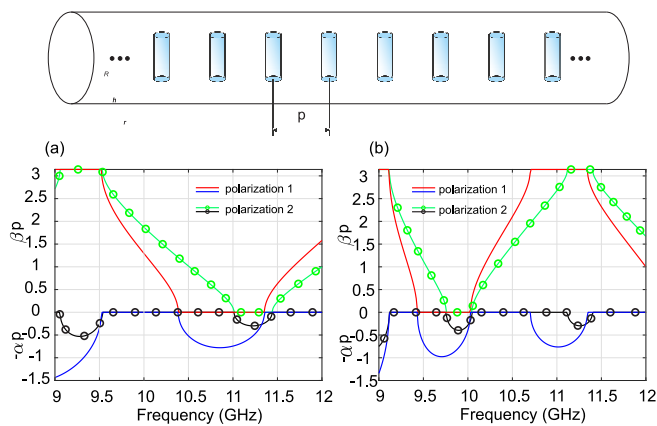


Fig. 9. Normalized propagation coefficients versus frequency for the periodic structure composed of dielectric cylinders with  $\epsilon_r = 12$  of dimensions:  $r = 2.3$  mm and  $h = 10$  mm. (a) Period  $p = 40$  mm. (b) Period  $p = 60$  mm.

TABLE III  
APPROXIMATED COMPUTATIONAL TIMES

type of structure	our method	HFSS	gain
open structures (Figs. 4 - 6)	1 min	1 h	60 times
filter (Fig. 8)	35 min	6 h	10 times

structures can be analyzed as a cascade connection of a number of waveguide sections of length  $p$  (period of the structure) including the investigated objects and described by a scattering matrix. However, the result will describe only a pseudoperiodic structure. Utilizing a formula described in [36], it is possible to calculate propagation coefficients  $\gamma = \alpha + j\beta$ , with  $\alpha$  and  $\beta$  denoting the attenuation and phase coefficients, respectively. The results for the structures with a different period  $p$  and for both orthogonal polarizations of fundamental mode are shown

in Fig. 9. By changing either period, the dimension, or the shape of the inclusion, it is possible to create a structure with specific passbands and stopbands.

#### IV. CONCLUSION

A hybrid technique was utilized to investigate structures containing axially symmetrical scatterers. The utilization of BOR and GIM significantly improves the efficiency of the discrete analysis, reducing the computational time by at least an order of magnitude. BOR allows 2.5-D FEM to be utilized for the analysis of a 3-D structure, and GIM is particularly useful in optimization procedures when many identical objects with arbitrary rotation are being investigated (as the rotated and replicated objects do not need FEM recalculation). The proposed approach can also be applied to study periodic/quasi-periodic structures as well as whole devices composed of different waveguide sections. The validity and efficiency of the presented technique have been verified, which confirms its usefulness for the design and optimization process.

#### REFERENCES

- [1] K. Harumi, "Scattering of plane waves by a rigid ribbon in a solid," *J. Appl. Phys.*, vol. 32, no. 8, pp. 1488–1497, Aug. 1961.
- [2] E. D. Nielsen, "Scattering by a cylindrical post of complex permittivity in a waveguide," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 17, no. 3, pp. 148–153, Mar. 1969.
- [3] J. J. Bowman, T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi, *Electromagnetic Scattering by Simple Shapes*. New York, NY, USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1969, pp. 349–588.
- [4] R. Gesche and N. Lochel, "Scattering by a lossy dielectric cylinder in a rectangular waveguide," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 36, no. 1, pp. 137–144, Jan. 1988.
- [5] L. Tsang, J. A. Kong, and K.-H. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and Applications*, vol. 27. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2004.
- [6] F. G. Mitri, "Acoustic backscattering and radiation force on a rigid elliptical cylinder in plane progressive waves," *Ultrasonics*, vol. 66, pp. 27–33, Mar. 2016.
- [7] R. Lech, P. Kowalczyk, and A. Kusiek, "Scattering from a cylindrical object of arbitrary cross section with the use of field matching method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, no. 11, pp. 4883–4887, Nov. 2016.
- [8] M. Warecka, R. Lech, and P. Kowalczyk, "Propagation in the open cylindrical guide of arbitrary cross section with the use of field matching method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 66, no. 6, pp. 3237–3240, Jun. 2018.
- [9] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2014.
- [10] A. Kusiek and J. Mazur, "Hybrid finite-difference/mode-matching method for analysis of scattering from arbitrary configuration of rotationally-symmetrical posts," *Prog. Electromagn. Res.*, vol. 110, pp. 23–42, 2010.
- [11] A. Kusiek, "Hybrid technique for the analysis of circular waveguide junctions loaded with ferrite posts," *IET Microw., Antennas Propag.*, vol. 9, no. 8, pp. 781–787, Mar. 2015.
- [12] J. Rubio, M. A. González, and J. Zapata, "Analysis of open-ended radiating structures based on sfelp (segmentation approach/finite elements/Lanczos-Pade)," in *Proc. IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp.*, vol. 4, Jun. 2002, pp. 702–705.
- [13] J. Rubio, J. Arroyo, and J. Zapata, "Analysis of passive microwave circuits by using a hybrid 2-D and 3-D finite-element mode-matching method," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 47, no. 9, pp. 1746–1749, Sep. 1999.
- [14] L. Kuhler, N. Raveu, G. Le Fur, and L. Duchesne, "The modal expansion theory applied TO 3-D metamaterial waveguides characterization," *Prog. Electromagn. Res. M*, vol. 92, pp. 31–41, 2020.
- [15] M.-S. Tong, R. Sauleau, A. Rolland, and T.-G. Chang, "Analysis of electromagnetic band-gap waveguide structures using body-of-revolution finite-difference time-domain method," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 49, no. 9, pp. 2201–2206, 2007.

- [16] M. Celuch and W. Gwarek, "Industrial design of axisymmetrical devices using a customized FDTD solver from RF to optical frequency bands [Application Notes]," *IEEE Microw. Mag.*, vol. 9, no. 6, pp. 150–159, Dec. 2008.
- [17] D.-Y. Na, B.-H.-V. Borges, and F. L. Teixeira, "Finite element time-domain body-of-revolution maxwell solver based on discrete exterior calculus," *J. Comput. Phys.*, vol. 376, pp. 249–275, Jan. 2019.
- [18] G. G. Gentili, M. Khosronejad, R. Nesti, G. Pelosi, and S. Selli, "An efficient 2.5-D finite-element approach based on transformation optics for the analysis of elliptical horns," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 66, no. 9, pp. 4782–4790, Sep. 2018.
- [19] G. G. Gentili, G. Macchiarella, and M. Politi, "Modeling of cylindrical dielectric resonator filters by a 2D radial FEM approach," in *Proc. 34th Eur. Microw. Conf.*, vol. 2, Oct. 2004, pp. 593–596.
- [20] A. D. Greenwood and J.-M. Jin, "Finite-element analysis of complex axisymmetric radiating structures," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 8, pp. 1260–1266, Aug. 1999.
- [21] E. A. Dunn, J.-K. Byun, E. D. Branch, and J.-M. Jin, "Numerical simulation of BOR scattering and radiation using a higher order FEM," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 3, pp. 945–952, Mar. 2006.
- [22] G. G. Gentili, P. Bolli, R. Nesti, G. Pelosi, and L. Toso, "High-order FEM mode matching analysis of circular horns with rotationally symmetric dielectrics," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 55, no. 10, pp. 2915–2918, Oct. 2007.
- [23] J.-M. Jin, Z. Lou, Y.-J. Li, N. W. Riley, and D. J. Riley, "Finite element analysis of complex antennas and arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 8, pp. 2222–2240, Aug. 2008.
- [24] M. M. Ilic, A. Z. Ilic, and B. M. Notaros, "Continuously inhomogeneous higher order finite elements for 3-D electromagnetic analysis," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 9, pp. 2798–2803, Sep. 2009.
- [25] X. Rui, J. Hu, and Q. H. Liu, "Higher order finite element method for inhomogeneous axisymmetric resonators," *Prog. Electromagn. Res.*, vol. 21, pp. 189–201, 2010.
- [26] Y. B. Zhai *et al.*, "Fast computations to electromagnetic scattering properties of complex bodies of revolution buried and partly buried in layered lossy media," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 49, no. 4, pp. 1431–1440, Apr. 2011.
- [27] G. G. Gentili, M. Khosronejad, G. Pelosi, and S. Selli, "Analysis of elliptical structures with constant axial ratio by body-of-revolution finite element method and transformation optics," *Int. J. Microw. Wireless Technol.*, vol. 11, nos. 5–6, pp. 501–508, Jun. 2019.
- [28] J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2015.
- [29] P. Kowalczyk, R. Lech, M. Warecka, and A. Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique," *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 33, no. 2, pp. 178–192, Jan. 2019.
- [30] M. Warecka, R. Lech, and P. Kowalczyk, "Efficient finite element analysis of axially symmetrical waveguides and waveguide discontinuities," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 67, no. 11, pp. 4291–4297, Nov. 2019.
- [31] G. Fotyga, D. Szyplski, R. Lech, and P. Kowalczyk, "Model-order reduction in hybrid methods involving generalized impedance matrix," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 68, no. 8, pp. 6467–6472, Aug. 2020.
- [32] M. Czarniewska, G. Fotyga, A. Lamecki, and M. Mrozowski, "Parametrized local reduced-order models with compressed projection basis for fast parameter-dependent finite-element analysis," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 66, no. 8, pp. 3656–3667, Aug. 2018.
- [33] M. Polewski, R. Lech, and J. Mazur, "Rigorous modal analysis of structures containing inhomogeneous dielectric cylinders," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 52, no. 5, pp. 1508–1516, May 2004.
- [34] A. Kusiek, R. Lech, and J. Mazur, "A new hybrid method for analysis of scattering from arbitrary configuration of cylindrical objects," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 6, pp. 1725–1733, Jun. 2008.
- [35] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [36] R. Lech and J. Mazur, "Propagation in rectangular waveguides periodically loaded with cylindrical posts," *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, vol. 14, no. 4, pp. 177–179, Apr. 2004.



**Malgorzata Warecka** (Graduate Student Member, IEEE) received the M.Sc.E.E. degree from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2018, where she is currently pursuing the Ph.D. degree.

She is also with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology. Her current research interests include scattering and propagation of electromagnetic wave problems, algorithms, and numerical methods.



**Rafal Lech** (Senior Member, IEEE) was born in Elblag, Poland, in 1977. He received the M.Sc.E.E., Ph.D. (Hons.), and D.Sc. degrees from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2001, 2007, and 2018, respectively.

He is currently with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology. His main research interests are electromagnetic wave scattering, hybrid methods, filter design, complex materials, metamaterial applications at microwave frequencies, electromagnetic analysis of periodic structures, and antenna design.



**Piotr Kowalczyk** (Member, IEEE) was born in Wejherowo, Poland, in 1977. He received the M.Sc.E.E. degree in applied physics and mathematics and the Ph.D. (Hons.) and D.Sc. degrees in electrical engineering from the Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland, in 2001, 2008, and 2018, respectively.

He is currently with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology. His current research interests include scattering and propagation of electromagnetic wave problems, algorithms, and numerical methods.

**[MW4] Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator**

B. Salski, T. Karpisz, M. Warecka, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt

IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques  
vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022

Wkład autorki:

opracowanie i implementacja algorytmu hybrydowego (połączenie metody elementów skończonych i dopasowania rodzajów) pozwalającego na analizę rezonatora Fabry-Pérot. Wykonanie badania zbieżności oraz analiz porównawczych dotyczących wpływu położenia płytki dielektrycznej na częstotliwość rezonansową

# Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator

Bartłomiej Salski<sup>1</sup>, Member, IEEE, Tomasz Karpisz, Member, IEEE,  
 Malgorzata Warecka<sup>2</sup>, Graduate Student Member, IEEE,  
 Piotr Kowalczyk<sup>3</sup>, Piotr Czekala<sup>4</sup>, and Pawel Kopyt<sup>5</sup>, Member, IEEE

**Abstract**—Despite its long history, a double-concave (DC) Fabry-Perot open resonator (FPOR) has recently gained popularity in the characterization of dielectrics in the 20–110 GHz range, mainly due to such novel accomplishments as full automation of the measurement process and the development of even more accurate and computationally efficient electromagnetic model. However, it has been discovered that such a DC resonator suffers from unwanted mode coupling present for electrically thick samples. Such limitations are missing in a plano-concave (PC) FPOR. For those reasons, the aim in this article is to apply the newly proposed scattering matrix method in the study of major properties of that kind of a resonator and, subsequently, to propose a new tool dedicated to the measurement of dielectrics without the aforementioned limits. For the first time in the literature, major properties of the PC FPOR with and without the sample, such as resonance frequencies, geometric factors, energy filling factors, and the resulting quality factor, are rigorously computed. Moreover, their impact on the accuracy of the loss tangent extraction is investigated. Such a study, which opens the way for accurate microwave characterization of electrically thick dielectric sheets above 20 GHz, has never been performed before. The whole complex permittivity extraction algorithm presented in this article is validated experimentally by measuring well-known materials, namely, C-plane sapphire, silicon, and Z-cut monocrystalline quartz.

**Index Terms**—Dielectric properties, Fabry-Perot open resonator (FPOR), scattering matrix method (SMM).

Manuscript received December 20, 2021; accepted January 31, 2022. Date of publication March 4, 2022; date of current version May 5, 2022. This work was supported in part by the project “High-precision techniques of millimeter and sub-THz band characterization of materials for microelectronics” and “EDISON—Electromagnetic Design of flexible SensOrs” both operated within the Foundation for Polish Science TEAM TECH Program co-financed by the European Regional Development Fund, Operational Program Smart Growth 2014–2020; and in part by the Internal Research Grant at the Warsaw University of Technology within the project “Light-matter interaction of dielectric micro-resonators with microwave photons in a Fabry-Perot open resonator.” (Corresponding author: Bartłomiej Salski.)

Bartłomiej Salski, Tomasz Karpisz, Piotr Czekala, and Pawel Kopyt are with the Warsaw University of Technology, Institute of Radioelectronics and Multimedia Technology, 00-665 Warsaw, Poland (e-mail: bartlomiej.salski@pw.edu.pl).

Malgorzata Warecka and Piotr Kowalczyk are with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdansk University of Technology, 80-233 Gdansk, Poland (e-mail: malwarec@pg.edu.pl; pio.kow@gmail.com).

Color versions of one or more figures in this article are available at <https://doi.org/10.1109/TMTT.2022.3152511>.

Digital Object Identifier 10.1109/TMTT.2022.3152511

0018-9480 © 2022 IEEE. Personal use is permitted, but republication/redistribution requires IEEE permission. See <https://www.ieee.org/publications/rights/index.html> for more information.

## I. INTRODUCTION

FABRY-PEROT open resonator (FPOR) belongs to the family of high- $Q$  resonant structures applicable to electromagnetic (EM) characterization of materials in a broad frequency range spanning from low microwaves up to millimeter waves and beyond [1]–[6]. The FPOR operates in such applications at fundamental Gaussian modes, denoted as  $TEM_{0,0,q}$  modes, where  $q$  represents a longitudinal mode order along the resonator’s revolution axis. Consequently, resonant EM characterization of materials can be undertaken at consecutive Gaussian modes in a very broad frequency range, e.g., 10–110 GHz, in a single measurement cycle. A relatively large volume of the FPOR allows achieving a  $Q$ -factor at the level well over  $10^5$ , which makes the method very sensitive to the dielectric losses of the sample.

In principle, the FPOR can be applied as a double-concave (DC) or plano-concave (PC) geometry. The first option brings several advantages. First of all, odd Gaussian modes have the maximum of the electric field exactly in the middle of the resonator’s length, so the position of the material under test (MUT) is well-defined. Second, the insertion of the sample into the DC FPOR does not significantly change the fields far at the mirrors, which means that the  $Q$ -factor due to conduction losses can be assumed unchanged and measured in the FPOR before insertion of the sample. This is by the way a common practice in resonant measurements. For those reasons, the DC FPOR has been successfully applied in the material characterization undertaken in the 20–110-GHz frequency range [7]. However, a recently discovered detrimental coupling of odd  $TEM_{0,0,q}$  modes with one of even higher order Laguerre–Gaussian modes limits the largest electric thickness of the MUT that can be measured with the DC FPOR without the risk of increased deviation of the complex permittivity [8].

The aforementioned issue can be resolved if either even or odd modes are eradicated from the structure, so that their coupling will not be possible. Odd modes can be suppressed in the DC FPOR by inserting an electric boundary condition exactly in the middle of the resonator, which is equivalent to the geometry of the PC FPOR. The MUT in the PC FPOR is usually located in the vicinity of the flat mirror, preferably at the maximum of the electric field nearest to the mirror. It means that the position of the sample varies from mode



to mode, which makes the mode tracking more intricate (see later in this article), as compared to the DC FPOR where the MUT is always in the middle of the resonator's length. In addition, it is very likely that the presence of the MUT in the vicinity of the flat mirror affects conduction losses, which in turn may deteriorate the accuracy of the loss tangent determined using a standard approach with the measurement of the  $Q$ -factor of the empty and loaded cavity. To this date, neither of these subjects has been discussed in the literature, although it is of vital importance for the accurate assessment of the complex permittivity. One of the novel findings that will be presented in this article is that conductive losses at a planar mirror are slightly larger than those at a concave mirror in the empty resonator and both slightly change after insertion of the sample. Neglecting that fact would lead to the over- or underestimation of the loss tangent, which is especially important in the characterization of ultralow-loss materials.

The extraction of the complex permittivity, which is the main goal of this article, requires knowledge on the relation between the parameters of the MUT and resonance frequency of the resonator. It can be established using EM modeling methods. The most straightforward approach is to apply one of the full-wave numerical methods, such as finite difference time domain method [9] or finite element method (FEM) [10]. However, this is the least effective approach, as the methods are versatile at the cost of large computational effort, which becomes critical in case of electrically large structures, like the FPOR.

In addition to that, it should be kept in mind that the most timely effective approach to complex permittivity measurements is to run EM simulations at a preprocessing stage in order to build up lookup tables of changes of the resonance frequency at each  $TEM_{0,0,q}$  mode as a function of the thickness,  $t$ , and dielectric constant,  $Dk$ , of the MUT. These lookup tables can be, subsequently, applied during the measurement to quickly find the unknown complex permittivity of the MUT. In the view of the fact that there can be dozens of  $TEM_{0,0,q}$  modes to be computed in the whole measurement spectrum (e.g., 65 in the 10–110 GHz range with 1.5-GHz frequency step) with dozens of simulations per mode, the choice of full-wave methods would have been timely prohibitive. Nevertheless, they can play an important role in the numerical validation of alternative more efficient EM modeling methods.

For the above reasons, dedicated computing methods are of essential importance. Historically, the first method is based on a scalar paraxial approximation of a wave equation, which leads to the characteristic equation, the nonlinear solution of which provides resonance frequencies of  $TEM_{m,n,q}$  modes [1], [2]. The advantage of this approach is mainly in its simplicity as this is a single analytic equation. However, the accuracy of the method decreases with the increase of the electric thickness of the MUT. Moreover, the sample should be located exactly in the beam waist, where the paraxial approximation holds. Another approximate approach is based on perturbation theory [6], which relies on the assumption that insertion of the sample perturbs the field distribution inside the cavity to a little extent. This is, however, correct for either very thin or low- $Dk$  samples.

Another dedicated method, which is also relying on the paraxial approximation, is based on the conformal transformation from Cartesian to Gaussian coordinates, which transforms the whole structure into a 1-D multilayer problem, the solution of which is relatively easy and computationally efficient [4]. However, due to high accuracy and relatively low computational effort, the most promising is the recently proposed scattering matrix method (SMM), where a DC FPOR is split into three nonresonant sections consisting of the first mirror, sample, and the second mirror, and EM fields are represented as a weighted sum of circular waveguide modes [5]. This is a rigorous vector method with no paraxial approximation involved. There are at least two major advantages of such approach to the problem. First of all, the multimode scattering matrix representing the mirrors at a given frequency can be calculated only once and, subsequently, applied at a post-processing stage with various types of the sample by simply exchanging the matrix representing the middle section with the sample. This middle section of the resonator can be computed using Fresnel equations [5], whereas splitting of the analysis into well-defined circular waveguide modes allows shifting the location of the sample analytically. Consequently, there is no limitation imposed on the electric thickness of the MUT or its position inside the FPOR, which is another advantage of the method.

So far, the SMM has been successfully exploited in the study of the properties of the DC FPOR only, whereas a thorough knowledge on the properties of the PC FPOR is still missing in the literature. Therefore, this article concerns the study of the PC FPOR, which allows characterizing the MUT of much larger thickness due to elimination of the aforementioned mode coupling problem. Moreover, it will be shown that the PC FPOR has some additional features that can be very useful in reducing the lowest level of the measurable loss tangent ca. by the factor of 10 as compared to its DC FPOR counterpart. The study presented in this article is performed with the use of the SMM, which guarantees accurate results with low numerical cost.

In Section II, EM model of the PC FPOR based on the SMM is proposed and validated against FEM. In Section III-A, the major properties of the empty PC FPOR are investigated, such as beam waist, gaussianity, and conduction losses. Subsequently, the relation between resonance frequencies and the position of the sample along the resonator is discussed in Section III-B, aiming at deriving conclusions related to the recommended location of the sample during the measurement. The conclusions are subsequently implemented in the automated mode tracking algorithm. In Section III-C, lookup tables of the resonance frequencies as a function of the thickness and  $Dk$  of the MUT are presented, and the impact of the geometric factors and energy filling factors on the accuracy of the loss tangent extraction is investigated. It should be emphasized that such rigorous study of the PC FPOR has never been undertaken before. Eventually, Section IV deals with experimental results obtained for a few well-known dielectric samples confirming the approach proposed in this article. Two major advantages of the PC FPOR proposed in this article, as compared to the equivalent DC FPOR [4], [5], [7], are the decrease of

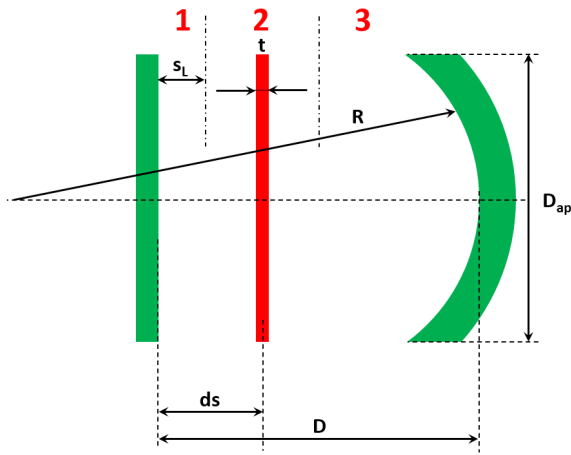


Fig. 1. PC FPOR ( $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm, and  $D_{ap} = 200$  mm) loaded with the sample with the thickness,  $t$ , shifted from a planar mirror by a given distance,  $ds$ . Numbers denote the individual sections of the FPOR applied in the SMM.

the lower limit of the measurable loss tangent to ca.  $10^{-5}$  and a substantial increase of the thickness of the measurable samples. Consequently, the proposed solution opens the way for accurate and broadband characterization of electrically thick and ultralow-loss dielectric sheets above 20 GHz.

## II. EM MODELING

### A. Structure

A PC FPOR, shown schematically in Fig. 1, is made of the planar and concave mirrors separated by a given distance,  $D$ . The latter one has a spherical shape with a curvature radius,  $R$ . The FPOR is loaded with the sample with the thickness,  $t$ , shifted from the planar mirror by a given distance,  $ds$ . The aim is to locate the sample at a position corresponding to the lowest resonance frequency of a given  $TEM_{0,0,q}$  mode in order to enhance measurement sensitivity. In case of the electrically thin samples, that position corresponds to the maximum of the electric field.

In case of the DC FPOR, theoretical position of the maximum of the electric field of the odd  $TEM_{0,0,q}$  modes is right in the middle of the resonator's length, so only slight adjustments of the MUT's position have to be done at consecutive modes after the measurement position is found at the first mode of interest (usually that with the lowest  $q$ ). Unfortunately, the maximum of the electric field in the PC FPOR loaded with the MUT is not known *a priori*, so the measurement algorithm has to track a given resonance frequency toward its minimum while shifting the sample. Hence, it is necessary to learn how the positions of the minimum and maximum of the electric field change with the thickness and  $Dk$  of the MUT.

### B. Scattering Matrix Method

In [5], the SMM has been successfully applied in the analysis of a DC FPOR ( $D = 100$  mm and  $R = 150$  mm). It has been shown there that eight TE and eight TM modes are sufficient to get acceptable computational accuracy up

to 50 GHz. In case of the PC FPOR, the formulation of the problem is similar to that of the DC FPOR. The only change is the replacement of the scattering matrix representing one of the spherical mirrors with the one representing a planar mirror. Consequently, the PC FPOR loaded with the MUT is represented with the following characteristic equation [5]:

$$\det\left(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{S}}_P(f_g)\overline{\overline{S}}_R(f_g)\right) = 0 \quad (1)$$

where  $\overline{\overline{S}}_P$  is a multimode scattering matrix representing a planar mirror (Section I in Fig. 1) and  $\overline{\overline{S}}_R$  represents the two sections, namely, the MUT (Section II in Fig. 1) and the spherical mirror (Section III in Fig. 1). Formulation of the latter matrix is thoroughly explained in [5], whereas the scattering matrix representing the planar mirror,  $\overline{\overline{S}}_P$ , is diagonal with the  $i$ th diagonal component given as follows:

$$\overline{\overline{S}}_{P(i,i)} = -e^{-j2k_{z,i}s_L} \quad (2)$$

where  $k_{z,i}$  is a forward wavenumber of an  $i$ th circular waveguide mode and  $s_L$  denotes the distance from a reference plane to the mirror (see Fig. 1).

Due to the fact that numerical accuracy of the SMM has been thoroughly explained in [5] and [8] for a DC FPOR with the shape of a spherical mirror exactly the same as the one applied in the PC FPOR considered in this article, the numerical study of the modeling method itself will not be repeated here. Following the conclusions given in [5], it will be assumed hereafter that radial (angular) discretization is  $d\rho = 1$  mm ( $d\phi = 5^\circ$ ).

### C. Validation Against FEM

Computational results have been validated numerically against FEM. In a similar way as it has been undertaken in case of the SMM, the efficient calculation of the FPOR with the use of FEM requires division of the structure into three areas: two mirrors and a waveguide section between them. In this way, the FEM is incorporated to calculate only the scattering matrix of the spherical mirror. In other regions, analytical techniques have been applied, which decrease numerical dispersion and reduce computation time. To reduce it even further, curvilinear elements and the second-order hierarchical functions have been applied. Another important aspect is the treatment of the FPOR as a body-of-revolution (detailed description in [11]) and the resulting reduction of the analysis to a 2.5-D problem [10]–[17].

Fig. 2 shows a frequency difference between FEM and SMM as a function of the total number of FEM cells computed in the empty PC FPOR ( $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm, and  $D_{ap} = 180$  mm) at a few  $TEM_{0,0,q}$  modes spanning from 20 to 50 GHz ( $q = 14$ – $33$ ). It can be noted that discrepancy between the two methods decreases with the refinement of the FEM model and it converges above ca.  $2 \times 10^4$  cells. Moreover, the discrepancy between the methods increases with frequency from ca.  $-0.85$  MHz at 21.44 GHz ( $q = 14$ ) up to 1.12 MHz at 49.92 GHz ( $q = 33$ ), which is merely  $-39$  and 22 ppm, respectively. Very similar discrepancy has been achieved for the PC FPOR loaded with the sample.

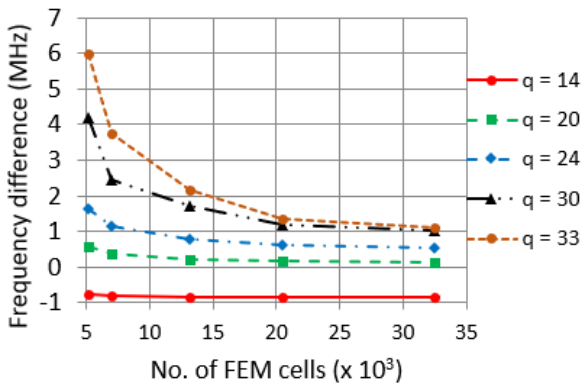


Fig. 2. Frequency difference between FEM and SMM as a function of the total number of FEM cells computed in the empty PC FPOR ( $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm, and  $D_{ap} = 180$  mm) at a few  $TEM_{0,0,q}$  modes spanning from 20 to 50 GHz.

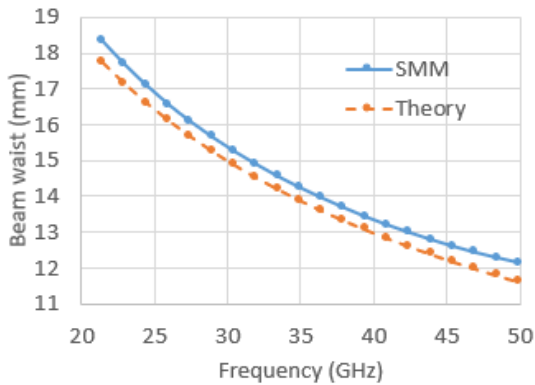


Fig. 3. Beam waist as a function of frequency in the empty PC FPOR ( $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm, and  $D_{ap} = 200$  mm) at consecutive  $TEM_{0,0,q}$  modes spanning from 20 to 50 GHz computed with the SMM (solid line) as compared to the approximate value (dashed line) [4].

Most FEM submatrices can be calculated at a preprocessing stage as they are frequency independent. Their calculation time varies from 42 s for 5185 elements to 696 s for 20516 elements. Total calculation time of (1) with FEM for a single frequency point takes around 6 s for the model consisting of 20000 elements. In case of the SMM, the model of a mirror consists of 6480 elements. Computation performed with the aid of CUDA acceleration on a GPU GeForce GTX 1080 Titan card takes 28 ms (16 ms) per frequency point if 50 (500) frequencies are calculated. It shows that the speedup of the SMM over FEM is well over two orders of magnitude.

Once the SMM model of the PC FPOR is successfully validated against FEM, it will be applied in Section III of this article in the study of the properties of the resonator in the 20–50-GHz frequency range. At first, the basic features of the Gaussian  $TEM_{0,0,q}$  modes present in the PC FPOR without and with the sample will be considered. Subsequently, the relation between the resonance frequencies of the  $TEM_{0,0,q}$  modes and the sample's shift will be investigated and, eventually, the methods of extracting loss tangent of the sample from SMM computational data will be addressed.

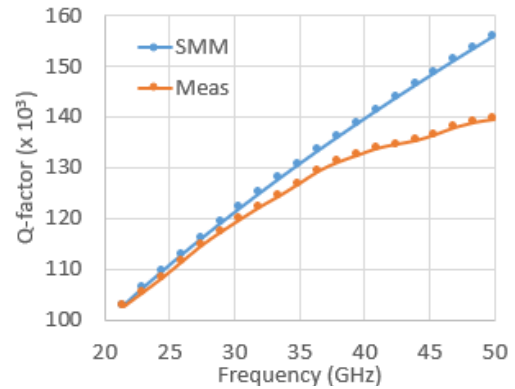


Fig. 4.  $Q$ -factor as a function of frequency in the empty PC FPOR ( $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm, and  $D_{ap} = 180$  mm) at consecutive  $TEM_{0,0,q}$  modes spanning from 20 to 50 GHz computed with the SMM (solid line) as compared to the measurement results (dashed line).

### III. STUDY

#### A. Empty PC FPOR

Fig. 3 shows the spectral changes of a beam waist in the empty PC FPOR ( $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm, and  $D_{ap} = 200$  mm) at consecutive  $TEM_{0,0,q}$  modes spanning from 20 to 50 GHz computed with the SMM (solid line) as compared to analytical findings based on the paraxial approximation (dashed line) [4]. In general, both results confirm that the beam waist decreases with the square root of frequency. It can be noted, however, that the approximate value, as in [4], is underestimated by ca. 0.35–0.6 mm (2.4%–4.3%). Gaussianity of the beam, as computed with the SMM, is well over 99.97% in the whole 20–50-GHz band.

The  $Q$ -factor of the PC FPOR can be represented with the following formula [18]:

$$\frac{1}{Q_t} = \frac{R_1}{G_1} + \frac{R_2}{G_2} + p_e \tan \delta = \frac{1}{Q_0} + p_e \tan \delta \quad (3)$$

where  $R_i$  ( $G_i$ ) is the surface resistance (geometric factor) of the  $i$ th mirror and  $p_e$  ( $\tan \delta$ ) is the electric energy filling factor (loss tangent) of the sample. All the quantities in (3) can be computed with the SMM by, at first, finding a resonance frequency with (1) and, subsequently, by computing EM fields in the resonator, as described in [8], and computing appropriate integrals to get energy stored in the resonator and in the sample, as well as power dissipated in the mirrors.

Brass mirrors of the PC FPOR applied in the experiments addressed in this article were silver-plated to reduce their surface resistance. Electric conductivity of the silver-plated layer has been measured in [19] with a sapphire resonator to be  $\sigma = 4.89 \times 10^7$  S/m, which is ca. 79% of the conductivity of pure silver. The corresponding surface resistance is  $R = 41.6$  m $\Omega$  at 21.44 GHz ( $R = 65.8$  m $\Omega$  at 49.92 GHz). Fig. 4 shows that the computed  $Q$ -factor is increasing from  $Q_0 = 103\,183$  at 21.44 GHz up to  $Q_0 = 156\,250$  at 49.92 GHz. Correspondingly, the measured  $Q$ -factor is  $Q_{0,m} = 102\,636$  at 21.44 GHz, which is merely 0.5% less than the computed value. It implies that the  $Q$ -factor due to scattering (either to free space or due to coaxial coupling) is as large as  $Q_{\text{scat}} = 19.36 \times 10^6$ . However, it can be noted that the

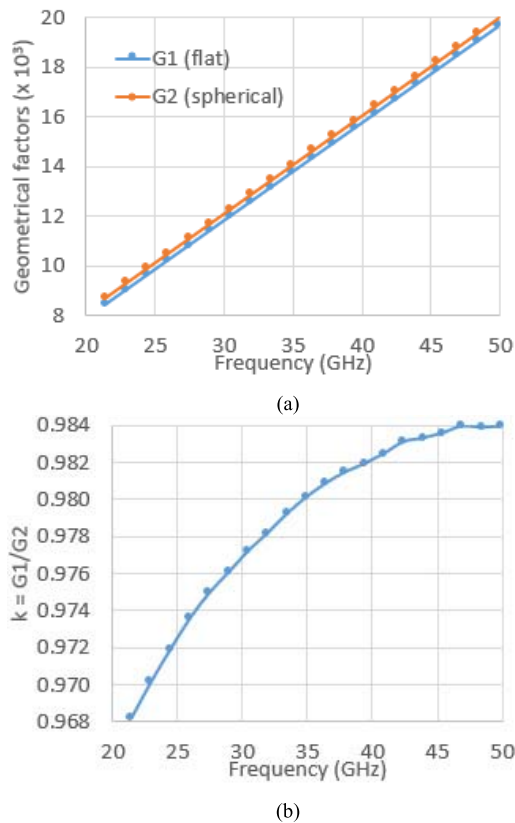


Fig. 5. (a) Geometric factors of both mirrors of the empty PC FPOR ( $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm, and  $D_{ap} = 200$  mm) and (b) their ratio at consecutive  $TEM_{0,0,q}$  modes spanning from 20 to 50 GHz computed with the SMM.

measured  $Q$ -factor is slightly falling with frequency with respect to the computed value, especially above ca. 35 GHz. It is most likely due to the coupling holes with the diameter of 1.3 mm drilled in the mirrors, the impact of which is obviously increasing with the frequency due to the shrinking beam waist (compare Fig. 3) and due to the hole size becoming comparable with the wavelength. Nevertheless, the  $Q$ -factor due to scattering is still as large as  $Q_{scat} = 1.3 \times 10^6$  at 49.92 GHz.

Fig. 5 shows that geometric factors of both mirrors linearly increase with frequency, although the one corresponding to the planar mirror is slightly smaller indicating that its contribution to the total losses of the PC FPOR is a bit larger. Nevertheless, that discrepancy reduces with frequency, as shown in Fig. 5(b). A similar high level of the geometric factor can be achieved in dielectric resonators widely applicable in the material characterization below 20 GHz [20].

### B. Sample Positioning

In case of the DC FPOR, it is known *a priori* that the MUT should be located exactly in the middle of the FPOR's length to make sure that, first, it is located in the beam waist of a Gaussian beam and, second, it is exactly at the maximum of an electric field of an odd  $TEM_{0,0,q}$  mode. In case of the PC FPOR, however, the beam waist is located exactly at the planar

mirror, so it is recommended to keep the sample in its vicinity during the measurement. However, none of the maxima of the electric field in the PC FPOR has a fixed position, which now depends on frequency and sample parameters, namely, the thickness and  $Dk$ . Hence, it is necessary to learn how the shape of the electric field depends on the aforementioned parameters. It will be undertaken by investigating the changes of resonance frequencies with the shift of the MUT,  $ds$  (see Fig. 1). In case of electrically thin samples, the largest decrease of the resonance frequency corresponds to the position of the sample at the maximum of an electric field.

Fig. 6 shows the resonance frequencies of the  $TEM_{0,0,14}$  mode computed with the SMM and with FEM (see dots) as a function of  $ds$ . For the efficient mode tracking, it is crucial to understand the behavior of the positions, where the maxima and minima of resonance frequencies can be obtained. It can be noted that for the samples relatively thin with respect to the wavelength [e.g.,  $t = 0.1$  mm in Fig. 6(a)], the maximum of the resonance frequency and the corresponding position are almost unaffected by the  $Dk$ . This is due to the fact that this is the position of the minimum of the electric field, where the impact of the sample is the least. On the other hand, the location of the maximum of the electric field is only slightly affected by the presence of the sample. However, the corresponding resonance frequency linearly decreases with  $Dk$ . That decrease, by the way, allows extracting  $Dk$  of the MUT, as it will be explained later.

In case of moderate thicknesses of the samples [e.g.,  $t = 0.5$  mm in Fig. 6(b)], the position corresponding to the maximum frequency is still affected to a little extent, whereas the position corresponding to the minimum frequency visibly decreases with the increase of  $Dk$  [see Fig. 6(b)]. This is due to the fact that the sample starts to substantially affect the shape of the electric field.

When the sample becomes relatively thick [e.g.,  $t = 1.0$  mm in Fig. 6(c)], a few worth-noticing effects can be observed. First of all, one can notice that the position of the first frequency minimum (i.e., maximum of the electric field) decreases with the increase of  $Dk$  down to the lowest possible value corresponding to the sample placed exactly at the surface of the flat mirror ( $ds = t/2$ ). This effect is getting enhanced as the mode order (i.e., frequency) increases. For those reasons, the insertion of the sample at the first frequency minimum should be avoided as it may lead to the collision with the mirror if the automatic tracking algorithm is applied. Another interesting effect to be noticed is when the sample becomes over half-of-the-wavelength thick. Fig. 6(c) indicates that initially the position of the frequency minimum decreases with the increase of  $Dk$  up to the point when the sample becomes half-of-the-wavelength thick. See the curve obtained for  $Dk = 15$  in Fig. 6(c) (see blue dashed-dotted line), which exhibits the maximum instead of the minimum at  $ds = 8.5$  mm. From the automatic tracking point of view, it means that the algorithm should either find a new position of the lowest frequency or start tracking the maximum. The last crucial observation is that the amplitude of the frequency tuning curves shown in Fig. 6 is suppressed down to zero when the sample is exactly half-of-the-wavelength thick, which is

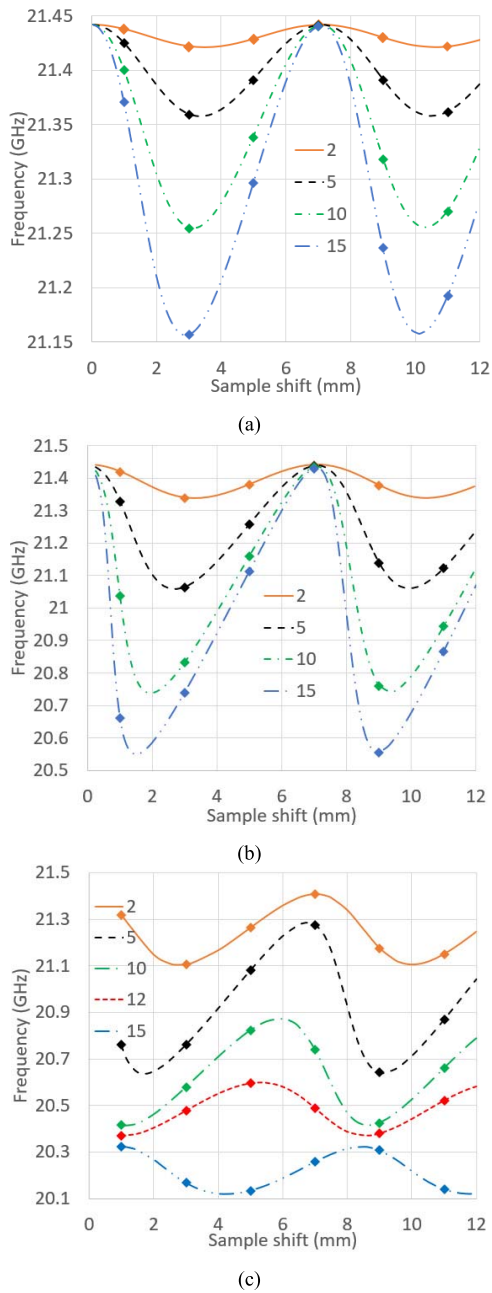


Fig. 6. Resonance frequency at the  $TEM_{0,0,14}$  mode as a function of the sample's shift computed with the SMM for a few dielectric constants and for (a)  $t = 0.1$  mm, (b)  $t = 0.5$  mm, (c)  $t = 2.0$  mm. Dots indicate the computation results obtained with FEM.

quite intuitive as the sample becomes electromagnetically transparent.

C. Lookup Tables

Collection of numerical computations of resonance frequencies of the PC FPOR for a series of thicknesses and Dks ends up with lookup tables that can be exploited in the extraction of the complex permittivity of the unknown MUT. Fig. 7(a) shows such a lookup table of the resonance frequency of the  $TEM_{0,0,14}$  mode. It can be noted that, as expected, the

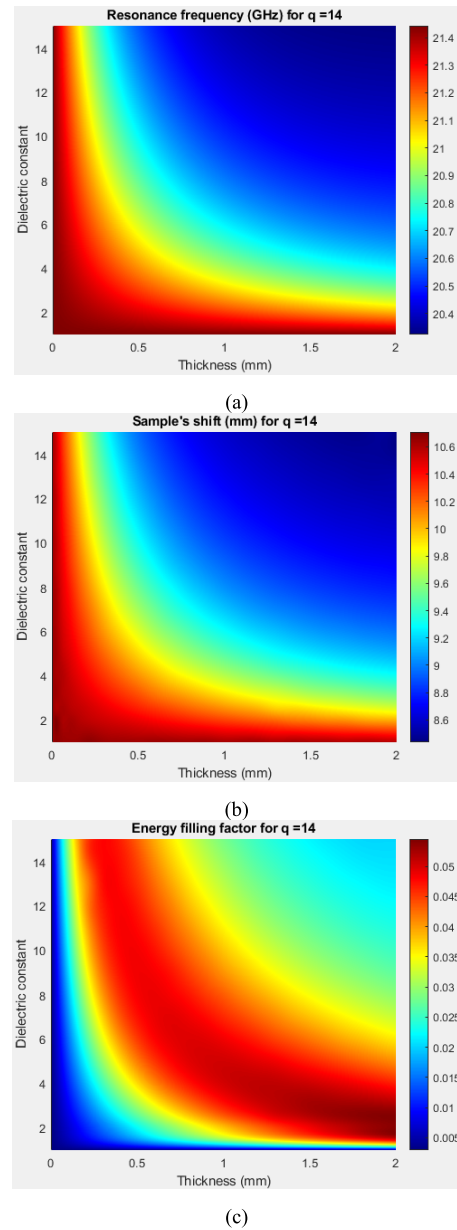


Fig. 7. (a) Resonance frequency of the  $TEM_{0,0,14}$  mode, (b) corresponding sample's shift,  $ds$ , and (c) electric energy filling factor,  $p_e$ , as a function of the dielectric constant and thickness of the sample.

resonance frequency decreases with the electric thickness of the MUT, and the frequency span of these changes is as large as 1 GHz in the considered range. The largest sensitivity, corresponding to the largest slope in the frequency lookup table, is achievable for either moderate-thin or moderate-Dk samples. On the contrary, the lowest sensitivity is obtained for the sample becoming half-of-the-wavelength thick [e.g., see  $Dk = 15$  and  $t = 2$  mm in Fig. 7(a)], where the slope of frequency changes is the smallest. A similar shape can be observed for the lookup table of the corresponding sample's shift shown in Fig. 7(b), which decreases with the electric thickness of the MUT by ca. 20% from the initial value of  $ds = 10.6$  mm.

If the sample, like in the FPOR, fills only a fraction of the resonator's volume, the electric energy filling factor has to be assessed to extract the loss tangent with (3). It can be undertaken either rigorously by integrating EM fields in the cavity [see Fig. 7(c)] or by using the approximate formula derived with the aid of perturbation theory which reads [4]

$$p_e = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_r} \frac{\varepsilon_r}{f_s} \right| \quad (4)$$

where  $f_s$  is the resonance frequency of the resonator loaded with the sample. It is worth noting in Fig. 7 that the largest energy filling factor corresponds to the largest slope in the resonance frequency lookup table, which agrees with (4).

A typical approach to loss tangent extraction is to measure at first an empty resonator in order to evaluate  $Q_0$ , as in (3), and, subsequently, to measure the resonator loaded with the sample to get  $Q_t$ . However, the assumption that  $Q_0$  remains unchanged after insertion of the sample may not be correct, mainly due to the fact that the magnetic field is affected by the presence of the sample. Consequently, conduction losses at the mirrors can vary, especially when the sample becomes electrically thick, thus, substantially changing the fields. This effect can be evaluated by computing geometric factors, as in (3), as a function of the MUT's parameters. Fig. 8 shows the geometric factors of both mirrors and the corresponding change of the  $Q$ -factor of the FPOR at the  $TEM_{0,0,14}$  mode. It can be noted that both geometric factors decrease with the electric thickness of the sample. The  $Q$ -factor in the empty FPOR is  $Q_0 = 103183$  and it slightly increases with the electric thickness of the sample up to a position at the lookup table where the energy filling factor is at the maximum [compare Fig. 7(c)] and, subsequently, it decreases to  $Q_0 = 100108$  for  $(t, \varepsilon_r) = (2 \text{ mm}, 15)$ . At larger frequencies, the range of changes of the  $Q_0$  is at a similar level.

The impact of the inaccuracy in the estimation of the geometric factors and of the energy filling factor on the loss tangent error can be computed using the following absolute and relative error terms derived from (3):

$$\Delta G_i(\tan\delta) = -\frac{R_i}{p_e G_i^2} \Delta G_i \quad (5)$$

$$\delta_{p_e}(\tan\delta) = -\delta p_e \quad (6)$$

whereas the error term of the total loss tangent related to the changes of the  $Q$ -factor due to conduction losses is

$$\Delta Q_0(\tan\delta) = \frac{Q_{0d}^{-1} - Q_0^{-1}}{p_e} \quad (7)$$

where  $Q_{0d}$  is the  $Q$ -factor of the FPOR loaded with the lossless sample. Equation (7) accounts for the change of losses (i.e., geometric factors) in both of the mirrors. It should be emphasized that if changes of geometric factors and energy filling factors are accounted for, the impact of these errors on the extraction of the complex permittivity can be suppressed.

According to (6), the relative error of the energy filling factor estimation contributes directly to the relative error of the loss tangent, whereas the impact of neglected changes of the geometric factors depends on both  $p_e$  and  $G_i^2$ . Geometric factors of the planar and spherical mirrors, as shown in Fig. 8,

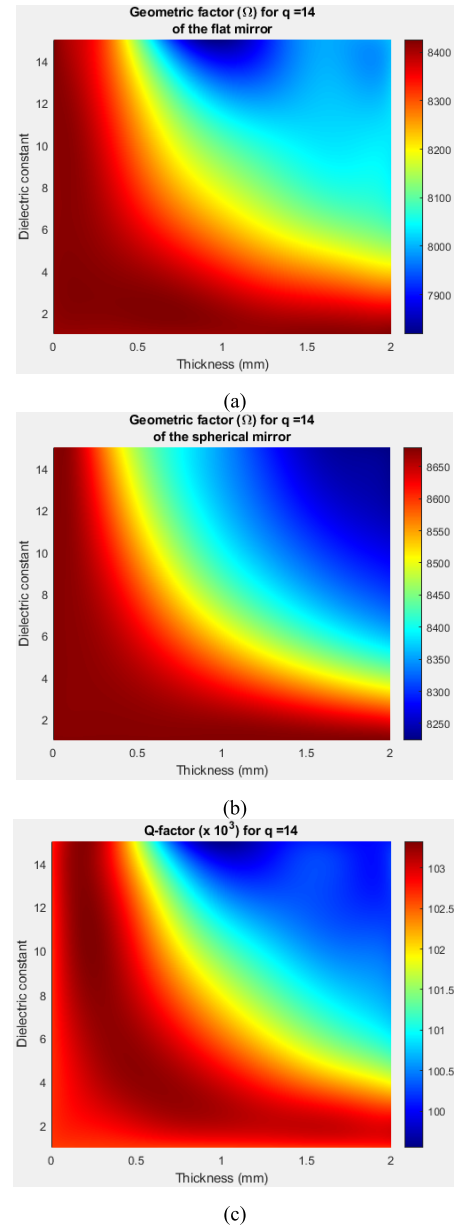


Fig. 8. Geometric factor of the (a) flat and (b) spherical mirror, and (c)  $Q$ -factor at the  $TEM_{0,0,14}$  mode as a function of the dielectric constant and thickness of the sample.

imply that conduction losses are increasing at both mirrors with the increase of the electric thickness of the sample. If that behavior is not accounted for, the increase of mirrors' conduction losses will be erroneously contributed to the sample, thus, overestimating the loss tangent. The use of (5) to the results shown in Fig. 8(a) indicates that the loss tangent error term due to  $G_1$  can be as large as  $\Delta G_1(\tan\delta) = 1.4 \times 10^{-5}$  for  $(Dk = 15 \text{ and } t = 2 \text{ mm})$  at the  $TEM_{0,0,14}$  mode. The contribution of  $G_2$  is only slightly smaller for electrically thick samples.

Fig. 9 shows a loss tangent percentage error term due to energy filling factor computed with (4) as compared to rigorous calculations. The error term is the largest for electri-

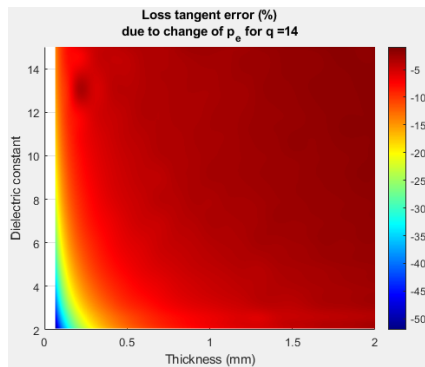


Fig. 9. Loss tangent percentage error term due to energy filling factor at the  $TEM_{0,0,14}$  mode.

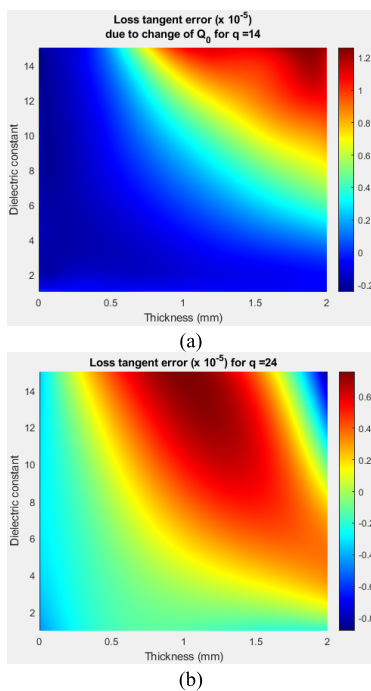


Fig. 10. Loss tangent error term due to  $Q_0$  at the (a)  $TEM_{0,0,14}$  and (b)  $TEM_{0,0,24}$  modes.

cally thin samples where it can be as large as  $-50\%$ . In such a case, rigorous computation of  $p_e$  in the presence of the sample becomes the must to avoid substantial underestimation of the loss tangent.

The overall contribution of  $(G_1, G_2, p_e)$  on the  $Q$ -factor is presented in Fig. 10 computed at a few  $TEM_{0,0,q}$  modes. It can be noted that the assumption that the  $Q$ -factor due to conduction losses,  $Q_0$ , does not change after insertion of the sample is valid only for the samples that are either very thin or exhibit a very low  $Dk$ . Fig. 10 indicates that the loss tangent can be underestimated for thin samples, mainly due to too small energy filling factor amplifying the error in (7), whereas for electrically thick samples, it can be overestimated mostly due to decrease of the geometric factors. In general, the largest loss tangent error due to changes of the geometric factors is about  $\pm 10^{-5}$  and the maximum of this error shifts

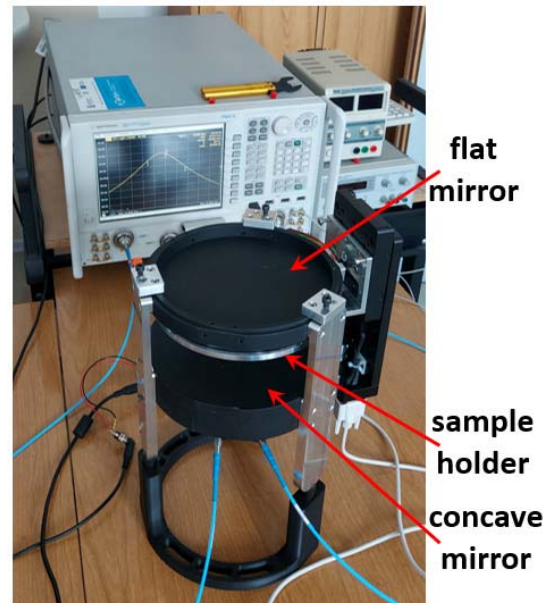


Fig. 11. Experimental setup.

toward thinner samples with the frequency. It implies that de-embedding of the error is crucial for extremely low-loss samples, like sapphire, the loss tangent of which is comparable with the estimated error level.

#### IV. EXPERIMENTS

Experiments were performed in the setup shown in Fig. 11, which consists of the PC FPOR terminated with adjustable 2.4-mm male connectors, vector network analyzer (VNA), N5245A, and a PC computer with the measurement software. Both mirrors are made of silver-plated brass painted black. Dimensions of the setup are given in Fig. 1. The coaxial couplers are applied at a spherical mirror with one coupler centered exactly at the revolution axis of the mirror and the other located slightly off the center. The mode tracking algorithm operates in a similar way as in the DC FPOR [4], so its detailed study is omitted here. In both DC and PC FPORs, the sample has to be moved initially to the minimum of the electric field, where the shift of each resonance frequency due to the sample is the smallest, so that the mode identification is robust. The essential difference, however, is that the position of the maximum of the electric field of an odd mode is well-defined in the DC FPOR, namely, at the center of the resonator's length, whereas it changes with the thickness and  $Dk$  of the MUT in the PC FPOR. Fortunately, the position of the minimum of the electric field, corresponding to the maximum of the resonance frequency, is relatively well-defined (see Fig. 6). Consequently, the sample is initially shifted there and, subsequently, tracked toward the maximum of the electric field by minimizing the resonance frequency.

As it has been explained in [4] and [7], raw data obtained during the measurement with a VNA are resonance frequency and the corresponding  $Q$ -factor, which are subsequently compared against computational results stored in the form

of lookup tables (see Section III). The  $Q$ -factor is computed using a circle-fitting algorithm, which provides the mean value and the corresponding standard deviation [21]. The analysis of (3) leads to the conclusion that the uncertainty of the loss tangent is imposed by the uncertainty of the  $Q$ -factor estimation from raw measurement data

$$\Delta(\tan\delta) = p_e^{-1} \left( \frac{\Delta Q_t}{Q_t^2} + \frac{\Delta Q_0}{Q_0^2} \right) \quad (8)$$

where  $\Delta Q_t$  ( $\Delta Q_0$ ) is a standard deviation of the measured  $Q$ -factor of the FPOR with (without) the sample. Electronic calibration module, N4693D, has been applied before the measurement. To make sure that the  $Q$ -factor is unloaded, the coupling level is adjusted in such a way that the maximum of transmission,  $|S_{21}|$ , is less than ca.  $-50$  dB.

As it has been explained in [7], the accuracy of  $Dk$  estimation is imposed mainly by the thickness uncertainty,  $\delta t$ , and for electrically thin samples, it reads

$$\Delta\epsilon_r = -(\epsilon_r - 1)\delta t. \quad (9)$$

These two error measures will be applied in the presented measurements in the form of error bars. Three types of the samples, namely, C-plane sapphire ( $t = 267 \mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$ ), high-resistivity (HR) silicon ( $t = 387 \mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$ ), and Z-cut monocrystalline quartz ( $t = 933 \mu\text{m} \pm 2 \mu\text{m}$ ), will be measured. The choice of the first two samples is mostly due to the fact that these materials could not be measured accurately using a DC FPOR ( $D = 100$  mm and  $R = 150$  mm) due to too large  $Dk$  and the resulting detrimental coupling of  $\text{TEM}_{0,0,q}$  modes with  $\text{LG}_{0,1,q-1}$  modes [8]. The quartz sample has been chosen to confirm that the method is also applicable in the measurement of low-permittivity materials.

Fig. 12 shows the results obtained for the sapphire sample indicating that  $Dk$  is constant across the whole 20–50-GHz frequency bandwidth (on average:  $Dk = 9.392$ ), which is in decent agreement with the reference results obtained using the setup based on whispering gallery modes ( $Dk = 9.400 \pm 0.1\%$  at 21.4 GHz) [22]. Thickness of the sapphire sample varies in the  $\pm 1 \mu\text{m}$  range, which contributes to the uncertainty of  $Dk$  at the level of ca. 0.37% [see error bars in Fig. 12(a)]. On the contrary, the results obtained using a DC FPOR exhibit the impact of the crossing with the spurious mode at ca. 33 GHz, which makes this setup useless for electrically thick samples [8]. Regarding losses, Fig. 12(b) is in good agreement with [23], where it has been shown that the in-plane loss tangent of the C-plane sapphire increases almost linearly with frequency reaching ca.  $\tan\delta = 1.5 \times 10^{-5}$  at 16 GHz at room temperature. The uncertainty in the  $Q$ -factor estimation decreases from about  $\Delta Q = 1100$  at 21 GHz down to about  $\Delta Q = 320$  at 47 GHz, which in conjunction with the increase of the  $Q$ -factor with frequency (compare Fig. 4) leads to the loss tangent error bars slightly falling with frequency [see Fig. 12(b)].

Fig. 13 shows the measurement results of HR silicon and it can be noted that  $Dk$  is also constant across the whole 20–50-GHz frequency bandwidth (on average:  $Dk = 11.649$ ), which is in agreement with the reference results obtained using split-post dielectric resonators ( $Dk = 11.655 \pm 1.0\%$

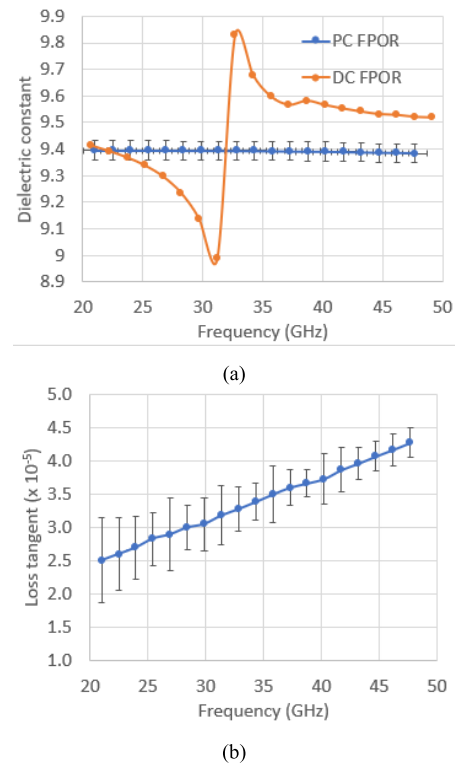


Fig. 12. (a) Dielectric constant and (b) loss tangent of C-plane sapphire ( $t = 267 \mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$ ) measured with the PC FPOR and DC FPOR (as in [8]).

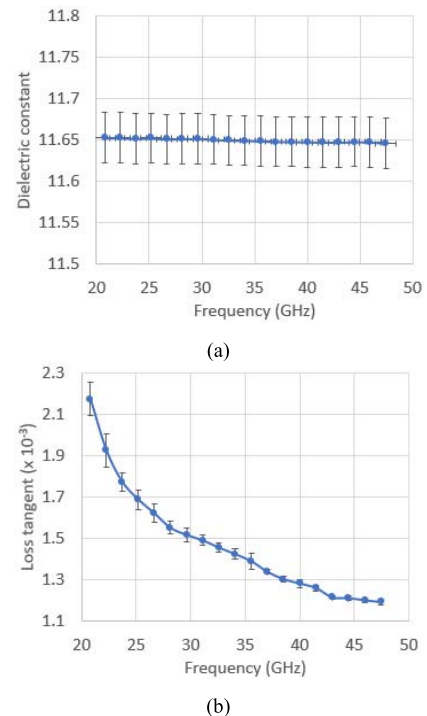


Fig. 13. (a) Dielectric constant and (b) loss tangent of silicon ( $t = 387 \mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$ ) measured with the PC FPOR.

at 6.6 GHz at 295 K) [24]. Thickness of the sample varies in the  $\pm 1 \mu\text{m}$  range, which contributes to the uncertainty of  $Dk$  at the level of ca. 0.26%. Losses of HR silicon



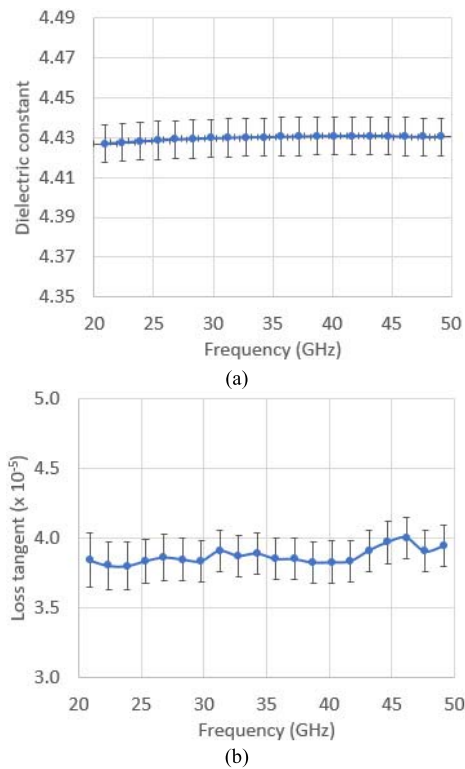


Fig. 14. (a) Dielectric constant and (b) loss tangent of Z-cut monocrystalline quartz ( $t = 933 \mu\text{m} \pm 2 \mu\text{m}$ ) measured with the PC FPOR.

are usually parametrized with resistivity,  $\rho$  (i.e., inverse of conductivity,  $\sigma$ ), which is constant across the microwave spectrum [25]. Consequently, the loss tangent is expected to fall with frequency, as shown in Fig. 13(b). The extracted dielectric loss is  $\tan\delta_t = 6 \times 10^{-4}$  and conduction losses are  $\sigma = 17.8 \times 10^{-3} \text{ S/m}$  ( $\rho = 5.61 \text{ k}\Omega\text{cm}$ ) (compare [7]).

Fig. 14 presents the results obtained for the Z-cut monocrystalline quartz, indicating that Dk is also constant across the whole 20–50-GHz frequency bandwidth (on average:  $Dk = 4.43$ ), which is in good agreement with the reference results obtained using the setup based on whispering gallery modes ( $Dk = 4.43 \pm 0.004$  at 35.0 GHz) [22]. Thickness of the sample varies in the  $\pm 2 \mu\text{m}$  range, which contributes to the uncertainty of Dk at the level of ca. 0.21% [see error bars in Fig. 14(a)]. Regarding losses, Fig. 14(b) is in decent agreement with [23] and ( $\tan\delta = 3 \times 10^{-5} \pm 100\%$  at 10.0 GHz) [26], where it has been shown that the in-plane loss tangent varies from sample to sample at the level of a few  $10^{-5}$ .

## V. CONCLUSION

Recent advancements in material characterization with the aid of a DC FPOR have opened the way for the accurate extraction of the complex permittivity of dielectric sheets in the 20–110 GHz range. However, fundamental limitations of that geometry of the resonator have also been determined, including the upper limit of the electric thickness of the sample due to mode coupling and the lower limit of the loss tangent due to low energy filling factor. To overcome those measurement limits, it has been proposed in this article to use

a PC FPOR, which lacks mode coupling issues, whereas the filling factor is at least twice larger.

The use of the PC FPOR for accurate characterization of dielectric sheets would not be possible without a newly developed SMM, which combines high accuracy with low computational effort with no limits imposed on the thickness and position of the sample. The SMM has been applied in this article to gain the knowledge on basic features of the PC FPOR and several novel findings have been made. First, paraxial approximation standing behind alternative EM models of the FPOR underestimates a Gaussian beam waist by a few percentage, whereas Gaussicity of the beam in the PC FPOR is as large as 99.97%. Second, it has been determined that scattering losses visibly affect the  $Q$ -factor at frequencies above 30 GHz, although their level is well over  $Q_{\text{scat}} = 10^6$  up to 50 GHz, so that  $Q_0/Q_{\text{scat}} \approx 0.16$ . Third, it has turned out that conduction losses at both mirrors are not equal, whereas insertion of the sample contributes to the increase of those losses. If neglected, the loss tangent error would be at the level of ca.  $\pm 10^{-5}$ . It can, however, be suppressed if geometric and energy filling factors are rigorously computed.

Another novelty addressed in this article is a general study of the relation between the resonance frequency and the position of the sample, which allowed the development of the automated mode identification and tracking algorithm. It has also been shown that materials with the loss tangent at the level of ca.  $10^{-5}$ , like sapphire, or larger can be measured with the uncertainty depending mainly on the  $Q$ -factor uncertainty. This is a substantial advancement, as compared to the DC FPOR, where the loss tangent less than  $10^{-4}$  is hardly measurable due to too low energy filling factor. In addition to that, no mode coupling has been observed in the experiments, which means that fundamental limitations imposed on the sample's thickness that can be characterized with the PC FPOR are not known. In practice, however, the thickness is limited by the loss tangent, which in case of really thick samples may lead to a prohibitively low  $Q$ -factor.

## REFERENCES

- [1] A. L. Cullen and P. K. Yu, "The accurate measurement of permittivity by means of an open resonator," *Proc. R. Soc. Lond. A, Math. Phys. Sci.*, vol. 325, no. 1563, pp. 493–509, 1971.
- [2] P. K. Yu and A. L. Cullen, "Measurement of permittivity by means of an open resonator. I. Theoretical," *Proc. Roy. Soc. London A, Math. Phys. Sci.*, vol. 380, pp. 49–71, Mar. 1982.
- [3] T. M. Hirvonen, P. Vainikainen, A. Lozowski, and A. V. Raisanen, "Measurement of dielectrics at 100 GHz with an open resonator connected to a network analyzer," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 45, no. 4, pp. 780–786, Aug. 1996.
- [4] T. Karpisz, B. Salski, P. Kopyt, and J. Krupka, "Measurement of dielectrics from 20 to 50 GHz with a Fabry–Pérot open resonator," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 67, no. 5, pp. 1901–1908, May 2019.
- [5] B. Salski, T. Karpisz, P. Kopyt, and J. Krupka, "Rigorous scattering matrix analysis of a Fabry–Pérot open resonator," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 68, no. 12, pp. 5093–5102, Dec. 2020.
- [6] H. Suzuki and T. Kamijo, "Millimeter-wave measurement of complex permittivity by perturbation method using open resonator," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 57, no. 12, pp. 2868–2873, Dec. 2008.
- [7] B. Salski, J. Cuper, T. Karpisz, P. Kopyt, and J. Krupka, "Complex permittivity of common dielectrics in 20–110 GHz frequency range measured with a Fabry–Pérot open resonator," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 119, no. 5, Aug. 2021, Art. no. 052902.

- [8] B. Salski, P. Czekala, T. Karpisz, and P. Kopyt, "Mode coupling in a Fabry-Pérot open resonator," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 70, no. 2, pp. 299–306, Jan. 2021.
- [9] A. Taflov and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed. Norwood, MA, USA: Artech House, 2005.
- [10] J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2015.
- [11] M. Warecka, R. Lech, and P. Kowalczyk, "Efficient finite element analysis of axially symmetrical waveguides and waveguide discontinuities," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 67, no. 11, pp. 4291–4297, Nov. 2019.
- [12] E. A. Dunn, J.-K. Byun, E. D. Branch, and J.-M. Jin, "Numerical simulation of BOR scattering and radiation using a higher order FEM," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 3, pp. 945–952, Mar. 2006.
- [13] G. G. Gentili, M. Khosronejad, G. Pelosi, and S. Selleri, "Analysis of elliptical structures with constant axial ratio by body-of-revolution finite element method and transformation optics," *Int. J. Microw. Wireless Technol.*, vol. 11, nos. 5–6, pp. 501–508, Jun. 2019.
- [14] X. Rui, J. Hu, and Q. H. Liu, "Higher order finite element method for inhomogeneous axisymmetric resonators," *Prog. Electromagn. Res.*, vol. 21, pp. 189–201, 2010.
- [15] M. Warecka, R. Lech, and P. Kowalczyk, "Hybrid analysis of structures composed of axially symmetric objects," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 68, no. 11, pp. 4528–4535, Nov. 2020.
- [16] A. D. Greenwood and J.-M. Jin, "Finite-element analysis of complex axisymmetric radiating structures," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 8, pp. 1260–1266, Aug. 1999.
- [17] G. G. Gentili, M. Khosronejad, R. Nesti, G. Pelosi, and S. Selleri, "An efficient 2.5-D finite-element approach based on transformation optics for the analysis of elliptical horns," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 66, no. 9, pp. 4782–4790, Sep. 2018.
- [18] D. Kajfez and P. Guillon, *Dielectric Resonators*. Norwood, MA, USA: Artech House, 1964.
- [19] J. Cuper, B. Salski, T. Karpisz, A. Pacewicz, and P. Kopyt, "Conductivity measurement in mm-wave band with a Fabry-Pérot open resonator," in *IEEE MTT-S Int. Microw. Symp. Dig.*, Atlanta, GA, USA, Aug. 2020, pp. 996–998.
- [20] J. Krupka, M. E. Tobar, J. G. Hartnett, D. Cros, and J. M. L. Floch, "Extremely high-Q factor dielectric resonators for millimeter-wave applications," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 53, no. 2, pp. 702–712, Feb. 2005.
- [21] D. Kajfez, "Numerical determination of two-port parameters from measured unrestricted data," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-24, no. 1, pp. 4–11, Mar. 1975.
- [22] J. Krupka, K. Derzakowski, M. Tobar, J. Hartnett, and R. G. Geyer, "Complex permittivity of some ultralow loss dielectric crystals at cryogenic temperatures," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 10, no. 5, pp. 387–392, 1999.
- [23] J. G. Hartnett, M. E. Tobar, E. N. Ivanov, and J. Krupka, "Room temperature measurement of the anisotropic loss tangent of sapphire using the whispering gallery mode technique," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr., Freq. Control*, vol. 53, no. 1, pp. 34–38, Jan. 2006.
- [24] J. Krupka, J. Breeze, A. Centeno, N. Alford, T. Claussen, and L. Jensen, "Measurements of permittivity, dielectric loss tangent, and resistivity of float-zone silicon at microwave frequencies," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 54, no. 11, pp. 3995–4001, Nov. 2006.
- [25] J. Krupka, P. Kaminski, R. Kozlowski, B. Surma, A. Dierlamm, and M. Kwestarz, "Dielectric properties of semi-insulating silicon at microwave frequencies," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 107, Oct. 2015, Art. no. 082105.
- [26] J. Mazierska, J. Krupka, M. Jacob, and D. Ledenyov, "Complex permittivity measurements at variable temperatures of low loss dielectric substrates employing split post and single post dielectric resonators," in *IEEE MTT-S Int. Microw. Symp. Dig.*, vol. 3, Jun. 2004, pp. 1825–1828.

## [MW5] Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures

M. Warecka, G. Fotyga, P. Kowalczyk, R. Lech, M. Mrozowski, A. Pacewicz, B. Salski, J. Krupka

IEEE Microwave and Wireless Components Letters  
vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022

Wkład autorki:

rozszerzenie i implementacja sformułowania dla metody elementów skończonych uwzględniającego symetrię osiową o możliwość analizy ośrodków tensorowych (ferrytowych). Zastosowanie projekcji i podstawienia pozwalających na redukcję rozwiązań pasywnych, wykonanie implementacji oraz symulacji opisanych w sekcji wyniki numeryczne.

# Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures

Malgorzata Warecka<sup>1</sup>, Graduate Student Member, IEEE, Grzegorz Fotyga<sup>2</sup>, Member, IEEE, Piotr Kowalczyk<sup>1</sup>, Rafał Lech<sup>1</sup>, Senior Member, IEEE, Michał Mrozowski<sup>1</sup>, Fellow, IEEE, Adam Pacewicz<sup>1</sup>, Bartłomiej Salski<sup>1</sup>, Member, IEEE, and Jerzy Krupka<sup>1</sup>, Fellow, IEEE

**Abstract**—The finite-element method (FEM) is applied for modal analysis of ferrite-loaded spherical resonators. To improve the efficiency of the numerical calculations, the body-of-revolution (BOR) technique is utilized. Due to the frequency-dependent ferrite permeability, FEM leads to a nonlinear eigenvalue problem that is challenging to solve. To this end, Beyn's method is proposed. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by comparing with the results obtained analytically and with the measured data.

**Index Terms**—Body of revolution (BOR), ferrites, finite-element method (FEM), spherical resonators.

## I. INTRODUCTION

CAVITIES are widely used for the characterization of the magnetic properties of dispersive gyrotropic media such as ferrites [1]. Other application areas of ferrite-loaded cavities include the acceleration of heavy ions in synchrotrons [2], [3] or the emerging broad field of cavity spintronics [4]. The rigorous computation of the complex eigenfrequencies of cavities loaded with dispersive gyrotropic media with negative permeability (permittivity) tensor components is still a challenging problem in electromagnetics. Walker [5] developed an analytic transcendental equation (TDE) of a gyromagnetic sphere located in free space under the magnetostatic approximation and it enables the determination of the real eigenfrequencies of the so-called magnetostatic modes. In recent years, it has been thoroughly demonstrated [6], [7] that the complex eigenfrequencies of a few most dominant resonances in a ferrite sphere can be accurately determined via an analytic electrodynamic TDE formulated for transverse electric (TE)

modes of an isotropic sphere characterized by negative effective permeability. The TDE technique has facilitated substantial improvements in the accuracy of the characterization of the magnetic properties of ferrite spheres [8]. Despite several advantages, analytical TDEs are only available for relatively simple geometries [1] and are insufficient for the accurate modeling of more complex resonant systems.

Other methods of tackling ferrite-loaded cavity problems have been developed over the past few decades, such as the perturbation approach [9], the finite-difference time-domain (FDTD) [6], frequency-domain finite integration (FIT) [2], [10], extended boundary condition (EBCM) [11], and coupled-field surface-volume integral equation (CFSVIE) [12] methods. The above techniques allow for obtaining comparable results, especially when the geometry structure is simple. However, each of them has some disadvantages: FDTD requires very dense mesh to describe curved surfaces and integral methods are in general less flexible. To the best of the authors' knowledge, there is currently no general and robust method for solving the formulated problem. In particular, resonators loaded with ferrite materials have not been treated with finite-element method (FEM) to date, because of the difficulties associated with the numerical solution of the resulting eigenproblem.

The modal analysis of resonators loaded with ferrite is complicated due to the strong dependence of the medium parameters on frequency (hereafter denoted by  $f$ ). In general, for discrete methods (e.g., FEM), the analysis comes down to a nonlinear eigenvalue problem of the form  $\mathbf{T}(k_0)\mathbf{e} = 0$ , where operator  $\mathbf{T}(k_0) = \mathbf{\Gamma}(k_0) - k_0^2\mathbf{C}(k_0) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Gamma}(k_0)$  and  $\mathbf{C}(k_0)$  are FEM stiffness and mass matrices [13],  $k_0 = 2\pi f/c$  is the normalized resonance frequency, with  $c$  being the speed of light, and the eigenvector  $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n$ , corresponding to the electric field associated with resonance. Note that unlike in conventional resonator problems where the media parameters are frequency-invariant and FEM formulation gives rise to generalized eigenvalue problems that are easy to solve using standard Krylov space methods [14]–[17], the matrices for ferrite material become frequency-dependent. The eigenvalue problem is nonlinear, and its solution is a nontrivial task, as the matrices involved are large. Because of its large size, looking for the zeros of the determinant of the  $\mathbf{T}(k_0)$  matrix, which is a standard for the mode-matching technique (as employed in TDEs), is not an option. For slowly changing parameters, the eigenvalue problem may be linearized and solved using commonly known methods [18], [19]. Alternatively, an iterative approach employing a sequence of linear problems may be taken [2], in which consecutive resonant frequencies are extracted. However, for strongly nonlinear problems, such as

Manuscript received December 30, 2021; revised February 2, 2022; accepted February 21, 2022. Date of publication March 10, 2022; date of current version July 7, 2022. This work was supported in part by the Ministry Subsidy for Research for Gdansk University of Technology and Projects: POIR.04.04.00-00-1DC3/16-00, POIR.04.04.00-00-1C4B/16-00, both carried out within the TEAM-TECH Programme operated by the Foundation for Polish Science co-financed by the European Union under the European Regional Development Fund, Smart Growth Operational Programme 2014–2020, and the National Science Centre of Poland under Project 2018/31/B/ST7/04006. (Corresponding author: Malgorzata Warecka.)

Malgorzata Warecka, Grzegorz Fotyga, Piotr Kowalczyk, Rafał Lech, and Michał Mrozowski are with the Department of Microwave and Antenna Engineering, Faculty of Electronics, Telecommunications and Informatics, Gdańsk University of Technology, 80-233 Gdańsk, Poland (e-mail: warecka.malgorzata@gmail.com).

Adam Pacewicz and Bartłomiej Salski are with the Institute of Radioelectronics and Multimedia Technology, Warsaw University of Technology, 00-665 Warsaw, Poland.

Jerzy Krupka is with the Warsaw University of Technology, Institute of Microelectronics and Optoelectronics, 00-662 Warsaw, Poland.

Color versions of one or more figures in this letter are available at <https://doi.org/10.1109/LMWC.2022.3154532>.

Digital Object Identifier 10.1109/LMWC.2022.3154532

1531-1309 © 2022 IEEE. Personal use is permitted, but republication/redistribution requires IEEE permission. See <https://www.ieee.org/publications/rights/index.html> for more information.

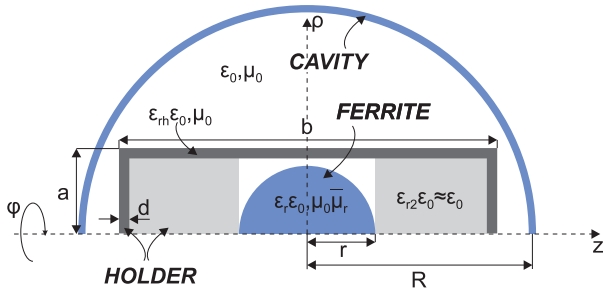


Fig. 1. Cross section of the investigated resonator.

the one considered in this letter (FEM-based modal analysis of ferrite-loaded resonators), linearization is not possible and more sophisticated numerical techniques have to be applied. To address the challenge related to strong nonlinearity, we use an integral method (Beyn's method) [20] that allows one to calculate all eigenvalues located within a specified contour.

In addition, the body-of-revolution (BOR) technique has been applied to reduce the size of the problem and to improve the efficiency of numerical calculations. This technique, applied to structures with axial symmetry, enables the reduction of the problem from three dimensions to a so-called 2.5-D problem (a scalar-vector approach defined in the 2-D domain) described *inter alia* in [21] and [22]. The validity of the approach has been confirmed by an electrodynamic TDE (for a simplified structure without a holder) and by measurements.

## II. FORMULATION OF THE PROBLEM

Let us consider a simple spherical cavity resonator (PEC walls) partially loaded with a ferrite sphere (see Fig. 1).

### A. Finite-Element Method

A combination of FEM and BOR can be successfully applied to analyze ferrite structures. Such an approach significantly reduces the number of elements, which seems to be crucial due to multiple function calls during the process of solving a nonlinear eigenvalue problem. The application of BOR comes with certain limitations, such as the reduction to axially symmetrical structures. This assumption limits the analyses to structures with an external magnetic field,  $H_{\text{ext}}$ , oriented along the  $z$ -axis (axis of the revolution). For these structures, the permeability can then be described [23]–[25] as follows:

$$\bar{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\kappa = \frac{w}{H_{0r}^2 - w^2 + 2j\alpha_G H_{0r} w}, \quad \mu = 1 + \frac{H_{0r} + j\alpha_G w}{w/\kappa} \quad (2)$$

where  $\mu_z = 1$ ,  $H_{0r}$  is an internal magnetic field normalized to  $M_s$ ,  $\alpha_G$  is the Gilbert damping factor [7],  $w = f/(\gamma M_s)$ ,  $M_s$  is the saturation magnetization,  $\gamma$  is the gyromagnetic ratio, and  $f$  is the complex frequency. The formulas constituting the FEM–BOR approach [21], [22] have to be modified due to the presence of the permeability tensor. Moreover, the introduction of the revolution axis causes some additional solutions to the

eigenvalue problems. These solutions can be considered to be spurious, and to eliminate them,  $E_\varphi$  was substituted with  $\rho E_\varphi$ .

Another source of spurious solutions may be the formulation itself, which by default does not eliminate the subspace of solutions with nonzero divergence. Therefore, in the proposed approach, the condition  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  is included in the eigen-solver. For the FEM (weak) formulation, we have

$$-\iint_S \nabla_t(\rho\alpha) \cdot \varepsilon \vec{E}_t \, d\rho \, dz + \iint_S \frac{j\mathbf{m}}{\rho} (\alpha \cdot \varepsilon \vec{E}_\varphi) \, d\rho \, dz = 0 \quad (3)$$

where scalar  $\alpha$  and vector  $\vec{W}$  basis functions are involved to express the electric field

$$\vec{E}_\varphi = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^6 \Psi_{(i)}^{[n]} \alpha_{(i)}^{[n]}, \quad \vec{E}_t = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^8 \Phi_{(i)}^{[n]} \vec{W}_{(i)}^{[n]}. \quad (4)$$

The detailed notation is described in [21]. The relation (3) can be rewritten in the matrix form

$$\mathbf{D}[\Phi \ \Psi]^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = [\mathbf{D}_t \ \mathbf{D}_\varphi] \quad (5)$$

where

$$\mathbf{D}_t = -\iint_S \nabla_t(\rho\alpha_{(i)}^{[n]}) \cdot \varepsilon \vec{W}_{(k)}^{[n]} \, d\rho \, dz \quad (6)$$

$$\mathbf{D}_\varphi = \iint_S \frac{j\mathbf{m}}{\rho} (\alpha_{(i)}^{[n]} \cdot \varepsilon \alpha_{(k)}^{[n]}) \, d\rho \, dz. \quad (7)$$

This approach allows for reducing the solution subspace during the solving process (described in the Section II-B) through the modification of the eigenvector [15], [16]

$$[\Phi \ \Psi]^T \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{D}^T (\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{D}) [\Phi \ \Psi]^T. \quad (8)$$

### B. Nonlinear Eigenvalue Problem

The described FEM–BOR formulation leads to a nonlinear eigenvalue problem of the form  $\mathbf{T}(k_0)\mathbf{e} = \mathbf{0}$ . In order to solve it, we used the integral method (Beyn's method) proposed in [20]. In the first step, one has to specify the region  $\Omega$  on the complex plane in which the eigenvalues are sought. By default,  $\Omega$  is an ellipse with the following parameters: center and the lengths of the real and imaginary axes ( $f_{\text{cen}}$ ,  $f_{\text{RE}}$ , and  $f_{\text{IM}}$ , respectively). It should be noted that for highly nonlinear problems, the size of  $\Omega$  should be relatively small. Next, one has to define the number of quadrature points ( $n_q$ ) and the number of moments ( $n_m$ ), which are the main parameters of the contour integral approximation and strongly affect the accuracy and efficiency of the computations. Once the approximated integrals have been computed, the appropriate subspace can be constructed following the steps described in detail in [20], which leads to the linear eigenvalue problem. This allows one to determine with ease the eigenpairs of the original eigenproblem associated with  $\Omega$ .

## III. NUMERICAL RESULTS

In this section, a structure composed of a ferrite sphere surrounded by the metal walls of the cavity has been analyzed (see Fig. 1).

In order to verify the FEM–BOR method, a TDE has been used, which has been extensively described in [7]

TABLE I  
 RESONANT FREQUENCY OF TE<sub>101</sub> MODE (WITHOUT HOLDER)

$H_{0r}$	TDE [GHz]	this method [GHz]
1	17.847489 + i3.39e-5	17.847459 + i3.47e-5
1.5	17.847506 + i2.41e-5	17.847478 + i2.47e-5
2	17.847526 + i1.94e-5	17.847498 + i1.98e-5
2.5	17.847546 + i1.66e-5	17.847520 + i1.71e-5
3	17.847569 + i1.49e-5	17.847543 + i1.53e-5
3.5	17.847593 + i1.38e-5	17.847568 + i1.42e-5
4	17.847618 + i1.30e-5	17.847595 + i1.34e-5

TABLE II  
 RESONANT FREQUENCY OF THE TM<sub>101</sub> MODE

$H_{ext}$ [Oe]	this method		measurements [GHz]
	without holder [GHz]	with holder [GHz]	
3600	10.8943 + i1.42e-6	10.6580 + i2.77e-6	10.7324 + i4.53e-4
3660	10.8943 + i2.30e-6	10.6580 + i5.83e-6	10.7324 + i4.58e-4
3720	10.8943 + i4.41e-6	10.6580 + i1.92e-5	10.7325 + i5.10e-4
3780	10.8943 + i1.16e-5	10.6580 + i1.69e-4	10.7324 + i4.98e-4
3840	10.8944 + i7.17e-5	10.6579 + i2.71e-5	10.7324 + i4.59e-4
3900	10.8942 + i6.52e-5	10.6579 + i6.71e-6	10.7324 + i4.51e-4

and [26]. The radii of the cavity and ferrite sphere were  $R = 12.0127$  mm and  $r = 0.5415$  mm, respectively. The electromagnetic parameters [7] of the ferrite sphere were set at  $M_s = 380$  Oe,  $\gamma = 35.879928$  MHz/(kA/m),  $\epsilon_r = 16$ , and the ferromagnetic resonance linewidth  $\Delta H = 44.2$  Oe.

Initially, the TE<sub>101</sub> mode was investigated for different values of the normalized internal magnetic field. The results obtained for the mesh composed of 4419 curvilinear elements, for which the convergence was obtained, are presented in Table I. The search region was defined by  $f_{cen} = 17.84$  GHz,  $f_{RE} = 2$  GHz, and  $f_{IM} = 0.2$  GHz, whereas Beyn’s method parameters  $n_q = 101$  and  $n_m = 2$  were a result of the convergence analysis. The relative error (discrepancy between the resonant frequency obtained using this method and TDE) for the real part has not exceeded 0.002%, and for the imaginary part, the error was much higher, i.e., up to 3.2%. The discrepancy for the imaginary part is still an excellent result given that it is six orders of magnitude smaller than the real part.

As a next step of the verification, the FEM–BOR results were compared with measurements of the TM<sub>101</sub> mode versus the external magnetic field [27]–[29]. The results for several values of the external magnetic field are presented in Table II. The search region was defined by  $f_{cen} = 10.72$  GHz,  $f_{RE} = 1$  GHz, and  $f_{IM} = 0.1$  GHz, whereas Beyn’s method parameters were the same as in the previous example. The real parts of the resonant frequencies are shown in Fig. 2 together with a photograph of the manufactured cavity. The simulations were performed for the ferrite sphere with and without a glass holder with parameters  $\epsilon_{th} = 3.8$ ,  $a = 1.505$  mm,  $b = 23$  mm, and  $d = 0.78$  mm (see Fig. 1). The dimensions and ferrite parameters were set in the same way as the previous analysis (similar mesh size—4565 curvilinear elements). It should be noted that the presence of the holder in the cavity has significantly affected the resonant frequency. Moreover, the finite value of the conductance of the metal walls, the losses introduced by the glass holder, and additional holders between the glass and the ferrite sphere have not been considered in the simulation. All of the factors mentioned above had an impact

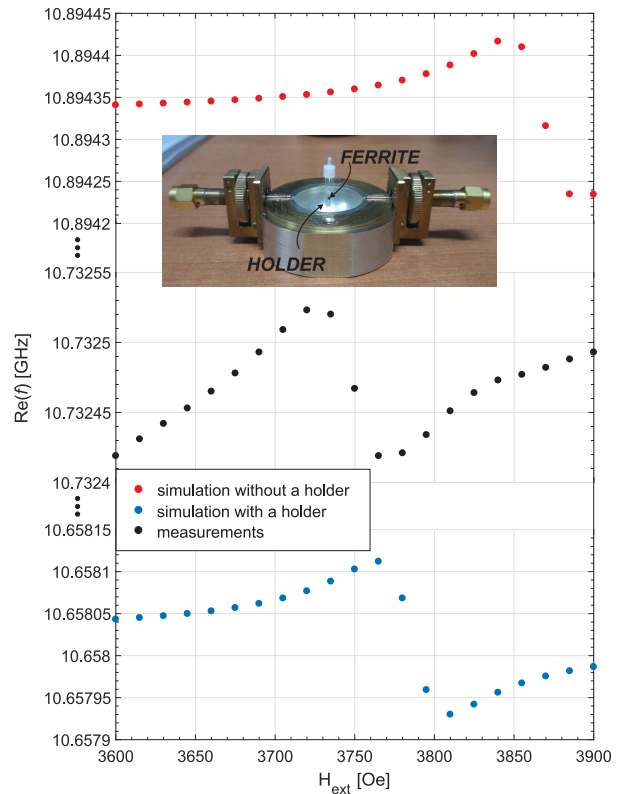


Fig. 2. Real part of the resonant frequency—TM<sub>101</sub> mode of the resonator presented in Fig. 1 and a photograph of the device.

on the discrepancy between the results of the simulations and the measurements, especially with regard to the imaginary parts of the frequencies. The relative error (for the real part) was approximately 1.5% and 0.7% for the structure without and with a holder, respectively.

The effectiveness of the algorithm in modeling ferrite parameters is, above all, confirmed by the tight agreement with the TDE. Although the curves in Fig. 2 are shifted, their shape is the same in each case. The simulations showed that the position of the ripple in the obtained characteristics is strongly dependent on the geometry of the entire system (significant influence of the holder). The parameters of the components used in the system (homogeneity of geometry and material constants) may slightly differ from those adopted in the analysis. It is worth noting that the ripples on the curve are at the level of the sixth significant digit, which confirms the sensitivity of the proposed algorithm.

#### IV. CONCLUSION

The FEM was applied for the first time to the modal analysis of the ferrite-loaded spherical resonators. The validity of this approach and the effectiveness of the integral method for solving nonlinear eigenvalue problems defined by FEM have been confirmed. The results obtained are consistent with the results obtained analytically and with the measured data. In the case of the latter, some discrepancies in the imaginary part are a consequence of the approximated values of the parameters of the materials used in the experiment (neglecting losses in conductors and the holder).

## REFERENCES

- [1] J. Krupka, "Measurement of the complex permittivity, initial permeability, permeability tensor and ferromagnetic linewidth of gyromagnetic materials," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 29, no. 9, Sep. 2018, Art. no. 092001.
- [2] K. Klopfer, W. Ackermann, and T. Weiland, "Computation of complex eigenmodes for resonators filled with gyrotropic materials," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 1, pp. 1–7, Jan. 2014.
- [3] H. Klingbeil, "Ferrite cavities," GSI Helmholtz Centre Heavy Ion Res., Darmstadt, Germany, CERN Yellow Rep. CERN-2011-007, 2012, pp. 299–317. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1201.1154>
- [4] D. Zhang, X.-Q. Luo, Y.-P. Wang, T.-F. Li, and J. Q. You, "Observation of the exceptional point in cavity magnon-polaritons," *Nature Commun.*, vol. 8, no. 1, pp. 1368–1374, Nov. 2017.
- [5] L. R. Walker, "Resonant modes of ferromagnetic spheroids," *J. Appl. Phys.*, vol. 29, no. 3, pp. 318–323, Mar. 1958.
- [6] J. Krupka, B. Salski, P. Kopyt, and W. Gwarek, "Electrodynamic study of YIG filters and resonators," *Sci. Rep.*, vol. 6, no. 1, pp. 1–9, Oct. 2016.
- [7] J. Krupka *et al.*, "Electrodynamic improvements to the theory of magnetostatic modes in ferrimagnetic spheres and their applications to saturation magnetization measurements," *J. Magn. Magn. Mater.*, vol. 487, Oct. 2019, Art. no. 165331.
- [8] A. Pacewicz, "Resonance methods for microwave characterization of ferromagnetic spheres," Ph.D. dissertation, Warsaw Univ. Technol., Warszawa, Poland, 2021.
- [9] S. Eränen, J. Sinkkonen, and T. Stubb, "Degenerate eigenfrequency splitting by gyrotropic sample in spherical microwave resonator," *IEE Proc. H (Microw., Opt. Antennas)*, vol. 128, no. 5, pp. 279–283, Oct. 1981.
- [10] S. Feigh, M. Clemens, R. Schuhmann, and T. Weiland, "Eigenmode simulation of electromagnetic resonator cavities with gyrotropic materials," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 647–650, Mar. 2004.
- [11] G. P. Zouros, G. D. Kolezas, N. Stefanou, and T. Wriedt, "EBCM for electromagnetic modeling of gyrotropic BoRs," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 69, no. 9, pp. 6134–6139, Sep. 2021.
- [12] G. D. Kolezas and G. P. Zouros, "Eigenfrequencies in gyrotropic—Metallic cavities," *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, vol. 28, no. 3, pp. 197–199, Mar. 2018.
- [13] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2010.
- [14] S. Perepelitsa, R. Dyczij-Edlinger, and J.-F. Lee, "Finite-element analysis of arbitrarily shaped cavity resonators using  $H^1$  (curl) elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 2, pp. 1776–1779, Mar. 1997.
- [15] P. Arbenz and R. Geus, "Multilevel preconditioned iterative eigensolvers for Maxwell eigenvalue problems," *Appl. Numer. Math.*, vol. 54, no. 2, pp. 107–121, Jul. 2005.
- [16] A. Dziekonski, M. Rewienski, P. Sypek, A. Lamecki, and M. Mrozowski, "GPU-accelerated LOBPCG method with inexact null-space filtering for solving generalized eigenvalue problems in computational electromagnetics analysis with higher-order FEM," *Commun. Comput. Phys.*, vol. 22, no. 4, pp. 997–1014, Jul. 2017.
- [17] Y. Zhu and A. C. Cangellaris, "Robust finite-element solution of lossy and unbounded electromagnetic eigenvalue problems," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 50, no. 10, pp. 2331–2338, Oct. 2002.
- [18] C. L. Zekios, P. C. Allilomes, and G. A. Kyriacou, "DC and imaginary spurious modes suppression for both unbounded and lossy structures," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 63, no. 7, pp. 2082–2093, Jul. 2015.
- [19] Y. Su and Z. Bai, "Solving rational eigenvalue problems via linearization," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 32, no. 1, pp. 201–216, Jan. 2011.
- [20] W.-J. Beyn, "An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems," *Linear Algebra Appl.*, vol. 436, no. 10, pp. 3839–3863, May 2012.
- [21] M. Warecka, R. Lech, and P. Kowalczyk, "Efficient finite element analysis of axially symmetrical waveguides and waveguide discontinuities," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 67, no. 11, pp. 4291–4297, Nov. 2019.
- [22] M. Warecka, R. Lech, and P. Kowalczyk, "Hybrid analysis of structures composed of axially symmetric objects," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 68, no. 11, pp. 4528–4535, Nov. 2020.
- [23] D. Polder, "On the theory of ferromagnetic resonance absorption," *Phys. Rev.*, vol. 40, no. 2, pp. 99–115, Jan. 1949.
- [24] A. G. Gurevich, *Ferrites at Microwave Frequencies*. New York, NY, USA: Consultants Bureau, 1963.
- [25] A. B. Fuller, *Ferrites at Microwave Frequencies*, no. 23. London, U.K.: IET, 1987.
- [26] *Computations of Resonance Frequencies of Gyromagnetic Resonators*. Accessed: Mar. 2, 2022. [Online]. Available: <http://ztm.ire.pw.edu.pl/aktywnosc/projekty-badawcze/projekt-team-tech-en/>
- [27] J. Krupka, M. E. Tobar, J. G. Hartnett, D. Cros, and J.-M. Le Floch, "Extremely high-Q factor dielectric resonators for millimeter-wave applications," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 53, no. 2, pp. 702–712, Feb. 2005.
- [28] A. Pacewicz, B. Salski, P. Kopyt, O. Chumak, A. Nabialek, and J. Krupka, "Ferromagnetic linewidth measurements of CFMS Heusler alloy films," in *Proc. 22nd Int. Microw. Radar Conf. (MIKON)*, May 2018, pp. 535–540.
- [29] A. Pacewicz, J. Krupka, B. Salski, P. Aleshkevych, and P. Kopyt, "Rigorous broadband study of the intrinsic ferromagnetic linewidth of monocrySTALLINE garnet spheres," *Sci. Rep.*, vol. 9, no. 1, pp. 1–9, Dec. 2019.





## Wkład współautorów

GDAŃSK 15.11.2022

miejsce i czas

Dr hab. Rafał Lech  
Katedra Inżynierii Mikrofalowej i Antenowej  
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki  
Politechnika Gdańska  
Polska

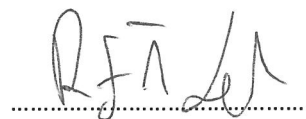
### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. M. Warecka et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.
2. M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk, "Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 68, no. 11, pp. 4528-4535, Nov. 2020.
3. M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk, "Efficient Finite Element Analysis of Axially Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 67, no. 11, pp. 4291-4297, Nov. 2019.
4. P. Kowalczyk, R. Lech, M. Warecka, A. Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 33, no. 2 pp. 178-192, 2019.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Implementacja uogólnionej macierzy impedancji dla struktur jednorodnych wzdłuż wybranej osi
- Implementacja uogólnionej macierzy impedancji dla wrót falowodów cylindrycznych
- Przygotowanie wybranych rysunków i części manuskryptów
- Konsultacje merytoryczne i dobór przykładów numerycznych



podpis

Gdańsk, 15.11.22

miejsce i czas

Dr hab. inż. Grzegorz Fotyga  
Katedra Inżynierii Mikrofalowej i Antenowej  
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki  
Politechnika Gdańska  
Polska

### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. M. Warecka et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Przygotowanie części manuskryptu
- Konsultacje merytoryczne

Grzegorz Fotyga

podpis

Gdańsk, 15.11.2022

miejsce i czas

Dr hab. inż. Piotr Kowalczyk  
Katedra Inżynierii Mikrofalowej i Antenowej  
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki  
Politechnika Gdańska  
Polska

### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. M. Warecka et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.
2. B. Salski, T. Karpisz, M. Warecka, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022.
3. M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk, "Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 68, no. 11, pp. 4528-4535, Nov. 2020.
4. M. Warecka, R. Lech and P. Kowalczyk, "Efficient Finite Element Analysis of Axially Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 67, no. 11, pp. 4291-4297, Nov. 2019.
5. P. Kowalczyk, R. Lech, M. Warecka, A. Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 33, no. 2 pp. 178-192, 2019.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Sformułowanie dla metody elementów skończonych uwzględniające uogólnioną macierz impedancji dla struktur jednorodnych wzdłuż wybranej osi
- Sformułowanie uogólnionej macierzy impedancji dla wrót falowodów cylindrycznych
- Przygotowanie wybranych rysunków i części manuskryptów
- Konsultacje merytoryczne i dobór przykładów numerycznych

Piotr Kowalczyk

podpis

Gdańsk, 18.11.22.

miejsce i czas

Prof. dr hab. inż. Michał Mrozowski  
Katedra Inżynierii Mikrofalowej i Antenowej  
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki  
Politechnika Gdańska  
Polska

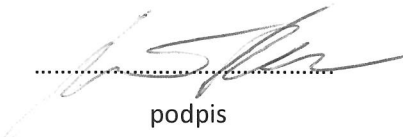
### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. M. Warecka et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Implementacja metody Beyna
- Konsultacje merytoryczne i poprawki edytorskie

  
.....  
podpis

Gdańsk, 2022-XI-16

miejsce i czas

Dr hab. inż. Adam Kusiek

### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. P. Kowalczyk, R. Lech, M. Warecka, A. Kusiek, "Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 33, no. 2 pp. 178-192, 2019.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Implementacja umieszczenia obiektu opisanego uogólnioną macierzą impedancji w falowodzie
- Konsultacje merytoryczne

Adam Kusiek

podpis

Warszawa 10.11.2022

miejsce i czas

Dr hab. inż. Bartłomiej Salski  
Instytut Radioelektroniki i Techniki Multimedialnych  
Wydział Elektroniki i Techniki Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
Polska

### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. M. Warecka et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.
2. B. Salski, T. Karpisz, M. Warecka, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Udział w rozwoju narzędzia obliczeniowego SMM
- Zastosowanie metody SMM do analizy rezonatora
- Udział w eksperymentach
- Konsultacje merytoryczne i poprawki edytorskie

Salski

.....  
podpis

Warszawa 9.11.2022

miejsce i czas

mgr inż. Piotr Czekala  
Instytut Radioelektroniki i Technik Multimedialnych  
Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
Polska

### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. B. Salski, T. Karpisz, M. Warecka, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Zaimplementowanie w języku CUDA C algorytmu pozwalającego na modelowanie otwartego rezonatora Fabry-Perot w konfiguracji płasko-sferycznej obciążonego (lub nie) próbką materiału

Piotr Czekala

podpis



.....Warszawa 9.11.2022.....

miejsce i czas

Dr inż. Adam Pacewicz  
Instytut Radioelektroniki i Technik Multimedialnych  
Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
Polska

### **Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką**

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. M. Warecka et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Wykonanie pomiarów rezonatora sferycznego obciążonego ferrytem
- Przygotowanie części manuskryptu
- Konsultacje merytoryczne i poprawki edytorskie

.....Adam Pacewicz.....

podpis

Wrocław 10.11.2022

miejsce i czas

Prof. Dr hab. inż. Jerzy Krupka  
Instytut Mikroelektroniki i Optoelektroniki  
Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
Polska

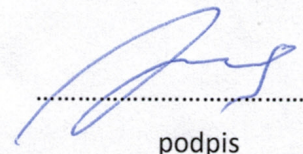
### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. M. Warecka et al., "Modal FEM Analysis of Ferrite Resonant Structures," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 32, no. 7, pp. 819-822, July 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Konsultacje merytoryczne



.....

podpis

Brocomfida (0 11 11. 2022  
miejsce i czas

Dr inż. Tomasz Karpisz  
Instytut Radioelektroniki i Technik Multimedialnych  
Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
Polska

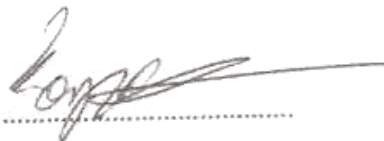
### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. B. Salski, T. Karpisz, M. Warecka, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Realizacja eksperymentów

  
.....  
podpis

Warszawa 9.11.2022

miejsce i czas

Dr hab. inż. Paweł Kopyt  
Instytut Radioelektroniki i Technik Multimedialnych  
Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
Polska

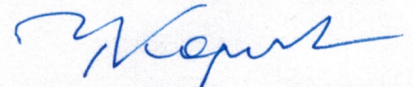
### Oświadczenie o moim wkładzie we wspólną publikację z Małgorzatą Warecką

Odnosząc się do poniższych publikacji:

1. B. Salski, T. Karpisz, M. Warecka, P. Kowalczyk, P. Czekala and P. Kopyt, "Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 70, no. 5, pp. 2732-2742, May 2022.

oświadczam, że mój wkład w ich powstanie był następujący:

- Udział w eksperymentach



.....  
podpis