

Imię i nazwisko autora rozprawy: **Michał Gołębiewski**

Dyscyplina naukowa: **inżynieria lądowa i transport**

### **ROZPRAWA DOKTORSKA**

Tytuł rozprawy w języku polskim:

Badania eksperymentalne i analiza numeryczna sklepień ceglanych.  
Wzmocnienie sklepień z wykorzystaniem struktur tensegrity.

Tytuł rozprawy w języku angielskim:

Experimental study and numerical analysis of masonry vaults.  
Strengthening of vaults using tensegrity structures.

Promotor
<i>podpis</i>
dr hab. inż. Izabela Lubowiecka, prof. PG





## **OŚWIADCZENIE**

Autor rozprawy doktorskiej: Michał Gołębiewski

Ja, niżej podpisany, oświadczam, iż jestem świadomy, że zgodnie z przepisem art. 27 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2021 poz. 1062), uczelnia może korzystać z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

Badania eksperymentalne i analiza numeryczna sklepień ceglanych.  
Wzmocnienie sklepień z wykorzystaniem struktur tensegrity.

do prowadzenia badań naukowych lub w celach dydaktycznych.<sup>1</sup>

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U.2021.478 t.j.), a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem Izabelą Lubowiecką.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami, zgodnie z przepisem art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia 26.10.2022

.....  
*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/nie wyrażam zgody\* na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej.

Gdańsk, dnia 26.10.2022

.....  
*podpis doktoranta*

*\*niepotrzebne usunąć*

<sup>1</sup> Art. 27. 1. Instytucje oświatowe oraz podmioty, o których mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1, 2 i 4–8 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, mogą na potrzeby zilustrowania treści przekazywanych w celach dydaktycznych lub w celu prowadzenia działalności naukowej korzystać z rozpowszechnionych utworów w oryginale i w tłumaczeniu oraz zwielokrotnić w tym celu rozpowszechnione drobne utwory lub fragmenty większych utworów.  
2. W przypadku publicznego udostępniania utworów w taki sposób, aby każdy mógł mieć do nich dostęp w miejscu i czasie przez siebie wybranym korzystanie, o którym mowa w ust. 1, jest dozwolone wyłącznie dla ograniczonego kręgu osób uczących się, nauczających lub prowadzących badania naukowe, zidentyfikowanych przez podmioty wymienione w ust. 1.







## **OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ**

**Autor rozprawy doktorskiej:** Michał Gołębiowski

**Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Badania eksperymentalne i analiza numeryczna sklepień ceglanych. Wzmocnienie sklepień z wykorzystaniem struktur tensegrity.

**Tytuł rozprawy w języku angielskim:** Experimental study and numerical analysis of masonry vaults. Strengthening of vaults using tensegrity structures.

**Język rozprawy doktorskiej:** polski

**Promotor rozprawy doktorskiej:** Izabela Lubowiecka

**Data obrony:**

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Sklepienia murowe; Konstrukcje murowe; Homogenizacja; Wzmocnienia; Tensegrity

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim:** Masonry vaults; Masonry structures; Homogenization; Strengthening; Tensegrity

**Streszczenie rozprawy w języku polskim:** Celem pracy jest opracowanie wzmocnienia zabytkowych sklepień murowych prętowo-ciężnowymi strukturami tensegrity. W tym celu przeanalizowano zagadnienia uszkodzeń, analizy oraz wzmacniania kopuł i sklepień murowych. W kolejnej części rozprawy przedstawiono prace badawczo-rozwojowe zakończone skutecznym wdrożeniem typoszeregu hal namiotowych o konstrukcji prętowo-ciężnowej typu tensegrity. Przeprowadzono badania dynamiczne oraz statyczne sklepienia kolebkowego w skali technicznej oraz jednej z hal namiotowych. Naturalnym połączeniem tych prac jest zaproponowany w rozprawie system wzmocnienia sklepień ceglanych z zastosowaniem struktur tensegrity. System ten został przebadany numerycznie oraz doświadczalnie na fizycznym i numerycznym modelu sklepienia kolebkowego. W pracy przedstawiono też serię symulacji numerycznych wzmocnionego strukturą tensegrity sklepienia o bardziej złożonej geometrii w rzeczywistych wymiarach zaczerpniętych z literatury. W ten sposób wykazano przydatność proponowanego rozwiązania do innych typów sklepień. Zaproponowany system wzmocnienia sklepień strukturami tensegrity ma cechy, które wyróżniają go na tle innych stosowanych obecnie sposobów wzmacniania i naprawy sklepień.

**Streszczenie rozprawy w języku angielskim:** The main goal of the study is to develop the supporting system of historic masonry vaults with tensegrity structures. For this purpose, the issues of damage, analysis and strengthening of masonry domes and vaults were analyzed. The study also presents the research and development works resulting in a successful implementation of a serie of cable-strut tensegrity tent halls. Dynamic and static tests of the barrel vault in technical scale and one of the tent halls were also carried out. The supporting system of historic masonry vaults with tensegrity structures, proposed in the dissertation, is a natural combination of the knowledge gained from studying of masonry vaults and tensegrity domes. The system was tested numerically and experimentally on a physical and numerical model of a barrel vault. In addition, a series of numerical simulations of a groin vault reinforced by tensegrity with more complex geometry in real dimensions taken from the literature were performed. The proposed system for supporting vaults with tensegrity structures differs from other currently used methods for strengthening and repairing masonry vaults.





## *PODZIĘKOWANIA*

Obliczenia wykonano na komputerach Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej.

# Spis treści

1. WPROWADZENIE .....	1
1.2. Teza, cel i zakres badań .....	3
2. CEGLANE KONSTRUKCJE ŁUKOWE.....	4
2.1. Rodzaje konstrukcji łukowych .....	4
2.2. Uszkodzenia, metody wzmacniania i naprawy.....	14
3. STRUKTURY TENSEGRITY .....	18
3.1. Budowa i zastosowania struktur tensegrity .....	23
3.2. Wdrożenie kopuł tensegrity – namioty imprezowe .....	29
4. PODSTAWY MODELOWANIA SKLEPIEŃ MUROWYCH I STRUKTUR TENSEGRITY .....	34
4.1. Modelowanie sklepień murowych .....	34
4.2. Modelowanie struktury tensegrity.....	46
5. PRACE DOŚWIADCZALNE I ANALIZA WYNIKÓW .....	48
5.1. Teoretyczne podstawy analiz rezultatów badań doświadczalnych.....	48
5.2. Badania sklepienia kolebkowego .....	53
5.3. Badania kopuły tensegrity .....	82
6. PROPOZYCJA SYSTEMU WZMACNIANIA SKLEPIEŃ CEGLANYCH KRATOWNICAMI TENSEGRITY .....	90
6.1. Zastosowanie zaproponowanego systemu wzmacniania do sklepienia kolebkowego. ....	93
6.2. Zastosowanie zaproponowanego systemu wzmocnienia do sklepienia krzyżowego.....	102
7. PODSUMOWANIE .....	105
ZAŁĄCZNIKI .....	107
Załącznik 1. ....	107
Załącznik 2. ....	110
Załącznik 3. ....	112
Załącznik 4. ....	113
SPISY .....	116
SPIS LITERATURY.....	116
SPIS ILUSTRACJI .....	127
PRAWA AUTORSKIE DO ILUSTRACJI .....	130
SPIS TABEL .....	132







# 1. WPROWADZENIE

Sklepienia murowe są prawdopodobnie pierwszym znaczącym osiągnięciem budownictwa. Począwszy od sklepień pozornych, przez kopuły starożytnego Rzymu, po kopuły włoskiego renesansu widoczna jest stała tendencja zwiększania ich rozpiętości a także swoboda przekrywania coraz bardziej nieregularnych obszarów. To nowatorskie rozwiązania konstrukcyjne sklepień i kopuł były kamieniami milowymi kolejnych stylów architektonicznych. Zwieńczeniem tej tendencji są poniekąd nowoczesne struktury tensegrity. Sklepienia murowe oraz kopuły tensegrity, chociaż należą do odrębnych epok, są rozwiązaniem tego samego problemu – przekrywania dużych powierzchni.

Konstrukcje prętowo-ciężnowe typu tensegrity znane są od kilkudziesięciu lat (Snelson, 1965; Emmerich, 1964; Buckminster Fuller, 1962). W praktyce inżynierskiej struktury tensegrity wykorzystywane są raczej sporadycznie (Gilewski & Al Sabouni-Zawadzka, 2020), chociaż istnieją m.in. prace studyjne, w których proponuje się zastosowanie tych konstrukcji w inżynierii kosmicznej (Skelton & Longman, 2014; Tibert, 2002). Dużo prac związanych ze strukturami tensegrity dotyczy metod wyznaczania topologii o minimalnej masie (Nagase & Skelton, 2014; Gidak & Fresl, 2012) lub wyznaczania konfiguracji początkowej konstrukcji (ang. form-finding) (Cercadillo-García & Fernández-Cabo, 2016; Juan & Mirats Tur, 2008; Zhang & Ohsaki, 2006).

Poruszenie wywołane pożarem katedry Notre Dame w Paryżu, pękaniem sklepień w kościele św. Mikołaja w Gdańsku czy zaangażowanie społeczności lokalnej i pasjonatów w zachowanie kościoła św. Szymona i Judy Tadeusza w Gnojewie dobitnie dowodzi znaczenia obiektów zabytkowych oraz istotności technik ich naprawy i wzmocnienia. Stałe pogłębianie wiedzy dotyczącej budowli historycznych wynika bezpośrednio z ich ogromnej wartości jak również wartości dzieł sztuki, które się w nich znajdują (Ferrero, Calderini, & Roca, 2022; Tarczewski, 2016; Ramaglia, Lignola, & Prota, 2016). Sprawia to też, że wszelkie prace w tych obiektach wymagają dokładnego przygotowania oraz szczegółowych analiz konstrukcyjnych oraz historyczno-architektonicznych (International Council on Monuments and Sites, 2003). W niniejszej pracy przeanalizowano obydwa typy konstrukcji, zarówno sklepienia murowe, jak i konstrukcje tensegrity. Przedstawiono także wdrożenie kopuł tensegrity jako namiotów dużych rozpiętości, a następnie wykorzystując zdobytą w ten sposób wiedzę, zaproponowano nowatorski sposób wzmocnienia sklepień ceglanych strukturami tensegrity.

Istnieje bogata literatura dotycząca przyczyn uszkodzeń lub awarii sklepień ceglanych, m.in. (Berardi & De Piano, 2018; Baraldi, Cecchi, & Tralli, 2015; Theodossopoulos & Sinha, 2013). Opracowano i wdrożono wiele technologii wzmocnienia łukowych konstrukcji murowych, co opisano m.in. w pracach (Bertolesi et al., 2018; Szołomicki, Berkowski, & Barański, 2015; Bednarz et al., 2011; Bednarz, 2008; Masłowski & Spizewska, 2000; Hojdys & Janowski, 2000; Sieczkowski & Szołomicki, 1999). Zwłaszcza wzmocnianie sklepień materiałami kompozytowymi jest nowoczesną, interesującą i dość dobrze przebadaną metodą. Na

tym tle zaproponowana w niniejszej pracy metoda wzmocnienia sklepień jest metodą nową oferującą możliwość szybkiego przeprowadzenia prac zabezpieczających sklepienia zabytkowe.

Pierwsza część rozprawy dotycząca sklepień murowych zawiera przegląd przyczyn uszkodzeń i awarii, metod modelowania oraz technik ich wzmocnienia. Dużo uwagi poświęcono możliwości numerycznego szacowania nośności sklepień metodami przybliżonymi (łatwo aplikowalnymi w biurach projektowych). W ramach prac doświadczalnych zbadano dynamikę sklepienia kolebkowego w skali technicznej, a wyniki doświadczeń porównano z wynikami uzyskanymi numerycznie.

Druga część pracy dotycząca nowoczesnych struktur tensegrity przedstawia podstawowe metody analizy numerycznej oraz wyznaczania konfiguracji początkowej struktur tensegrity. Opisano również wdrożenie innowacyjnych kopuł tensegrity znajdujących zastosowanie jako namioty imprezowe znacznych (aż do 20 m) rozpiętości. Przeprowadzono badania statyczne oraz dynamiczne rozkładanej kopuły tensegrity o rozpiętości 14,5 m.

W ostatniej części pracy, korzystając z rezultatów wymienionych powyżej prac, opisano i przeanalizowano zaproponowany sposób wzmocnienia sklepienia kolebkowego strukturą tensegrity. Zbadano zasadność tego typu rozwiązania, analizując zachowanie mechaniczne wzmocnianego sklepienia kolebkowego zaobserwowane w doświadczeniu oraz wyniki symulacji jego modelu numerycznego. Zaproponowane rozwiązanie wzmocnienia sklepienia strukturą tensegrity zastosowano także do modelu bardziej złożonego konstrukcyjnie sklepienia, sklepienia krzyżowego. Wyniki analizy numerycznej tego układu potwierdziły możliwość wykorzystania wzmocnienia tensegrity i w tym przypadku.

Uzyskane wyniki doświadczalne i numeryczne pozwoliły wnioskować o przydatności tego typu wzmocnień w działaniach związanych z zachowaniem zabytkowych sklepień ceglanych.

## 1.2. Teza, cel i zakres badań

### Teza:

**Konstrukcje typu tensegrity mogą być stosowane jako wzmocnienie sklepień ceglanych.**

### Cel:

Rozpoznanie pracy statycznej oraz dynamicznej łukowych konstrukcji ceglanych.

Rozpoznanie pracy statycznej oraz dynamicznej konstrukcji prętowo-ciężnowych typu tensegrity.

Wdrożenie konstrukcji kopuł tensegrity jako namiotów imprezowych.

Propozycja i analiza pracy systemu wzmocnienia sklepień ceglanych strukturami tensegrity.

### Zakres badań:

- przegląd metod wzmocniania sklepień ceglanych;
- badania sklepienia ceglanego w skali technicznej;
  
- opracowanie rozwiązań konstrukcyjnych umożliwiających łatwe składanie i montaż konstrukcji kopuł tensegrity;
- projekt konstrukcji kopuł tensegrity o sygnalizowanym mechanizmie zniszczenia;
- projekt typoszeregu konstrukcji kopuł tensegrity złożonych z powtarzalnych elementów;
- opracowanie technologii produkcji, transportu oraz montażu namiotów imprezowych typu tensegrity;
- analiza numeryczna oraz badania eksperymentalne zrealizowanych konstrukcji;
  
- opracowanie koncepcji wzmocnienia sklepień ceglanych strukturami tensegrity;
- badania eksperymentalne oraz analiza numeryczna sklepienia ceglanego w skali technicznej wzmocnionego strukturami tensegrity;
- modele numeryczne sklepienia wzmocnionego strukturami tensegrity;
- dyskusja systemu wzmocnienia sklepień ceglanych strukturami tensegrity.

## 2. CEGLANE KONSTRUKCJE ŁUKOWE

Sklepienia murowe wznoszone w Centralnej Europie zazwyczaj wykorzystywały jako budulec cegłę paloną wiązaną zaprawą. Cegła wypalana pojawiła się około IV w p.n.e. i w zbliżonej formie dotrwała do naszych czasów. Od czasów babilońskich w ceglach wytłaczano napisy lub stemple – znaki wytwórcy. Na ceglach wytwarzanych przed wprowadzeniem maszyn często na jednej z podstaw widoczne są ślady wyrównywania jej palcami. Cegły palone miały różne wymiary w zależności od regionu i epoki, (Sieczkowski & Szołomicki, 1999) zestawiał wymiary cegieł gotyckich w Polsce – Tab. 1. Starożytne cegły rzymskie, stosowane również jako dachówki, osiągały wymiary do 58x58x4 cm.

**Tab. 1 Wymiary cegieł gotyckich w Polsce wg (Sieczkowski & Szołomicki, 1999)**  
*l – długość, s – szerokość, h – wysokość.*

wiek		Małopolska	Śląsk	Wielkopolska	Mazowsze	Pomorze
		[mm]				
XIII	<i>l</i>	265	250-270	250-260	255-260	280-320
	<i>s</i>	120-130	125-130	110-120	110	120-150
	<i>h</i>	85-95	85-90	75-90	90	90-110
XIV	<i>l</i>	240-250	263-285	260-270	260-285	
	<i>s</i>	120-125	112-118	130-135	120-135	
	<i>h</i>	80	84-93	85-90	90-100	
XV	<i>l</i>	280-285	262-275		260-280	
	<i>s</i>	125-130	115-125		120-140	
	<i>h</i>	75-85	85-90		76-85	

Wraz z wynalezieniem cementu romańskiego oraz portlandzkiego w XIX wieku znacząco zmienia się charakterystyka wytrzymałościowa stosowanych w budownictwie zapraw. Historyczne zaprawy wapienne charakteryzują się właściwościami plastycznymi (w typowym dla budynków murowych zakresie naprężeń) podczas gdy zaprawy cementowo-wapienne w tych samych warunkach doznają zazwyczaj znacznie mniejszych odkształceń (pracując w zakresie sprężystym) (Sieczkowski & Szołomicki, 1999).

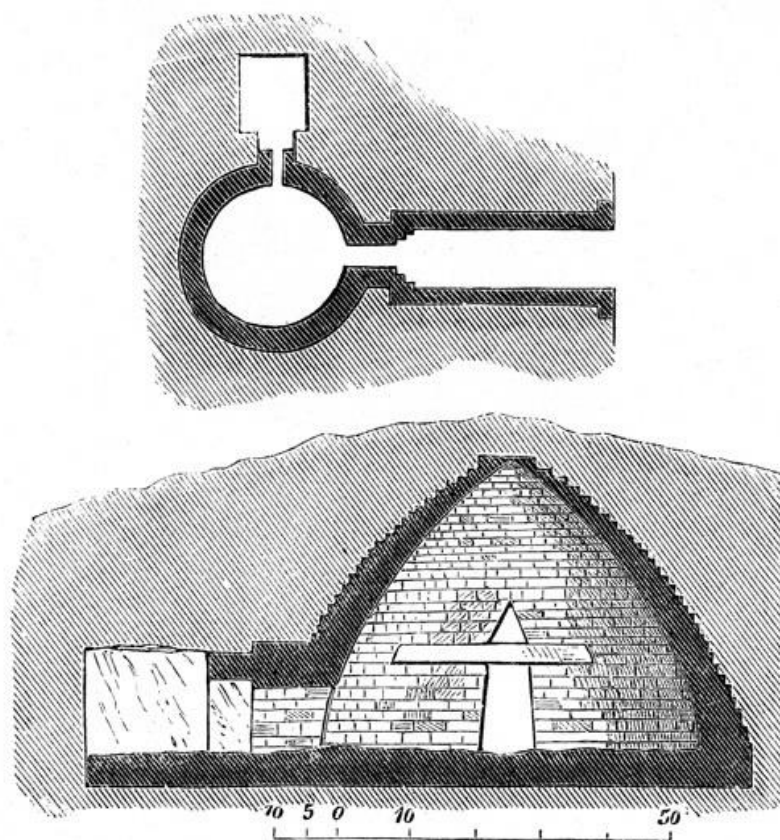
### 2.1. Rodzaje konstrukcji łukowych

Jednym z głównych problemów konstrukcyjnych budownictwa jest przekrywanie dużych przestrzeni. Kolejne rozwiązania tego problemu często stanowią kamienie milowe rozpoczynające epokę w historii architektury np. kopuła katedry Santa Maria del Fiore we Florencji autorstwa Filippo Brunelleschiego lub wyraźnie odróżniające epoki (sklepienia gotyckie i romańskie). Poniżej przedstawiono rodzaje i zgrubną charakterystykę kopuł i sklepień w ujęciu chronologicznym.

#### 2.1.1. Kopuły

Brak materiałów wytrzymałych rozciąganie i zginanie skłaniał do poszukiwania rozwiązań umożliwiających przekrycie większych przestrzeni konstrukcjami nie poddawanych zginaniu.

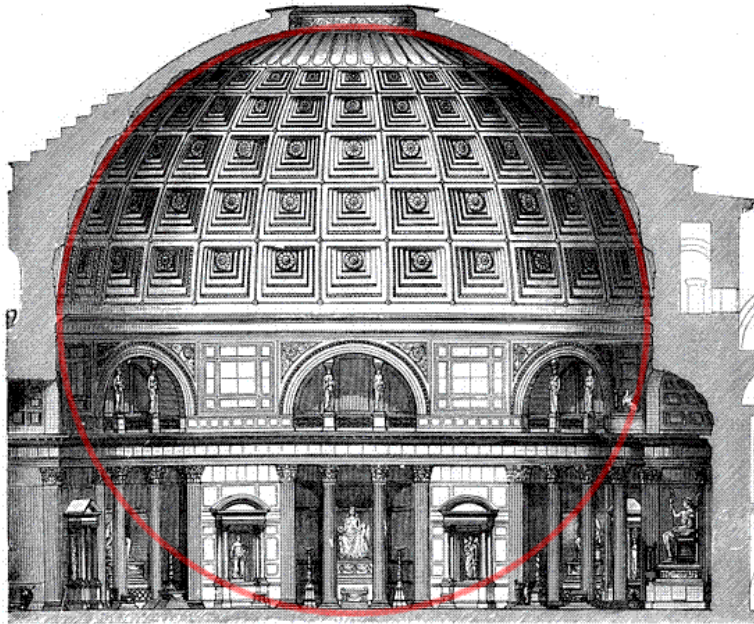
Jednym z takich rozwiązań jest sklepienie pozorne. Konstrukcję tę zastosowano w Wielkiej Galerii Piramidy Cheopsa. Składa się ona z poziomych bloków im wyżej położonych, tym bardziej wysuniętych ku sobie. Stopniowo zwężająca się przestrzeń pomiędzy ścianami umożliwia przekrycie Galerii stropem o mniejszej rozpiętości. Warto zauważyć, że sklepienie pozorne, poza przybliżonym kształtem, nie ma nic wspólnego z istotą konstrukcji sklepienia. Takie samo rozwiązanie (stopniowo wysuwane ku sobie poziome bloki) stosowano przy budowie kopuł pozornych (fałszywych). Forma ta była charakterystyczna zwłaszcza dla grobowców mykeńskich. Sklepienia i kopuły pozorne stosowano zazwyczaj w budowlach masywnych lub podziemnych. Zapewniało to stabilizację niższych bloków sklepień pozornych, które, gdyby nie były dociążone, straciłyby równowagę. W ten sposób około roku 1300 p.n.e. zbudowano tolos pokazany na Rys. 1, Skarbiec Atreusza (inaczej: Grób Agamemnona). Centralna kolista komnata budowli ma średnicę około 15 metrów.



Rys. 1 Skarbiec Atreusza w Mykenach – rzut i przekrój <sup>2</sup>

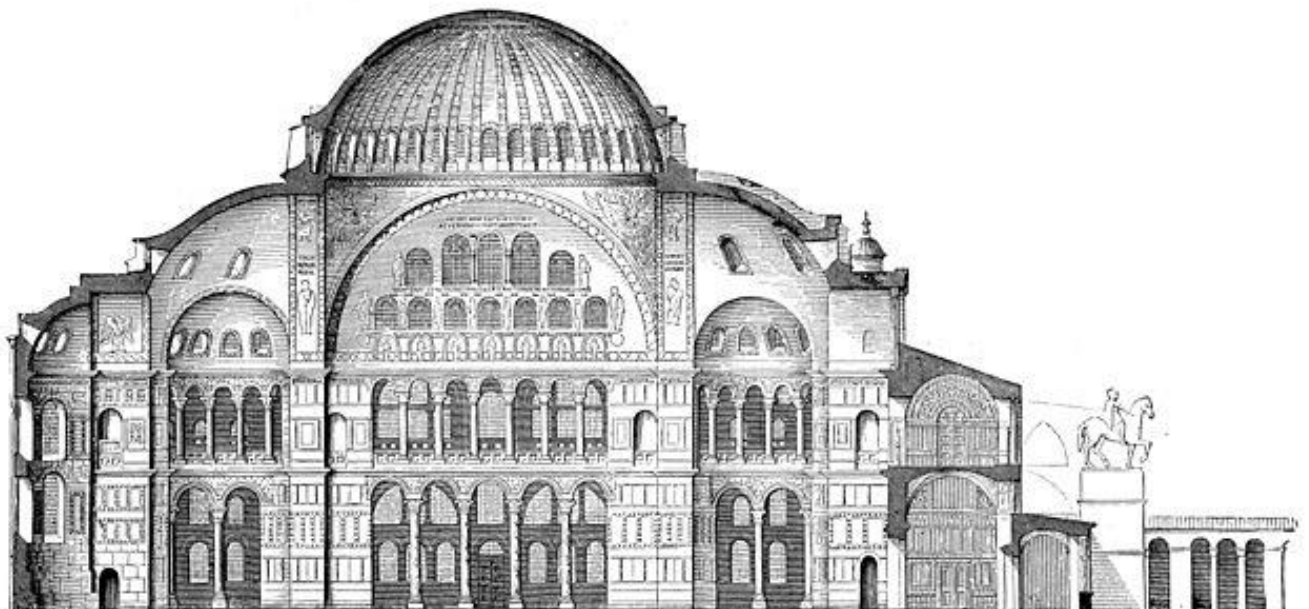
Największą kopułę starożytnego Rzymu wzniesiono nad świątynią wszystkich bóstw – Panteonem. Świątynię tę wzniesiono pierwotnie w 27 r. p.n.e. na polecenie Marka Agrypy, jednak w formie zbliżonej do obecnej powstała po odbudowie i przebudowie trwającej od 80 do 202 r. n.e. Kopuła rozpiętości 43,6 metrów (równej wysokości wnętrza, patrz Rys. 2) podparta jest ścianami o grubości 6 m.

<sup>2</sup> Prawa autorskie do ilustracji są podane w Tab. 30 na końcu pracy.



Rys. 2 Panteon w Rzymie

Bizancjum znacząco udoskonala kopuły występujące powszechnie na Wschodzie. Kopusy o kształcie połowy sfery narzucają regularny kształt przekrywanej przestrzeni. Połączenie ścian nośnych na rzucie kwadratu z podstawą kopuły (okręgiem) i bezpieczne przeniesienie sił w tym połączeniu doczekało się satysfakcjonującego rozwiązania dopiero w Bizancjum. Kopusy wcześniej ustawiano zazwyczaj na ośmiościennym tamburze wspartym w narożnikach na trompach<sup>3</sup>. Nowatorskie na owe czasy rozwiązanie bizantyjskie to podparcie kopuł pendentywami<sup>4</sup>.

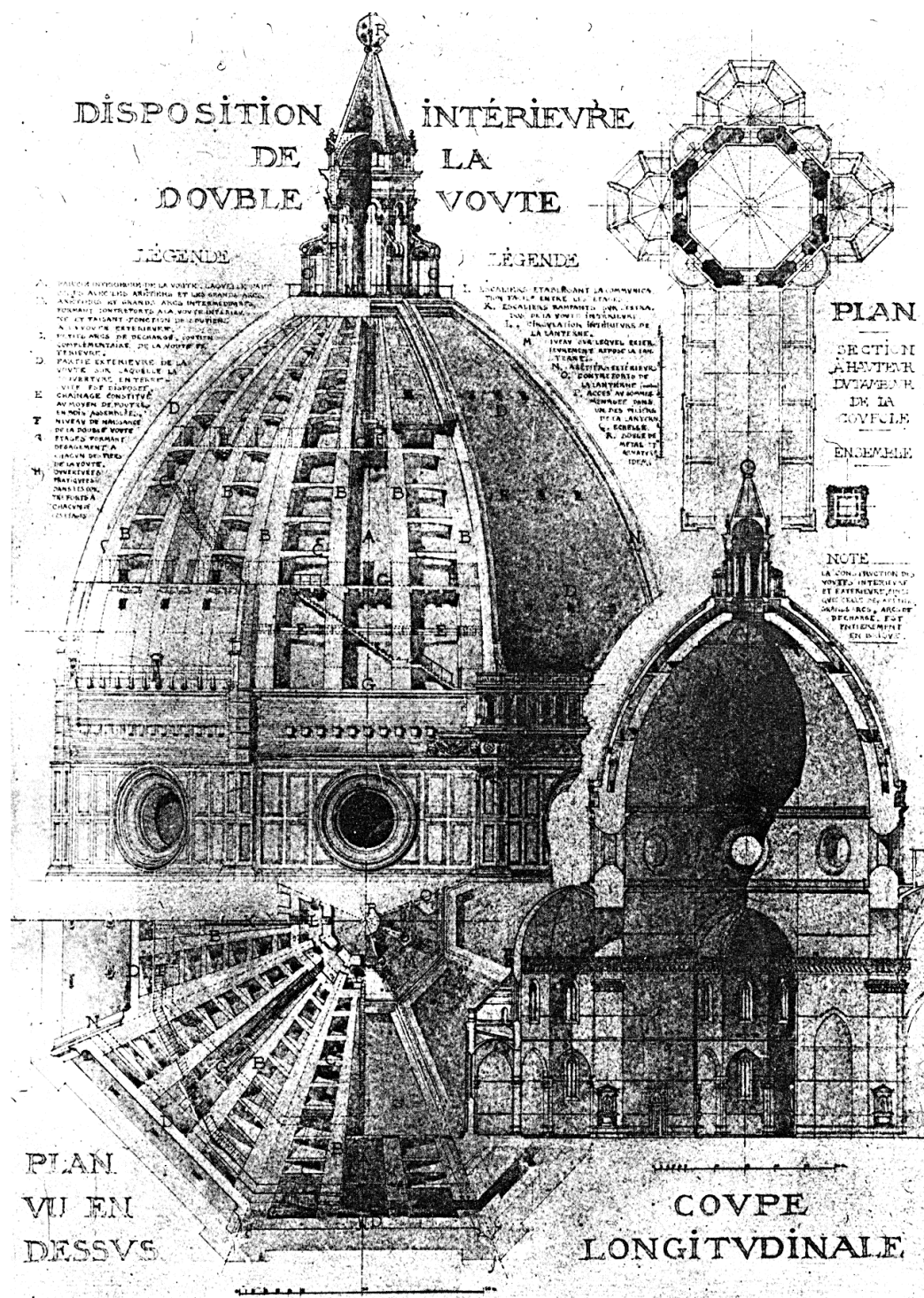


Rys. 3 Kościół Mądrości Bożej — przekrój podłużny

<sup>3</sup> Trompy – narożne wysklepki umożliwiające przejście z murów na rzucie kwadratu lub prostokąta na podstawę kopuły na rzucie np. ośmiokąta.

<sup>4</sup> Pendentyw, żagielek – trójkąt sferyczny, fragment konstrukcji łączący np. mury na rzucie kwadratu z okrągłą podstawą kopuły.

Największym osiągnięciem architektury bizantyjskiej jest kościół Mądrości Bożej (Hagia Sofia) Rys. 3 (Broniewski, 1990). Imponująca budowla o wymiarach  $71 \times 77$  m przekryta jest w centralnej części kopułą, o średnicy podstawy wynoszącej 31,2 m na krótszej osi oraz 32,8 m na dłuższej, podpartą na pendentywach. Kopuła ta oraz stalowy pierścień przejmujący rozpór założony u jej podstawy są do dziś przedmiotem wielu analiz statycznych m.in. w (Heyman, 1995).

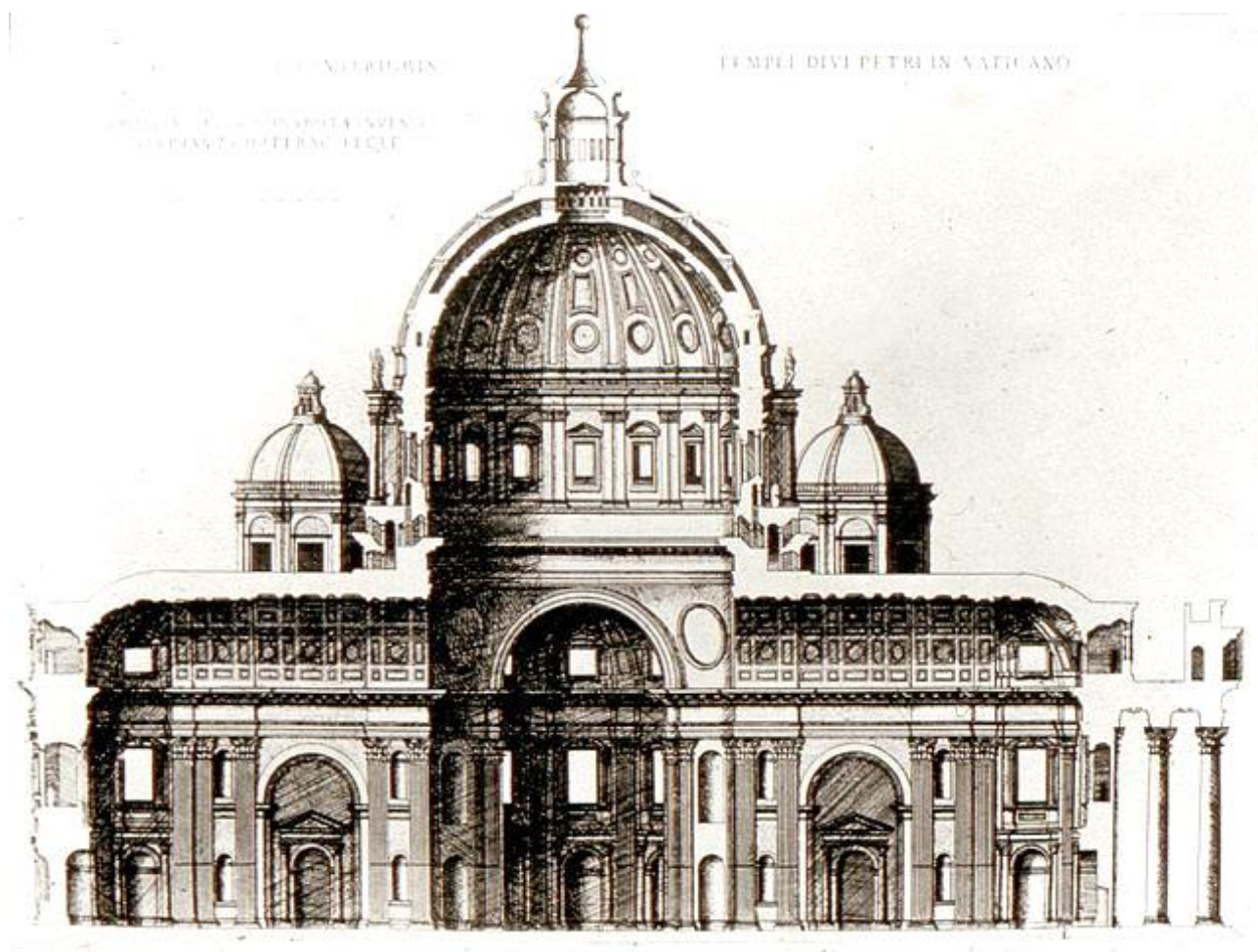


Rys. 4 Kopuła katedry Santa Maria del Fiore we Florencji – rzut, przekrój schematyczny widok.

Pierwszym obiektem architektury renesansowej jest kopuła florenckiej katedry Santa Maria del Fiore. Bryła kościoła została zaprojektowana jeszcze w XIII wieku, była ukończona już w połowie



wieku XIV – brakowało jedynie kopuły. Na skrzyżowaniu naw przygotowano bęben, na którym miała wznieść się kopuła – ośmiokąt o rozpiętości 45,4m na wysokości ponad 50 metrów nad posadzką. Stosowane dotychczas techniki nie dawały jednak możliwości wzniesienia tak ogromnej kopuły na tak znacznej wysokości. Zbudowanie rusztowań wsporczych i krążyn mających podpierać żebra nie było możliwe zarówno ze względu na wysokość jak i rozpiętość kopuły. Dopiero Filippo Brunelleschi studiując kopułę Panteonu znalazł rozwiązanie – kopułę wybudowano jako dwuwarstwową strukturę z potężnymi żebami w każdym z kątów i dwoma mniejszymi w każdym z boków. Kopułę wznoszono tak, że kolejne poziome warstwy klinowały się w same zapobiegając zapadnięciu się kopuły w trakcie budowy – dzięki temu rozwiązaniu możliwe było wzniesienie tej struktury bez użycia rusztowań (Murray, 1999).

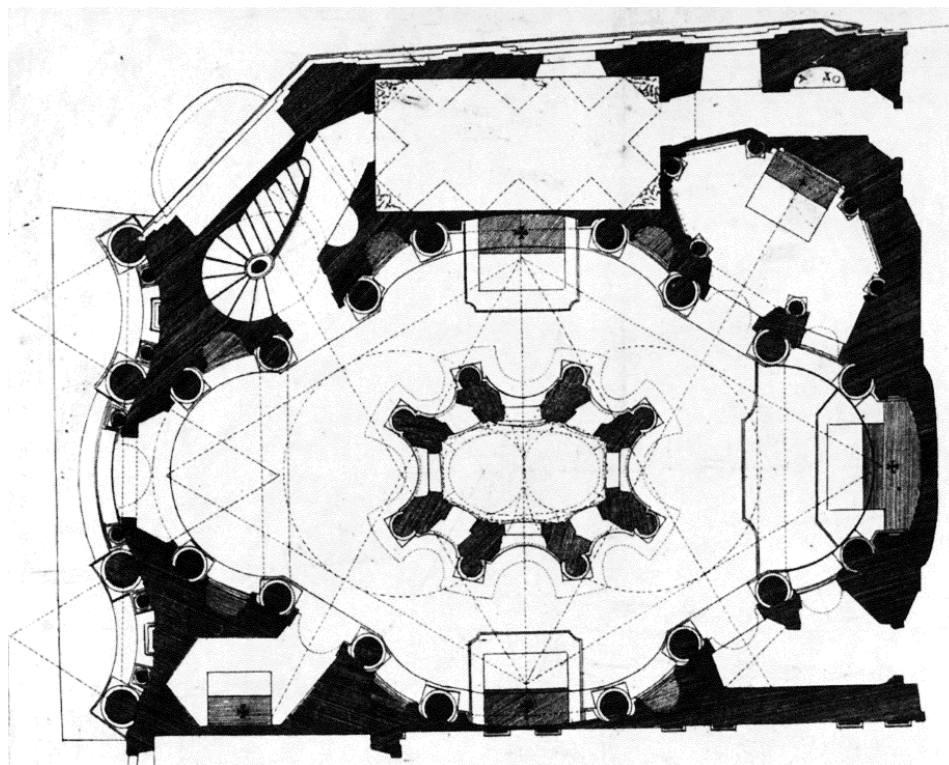


Rys. 5 Przekrój przez bazylikę św. Piotra na Watykanie (rekonstrukcja projektu Michała Anioła)

Studia nad architekturą Starożytności, rytmem i podziałami w formach architektonicznych a także rozwój techniki budowlanej umożliwiły wznoszenie kolejnych obiektów o podobnym rozmachu. Wraz z powszechnym stosowaniem kopuł w reprezentacyjnych gmachach do łask wróciły również budowle na planie centralnym (które to centrum podkreśla kopuła) oraz rozwiązania szczegółów w postaci pendentyw czy rzadziej tromp.

Na uwagę zasługuje również kopuła Bazyliki św. Piotra na Watykanie zaprojektowana przez Michała Anioła dokończona po jego śmierci przez Giacomo della Portę i Domenico Fontanę (Rys. 5). Kupuła ta ma średnicę wewnętrzną 42,0 m, zewnętrzną 50m i wysokość 52,0 m.

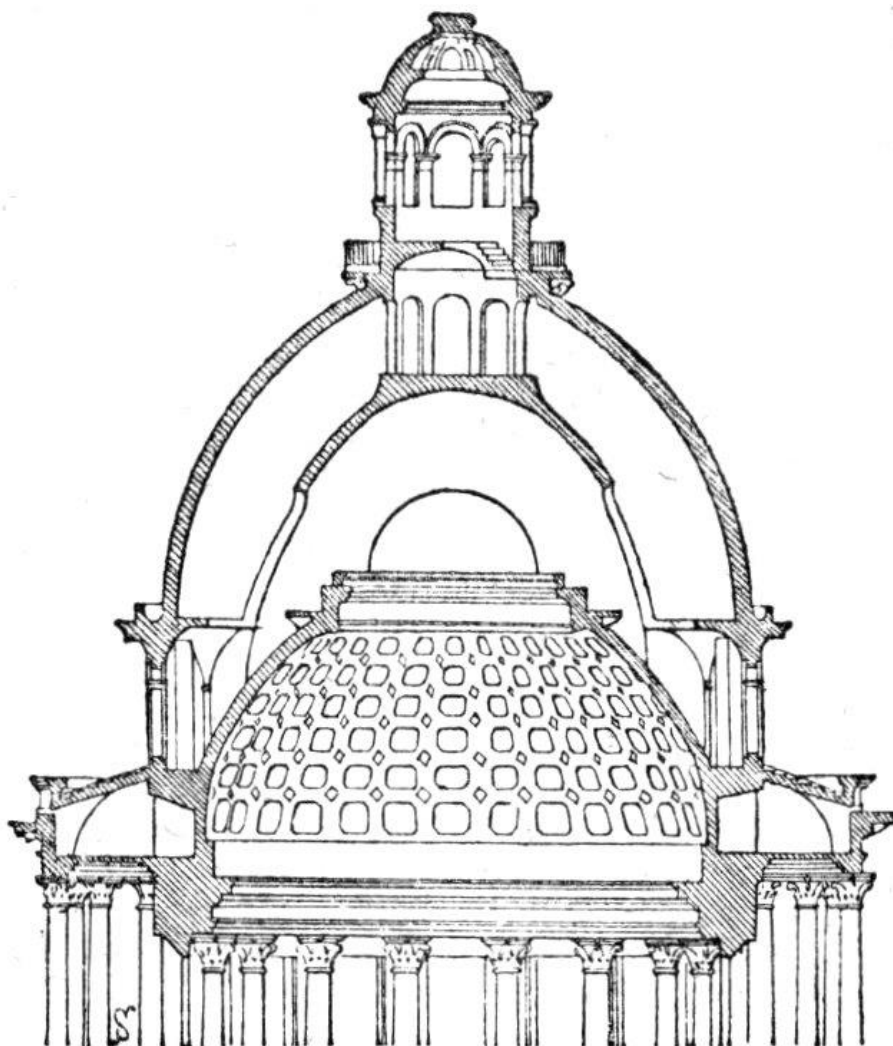
W kolejnych latach powoli odchodzono od renesansowej prostoty i rygoru. Kupuły i sklepienia stały się ściśle powiązane z rzeźbą i malarstwem iluzjonistycznym, nabierały też swobodniejszych kształtów. Pojawiają się i rozpowszechniają kopyły owalne – jak np. w kościele San Carlo alle Quattro Fontane (Rys. 6).



Rys. 6 Rzut kościoła San Carlo alle Quattro Fontane

Budowle centralne zyskują w baroku dużą popularność, kopyły akcentują centralne kompozycje przestrzenne (Koch, 1996) – bryły takich kościołów jak Santa Maria della Salute w Wenecji, kościoła Inwalidów w Paryżu, katedry św. Pawła w Londynie czy niezliczonych polskich kościołów barokowych (m.in. kościół św. Anny w Krakowie) ciężko wyobrazić sobie bez kopył.

Prawdopodobnie najbardziej okazałą kopyłą klasycystyczną jest kopyła Kapitolu Stanów Zjednoczonych, nie jest to już jednak (w przeciwieństwie do kopyły sprzed przebudowy w połowie XIX w.) kopyła murowana lecz żeliwna konstrukcja imitująca mur. Panteon w Paryżu wzniesiony pod koniec XVIII w. a zaprojektowany przez Jacquesa Germaina Soufflota jest jednym z nielicznych w tym czasie oryginalnych rozwiązań konstrukcyjnych i architektonicznych (Bogusz, 1996; Broniewski, 1990) – kamienna struktura wzmocniona jest w kluczowych miejscach stalowymi prętami, a kopyła przekrywająca centrum obiektu ma trzy warstwy (Rys. 7).

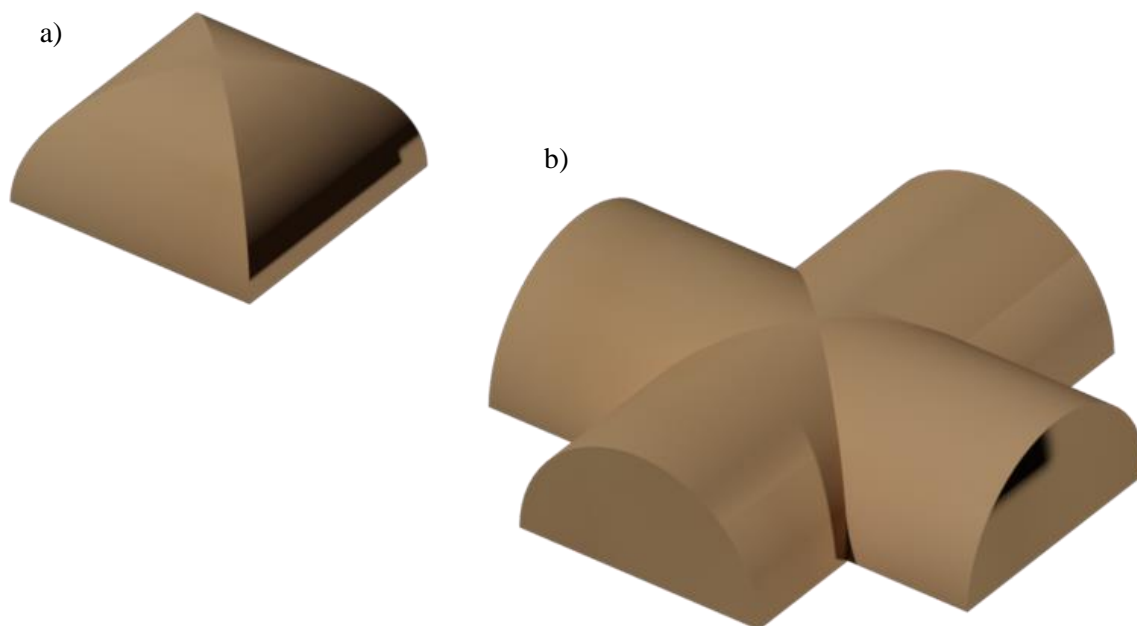


Rys. 7 Trójwarstwowa kopuła Panteonu w Paryżu

Sklepienia i kopuły murowe od tego czasu występują w architekturze rzadziej – jako element budowli historyzujących (neoromańskich, neogotyckich, neorenesansowych itp.) powtarzane są znane formy i techniki. Secesyjne i modernistyczne kopuły i powłoki zazwyczaj są już betonowe lub zespolone jak imponująca kopuła Maxa Berga przekrywająca Halę Stulecia we Wrocławiu. Nowoczesne przekrycia wykonuje się też często w systemach linowych lub ciągnowo-prętowych.

### 2.1.2. Sklepienia

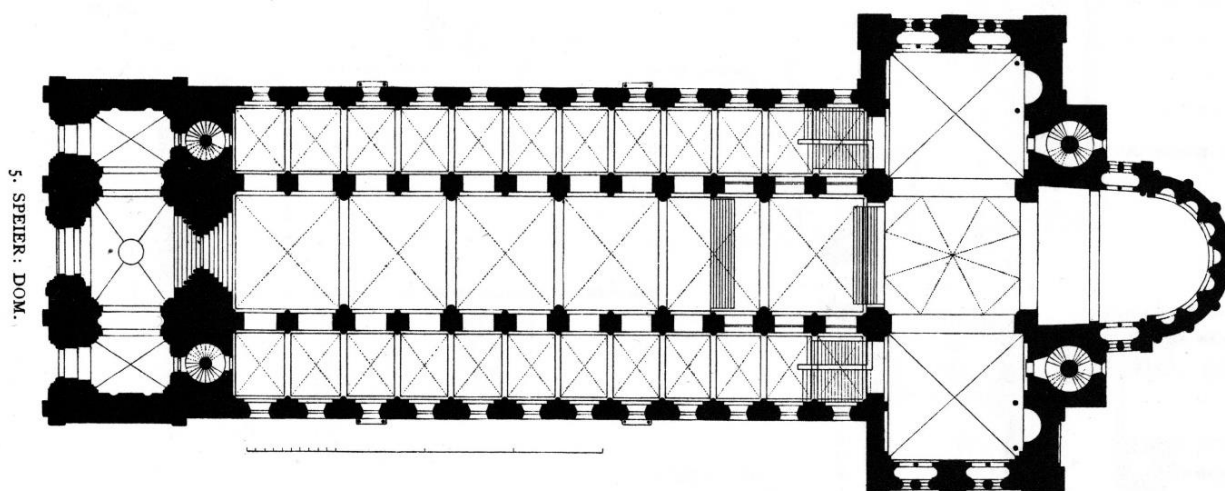
Niewątpliwym osiągnięciem rzymskiej inżynierii budowlanej było udoskonalenie sklepień. Do ich wznoszenia używano kamiennych kłińców lub cegieł. Dla przeniesienia sił rozporu ze sklepień często budowano masywne ściany w technologii tzw. muru rzymskiego, to znaczy muru z betonu, złożonego z kamieni spojonych zaprawą wapienną, ułożonego pomiędzy dwoma ścianami licowymi z cegieł lub kamieni. Oprócz stosowanego wcześniej sklepienia kolebkowego stosowano, będące wynikiem przecięcia dwóch kolebek, sklepienia klasztorne (Rys. 8 a) oraz otwarte sklepienia krzyżowe (Rys. 8 b). Sklepienia klasztorne były podpierane ścianami, zaś sklepienia krzyżowe często pozostawiano otwarte, podparte tylko w narożach kolumnami.



Rys. 8 Sklepienie klasztorne (a) oraz sklepienie krzyżowe (b).

Budowle wznoszone w początkach średniowiecza nie osiągają rozmiarów znanych z czasów starożytności. Także bryły tych obiektów są prostsze, co wyraźnie widać na rzutach. Wynikało to w dużej mierze z ograniczeń techniki budowlanej. Potrafiono wówczas przekrywać przestrzeń stropami drewnianymi (z konieczności raczej niewielkiej rozpiętości), kopułami lub sklepieniami krzyżowymi.

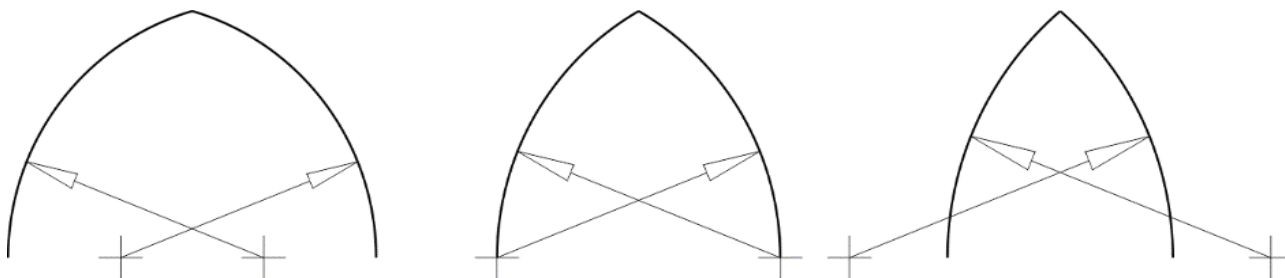
Sklepienia krzyżowe (powstałe w wyniku przecięcia dwóch półkolistych sklepień, Rys. 8 b) umożliwiały przekrycie przestrzeni na rzucie kwadratu. Stąd w kościołach romańskich powszechny był tzw. system wiązany (Rys. 9), w którym z każdej strony dużego pola głównej nawy dowiązane były dwa pola naw bocznych o boku krótszym o połowę.



Rys. 9 Rzut katedry w Spirze

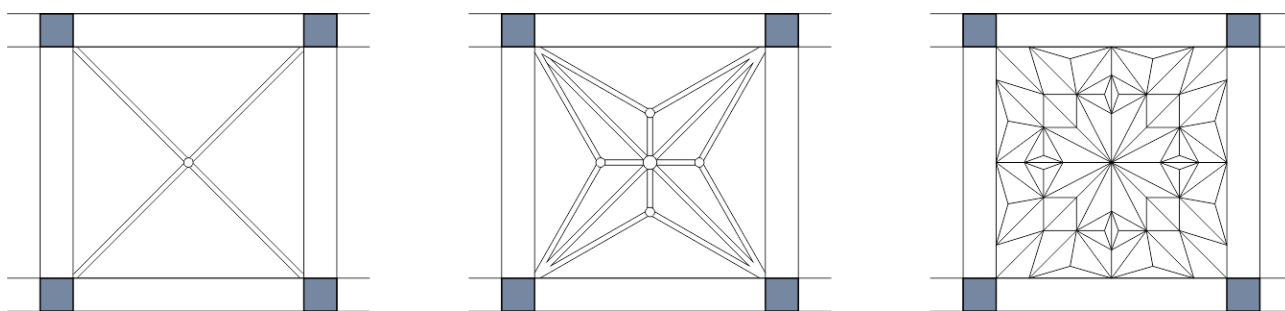
Na początku średniowiecza sklepienia kolebkowe zaczęto wzmocniać gurtami – łękami wspartymi na wspornikach (konsolach) lub słuźkach (smukłych pilastrach). Analogicznie zaczęto wzmocniać krawędzie

przenikania kolebek w sklepieniach krzyżowych pogrubionymi kształtkami ceramicznymi lub kamiennymi – żebrami. W miejscu krzyżowania się żeber, w kluczu sklepienia, umieszczano zwornik. Zastosowanie tych elementów oraz zmiana geometrii (zastosowanie ostrych łuków – Rys. 10 oraz Rys. 11) umożliwiło z czasem rozwój sklepień do imponujących form znanych z gotyku.



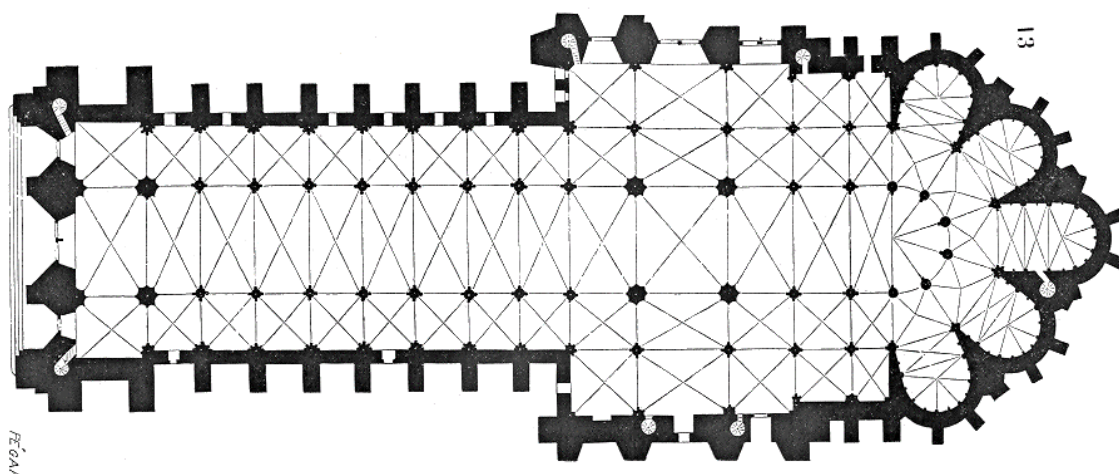
Rys. 10 Schemat łuków gotyckich

Pomimo ogromnego kontrastu pomiędzy zwartymi, krępyimi budowlami romańskimi a lekkimi, strzelistymi budowlami gotyckimi, styl gotycki w architekturze jest rozwinięciem i kontynuacją technik i rozwiązań konstrukcyjno-architektonicznych romańszczyzny. Wzrost zamożności społeczeństw spowodowany m.in. poprawą klimatu oraz rozwojem rolnictwa pozwolił na niebywały rozwój społeczności miejskich (Manteuffel, 2005). To z kolei umożliwiło przeznaczenie większych środków na budownictwo sakralne (z czasem także użyteczności publicznej – ratusze, bractwa kurkowe, dwory Artusa), które w tej epoce stało się chlubą mieszczan.



Rys. 11 Rzuty sklepień gotyckich – od lewej: krzyżowo-żebrowe, gwiazdziste, kryształowe

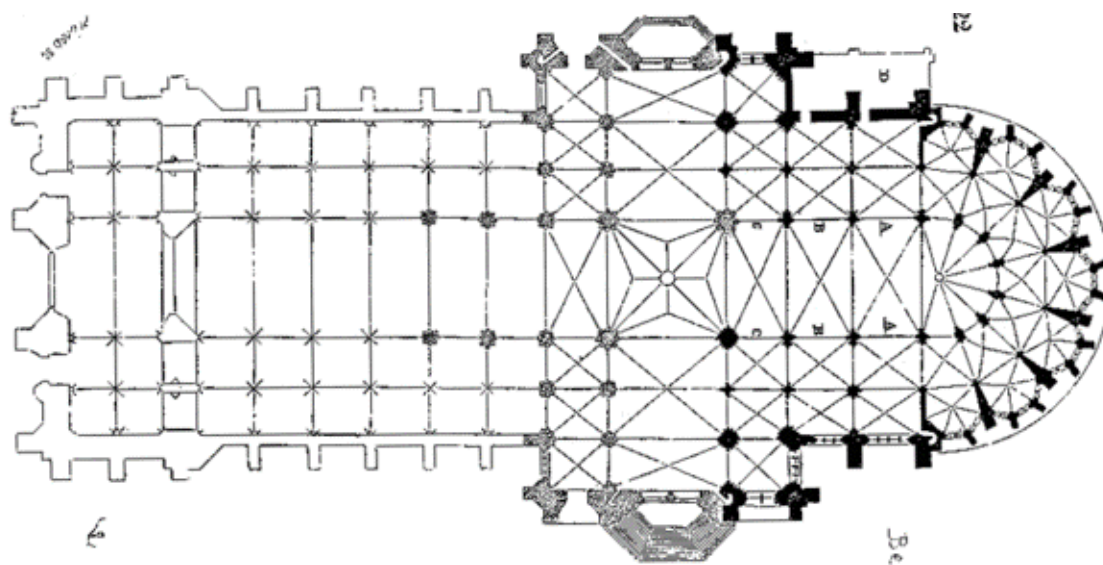
Ostre łuki (tak charakterystyczne dla gotyku są logicznym rozwinięciem sklepień krzyżowo-żebrowych opartych na dwóch półkolistych kolebkach, dzięki tej innowacji stało się możliwe przekrywanie pól kształcie prostokątnym co umożliwiło odejście od systemu wianuszkowego – w świątyniach gotyckich pola nawy głównej i naw bocznych mają wspólny bok tej samej długości (Rys. 12). Dalszy rozwój sklepień – przekrywanie coraz większych przestrzeni o coraz mniej regularnych kształtach, wzrastające skomplikowanie sieci sklepień, zwiększanie wysokości budynków świadczy o stałym rozwoju techniki budowlanej tej epoki. Ze sklepienia krzyżowo-żebrowego wyewoluowało wiele typów sklepień o smuklejszych proporcjach i mniejszych podziałach: trójdzielne, sześciodelne, gwiazdziste, palmowe, wachlarzowe oraz kryształowe (sklepienia bez wyraźnych żeber o wysklepkach przypominających szlif kryształu); niektóre z nich zaprezentowano na Rys. 11. Sklepienia kolebkowe w gotyku często wykonywano z bogatym uźebrowaniem pełniącym głównie funkcję ozdobną – sklepienie takie przyjęto nazywać sieciowym. Bogactwo form sklepień dobrze ilustrują rzuty kościołów dojrzałego gotyku (np. Rys. 12-13).



Rys. 12 Rzut katedry w Reims

Wysokie, cienkie ściany gotyckich budynków nie byłyby w stanie przenieść rozporu sklepień. Dla tego celu stosowano przypory – mur odchodzący od ściany prostopadle (w kierunku działającego rozporu). Przypory rozwinęły się w system przyporowy składający się z łuków i wież sił. Pracę statyczną sklepień poprawiano również stosując zasypkę – piasek lub polepę wypełniającą pachwiny sklepień. Zasyпка pełni rolę podobną do wież sił – dodając obciążenie w kierunku pionowym zmienia kierunek wypadkowej sił. Badania oraz doświadczenie inżynierskie wskazują, że im większy kąt tarcia wewnętrznego materiału i im większa gęstość objętościowa zasyпки tym bardziej zwiększa ona nośność sklepienia (Nowak & Orłowicz, 2017; Krajewski & Janowski, 2011). W pracy (Romano & Ochsendorf, 2010) wykazano, iż ostre, gotyckie łuki osiągają wyższą nośność oraz odporność na przemieszczenia podpór niż łuki kołowe.

Z uwagi na zakres niniejszej pracy na szczególną uwagę zasługuje katedra świętego Piotra w Beauvais. Jest to najwyższy zbudowany kościół gotycki – sklepienia sięgają wysokości 48,5m a bryła kościoła 67m. Kościół budowany przez kilka stuleci w tym czasie kilkakrotnie ulegał katastrofom budowlanym. Nigdy też nie został ukończony (Rys. 13). Jako jedną z przyczyn katastrof budowlanych podaje się dynamiczne działanie porywów wiatru (Sołtysik et al., 2006; Hong, 2004).



Rys. 13 Rzut katedry w Beauvais, zaznaczono zrealizowany fragment gmachu.

## **2.2. Uszkodzenia, metody wzmacniania i naprawy**

### **2.2.1. Uszkodzenia sklepień**

Obecnie wykrywane uszkodzenia sklepień murowych wynikają najczęściej ze zmiany schematu statycznego, osiadania podpór (Ferrero, Calderini, & Roca, 2022), wadliwych przebudów i napraw lub wypłukania zaprawy (Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007). Ponadto możliwe są awarie lub katastrofy wynikające z działania wiatru, obciążeń sejsmicznych (Sieczkowski & Szołomicki, 1999) oraz wpływu drgań komunikacyjnych (Karczmarczyk et al., 2011). Wśród błędnych przebudów warto wymienić w szczególności stosowanie zaprawy cementowej (znacząco sztywniejszej od zapraw historycznych) lub zrzucanie kolejnych odpadów budowlanych na zasypkę sklepienia i przekroczenie w ten sposób dopuszczalnych obciążeń. Osobną klasą źródeł awarii są zaniedbania związane ze złym zabezpieczeniem przed czynnikami atmosferycznymi oraz postępująca deterioracja fundamentów (Zampieri, Cavalagli, et al. 2018).

Większość tych uszkodzeń i ich przyczyn jest dobrze rozpoznana w literaturze. Osiadanie podpór było przedmiotem m.in. (Ferrero, 2021; Zampieri, Simoncello, & Pellegrino, 2018; Paolo Zampieri et al., 2018; Galassi et al., 2018; Romano & Ochsendorf, 2010; Verstryngge et al., 2007). W pracy (Rossi et al., 2017) przebadano wpływ osiadania (rozsuwania) podpór na sklepienia klasztorne, zaś w pracach (Ferrero, Calderini, & Roca, 2022; Ferrero, 2021) zbadano wpływ przemieszczeń połączonych z obrotem podpór sklepień kolebkowych.

W swojej dysertacji (Ochsendorf, 2002) badał zniszczenie konstrukcji murowych (ścian, filarów i sklepień), w programie swoich badań oprócz dużych przemieszczeń podpór uwzględnił również poziome przyspieszenia gruntu.

Trzęsienie ziemi we włoskiej prowincji L'Aquila w 2009 roku zaowocowało dużą liczbą prac poświęconych odporności sejsmicznej i badaniom dynamicznym zabytkowych budynków (Corradi et al., 2015; Andreotti, Liberatore, & Sorrentino, 2014). Badania dynamiczne sklepień występują w literaturze również m.in. w kontekście poprawnego modelowania materiałów (Ramaglia, Lignola, & Prota, 2016), analizy dynamicznej odporności konstrukcji na działania parasejsmiczne wywołane drganiami komunikacyjnymi (Karczmarczyk et al., 2011) lub identyfikacji sposobu podparcia sklepień na podstawie charakterystyk modalnych (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011). Rozwijane są też metody oceniania stanu konstrukcji murowych oraz ich wzmocnienia, z zastosowaniem m.in. z tomografii komputerowej lub georadaru (Zielińska & Rucka, 2018; Rucka, Lachowicz, & Zielińska, 2016). Dogłębną analizę wpływu obciążeń sejsmicznych prezentuje (Ramaglia, Lignola, & Prota, 2016; Asteris & Plevris, 2015). Celem pracy (Milani et al., 2016) była analiza sejsmiczna sklepień ceglanych, badano sklepienie krzyżowe z elementów wydrukowanych w technologii 3D i dociążonych ciężarkiem, elementy te nie zostały połączone. Analiza budynków murowych poddanych działaniu dynamicznemu lub sejsmicznemu była przedmiotem pracy (Sima, Roca, & Molins, 2011). Opracowano metodę wyznaczania parametrów wytrzymałościowych murów ceglanych szybszą i bardziej efektywną niż wcześniejsze porównywalne. Porównanie wyników wykazało dobrą zgodność wg autorów pracy (Sima, Roca, & Molins, 2011). (Karczmarczyk et al., 2011) prezentuje problem kompleksowej

diagnozy kościoła św. Mikołaja w centrum Krakowa a wyniki przedstawionych w pracy analiz wskazują na konieczność zastosowania wibroizolacji torowiska kolejowego przebiegającego w sąsiedztwie kościoła oraz wykonanie prawidłowego odprowadzenia wód opadowych.

Jednym z zagadnień wciąż oczekujących satysfakcjonującego rozwiązania jest nieinwazyjne szacowanie stałych materiałowych komponentów badanego muru (Tkacz, 2015; Matysek & Witkowski, 2013), zwłaszcza że parametry wytrzymałościowe badanego muru (szczególnie w strukturach z przemurowaniami i fragmentami budowanymi w różnych epokach) mogą mieć znaczący wpływ na statykę ustroju (Kujawa, Lubowiecka, & Szymczak, 2020).

Zmęczenie może być poważnym problemem w konstrukcjach wystawionych na długotrwałe działanie zmiennych obciążeń. Wydaje się jednak, że w kontekście obiektów murowych (zwłaszcza łukowych konstrukcji murowych) dotyczy głównie łukowych mostów murowych. W pracach (Casas, 2009, 2011) zastosowano rachunek prawdopodobieństwa do analizy przewidywanego czasu użytkowania (*service life*) ceglanych mostów łukowych. Analiza przeprowadzonych badań wykazała, że zniszczenie zmęczeniowe mostów ma całościowy charakter. Wytyczne zarządu autostrad w Wielkiej Brytanii dotyczące mostów murowych (BD 21/01, 2001) przyjmują, że obciążenia nie przekraczające 50% obciążenia niszczącego nie wywierają trwałego wpływu na konstrukcję, jednak (Melbourne, Tomor, & Wang, 2004) wykazał, że granica ta może być znacznie niżej (np. około 37%). W pracy tej przedstawiono również wykres zależności naprężeń od liczby cykli obciążenia *S-N* (*Stress-Number of load cycles*) pozwalający oszacować użyteczność ceglanych mostów łukowych. W opinii autora pozwala to wnioskować, że w analizie sklepień oraz konstrukcji budowli o schemacie statycznym, w którym obciążenie wiatrem nie generuje znacznego (powyżej ok. 37-50%) wyczerpania konstrukcji, można zaniedbać wpływ zmęczenia.

W niniejszej pracy nie analizowano nośności zmęczeniowej sklepień i kopuł ceglanych. Założono, że w przypadku murowych obiektów łukowych niebędących mostami wpływ zmęczenia jest zaniedbywalny.

### **2.2.2. Wzmacnianie i naprawa sklepień**

Poprzedni rozdział dostarcza przeglądu oddziaływań, które mogą prowadzić do uszkodzenia, awarii lub nawet katastrofy sklepień ceglanych. Znaczna wartość tych obiektów stanowi motywację do działań naprawczych.

Najpowszechniejsze, stosowane od dawna, stałe wzmocnienia sklepień oraz łuków ceglanych to ściągi stalowe przejmujące rozpór; jest to zazwyczaj podstawowe wzmocnienie – często niewystarczające (Bednarz, 2003; Masłowski & Spiżewska, 2000; Heyman, 1995) również ze względu na ich powszechną nieskuteczność wynikającą ze znacznej podatności wykorzystywanej stali (Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007). Wprowadzenie zewnętrznego stężenia w istniejącą konstrukcję murową wymaga przeanalizowania zwłaszcza wytrzymałości oraz struktury (w tym jednorodności) muru. Wskazane jest przekazanie sił ze ściągu na możliwie duży fragment muru z uwagi na znaczną niejednorodność konstrukcji zabytkowych oraz niską



wytrzymałość muru w porównaniu do stali. Ściągaki kotwione są w murze poprzez stalowy element dociskowy (zawłokę) lub wklejane w mur (Bednarz, 2003).

Iniekcja wzmacniająca fragmenty muru lub uzupełniająca ubytki jest jednym z powszechnie stosowanych zabiegów (Bednarz, 2003; Masłowski & Spiżewska, 2000). Iniekcje rzadko występują jako samodzielne wzmocnienie; głównie z uwagi na to, że nie eliminują one przyczyny uszkodzenia. Iniekcje powinny być stosowane gdy przyczyna awarii sklepienia (lub szerzej konstrukcji murowej) została rozpoznana i naprawiona.

Wzmacnianie powłoką żelbetową wykonaną na grzbietowej stronie sklepienia najwygodniej wykonać z zastosowaniem betonu natryskowego (torkretu). Konieczne jest również zapewnienie jak najlepszej współpracy (połączenia) wzmacnianego sklepienia z żelbetową powłoką (Bednarz, 2003). W celu wzmocnienia połączenia sklepienia z powłoką żelbetową niekiedy wkleja się pręty stalowe (strzemiona) w spoiny sklepienia.

Podwieszenie sklepienia do żeber żelbetowych lub drewnianych (w tym z drewna klejonego) jest znaną praktyką (Masłowski & Spiżewska, 2000). Podobnie jak w poprzednim systemie – kluczowe jest połączenie sklepienia z konstrukcją wsporczą wykonaną po stronie grzbietowej sklepienia. W sklepieniach żebrowych, w analizie których wysklepki można traktować jako element przenoszący obciążenia na żebra (Masłowski & Spiżewska, 2000; Sieczkowski & Szołomicki, 1999), wzmocnienie tego typu znajdowały szerokie zastosowanie.

Kolejnym rozwiązaniem jest wzmocnienie poprzez blachy lub pręty stalowe doklejone jako zewnętrzne zbrojenie do wzmacnianego sklepienia. Z uwagi na problemy związane z korozją oraz dużą rozszerzalnością termiczną elementów stalowych jest to technika, która prawdopodobnie ustępuje całkowicie miejsca nowszym rozwiązaniom.

Najnowocześniejszą metodą jest wzmacnianie materiałami (matami oraz taśmami) kompozytowymi (głównie z włóknami szklanymi lub węglowymi) po stronie grzbietowej sklepień. Nowoczesne materiały kompozytowe charakteryzują się pożądanym wysokim stosunkiem wytrzymałości do masy, trwałością oraz łatwością formowania. Chociaż kompozyty są znane i stosowane od wielu lat w różnych obszarach, niektóre z ich właściwości nie zostały jeszcze szeroko zbadane (Miller, Markiewicz, & Ziemiański, 2019; Kreja, 2011). Wzmacnianie sklepień materiałami kompozytowymi jest efektywną i dobrze już rozpoznaną metodą m.in. (Bertolesi et al., 2018; Berardi & De Piano, 2018; Szołomicki, Berkowski, & Barański, 2015; Fraternali et al., 2015; Basilio et al., 2014; Bednarz et al., 2011; Bednarz, 2008; Aiello & Sciolti, 2006), która zapewnia nawet 10-krotne zwiększenie nośności wzmacnianego sklepienia (Bednarz, 2003).

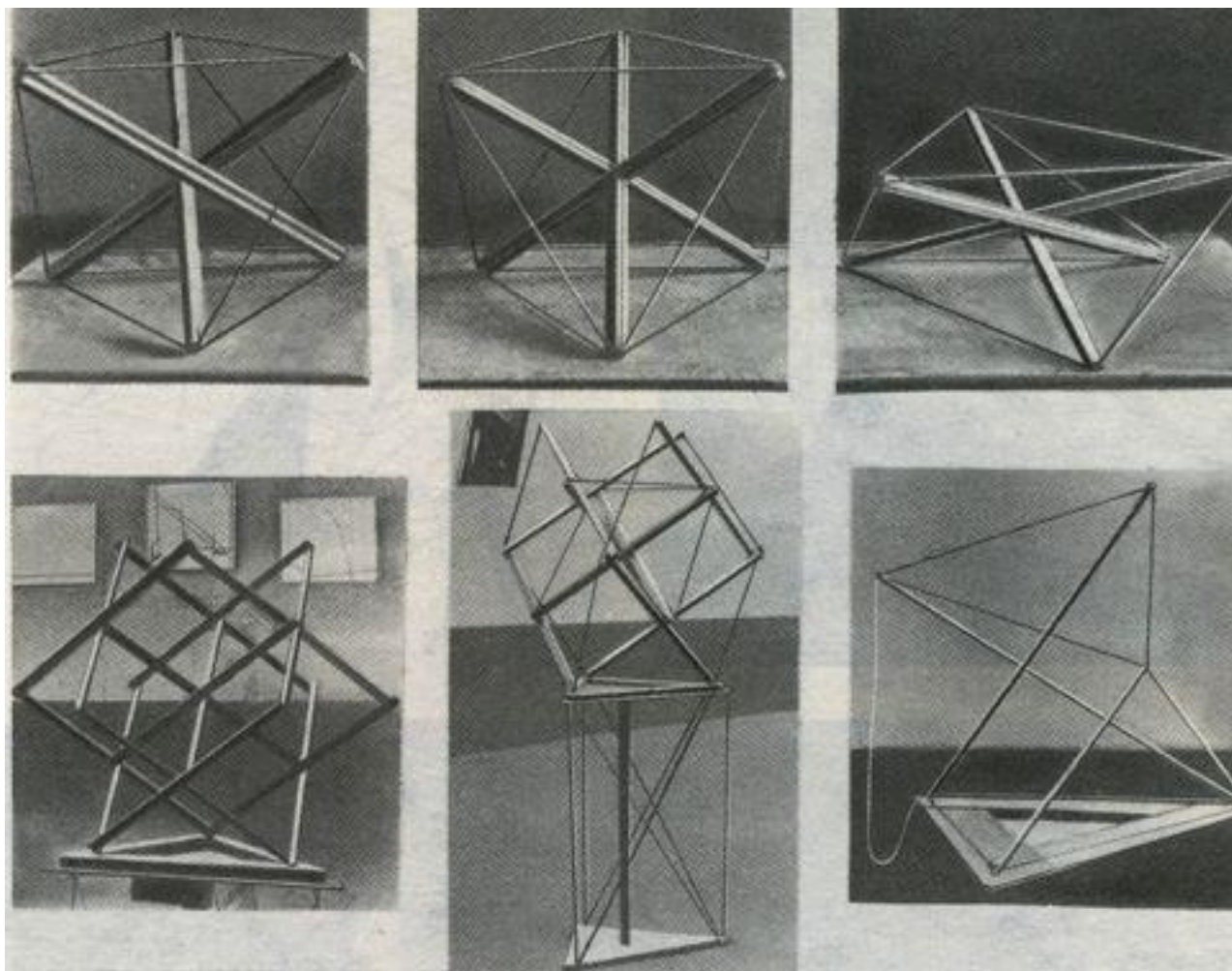
W swojej rozprawie doktorskiej (Bednarz, 2008) prezentuje badania łuków ceglanych wzmocnionych siatkami i taśmami z włókna węglowego, prętami wklejonymi oraz dźwigarem z drewna klejonego połączonego kotwami ze wzmacnianym łukiem i porównuje ich zachowanie z łukiem niewzmocnionym.

Wykazano przydatność wszystkich badanych metod do wzmacniania łuków ceglanych (m.in. przez (Bednarz, 2008; Masłowski & Spiżewska, 2000)).

**Sposób obliczenia wzmocnienia sklepień materiałami kompozytowymi**, w którym wzmocnione sklepienie analizuje się jako konstrukcję tensegrity, opisał (Fraternali et al., 2015) wykorzystując algorytm optymalizacyjny dla uzyskania minimalnej masy opracowany przez (Nagase & Skelton, 2014) wykorzystujący metodę gęstości sił stosowaną m.in. przez (Tarczewski, 2011). W ostatnich latach ten sposób był wykorzystywany m.in. przez (Berardi & De Piano, 2018) do projektowania wzmocnień sklepień oraz kopuł. W metodzie tej traktuje się słupki myślowo wydzielone z kopuły lub sklepienia murowego jak pręty w konstrukcji tensegrity, zaś projektowane wzmocnienia materiałami kompozytowymi traktuje się jak ciągną struktury tensegrity. Ta operacja pozwala przeprowadzić obliczenia tak wzmocnionego sklepienia (lub kopuły) jak konstrukcji tensegrity oraz wyznaczyć konfigurację kompozytowych elementów wzmacniających o minimalnej masie. Dokładny opis algorytmu obliczeń, opracowany głównie na podstawie (Fraternali et al., 2015), można znaleźć w Załącznik 1. Autorzy (ibidem) przedstawionej powyżej metody stosującej algorytmy właściwe dla ciągnowo-prętowych struktur typu tensegrity wykorzystali ją do wyznaczenia wzmocnienia sklepienia kolebkowego, klasztornego i krzyżowego oraz kopuły kościoła Santa Maria di Monteverginella w Neapolu. Ta metoda stanowiła główną motywację do opracowania systemu wzmocnienia sklepień ceglanych konstrukcjami tensegrity co jest jednym z przedmiotów niniejszej rozprawy oraz stanowi treść rozdziału 6.

### 3. STRUKTURY TENSEGRITY

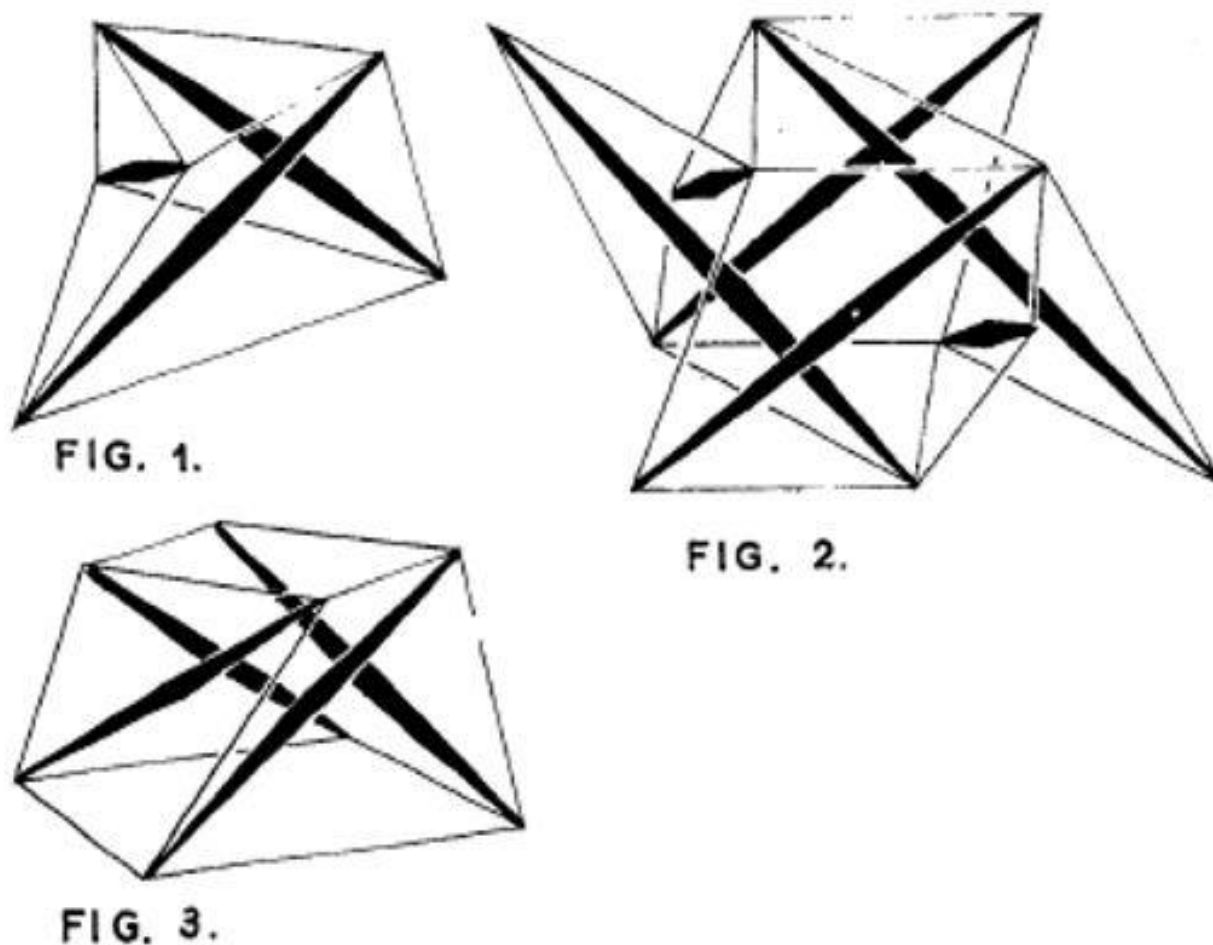
Konstrukcje tensegrity to sprężone konstrukcje prętowo-ciężnowe, w których elementy ściskane (pręty) są stabilizowane siecią elementów rozciąganych (ciągów). Nazwa tensegrity, autorstwa Richarda Buckminster Fullera, jest złożeniem słów użytych w patencie (Buckminster Fuller, 1962): *Tensional Integrity Structures*; Fuller jest również autorem prawdopodobnie najbardziej lirycznej definicji tej klasy struktur: tensegrity to wyspy ściskania w oceanie rozciągania (Motro, 2003). W języku polskim konstrukcje te opisuje się czasami jako *tensegralne*, *jednoznakowe* lub *jednoprzężne* dla podkreślenia niezmienności znaków sił normalnych w poszczególnych elementach konstrukcji.



Rys. 14 Konstrukcje przestrzenne Karla Mosonosi (Vsesoiūznyi nauchno-issledovatel'skii institut tekhnicheskoi ēstetiki, 1980)

Pierwsze obiekty proto-tensegrity to rzeźby i instalacje tworzone przez artystów nurtu kinetycznego i op-artu w latach dwudziestych ubiegłego wieku. Była to na przykład *Gleichgewichtkonstruktion*

(niem. konstrukcja w równowadze) z 1920 roku autorstwa Karla Iogansona lub dzieła Wiaczesława Kolejczuka (Vsesoiūznyĭ nauchno-issledovatel'skii institut tekhnicheskoi ēstetiki, 1980; Moholy-Nagy, 1929).

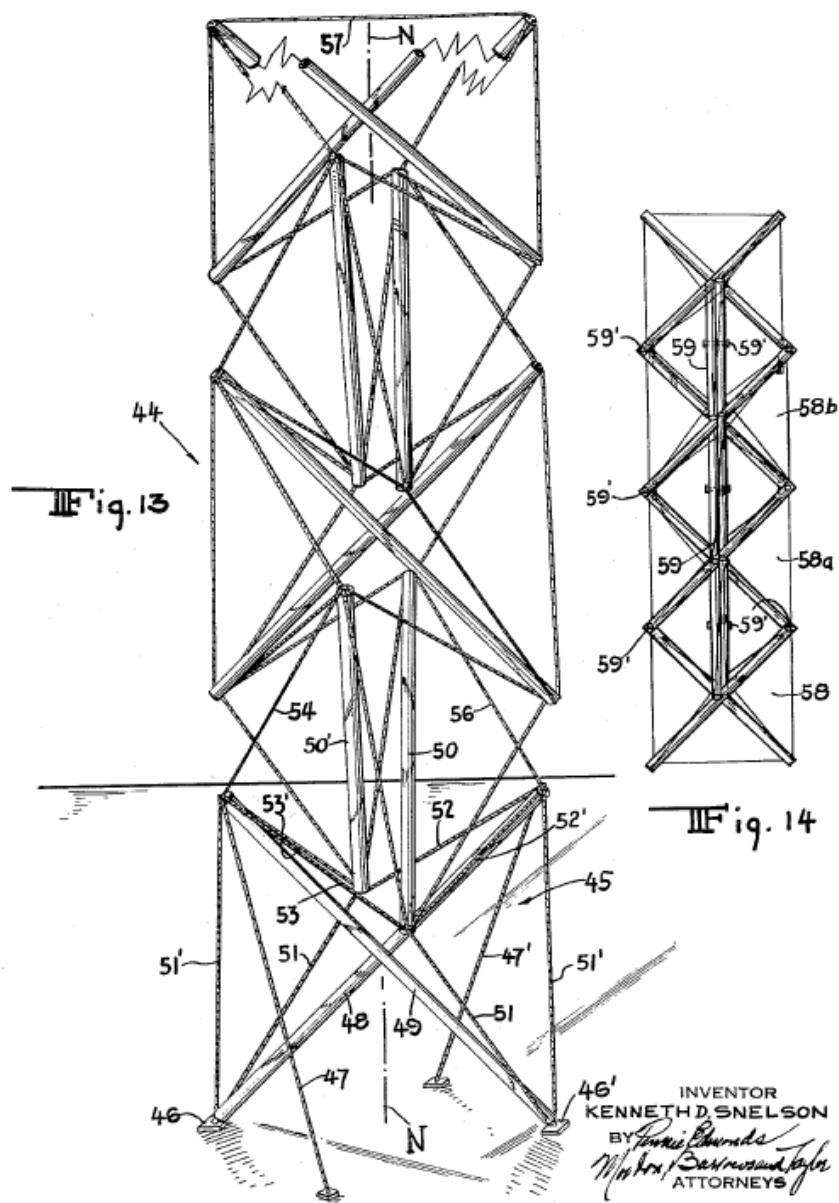


Rys. 15 Ilustracje „konstrukcji sieci samonapężających się” z patentu (Emmerich, 1964)

Tensegrity zostało opatentowane niemal równocześnie przez trzy osoby (w kolejności chronologicznej):

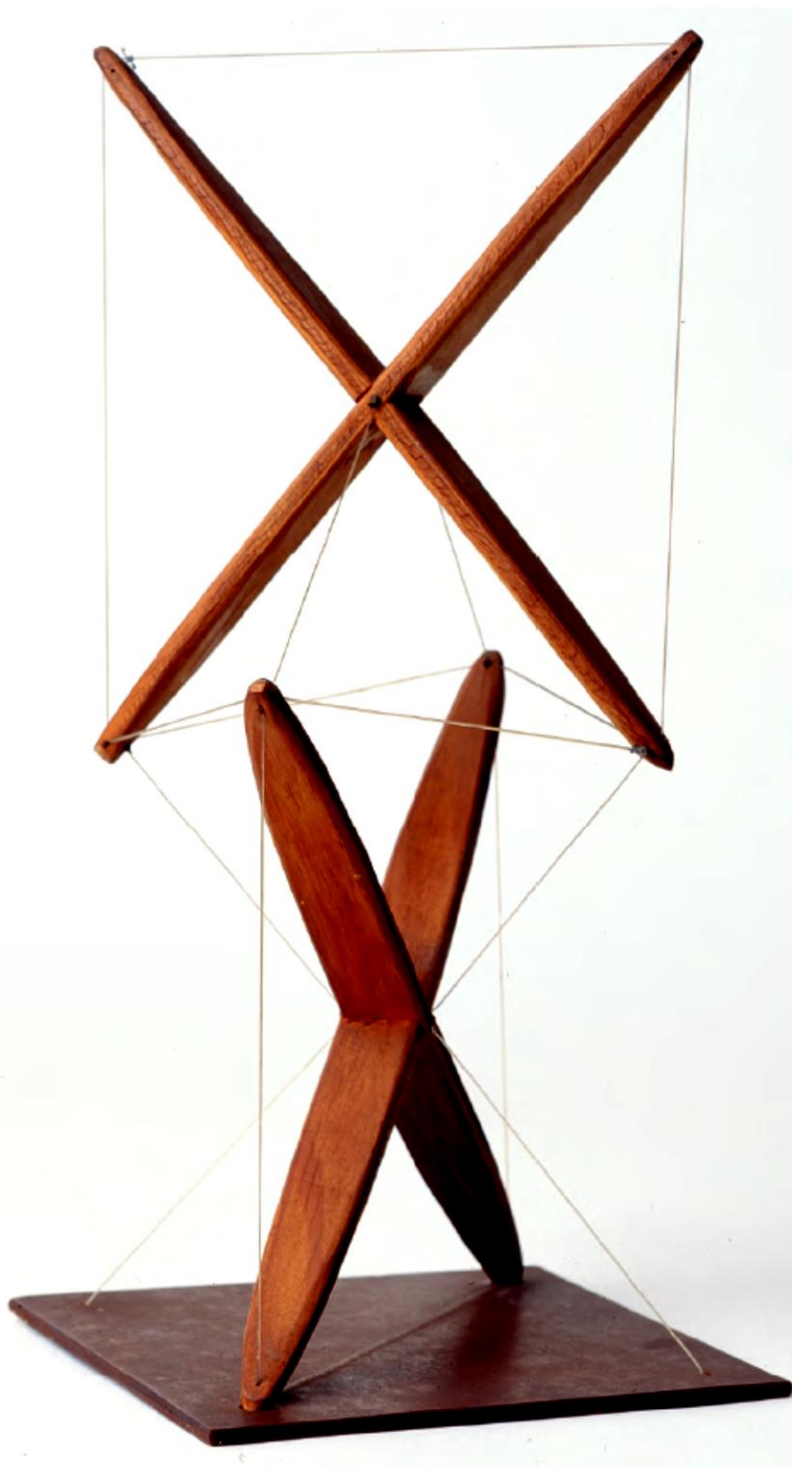
- Richard Buckminster Fuller – *Tensional Integrity Structures* (Buckminster Fuller, 1962)
- David Georges Emmerich – *Construction de réseaux autotendants* (Emmerich, 1964) oraz
- Kenneth Duane Snelson – *Continuous Tension, Discontinuous Compression Structure* (Snelson, 1965).

Fuller oraz Snelson opracowali system tensegrity osobno lecz niejako w synergii, w tym samym czasie pracujący w Europie Emmerich odkrył ten sam system niezależnie. Zarówno Snelson jak i Emmerich przyznają się do inspiracji pracami Iogansona.



Rys. 16 Ilustracja "konstrukcji o uciąglonym napięciu, nieciąglym ściskaniu z patentu (Snelson, 1965)

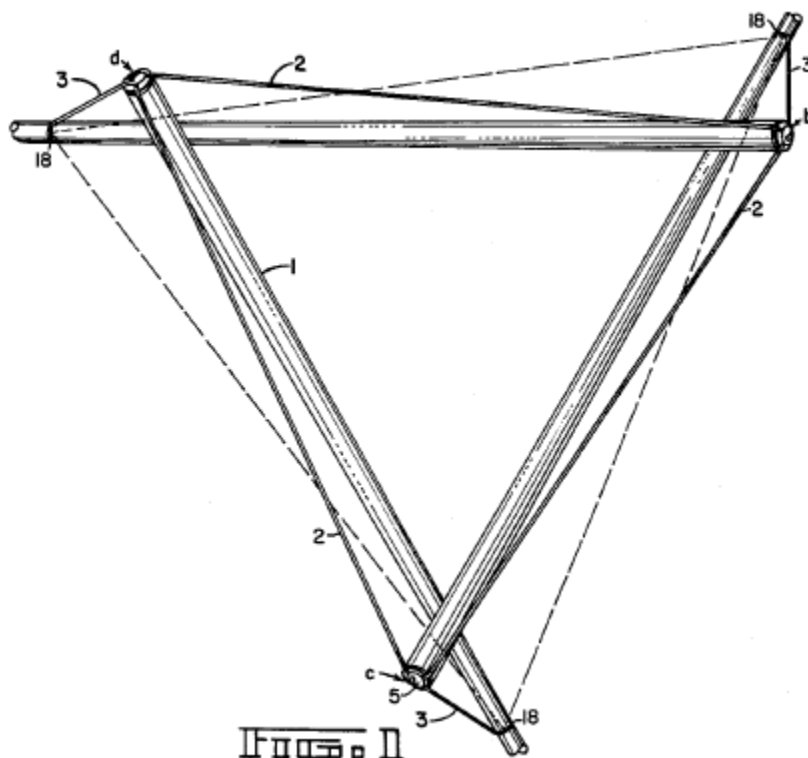
W 1948 roku Fuller prowadził zajęcia w Black Mountain College w Karolinie Północnej, jeden z jego studentów, Kenneth Snelson, pod wpływem wykładów z modelowania geometrycznego, zaczął eksperymentować z instalacjami złożonymi z prętów i cięgien. Efektem była tzw. „Kolumna-X”, uznawana za pierwszą strukturę tensegrity, złożona z dwóch sztywnych elementów w kształcie litery X, ustawionych jeden na drugim i połączonych cięgnami (Rys. 17). Praca ta zainspirowała Fullera do własnych badań nad tym typem konstrukcji. W kolejnych latach Fuller umniejszał rolę Snelsona (Gómez Jáuregui, 2009) co stało się zarzewiem trwającej przez dekady dyskusji o autorstwie systemu strukturalnego tensegrity (m.in. informacja o wkładzie Snelsona została by całkowicie pominięta na wystawie prac Fullera w prestiżowym Museum of Modern Art [MoMA] w Nowym Jorku).



Rys. 17 Kenneth Snelson, X-piece, 1948, drewno i nylon, 29 x 4,5 x 4,5cm (Heartney & Snelson, 2013)

Ponad pół wieku od zgłoszenia patentów opisujących system tensegrity wciąż trwa dyskusja nad jego dokładnym określeniem. Wśród bardziej szczegółowych definicji struktur tensegrity często, np. w (Kasprzak, 2013), przywoływana jest ta przedstawiona przez (Pugh, 1976): tensegrity składa się z nieciągłego układu elementów ściskanych oddziałujących z ciągłym układem elementów rozciąganych, zawierając się w pewnej objętości w przestrzeni. W swojej książce (Motro, 2003) uzupełnił tę definicję o wymóg samonapężenia oraz spostrzeżenie, że w węzłach konstrukcji dokładnie jeden element ściskany łączy się z pewną liczbą elementów rozciąganych (tzn. że elementy ściskane nie łączą się ze sobą). W książce (Skelton & de Oliveira, 2009)

proponują bardziej liberalną definicję, według której tensegrity to pewien układ brył sztywnych (nazwany konfiguracją tensegrity) połączony układem elementów rozciąganych. Zgodnie z tą definicją klasa  $k$  systemu tensegrity jest określona przez maksymalną liczbę elementów ściskanych łączących się w węzle. Połączenia elementów są przegubowe. Tak więc konstrukcja zgodna z definicją (Motro, 2003) byłaby według (Skelton & de Oliveira, 2009) systemem tensegrity klasy 1.



Rys. 18 Konstrukcja tensegrity przedstawiona w patencie (Buckminster Fuller, 1962).

W swojej pracy (Kasprzak, 2013) proponuje swoją definicję struktur tensegrity: *Konstrukcja typu tensegrity jest kratownicą, w której występują mechanizmy nieskończenie małe usztywniane przez samorównoważne układy sił. Elementy ściskane stanowią nieciągły układ wewnątrz ciągłego układu elementów rozciąganych, nieposiadających sztywności na ściskanie.* Autor tej definicji podkreśla rolę *mechanizmu nieskończonego* (tzn. związanego z lokalnymi nieskończenie małymi przemieszczeniami), który jest równoważony przez stan samonapężenia konstrukcji tensegrity. Klasyfikacja przedstawiona w pracy (Kasprzak, 2013) jest bardzo restrykcyjna – konstrukcje chociażby kopuł tensegrity uznawane są według niej za struktury „o cechach tensegrity”.

W układach tensegrity elementy ściskane i rozciągane połączone są przegubowo, dzięki temu elementy poddane są czystemu (osiowemu) ściskaniu albo osiowemu rozciąganiu. Bardzo istotną cechą struktur tensegrity wynikających z powyższego twierdzenia jest to, że zniszczenie konstrukcji tensegrity następuje wskutek wyboczenia prętów lub zerwania cięgien (Winkelmann, Kłós, & Rapca, 2018; Rhode-Barbarigos et al., 2010).

Warto tu zauważyć, że biegły projektant może zaprojektować strukturę tensegrity tak, aby przewidywane mechanizmy zniszczenia obejmowały wyboczenie prętów bez zerwania cięgien. Dzięki temu zniszczenie konstrukcji będzie sygnalizowane. Struktury tensegrity są ponadto zazwyczaj relatywnie lżejsze od innych układów konstrukcyjnych o tej samej nośności (Rhode-Barbarigos et al., 2010).

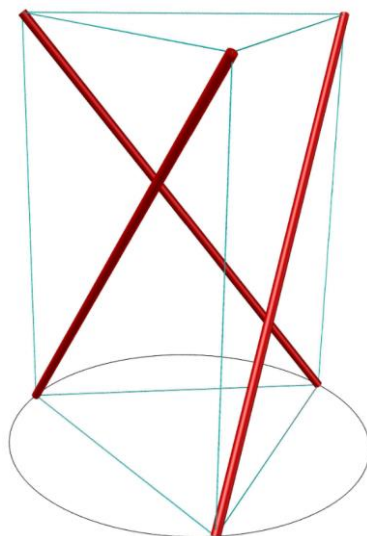
Konstrukcje tensegrity wykazują zachowanie silnie nieliniowe (Juan & Mirats Tur, 2008; Geiger, Stefaniuk, & Chen, 1986). Jest to zazwyczaj nieliniowość zarówno materiałowa, wynikająca z wysokich wartości naprężeń (zazwyczaj) w cięgnach sprężających (wywołanych m.in. naciągiem wstępnym), jak również nieliniowość geometryczna wymagająca uwzględnienie w analizie dużych przemieszczeń (wykluczających stosowanie zasady zeszywnienia); ponadto konieczne jest uwzględnienie możliwego mechanizmu zniszczenia poprzez wyboczenie prętów.

### 3.1. Budowa i zastosowania struktur tensegrity

Konstrukcje tensegrity są skomplikowane w analizie (Harish, Deshpande, & Andress, 2021; Winkelmann, Kłos, & Rapca, 2018; Calladine, 1978) oraz wykonawstwie. Prawdopodobnie z tego powodu rzadko występują w praktyce inżynierskiej (Gilewski & Al Sabouni-Zawadzka, 2020). Istnieje jednak kilka znamienych implementacji technologii tensegrity m.in. w inżynierii kosmicznej z uwagi na niską masę konstrukcji oraz możliwość automatycznego rozkładania konstrukcji (Skelton & Longman, 2014; Tibert, 2002) oraz w inżynierii lądowej – m.in. prezentowane w niniejszej pracy autorskie wdrożenie struktur tensegrity jako składanych namiotów imprezowych znacznych rozpiętości.

Aktywnie badanym zagadnieniem związanym ze strukturami jednoprzęznymi jest poszukiwanie oraz efektywne wykonywanie obliczeń statycznych i optymalizacja topologii tensegrity (Xu et al., 2018). Opracowywane są zarówno nowe dwuwymiarowe kratownice tensegrity (Li et al., 2020) jak i układy trójwymiarowe (Wu & Dai, 2021).

#### 3.1.1. Wieże tensegrity

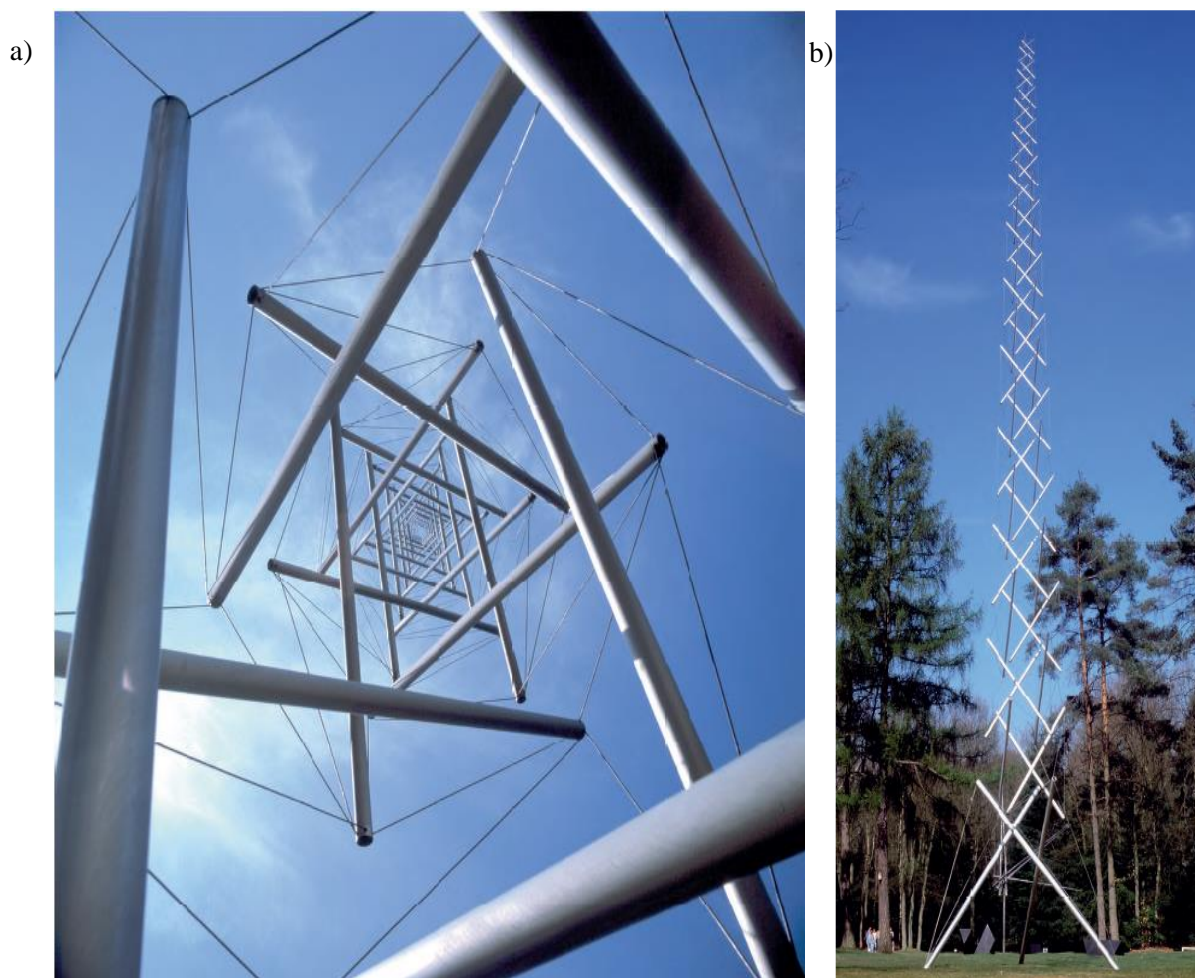


Rys. 19 Elementary equilibrium Davida Georgesa Emmericha



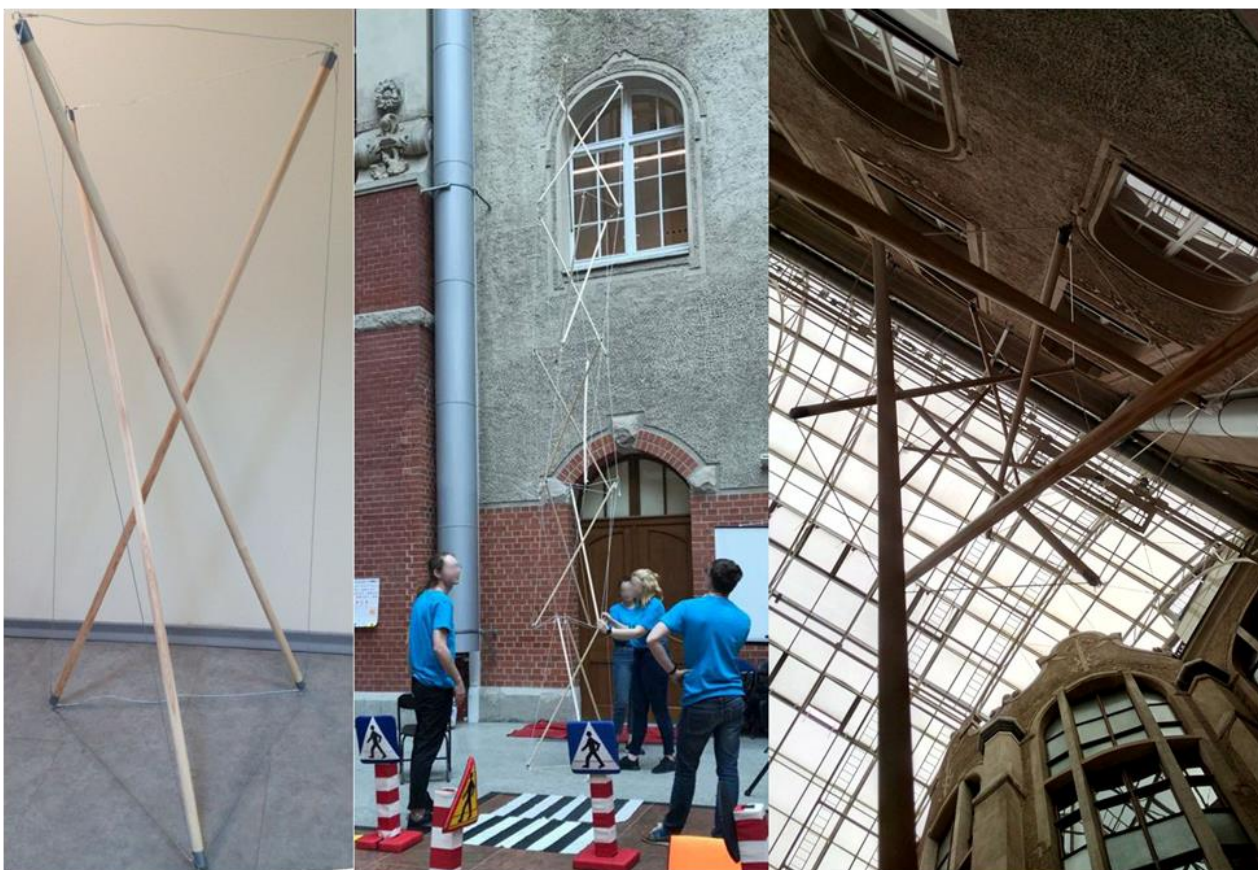
Spektakularnym przykładem wieży tensegrity są tzw. Igły Snelsona (Snelson's Needle Tower), Rys. 20. Wieże te złożone są z szeregu modułów *elementary equilibrium* o różnych wymiarach ustawionych pionowo na sobie przy czym kolejne „piętra” obrócone są względem siebie o  $60^\circ$ . Moduł *elementary equilibrium* przedstawia (Rys. 19).

Z uwagi na widowiskowość tej konstrukcji oraz łatwość jej montażu autor wykonał wraz z Kołem Naukowym wieżę o wysokości 5,5 metra wzorowaną na Igłę Snelsona. Wieża ta była prezentowana w czasie Bałtyckiego Festiwalu Nauki (Rys. 21).



Rys. 20 Kenneth D. Snelson: a) Needle Tower; 1968; aluminium i stal nierdzewna; 18,2 x 6 x 6m; Hirshhorn Museum and Sculpture Garden, Waszyngton USA; b) Needle Tower II; 1969; aluminium i stal nierdzewna; 30 x 6 x 6m; Kröller-Müller Museum Otterlo, Holandia

Konstrukcje te, jakkolwiek spektakularne, rzadko (Gilewski & Obara, 2015) znajdują zastosowanie praktyczne; są jednak często analizowane jako podstawowa struktura tensegrity pozwalająca niskim kosztem obliczeniowym testować algorytmy obliczeń lub metody analizy (Fabbrocino & Carpentieri, 2017; Zhang & Ohsaki, 2015; Juan & Mirats Tur, 2008).



Rys. 21 Igła Snelsona zbudowana przez KN Forever Young na Bałtycki Festiwal Nauki

### 3.1.2. Mosty tensegrity

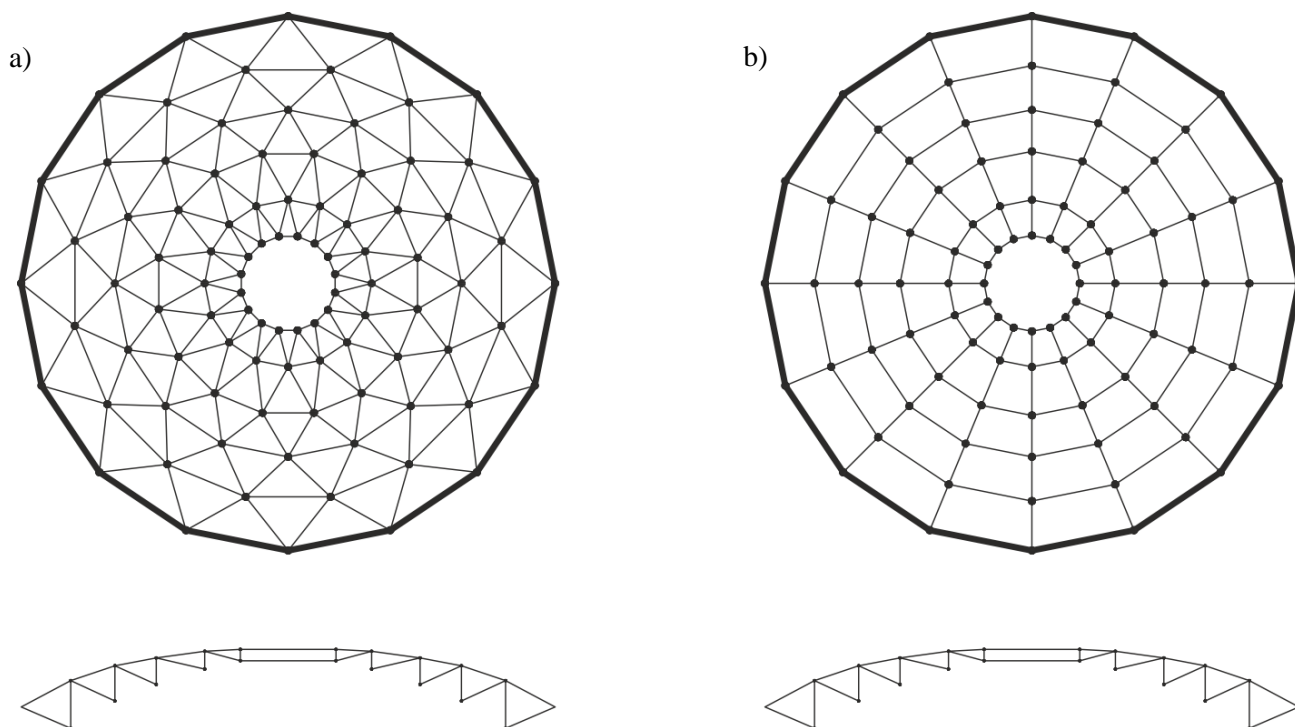
Układy tensegrity znajdują też zastosowanie w bardziej inżynierskich projektach, jak np. kładka w Stirling w Szkocji o rozpiętości głównego przęsła wynoszącej 88,2m (całkowita długość 113m). Zastosowany schemat konstrukcji to odwrócona kratownica Finka. Wg klasyfikacji zaproponowanej w pracy (Kasprzak, 2013) byłaby to (z braku, wspomnianego wyżej, *mechanizmu infinitesimalnego*) kratownica, w której zastosowano ciągną w miejscach elementów rozciąganych. Kładka ta i podobne projekty (m.in. koncepcja kładki KL-03 nad trasą S7) wymienia się jednak często jako obiekty tensegrity.



Rys. 22 Kładka Kurilpa w Brisbane (Australia)

Według tej samej klasyfikacji (Kasprzak, 2013) kładka Kurilpa w Brisbane jest konstrukcją o cechach tensegrity, a „czyste” tensegrity występuje w tej strukturze jedynie lokalnie – w poziomych stężeniach oraz elementach wsporczych dachu nad pomostem. Rozpiętość głównego przęsła kładki wynosi 135m. Jest to najdłuższy obiekt o konstrukcji typu tensegrity.

### 3.1.3. Kopuły tensegrity



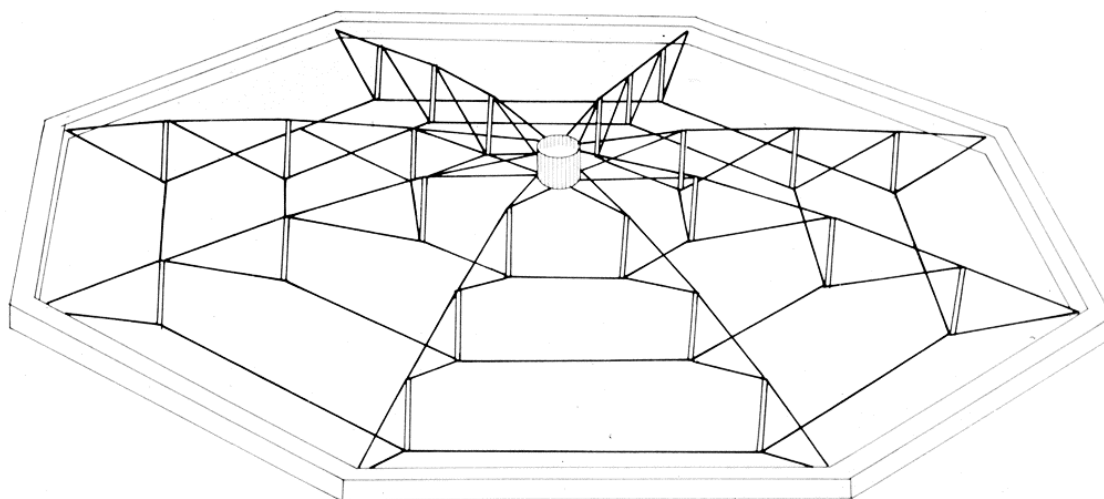
Rys. 23 Rzut i kład kopuł tensegrity: a) kopuła Fullera; b) kopuła Geigera

Prętowo-ciężnowe kopuły tensegrity są efektywnym sposobem przekrywania dużych rozpiętości – oferują one niższą masę własną konstrukcji niż kratownice o tej samej rozpiętości i sztywności (Winkelmann, Kłos, & Rapca, 2018; Fu, 2005; Geiger, Stefaniuk, & Chen, 1986). Tab. 2 zestawia największe wzniesione kopuły tensegrity; niestety największa z nich, Georgia Dome w Atlancie, została zburzona w 2017 roku aby ustąpić miejsca nowszemu stadionowi.

Tab. 2 Zestawienie największych kopuł tensegrity

rozmiar	nazwa i miejsce	lata	schemat konstrukcyjny
238 x 210 m	Georgia Dome; Atlanta, GA, USA	1992-2017 r.	Fullera (zmodyfikowany)
∅ 180 m	Suncoast Dome; St. Petersburg, FL, USA	1990 r.	Geigera
∅ 134 m	Hala gimnastyki; Seul, Korea Pd.	1988 r. (Olimpiada Letnia)	Geigera
∅ 101 m	Hala szermierki; Seul, Korea Pd.	1988 r. (Olimpiada Letnia)	Geigera
∅ 99, 7 m	Crown Coliseum; Fayetteville, NC, USA	1997 r.	Geigera
∅ 48 m	Amagi Dome; Japonia	1991 r.	Fullera

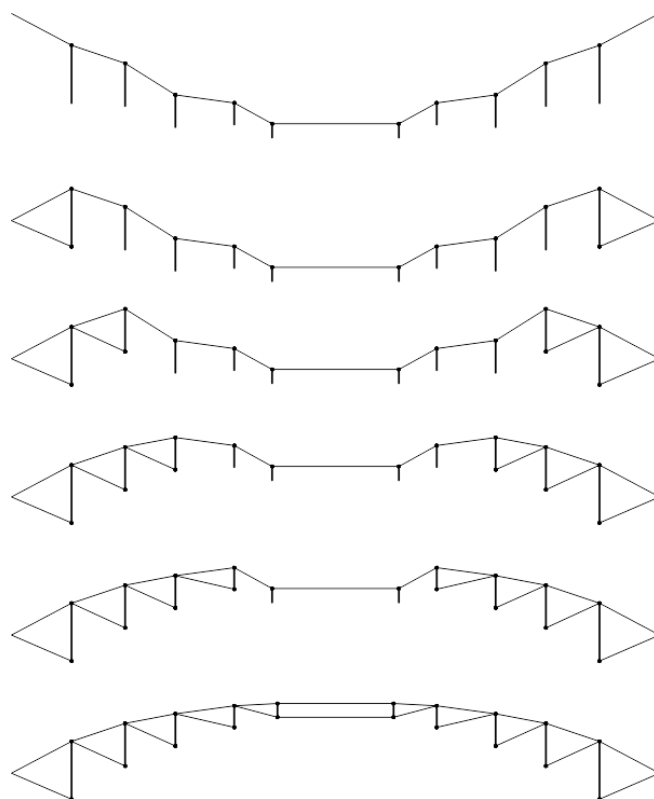
Dwa podstawowe schematy konstrukcyjne kopuł tensegrity prezentuje Rys. 23. Rzuty tych struktur pokazują sieć cięgien radialnych (biegnących z grubsza od środka czaszy na zewnątrz) i obwodowych (na rzucie przyjmujące geometrię wielokąta foremnego). Cięgna te można dodatkowo podzielić na górne (biegnące w górnej powierzchni czaszy) oraz dolne (łącznie się z dolnymi węzłami prętów). W węzłach tej sieci znajdują się pionowe pręty, przedstawione na rzutach za pomocą małych kół. Kopuły w schemacie Geigera (Rys. 23 b) są pękiem dźwigarów tensegrity połączonych cięgnami obwodowymi. Rys. 23 a) prezentuje schemat kopuły Fullera, w której sieć cięgien radialnych tworzy bardziej skomplikowaną strukturę. Gęstsza, bardziej złożona, sieć cięgien radialnych nadaje tej strukturze większą sztywność w porównaniu do kopuł Geigera (Nenadović, 2010). Warto jednak zauważyć, że na schematach przedstawionych na Rys. 23 b) kopuła Geigera składa się z 160 cięgien radialnych, zaś liczba cięgien radialnych w prezentowanej poniżej kopule Fullera (Rys. 23 a) wynosi 320 (każdy odcinek na rzucie kopuły prezentuje 2 cięgna radialne: górne i dolne); ponadto są to cięgna dłuższe niż w kopule Fullera. Liczba prętów w obu schematach jest taka sama.



Rys. 24 Widok aksonometryczny kopuły nad halą gimnastyki w Seulu

Należy zauważyć, że zgodnie z terminologią zaproponowaną w pracy (Kasprzak, 2013) kopuły te należałyby klasyfikować jako „konstrukcje o cechach tensegrity”. Wynika to z zastosowania sztywnej ramy obwodowej, której elementy są połączone bezprzegubowo. Ponieważ konstrukcje tensegrity uzyskują sztywność wskutek wstępnego naciągu (np. Rys. 25) (Gidak & Fresl, 2012; Skelton & de Oliveira, 2009) w węzłach łączących sieć cięgien tensegrity z ramą obwodową przenoszone są na nią znaczące obciążenia.

Rys. 25 przedstawia schemat wznoszenia kopuł tensegrity zastosowany w większości istniejących kopuł tensegrity. Wznoszenie kopuł odbywa się za pomocą naprężania cięgien radialnych dolnych w kolejnych pierścieniach zaczynając od najbardziej zewnętrznego do najbardziej wewnętrznego.



Rys. 25 Schemat wznoszenia kopuł tensegrity

David Geiger zaprojektował dwie kopuły w schemacie zaprezentowanym powyżej jako przekrycia hal budowanych na Igrzyska Olimpijskie (Geiger, Stefaniuk, & Chen, 1986). Montaż rozpoczęto od górnych cięgien radialnych przymocowanych do ramy obwodowej, w centralnym punkcie kopuły znajduje się rozciągany pierścień. Na górnych radialnych cięgnach zamocowane zostały słupki następnie kolejno wypiętrzone poprzez naprężenie cięgien radialnych dolnych. (Geiger, Stefaniuk, & Chen, 1986) wskazuje na niski ciężar oraz znaczną przewagę ekonomiczną zastosowanej technologii.

### 3.1.4. Wady i zalety struktur tensegrity

Pomimo dobrego stosunku nośności do ciężaru własnego większości struktur tensegrity są one stosunkowo rzadko stosowane, prawdopodobnie z uwagi na skomplikowaną analizę numeryczną tego typu konstrukcji (Gilewski & Obara, 2015). Możliwość łatwego i zautomatyzowanego rozkładania struktur tensegrity jest dużą zaletą tych konstrukcji, z tego powodu ich zastosowanie w inżynierii kosmicznej jest przedmiotem wielu analiz i nowych koncepcji (Skelton & Longman, 2014; Tibert, 2002). Rozwijane są także koncepcje tzw. *active tensegrity* – struktur, które poprzez wydłużenie lub skrócenie niektórych (aktywnych) elementów w trakcie użytkowania są w stanie modyfikować swoją geometrię dostosowując się do zmiennych obciążeń i w ten sposób zwiększać swoją nośność na te obciążenia (Wang & Senatore, 2021; Wang, Xu, & Luo, 2021; Shea, Fest, & Smith, 2002). Podział elementów na poddane czystemu ścisaniu albo rozciąganiu jest korzystny z uwagi na łatwość dobrania optymalnych przekrojów poszczególnych elementów; jednakże z tą zaletą nieodłącznie związana jest wada w postaci konieczności wstępnego naprężenia konstrukcji dla uzyskania sztywności oraz konieczność wykonstruowania skomplikowanych węzłów.

### 3.2. Wdrożenie kopuł tensegrity – namioty imprezowe

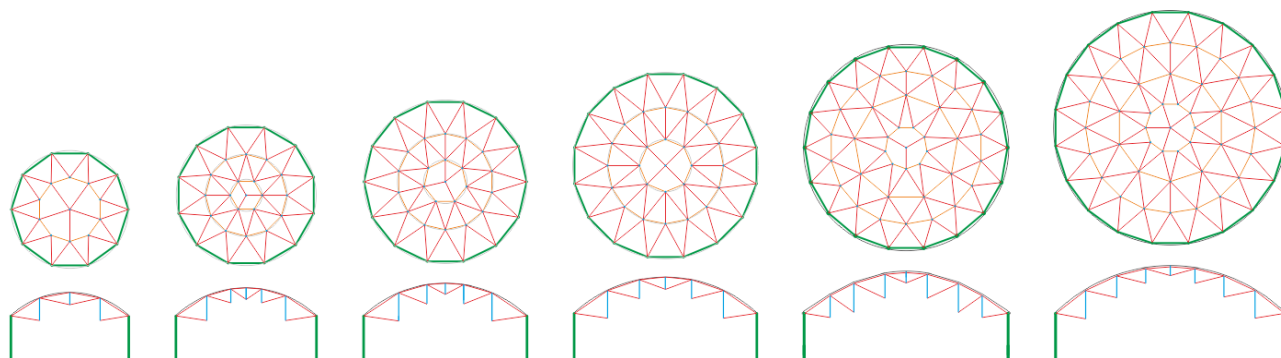
Schemat kopuł tensegrity (kopuły Fullera) został przez autora zaaplikowany jako rozwiązanie dla łatwych w montażu i demontażu hal namiotowych dużych rozmiarów. Autor wraz z zespołem inżynierskim, którego pracami kierował, opracował technologię namiotów, która uzyskała prawo ochronne jako wzór użytkowy w Urzędzie Patentowym RP [nr Ru.071215 *Hala namiotowa o konstrukcji prętowo-ciężnowej na planie wielokąta zwłaszcza foremnego*<sup>5</sup>]. Rozwiązanie namiotów w typie kopuł Fullera wymagało rozwiązania szeregu zagadnień technologicznych, użytkowych oraz, nade wszystko, konstrukcyjnych. Efektem prac przedstawionych poniżej jest typoszereg namiotów imprezowych składający się z namiotów o powierzchniach od około 50 do 200 metrów kwadratowych (średnice okręgów opisanych na osiach konstrukcyjnych zewnętrznej ramy obwodowej namiotów od 8,09 do 15,98 metra).

Tab. 3 Zestawienie podstawowych parametrów namiotów w typoszeregu opracowanym przez autora.

liczba boków	10	12	14	16	18	20	[–]
kąt wierzchołkowy	144	150	154	158	160	162	[°]
kąt wewnętrzny	36	30	26	23	20	18	[°]
promień	4,05	4,83	5,62	6,41	7,20	7,99	[m]
liczba pierścieni	1	2	2	2	3	3	[–]
<b>średnica</b>	<b>8,09</b>	<b>9,66</b>	<b>11,23</b>	<b>12,81</b>	<b>14,40</b>	<b>15,98</b>	[m]
<b>pole powierzchni</b>	<b>48,1</b>	<b>70,0</b>	<b>95,8</b>	<b>125,7</b>	<b>159,5</b>	<b>197,3</b>	[m <sup>2</sup> ]
powierzchnia nominalna	50	70	100	125	160	200	[m <sup>2</sup> ]

Typoszereg namiotów opracowano jako wytyczne przyjmując m.in.:

- wpisanie konstrukcji w wielokąt foremny;
- stałą szerokość boku wielokąta wynoszącą ok. 2,5 metra;
- parzystą liczbę boków;
- rosnącą wraz z rozmiarem liczbę elementów;
- stosunek wysokości kopuły  $f$  do średnicy  $d$  wynoszący w przybliżeniu  $f/d=0,2$ ;
- waga pojedynczego elementu poniżej 20 kg.



Rys. 26 Rzut oraz kład schematu konstrukcji namiotów tensegrity w typoszeregu opracowanym przez autora.

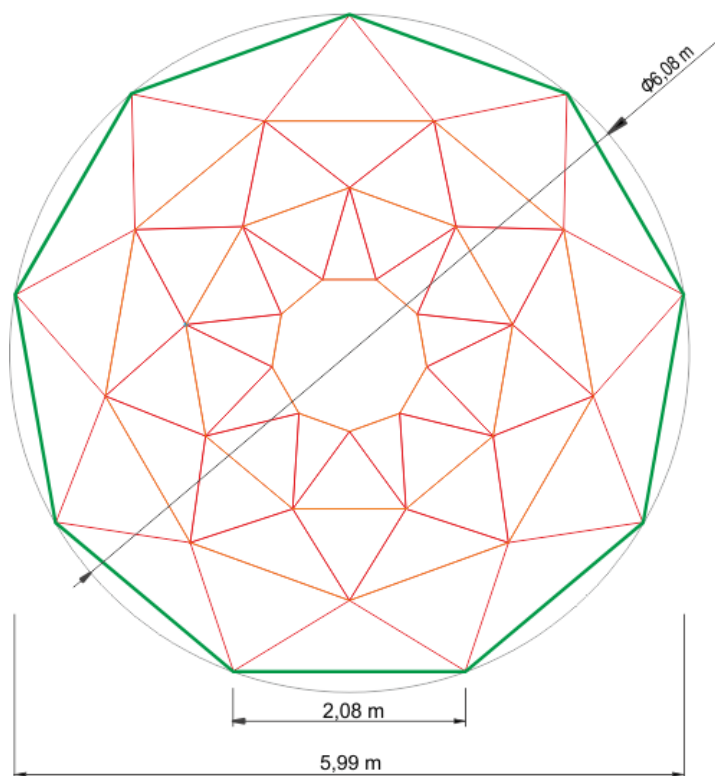
<sup>5</sup> <https://ewyszukiwarka.pue.uprp.gov.pl/search/pwp-details/W.126525?lng=pl> dostęp: 2021.03.10

Różnorakie kryteria doprowadziły do przyjęcia powyższych wytycznych. Przyjęcie wielokątów foremnych jako ogólnej geometrii ramy obwodowej pozwala założyć symetryczną dystrybucję sił przekrojowych w symetrycznych przypadkach obciążeń, ponadto ogranicza zróżnicowanie wymiarów produkowanych elementów. Stała szerokość boku wielokąta została przyjęta z uwagi na możliwość produkowania oraz stosowania ścian z powłok technicznych o tych samych wymiarach dla wszystkich namiotów. Parzysta liczba boków jest korzystna z uwagi na stosowaną praktycznie we wszystkich namiotach redukcję liczby elementów kopuły tensegrity poprzez zmniejszenie liczby boków wielokąta foremnego cięgien obwodowych w wewnętrznych pierścieniach (np. z 18-kąta foremnego na ramie i 3 pierścieniu namiotu o powierzchni 160 m<sup>2</sup> do 9-kąta foremnego wewnętrznych pierścieni struktury prętowo-ciężnowej).

Rys. 26 prezentuje schematyczny rzut oraz kład konstrukcji namiotów w typoszeregu. W konstrukcji namiotów tensegrity można wyróżnić ramę obwodową składającą się z poziomych rygli, łączących je elementów narożnych oraz słupów podtrzymujących całą konstrukcję. Na rysunku powyżej wykreślono je kolorem zielonym. Pręty, zaznaczone na rysunku kolorem niebieskim, są pionowymi elementami wyraźnie widocznymi na kładach konstrukcji. W rzutach można je znaleźć w każdym z węzłów konstrukcji prętowo-ciężnowej. Ciężna ze względów technologicznych zdecydowano się podzielić na ciężna biegnące (z pewnymi odchyleniami) w kierunku od środka namiotu do ramy obwodowej – ciężna te nazwano ciężnami radialnymi (wyróżniono dodatkowo ciężna radialne dolne oraz górne); na rysunku ciężna te wykreślono kolorem czerwonym. Ciężna okrążające środek namiotu nazwano ciężnami obwodowymi (górnymi oraz dolnymi). Dla zbioru elementów (cięgien oraz prętów) znajdujących się pomiędzy okręgami opisanymi na kolejnych wielobokach cięgien obwodowych przyjęto nazwę „pierścień”, zliczając je od „pierwszego pierścienia” – centralnego, we wnętrzu którego znajduje się centralny maszt, przez kolejne pierścienie aż do zewnętrznego. Liczbę pierścieni dla namiotów w typoszeregu zebrano w Tab. 3.

### 3.2.1. Prototyp o powierzchni 25 m<sup>2</sup>

Prace nad namiotami tensegrity rozpoczęto od sporządzenia niewielkiego prototypu o powierzchni około 25 metrów kwadratowych. Głównym celem zbudowania tego obiektu było sprawdzenie możliwości wypiętrzania oraz usztywniania konstrukcji tensegrity o wielu „warstwach”, pierścieniach, za pomocą jednego elementu – dolnego, obwodowego ciężna najbardziej zewnętrznego pierścienia. Dzięki budowie prototypu sprawdzono również technologię wykonywania elementów, jakość i dokładność powłok wykonanych przez podwykonawcę według dostarczonych wytycznych, opracowane rozwiązanie węzłów struktury tensegrity i węzłów zewnętrznej sztywnej ramy oraz szereg detali o znaczeniu użytkowym lub technologicznym (np. kapinos dachu, sposób montażu ścian, możliwości kotwienia namiotu). Ważnym wynikiem prac nad prototypem była też zgrubna ocena łatwości wzbudzenia drgań w tej konstrukcji oraz jej podatność.



Rys. 27 Rzut schematu konstrukcji prototypu.

Ponieważ prace nad prototypem przyniosły zadawalające wyniki we wszystkich wymienionych zakresach postanowiono opracować pełnowymiarowy namiot o powierzchni 160 metrów kwadratowych. Przetestowane wypiętrzanie i usztywnianie kopuły za pomocą dolnego cięgna obwodowego w najbardziej zewnętrznej warstwie prętów zostało zaaplikowane, z pewnymi zmianami, do wszystkich namiotów.

### 3.2.2. Przyjęte rozwiązania technologiczne

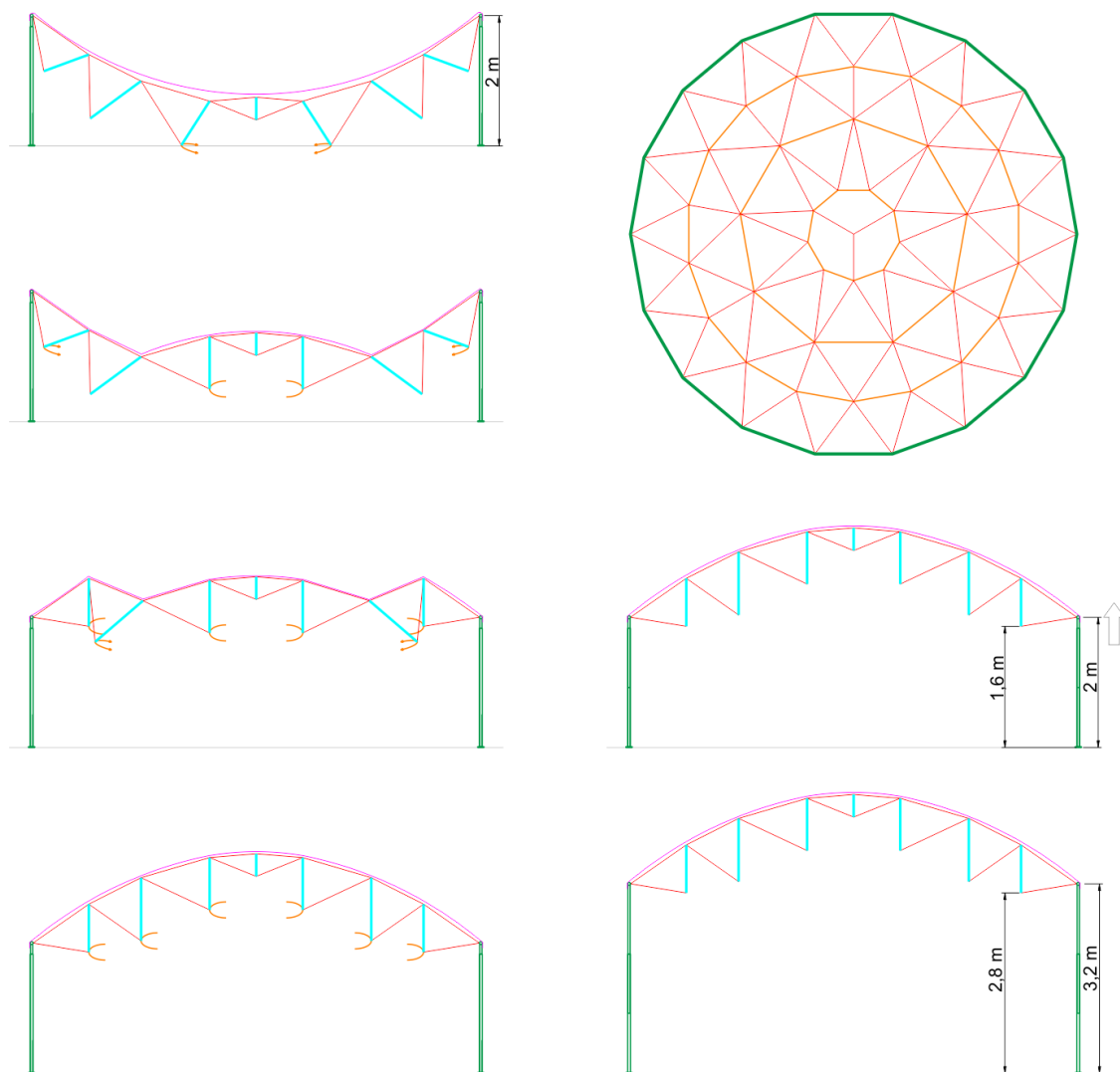
Rys. 28 przedstawia opracowany sposób wypiętrzania namiotów na przykładzie namiotu o powierzchni nominalnej 160 metrów kwadratowych. Po połączeniu cięgien i prętów najbardziej wewnętrznego pierścienia napręża się dolne obwodowe cięgno najbardziej zewnętrznego pierścienia, a na samym końcu dolne obwodowe cięgno pierścienia numer 2. Dzięki temu siły potrzebne do naprężania dolnego obwodowego cięgna 3 pierścienia (najbardziej zewnętrznego) są znacząco niższe niż w przypadku naprężania cięgien po kolei od centrum na zewnątrz.

Dużą zaletą opracowanej technologii jest również montaż czaszy namiotu na złożonych, teleskopowych słupach. To rozwiązanie sprawia, że montaż powłoki, prętów oraz cięgien tensegrity odbywa się z poziomu podłoża. Dzięki temu montaż i demontaż namiotów odbywa się łatwiej, bezpieczniej (bez drabin, rusztowań lub podnośników) i szybciej – są to niezwykle istotne cechy dla namiotów imprezowych.

Rygle, tworzące boki wielokąta foremnego zewnętrznej ramy obwodowej, wykonane są z rur okrągłych – zestawienie przekrojów oraz masy rygli zawiera Tab. 4. Stosunkowo niska masa pojedynczych elementów konstrukcyjnych umożliwia ręczny montaż namiotów. W węzłach konstrukcji (w narożnikach wielokąta



foremnego) rygle wpuszczone są w elementy narożne wykonane z wygiętego pod odpowiednim kątem odcinka rury okrągłej. Jako łączniki zastosowano po dwa sworznie średnicy 12 mm: jeden ograniczający głębokość połączenia (czoło rygla opiera się o ten sworzni), drugi (zakładany w trakcie montażu) łączący rygiel oraz element narożny. Jest to kluczowy detal połączenia: z powodu imperfekcji w wykonaniu ramy obwodowej, luzów w połączeniach elementów ramy oraz nierówności podłoża elementy ramy podlegają skręcaniu. Siły przenoszone przez silnie sprężoną konstrukcję tensegrity na węzły ramy dążą do jej zdeformowania. Najprostszym mechanizmem zniszczenia ramy obwodowej o nieidealnej geometrii jest jej „złożenie” poprzez obrót części jej elementów w węzłach narożnych.



Rys. 28 Schemat wypiętrzania i wynoszenia namiotu o powierzchni 160m<sup>2</sup>.

Konstrukcja namiotów została zaprojektowana z lin stalowych na rdzeniu syntetycznym (oznaczenie: M+FC) o splocie 6x7; liny zakończono kauszami wykorzystując zaciski aluminiowe ściśnięte praską hydrauliczną zgodnie z (PN-EN 13411-3, 2009). Pręty struktury tensegrity wykonano z rur okrągłych małych (ok. 20mm) średnic, zakończonych po obu stronach śrubą oczkową zgodną z (DIN 580, 2010). Liny stalowe z prętami połączone w węzłach za pomocą szekli normalnych lub szekli wzmocnionych klasy 6. Przekroje elementów zostały dobrane tak aby ewentualna awaria nastąpiła najprawdopodobniej poprzez wyboczenie

prętów. Przyjęto ten mechanizm zniszczenia jako znacznie bezpieczniejszy niż zerwanie liny, które mogłoby wystąpić niesygnalizowane.

Obliczenia przeprowadzono zgodnie z teorią trzeciego rzędu (uwzględniając m.in. szczególnie istotne dla struktur tensegrity wyboczenie, duże przemieszczenia oraz wyłączenie kabli ściskanych), dokładniejszy opis obliczeń znajduje się w kolejnych rozdziałach. Zebranie obciążeń, obliczenia oraz projekt namiotów wykonano zgodnie z obowiązującymi normami. Uwzględniono również normę dotyczącą konstrukcji tymczasowych i namiotów (PN-EN 13782, 2015). Jednak zgodnie z uwagami zawartymi w (Rawska-Skotniczny & Marynowicz, 2016) nie zastosowano wskazanych w normie (PN-EN 13782, 2015) możliwości zredukowania obciążenia śniegiem lub przyjęcia uproszczonych obciążeń wiatrem.

**Tab. 4 Zestawienie charakterystycznych parametrów wagowych namiotów tensegrity.**

powierzchnia nominalna	50	70	100	125	160	200	[m <sup>2</sup> ]
średnica	8,09	9,66	11,23	12,81	14,4	15,98	[m]
liczba boków	10	12	14	16	18	20	[-]
oznaczenie przekroju ramy obwodowej – RO	63,5x3,6	51x3,6	51x4,5	60,3x3,6	60,3x5,6	82,5x4	[-]
masa ramy obwodowej	133	126	181	201	340	387	[kg]
stosunek masy ramy do powierzchni namiotu	2,8	1,8	1,9	1,6	2,1	2,0	[kg/m <sup>2</sup> ]
max. masa elementu	13	10	13	13	19	19	[kg]

## 4. PODSTAWY MODELOWANIA SKLEPIEŃ MUROWYCH I STRUKTUR TENSEGRITY

### 4.1. Modelowanie sklepień murowych

Warto zacząć od spostrzeżenia, że w przeszłości (z braku metod analizy konstrukcji) budynki były wznoszone metodą prób i błędów, a wiedza o tym jak i z czego budować była przekazywana (nieraz w sekrecie rodzinnym lub cechowym) z pokolenia na pokolenie (Sieczkowski & Szołomicki, 1999). Wniosujemy o tym chociażby na podstawie bardzo dokładnych zapisów rozterek budowniczych bazyliki św. Piotra na Watykanie dotyczących nośności filarów podtrzymujących kopułę (Murray, 1999) jak i z wzmiankowanej wcześniej historii katedry świętego Piotra w Beauvais. Plany budowy średniowiecznych kościołów lub ich części funkcjonowały często w postaci np. pobieżnych szkiców (Tymiński, 2016) lub modeli gotowych budynków (Murray, 1999). Pomimo niedostatków tych metod projektowania sklepienia murowe, które spotykamy w obiektach historycznych są zazwyczaj wykonane w dobrej jakości oraz zgodnie z zasadami statyki (Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007). Struktury wykonane niedbale, wadliwie lub po prostu źle zazwyczaj nie przetrwały próby czasu. Ponadto wiedza zbierana i udoskonalana przez wieki dała oszałamiające efekty w postaci np. katedr gotyckich, których ozdobna forma jest w pełni uzasadniona strukturalnie (Sieczkowski & Szołomicki, 1999) a niemal każdy z ozdobnych elementów ma swoją konstrukcyjną rolę (jak np. wieże sił lub system przyporowy). Wyjątkiem są tu paradoksalnie ściągę sklepienne mające przejmować siły rozporowe – często cechują się tak niską wytrzymałością na rozciąganie oraz dużą odkształcalnością, że ich wpływ można całkowicie pominąć w analizie statycznej sklepienia (Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007).

(Caporale et al., 2015) analizując pracę statyczną istniejących zabytkowych budynków murowanych wykazali, że mechanizm inicjacji zniszczenia muru ceglanego jest bardzo wrażliwy na stosunek modułu sprężystości podłużnej cegły i zaprawy. W pracy tej zestawiono też właściwości cegieł suszonych (adobe), cegieł wypalanych oraz zapraw uzyskaną w różnych badaniach. Modelując konstrukcje murowe należy pamiętać, że mechanizm ich zniszczenia, a co za tym idzie również wartość siły niszczącej, zależy od schematu obciążenia; a zwłaszcza od orientacji sił względem spoin (Sieczkowski & Szołomicki, 1999; Page, 1978)

#### 4.1.1. Statyczna analiza sklepień ceglanych

Podstawą wielu analiz sklepień jest twierdzenie Heymana (Heyman, 1966, 1969, 1995) tzw. *Heyman's Safe Theorem*: jeżeli możliwe jest wyznaczenie linii ciśnię odpowiadającej obciążeniom leżącej całkowicie wewnątrz przekroju murowego to konstrukcja jest bezpieczna<sup>6</sup> (Rys. 29).

Zakłada się przy tym, że:

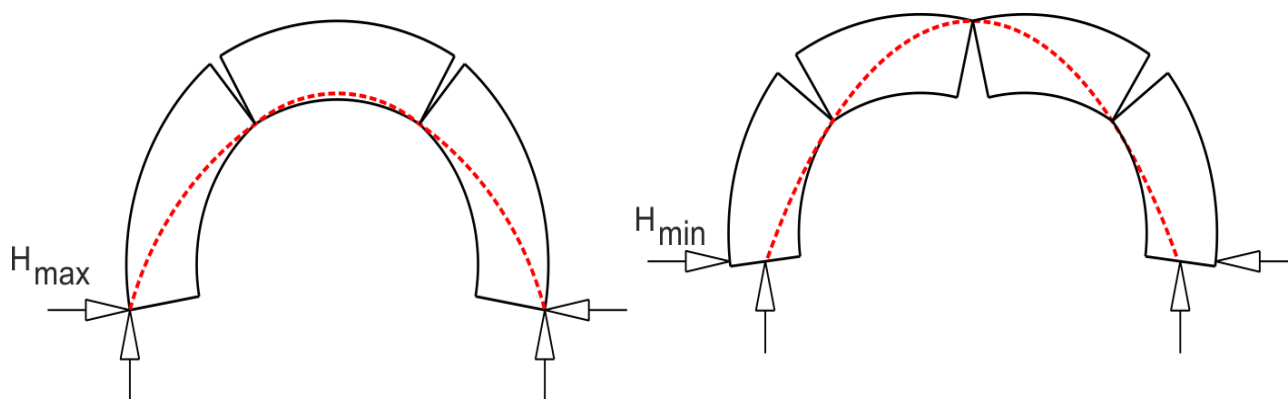
---

<sup>6</sup> "If a line of thrust can be found which is in equilibrium with the external loads and which lies wholly within the masonry, then the structure is safe" (Heyman, 1966)



1. wytrzymałość muru na rozciąganie jest zerowa,
2. wytrzymałość muru na ściskanie jest nieskończona,
3. nie uwzględnia się możliwości ścięcia lub poślizgu komponentów muru po swoich powierzchniach,

zakłada się również, aczkolwiek nie wprost, że komponenty muru są nieskończenie sztywne (Bagi, 2014; Lubowiecka et al., 2011).



Rys. 29 łuk kolisty pod ciężarem własnym – graniczne (maksymalna i minimalna) linie ciśnień.

Powyższe założenia są prawdziwe w pewnym zakresie – rzeczywiście mur zazwyczaj charakteryzuje się wytrzymałością na ściskanie dalece przekraczającą naprężenia wynikające z obciążenia, znikomą (niemal zerową) wytrzymałością na rozciąganie, heterogenicznością oraz wysokim współczynnikiem tarcia pomiędzy komponentami (Huerta, 2001); zaś twierdzenie Heymana można traktować jako odczytanie wiedzy mistrzów murarskich oraz zaaplikowanie teorii stworzonych przez badaczy od końca XVII w. do współczesnej praktyki inżynierskiej (Fraddosio, Lepore, & Piccioni, 2020). Należy tu zauważyć, że kryterium bezpieczeństwa konstrukcji łukowej opracowane na podstawie twierdzenia Heymana jest kryterium związanym z geometrią łuku, jednocześnie całkowicie zaniedbującym wytrzymałość materiałów. Zakłada się tu nieskończoną wytrzymałość na ściskanie i zerową na rozciąganie. Można więc stwierdzić, że nośność łukowych konstrukcji murowych wg Heymana jest kwestią geometrii, a nie wytrzymałości (Tempesta & Galassi, 2019). Przy tak przyjętych założeniach optymalną (tzn. taką, w której oś konstrukcji pokrywa się z linią ciśnień a grubość łuku może być najmniejsza) konstrukcją mającą przenieść swój własny ciężar byłaby odwrócona krzywa łańcuchowa (ang. *catenary*, łac. *catenaria*); a więc wykres cosinusa hiperbolicznego (Nodargi & Bisegna, 2020; Block, Dejong, & Ochsendorf, 2006; Huerta, 2006; Heyman, 1969; Gregory, 1697).

W praktyce często stosowany jest geometryczny współczynnik bezpieczeństwa Heymana (*Heyman geometrical factor of safety*). Jest to stosunek rzeczywistej grubości łuku ceglanego do teoretycznej minimalnej grubości łuku spełniającej warunki twierdzenia Heymana, tj. mieszczącej linię ciśnień w swoim wnętrzu<sup>7</sup> (Maia Avelino et al., 2021; Tempesta & Galassi, 2019; Heyman, 1969).

<sup>7</sup> “One measure of safety in an arch, therefore, might be taken as the ratio of the actual depth of the arch to that of the theoretical minimum necessary to contain the line of thrust.” (Heyman, 1969)

Wśród metod analizy murowych konstrukcji łukowych bazujących na dorobku Heymana rosnącą popularnością cieszą się metody związane z numerycznymi implementacjami metod nośności granicznej (ang. *limit analysis*) (Nodargi & Bisegna, 2020; Ricci et al., 2019; Stockdale & Milani, 2019; Tempesta & Galassi, 2019; Del Piero, 1998) oraz jej modyfikacjami, m.in. *TSM – Thrust Surface Method* (metoda powierzchni ciśnień) (Fraddosio, Lepore, & Piccioni, 2020) lub *TNA – Thrust Network Analysis* (analiza sieci ciśnień) (Maia Avelino et al., 2021; Block, 2009) umożliwiającymi analizę przestrzennych konstrukcji łukowych. O popularności tych metod świadczy również rosnąca liczba bibliotek, aplikacji i programów opracowanych w oparciu o ich założenia (Iannuzzo et al., 2021; Maia Avelino et al., 2021; Marmo, 2021; Galassi & Tempesta, 2019). Założenia twierdzenia Heymana znajdują też zastosowanie w praktyce badawczej – (Milani et al., 2016) badał sklepienie krzyżowe z elementów wydrukowanych w technologii 3D i dociążonych ciężarkami, elementy te nie zostały zespolone. Założono, że tak skonstruowany model eksperymentalny w dostateczny sposób przybliży sklepienie murowane z wykorzystaniem zaprawy o znikomej (zaniedbywalnej) wytrzymałości na rozciąganie. Symulacje numeryczne przeprowadzono korzystając z Metody Elementów Skończonych. Bloki modelowano jako bryły sztywne połączone sprężysto-plastycznymi łącznikami. Wykazano dobrą zgodność wyników numerycznych i eksperymentalnych.

Krytyka twierdzenia Heymana wskazuje, że możliwe jest wskazanie struktur, które spełniają warunki zawarte w tym twierdzeniu i mimo to ulegają awarii (Bagi, 2014). Ponadto wskazuje się, że mur ma możliwość przenoszenia pewnego niewielkiego rozciągania (0,02-0,15 MPa) (Masłowski & Spiżewska, 2000) a jego uwzględnienie (o ile rozciąganie rzeczywiście występuje) powoduje zmniejszenie wartości rozporu teoretycznego (ibidem). Także w szczególnym przypadku smukłych sklepień analizowanych w pracy (Ramaglia, Lignola, & Prota, 2016) twierdzenie Heymana nie znajduje zastosowania wskutek pominięcia wytrzymałości na rozciąganie. Pomimo tych ograniczeń metoda Heymana znajduje szerokie zastosowanie w praktyce inżynierskiej oraz badawczej m.in. (Bertolesi et al., 2018; Baratta & Corbi, 2011; Lourenço, 2001).

(Pieper, 1983) zaproponował prostą metodę obliczeń sklepień żebrowych, w której uznaje się wysklepki pomiędzy żebrowymi jedynie za elementy przenoszące obciążenie na żebra, które stanowią właściwą konstrukcję. W tej metodzie zakłada się, że zarówno wysklepki (a raczej pasma wysklepek) jak i żebra pracują w schemacie łuku trójprzegubowego (wskutek działania obciążeń dochodzi do utworzenia przegubów w kluczu oraz na podporach analogicznie do sytuacji przedstawionej na Rys. 29). Ta metoda jest jednak znacznym uproszczeniem, bowiem pomija się m.in. rzeczywisty schemat podparcia sklepienia oraz połączenia wysklepek z żebrowymi. Niemniej jednak jest to prosty inżynierski sposób wart odnotowania (Sieczkowski & Szołomicki, 1999).

Z uwagi na powszechność metod numerycznych powszechne jest modelowanie murów oraz sklepień z ich pomocą. Kolejny rozdział prezentuje najpowszechniej stosowane metody aplikacji modelowania numerycznego do analizy murów ceglanych.

#### 4.1.2. Numeryczne modelowanie murów ceglanych

Konstrukcje murowe najczęściej modeluje się wykorzystując Metodę Elementów Skończonych (MES) lub Metodę Elementów Dyskretnych (MED). W większości przypadków możliwe jest uzyskanie wiarygodnych wyników zarówno z modeli MES jak i MED (Baraldi, Cecchi, & Tralli, 2015; Giamundo et al., 2014; Giordano, Mele, & De Luca, 2002).

MED — Metoda Elementów Dyskretnych (ang. *DEM — Discrete Element Method*) zakłada, w swej podstawowej wersji, że analizowane elementy dyskretnie nie ulegają deformacjom i skupia się na badaniu interakcji między nimi. Cegły, kamienie lub bloki kamienne mogą być modelowane jako elementy dyskretnie a więzy między nimi wynikające z zespojenia zaprawą jako oddziaływanie na powierzchni styku. Jest to więc metoda umożliwiająca łatwe analizowanie dużych przemieszczeń i opisanie rzeczywistego mechanizmu zniszczenia – w szczególnej aplikacji do konstrukcji murowych dokonali tego m.in. (Dell'Endice et al., 2021; Lemos, 2007). W swojej pracy (Lemos, 2007) modelował obiekty, które ulegają zniszczeniu w skutek powstania mechanizmu za pomocą MED. W opinii autora można zastosować to kryterium jako ogólną zasadę pomagającą wybrać metodę modelowania konstrukcji murowych. Podobne wnioski można wysnuć z analizy pracy (Giamundo et al., 2014). W pracy tej wykazano, że model MES konstrukcji murowych z elementami (np. cegłami) o niskiej wytrzymałości daje dokładniejsze wyniki niż model MED. Jednak w przypadku konstrukcji murowych z zaprawą niskiej wytrzymałości dokładniejsze wyniki otrzymuje się z MED, w której ponadto łatwiej zdefiniować parametry modelu.

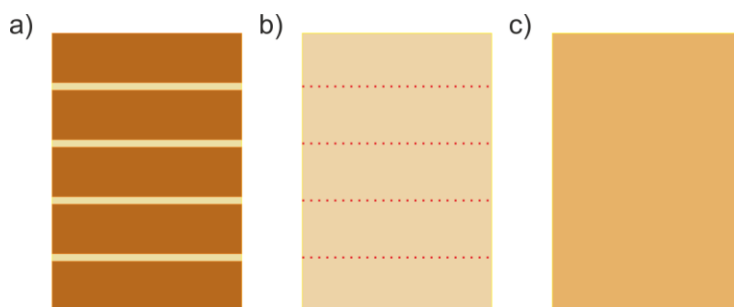
Metoda Elementów Dyskretnych znajduje szczególnie dobrą aplikację w modelowaniu konstrukcji łukowych (łuków i sklepień) a zwłaszcza ich mechanizmu zniszczenia (Kassotakis et al., 2017; Lemos, 2007). Jak wskazuje (Lemos, 2007) w konstrukcjach łukowych założenie, że elementy muru (cegły, kamienie itp.) są bryłami sztywnymi jest uprawnione i znajduje potwierdzenie w danych eksperymentalnych (wpływ odkształceń cegieł jest w tym typie konstrukcji zaniedbywalny). Ponadto – proste konstrukcje łukowe (np. mosty, a nawet mosty wieloprzęsłowe) można modelować za pomocą MED jako obiekty dwuwymiarowe (Lemos, 2007).

Istnieją także rozmaite hybrydy Metody Elementów Skończonych i Metody Elementów Dyskretnych, tzn. MED, w której uwzględnia się odkształcalność elementów lub MES, w której dopuszcza się nieciągłości w bryle struktury połączone elementami kontaktowymi (Lemos, 2007; Giordano, Mele, & De Luca, 2002).

W przypadku stosowania MES – Metody Elementów Skończonych (ang. *Finite Element Method – FEM*) wyróżnia się trzy podstawowe metody modelowania murów ceglanych ze względu na sposób (dokładność) odwzorowania heterogeniczności materiału; m.in. (Quinteros, Oller, & Nallim, 2012; Senthivel & Lourenço, 2009; Shieh-Beygi & Pietruszczak, 2008; Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007; Sieczkowski & Szołomicki, 1999) rozróżniają: mikro-, mezo- oraz makro-modelowanie.

Najdokładniejszym sposobem jest modelowanie muru ceglanego z wyodrębnieniem zaprawy i cegieł modelowanych jako osobne ciała, z uwagi na mały rozmiar modelowanych obiektów, metodę tę nazywamy

mikromodelowaniem. Odmienne podejście, w którym analizuje się cały mur jako jednorodne, homogeniczne, ciało o jednolitych parametrach wytrzymałościowych nazywamy makromodelowaniem. Pośrednia metoda, w której mur jest modelowany z osobnych elementów połączonych ze sobą więzami nazywana jest mezomodelowaniem. Rys. 30 przedstawia schematycznie sposoby modelowania murów.



Rys. 30 Modelowanie murów: a) mikro-, b) mezo- oraz c) makro-modelowanie.

Każda z metod modelowania murów ceglanych wymaga wyznaczenia charakterystyk wytrzymałościowych badanych murów lub ich komponentów. Zwłaszcza metody nieinwazyjnego szacowania tych charakterystyk są cenne z uwagi na ogromną wartość kulturową tych obiektów oraz na ograniczenia konserwatorskie (Tkacz, 2015).

(Caporale et al., 2015) analizując pracę statyczną istniejących zabytkowych budynków murowanych wykazali, że mechanizm inicjacji zniszczenia muru ceglano-cementowego jest bardzo wrażliwy na stosunek modułu sprężystości podłużnej cegły i zaprawy. W pracy tej zestawiono też właściwości cegieł suszonych (adobe), cegieł wypalanych oraz zapraw uzyskaną w różnych badaniach. Zestawienia parametrów wytrzymałościowych cegieł oraz zapraw opracowane przez Autora na podstawie pracy (Caporale et al., 2015) umieszczono w Załącznik 2. W zamyśle autora mają one być zbiorem referencyjnym oraz pomocą w szacowaniu parametrów wytrzymałościowych komponentów murów historycznych.

(Sieczkowski & Szolomicki, 1999) podaje podstawowe charakterystyki geometryczne i wytrzymałościowe murów ceglanych, głównie z XIV i XV wieku dotyczące różnych obszarów Polski.

W pracy (Gruszczyński & Matysek, 2011) badano parametry wytrzymałościowe XIX wiekowych murów ceglanych na podstawie odwiertów rdzeniowych. Należy tu zauważyć, że w XIX w. stosowano już zaprawy cementowe znacząco sztywniejsze od swoich wcześniejszych odpowiedników (Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007; Sieczkowski & Szolomicki, 1999); są to więc wyniki nieprzystawalne do parametrów murów z wcześniejszych epok.

Rozprawa (Tkacz, 2015) prezentuje szeroki przekrój badania wytrzymałości muru i jego komponentów na ściskanie.

**Mikromodelowanie** wymaga modelowania warstw zaprawy oraz cegieł jako osobnych ciał, tym samym konieczne staje się oznaczenie interakcji między zaprawą a cegłą na powierzchni styku. Rozmiar Elementów Skończonych w tej metodzie jest rzędu grubości warstwy zaprawy. Ponadto modelowanie

rzeczywistej konstrukcji wymaga zidentyfikowania konfiguracji cegieł i zaprawy w murze. Wskazane jest również zdefiniowanie interfejsu pomiędzy cegłami a zaprawą; zwłaszcza, że część możliwych mechanizmów zniszczenia murów ceglanych polega na zerwaniu ciągłości muru na połączeniu cegły i zaprawy (Sieczkowski & Szołomicki, 1999; Page, 1978). Wszystko to sprawia, że mikromodelowanie jest procedurą o dużej złożoności obliczeniowej, żmudną i czasochłonną, nieracjonalną z ekonomicznego punktu widzenia. Jest to jednak metoda potencjalnie umożliwiająca, przy dokładnym modelowaniu elementów oraz połączeń (interfejsu) między nimi, największą zbieżność uzyskanych wyników z rzeczywistym zachowaniem konstrukcji (Sieczkowski & Szołomicki, 1999).

**Mezomodelowanie** również wymaga zidentyfikowania usytuowania poszczególnych cegieł w konstrukcji, metoda ta zakłada jednak modelowanie elementów odpowiadających rozmiarem cegle wraz z warstwami otaczającej ją zaprawy do połowy grubości tych warstw (porównaj Rys. 30 a) i b). Oprócz dostosowania wymiarów poszczególnych elementów muru konieczne jest również wyznaczenie dostosowanego modułu sprężystości podłużnej. Możliwe jest zastosowanie w tym celu formuły (4.1) zaproponowanej przez (Chaimoon & Attard, 2007):

$$E_{ba} = \frac{E_b E_m (t_b + t_m)}{t_b E_m + t_m E_b} \quad (4.1)$$

gdzie  $E_{ba}$  – dostosowany moduł Younga (*adjusted elastic modulus*);  $E_b$ ,  $E_m$  – moduł Younga cegły (b – brick), zaprawy (m – mortar);  $t_b$ ,  $t_m$  – grubość cegły, zaprawy.

**Makromodelowanie** jest najłatwiejszą z metod modelowania numerycznego murów ceglanych. Ponieważ cały mur modelowany jest jako ciało jednorodne, należy wymodelować geometrię całego obiektu i przypisać jej materiał o parametrach wytrzymałościowych odpowiadających murowi. Metoda ta jest dalekim uproszczeniem rzeczywistej struktury muru ceglano-murarskiego, jednak jest racjonalnym rozwiązaniem problemu modelowania struktur większych rozmiarów. Z uwagi na to uproszczenie konieczne jest jednak wykazanie, że zastosowanie makromodelowania danej konstrukcji było możliwe oraz że zastosowano tę metodę poprawnie. Kluczowe jest dobranie odpowiedniego algorytmu homogenizacji muru, tzn. procedury ujednoczenia parametrów wytrzymałościowych muru.

**Homogenizacja** to metoda pozwalająca wyznaczyć parametry wytrzymałościowe muru ceglano-murarskiego jako ośrodka jednorodnego (zhomogenizowanego). Mur składający się z cegieł umieszczonych w matrycy zaprawy przedstawiany jest jako jedno ciało. Istniejące metody homogenizacji wymagają zazwyczaj spełnienia różnorodnych warunków, np. regularnego wstępu muru lub braku miejsc koncentracji naprężeń.

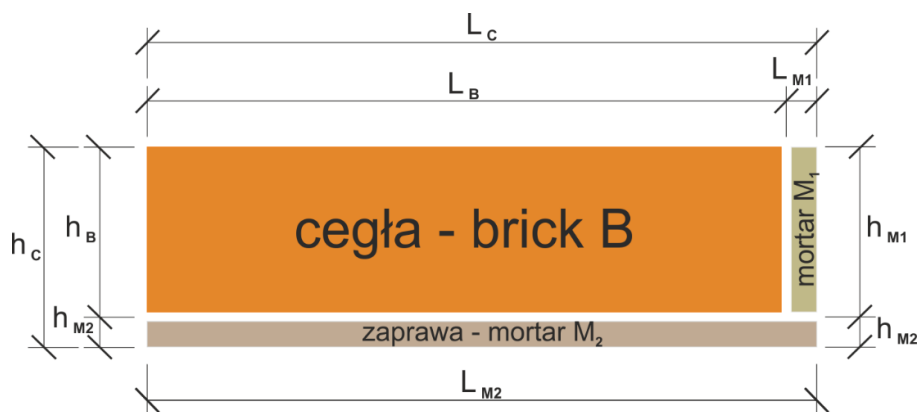
Jedną z metod homogenizacji została zaprezentowana w pracy (Milani & Tralli, 2012) – uproszczony sposób homogenizacji zakrzywionego muru ceglano-murarskiego sklepienia, nieliniowe zachowanie muru dopuszczono na połączeniach elementów. Elementarną Komórkę Muru, tzw. REV – *Representative Element Volume* w tej metodzie wyznacza się tak, aby obejmowała jedną cegłę w całości wraz z fragmentami 6 otaczających ją cegieł. Uzyskane wyniki wskazują dużą zgodność z innymi badaniami oraz z wynikami eksperymentów.



Istnieje również podejście poniekąd odwrotne: (Russo et al., 2010) określają globalny moduł Younga dla murowej dzwonnicy na podstawie jej częstotliwości drgań własnych wyznaczonych eksperymentalnie.

Poniżej zaprezentowano metodę homogenizacji na podstawie związków konstytutywnych opierającą się m.in. na znajomości parametrów wytrzymałościowych oraz wymiarów komponentów muru.

### Homogenizacja na podstawie związków konstytutywnych

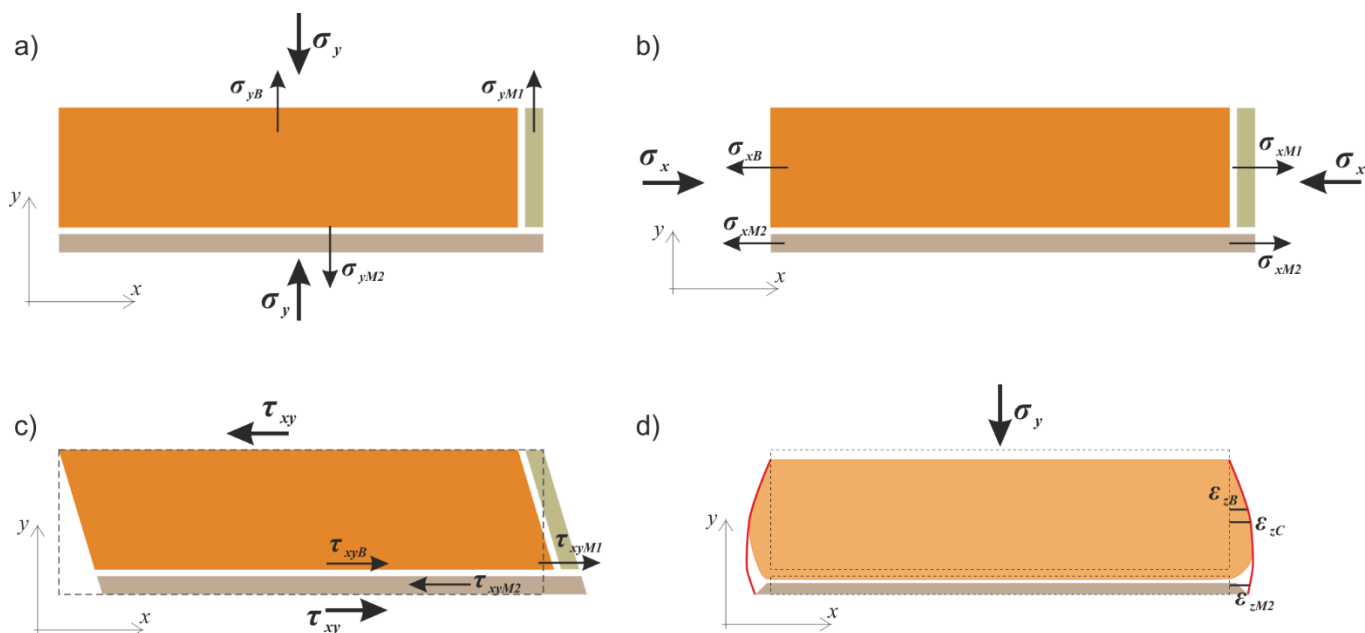


Rys. 31 Elementarna Komórka Muru – wymiary

Homogenizując prosty mur ceglany można zastosować metodę homogenizacji, w której z muru wycina się myślowo Elementarną Komórkę Muru, tzw. REV – *Representative Element Volume*, zazwyczaj zawierający cegłę oraz zaprawę przylegającą z dwóch stron. Analizując związki konstytutywne dla takiej elementarnej komórki muru można uzyskać parametry wytrzymałościowe muru jako jednorodnego materiału.

Podstawowe założenia tej metody, to:

- szerokość i wysokość elementarnej komórki muru jest większa od jej grubości, co pozwala założyć płaski stan naprężeń w murze,
- regularny układ cegieł i spoin w murze (niezmiennność REV w całym murze),
- mały gradient naprężeń w konstrukcji, brak koncentracji naprężeń.



Rys. 32 Elementarna Komórka Muru – równowaga naprężeń w poszczególnych stanach

Równania równowagi naprężeń w kierunku  $x - \sigma_x$  (Rys. 32 b) można przedstawić w postaci zależności (4.2):

$$\begin{aligned} \sigma_x h_C &= \sigma_{xB} h_B + \sigma_{xM2} h_{M2} = \sigma_{xM1} h_{M1} + \sigma_{xM2} h_{M2} \\ \sigma_x &= \sigma_{xB} \frac{h_B}{h_C} + \sigma_{xM2} \frac{h_{M2}}{h_C} \\ \sigma_x &= \sigma_{xM1} \frac{h_{M1}}{h_C} + \sigma_{xM2} \frac{h_{M2}}{h_C} \\ \sigma_{xB} &= \sigma_{xM1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}$  – naprężenia  $j$ -tego komponentu w  $i$ -tym kierunku,  $h_j$  – wysokość  $j$ -tego komponentu.

Zakładając, że (4.3):

$$A_{xB} = \frac{1}{\frac{L_B}{E_{xB}} + \frac{L_{M1}}{E_{xM1}} + \frac{h_B L_{M2}}{E_{xM2} h_{M2}}}; \quad B_{xB} = A_{xB} \frac{h_C L_{M2}}{E_{xM2} h_{M2}}; \quad B_{xM2} = \frac{h_C - B_{xB} h_B}{h_{M2}} \quad (4.3)$$

można zapisać (4.4):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xB} &\equiv \dot{\sigma}_{xM1} = \dot{\sigma}_x A_{xB} \frac{h_C L_{M2}}{E_{xM2} h_{M2}} = \dot{\sigma}_x B_{xB} \\ \dot{\sigma}_{xM2} &= \dot{\sigma}_x B_{xM2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}$  – naprężenia  $j$ -tego komponentu w  $i$ -tym kierunku,  $h_j$  – wysokość  $j$ -tego komponentu,  $L_j$  – szerokość  $j$ -tego komponentu,  $E_{ij}$  – moduł sprężystości  $j$ -tego komponentu w  $i$ -tym kierunku.

Zgodność odkształceń  $\varepsilon_x$  w kierunku  $x$  można przedstawić wzorem (4.5):

$$\dot{\varepsilon}_{xC} = \dot{\varepsilon}_{xM2} \frac{L_{M2}}{L_C} = \dot{\varepsilon}_{xB} \frac{L_B}{L_C} + \dot{\varepsilon}_{xM1} \frac{L_{M1}}{L_C} \quad (4.5)$$

gdzie:  $\varepsilon_{ij}$  – odkształcenia  $j$ -tego komponentu w  $i$ -tym kierunku,  $L_j$  – szerokość  $j$ -tego komponentu.

Jeżeli (4.6):

$$D_x = \frac{L_B}{E_{xB} L_C} + \frac{L_{M1}}{E_{xM1} L_C} \quad (4.6)$$

wówczas (4.7):

$$\dot{\varepsilon}_{xC} = \dot{\sigma}_x B_{xB} D_x \quad (4.7)$$

więc moduł sprężystości zhomogenizowanego muru w kierunku  $x$  można zapisać (4.8):

$$E_{xC} = \frac{1}{B_{xB} D_x}. \quad (4.8)$$

Analogicznie można wyznaczyć moduły sprężystości zhomogenizowanego muru w pozostałych kierunkach. Tak więc analizując stan naprężeń w kierunku  $y - \sigma_y$  przedstawiony na Rys. 32 a) można napisać (4.9):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{yM1} &= \dot{\sigma}_y B_{yM1} \\ \dot{\sigma}_{yB} &= \dot{\sigma}_y B_{yB} \\ \dot{\sigma}_{yM2} &= \dot{\sigma}_y \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}$  – naprężenia  $j$ -tego komponentu w  $i$ -tym kierunku, zaś współczynniki  $B_{yM1}$  oraz  $B_{yB}$  dane są wzorami (4.10):

$$B_{yM1} = A_{yM1} \frac{L_C h_B}{E_{yB} L_B}; A_{yM1} = \frac{1}{\left( \frac{L_{M1} h_B}{E_{yM1} L_B} + \frac{h_{M1}}{E_{yM1}} \right)}; B_{yB} = \frac{L_C - B_{yM1} L_{M1}}{L_B} \quad (4.10)$$

gdzie:  $L_C$  – szerokość całej Elementarnej Komórki Muru;  $L_B, h_B$  – szerokość i wysokość cegły;  $L_{M1}, h_{M1}$  – szerokość i wysokość warstwy zaprawy M1;  $E_{yB}, E_{yM1}$  – moduł sprężystości podłużnej w kierunku pionowym odpowiednio: cegły i warstwy zaprawy M1. Wymiary można również łatwo odczytać ze schematu na Rys. 31.

Wówczas, korzystając z równań równowagi oraz związków konstytutywnych, można wyznaczyć odkształcenia Elementarnej Komórki Muru w kierunku  $y$  dane wzorem (4.11):

$$\dot{\varepsilon}_{yC} = \dot{\sigma}_y \left( \frac{h_{M2}}{h_C E_{yM2}} + \frac{B_{yB} h_B}{E_{yB} h_C} \right) \quad (4.11)$$

gdzie:  $h_B, h_C, h_{M2}$  – wysokość odpowiednio: cegły, całości i warstwy zaprawy M2;  $E_{yB}, E_{yM2}$  – moduł sprężystości podłużnej w kierunku pionowym odpowiednio: cegły i warstwy zaprawy M2;  $B_{yB}$  – współczynnik ze wzoru powyżej;  $\sigma_y$  – naprężenia w kierunku  $y$ .

Można więc zapisać moduł sprężystości zhomogenizowanego muru w kierunku  $y$  (4.12):

$$E_{yC} = \frac{1}{\frac{h_{M2}}{h_C E_{yM2}} + \frac{B_{yB} h_B}{E_{yB} h_C}} \quad (4.12).$$

Analizując stan naprężeń stycznych przedstawionych na Rys. 32 c), można zapisać (4.13):

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_B &= \dot{\tau} A_{xyB} \\ \dot{\tau}_{M1} &= \dot{\tau} A_{xyM1} \\ \dot{\tau}_{M2} &= \dot{\tau}\end{aligned}\quad (4.13)$$

gdzie:  $\tau_B$ ,  $\tau_{M1}$ ,  $\tau_{M2}$ ,  $\tau$  – naprężenia styczne odpowiednio w: cegle, warstwach zaprawy M1 i M2 oraz w Elementarnej Komórce Muru,  $A_{xyB}$ ,  $A_{xyM1}$  – współczynniki przedstawione poniżej (4.14).

$$A_{xyB} = \frac{G_{xyB} L_C}{G_{xyM1} L_{M1} + G_{xyB} L_B}; A_{xyM1} = \left( \frac{L_C}{L_{M1}} - A_{xyB} \frac{L_B}{L_{M1}} \right) \quad (4.14)$$

Opierając się na związkach konstytutywnych można zapisać równanie równowagi dla stanu ścinania Elementarnej Komórki Muru (4.15):

$$\dot{\gamma}_{xyC} = \dot{\tau} \left( \frac{h_{M2}}{G_{xyM2} h_C} + \frac{A_{xyB} h_B}{G_{xyB} h_C} \right) \quad (4.15)$$

gdzie:  $\gamma_{xyC}$  – kąt odkształcenia postaciowego Elementarnej Komórki Muru;  $\tau$  – naprężenia ścinające w Elementarnej Komórce Muru;  $h_{M2}$ ,  $h_B$ ,  $h_C$  – wysokość odpowiednio: warstwy zaprawy M2, cegły oraz Elementarnej Komórki Muru;  $G_{xyM2}$ ,  $G_{xyB}$  – moduł odkształcenia postaciowego (moduł ścinania) odpowiednio: warstwy zaprawy M2 oraz cegły;  $A_{xyB}$  – współczynnik przedstawiony powyżej.

Wiedząc, że spełnione muszą być równania konstytutywne dla odkształceń postaciowych, w tym zwłaszcza (4.16):

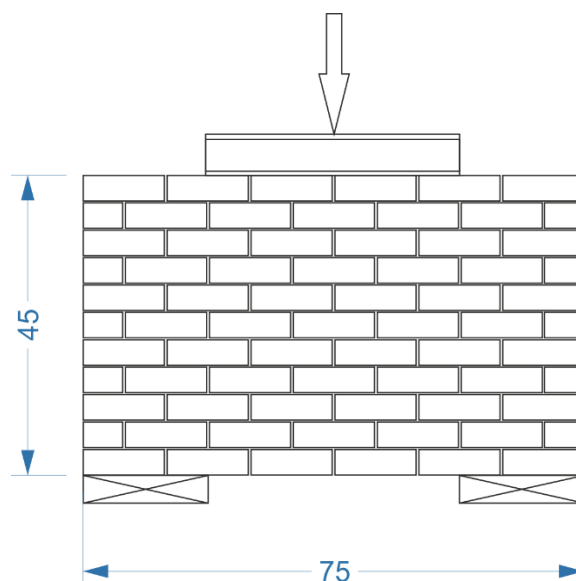
$$\dot{\gamma}_{xyC} = \frac{\dot{\tau}}{G_{xyC}} \quad \dot{\gamma}_{xyC} = \frac{\dot{\tau}}{G_{xyC}} \quad (4.16)$$

możemy stwierdzić, że moduł odkształcenia postaciowego Elementarnej Komórki Muru  $G_{xyC}$  dany jest wzorem (4.17):

$$G_{xyC} = \frac{1}{\frac{h_{M2}}{G_{xyM2} h_C} + \frac{A_{xyB} h_B}{G_{xyB} h_C}} \quad (4.17)$$

Dokładniejszy opis metody można znaleźć w pracy (Lopez et al., 1999) oraz (Quinteros, Oller, & Nallim, 2012).

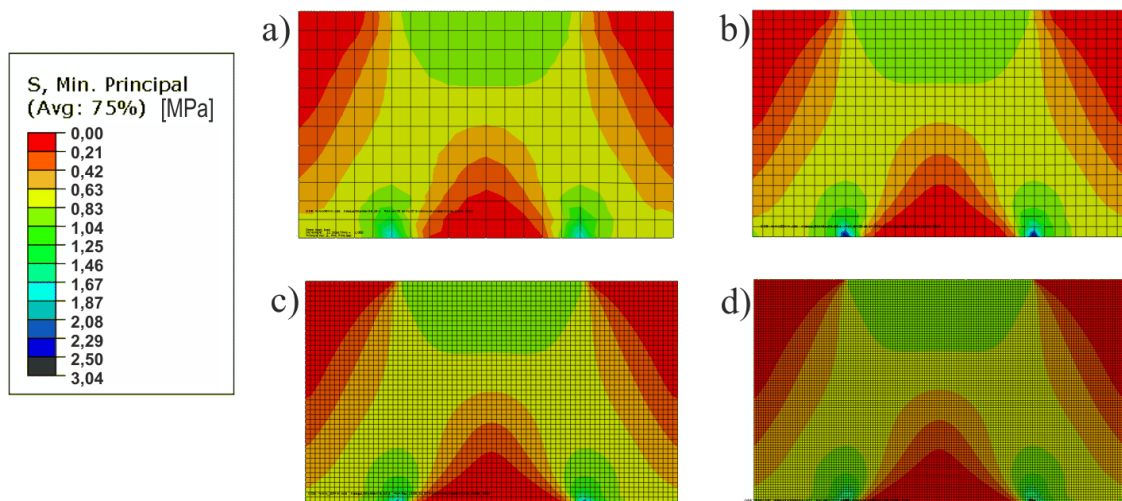
**Adekwatność powyższego algorytmu homogenizacji** w badanym w pracy problemie autor zweryfikował wykonując modele numeryczne (mikromodel oraz makromodele) zginanej tarczy murowej (Rys. 33) badanej i opisanej dokładnie przez (Page, 1978).



**Rys. 33 Panel ceglany badany przez (Page, 1978), wymiary w [cm]**

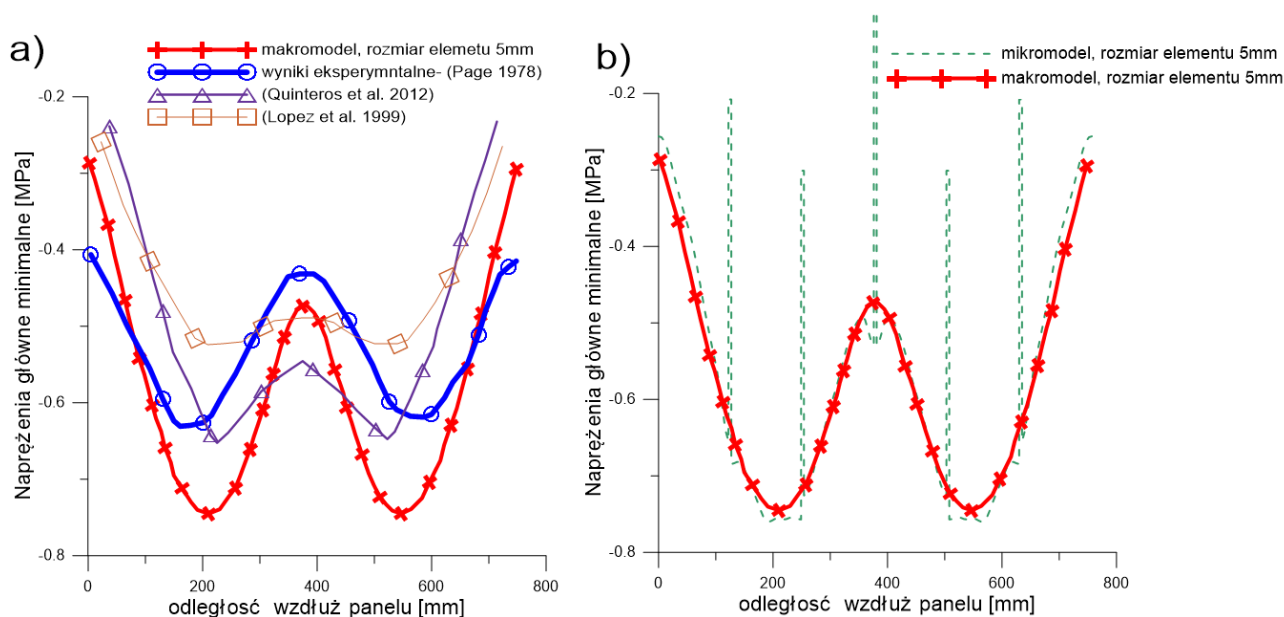
W pracy (Page, 1978) tarczę murową wykonano z cegieł zeszlifowanych do połowy swego oryginalnego wymiaru, tzn. do 1120x37x54 mm. Tarcza ta była obciążana w środku rozpiętości za pośrednictwem belki stalowej siłą 20, 40, 60, 80 oraz 100 kN, poniżej przedstawiono wyniki symulacji obciążenia siłą 20 kN (Rys. 34 i Rys. 35). Wyniki badań przedstawione w (Page, 1978) były stosowane do weryfikacji procedur homogenizacji m.in. przez (Quinteros, Oller, & Nallim, 2012). Badanie opisane w pracy (Page, 1978) zostało poprzedzone dokładnymi badaniami materiałowymi, wartości parametrów wytrzymałościowych cegły i zaprawy oraz ich wymiary zostały uwzględnione w dalszych obliczeniach.

Autor wykonał modele tarczy murowej badanej w pracy (Page, 1978) korzystając z programu Abaqus 6.10 (Dassault Systèmes Simulia Corp, 2014). Parametry muru uzyskano stosując metodę homogenizacji ze związków konstytutywnych przedstawioną powyżej. Wykonano mikromodel, w którym wymodelowano osobno cegły i zaprawę. Przyjęto siatkę bryłowych elementów skończonych, heksagonalnych z liniową funkcją kształtu o oznaczeniu C3D8R, gęstość siatki przyjęto równą grubości zaprawy tzn. 5 mm. Ponadto wykonano serię makromodeli (Rys. 34), w których wykorzystano zhomogenizowane parametry muru. W makromodelach zastosowano siatkę elementów skończonych bryłowych, heksagonalnych, z liniową funkcją kształtu, o oznaczeniu C3D8R. Obliczenia przeprowadzono przyjmując następujące gęstości siatek elementów skończonych: 40 mm, 20 mm, 10 mm oraz 5 mm (grubość zaprawy). Zbieżność wyników zweryfikowano porównując przemieszczenie środkowego punktu na dolnej powierzchni panelu.



Rys. 34 Makromodele panelu ceglanego, siatka i naprężenia maksymalne przy gęstości siatki a) 40, b) 20, c) 10 i d) 5 mm

Rys. 35 prezentuje wykresy naprężeń głównych wzdłuż linii przebiegającej przez geometryczny środek panelu (tzn. w połowie wysokości i w połowie grubości). Wykres (Rys. 35 a) umożliwia porównanie wartości naprężeń uzyskanych w innych pracach (m.in. (Lopez et al., 1999), (Quinteros, Oller, & Nallim, 2012)) oraz w badaniach eksperymentalnych (Page, 1978) z wynikami uzyskanymi w niniejszej pracy (makromodel). Wykres (Rys. 35 b) umożliwia także porównanie wyników naprężeń w mikromodelu oraz makromodelu o tej samej gęstości siatki. Na wykresie naprężeń uzyskanym z mikromodelu widoczne są skoki naprężeń w warstwach zaprawy, jednak porównując wykresy uzyskane przy zastosowaniu makro- i mikromodelu można stwierdzić, że osiągnięto bardzo dobrą zgodność wyników. Rys. 34 (zwłaszcza b, c i d) wyraźnie wskazuje, że nad wewnętrznymi narożami podpór dochodzi do koncentracji naprężeń – czyli nie jest spełniony warunek zastosowanej metody homogenizacji. Porównanie wykresów przedstawionych na Rys. 35 pozwala jednak wnioskować o tym, że koncentracja naprężeń nad wewnętrznymi narożami podpór ma charakter lokalny. Ponadto jej zaniedbanie nie prowadzi do zaburzenia wyników uzyskanych w centralnej części tarczy murowej.



Rys. 35 Wykresy naprężeń głównych wzdłuż linii środkowej tarczy murowej

Można więc stwierdzić, że zastosowanie algorytmu homogenizacji na podstawie związków konstytutywnych po spełnieniu warunków tej metody jest poprawne globalnie – dla wyników nie zawierających się w obszarze zaburzenia (w tym przypadku – koncentracji naprężeń) i o ile to lokalne zaburzenie nie doprowadzi do stanu awaryjnego (np. przekroczenie naprężeń dopuszczalnych w miejscu lokalnej koncentracji naprężeń). Pewną wadą zaprezentowanej metody homogenizacji jest konieczność określenia parametrów wytrzymałościowych materiałów badanego muru w celu poprawnej homogenizacji.

## 4.2. Modelowanie struktury tensegrity

Struktury tensegrity nie przyjmują wykreślonej, zaprojektowanej, geometrii a po złożeniu nawet najprostszej struktury tensegrity okazuje się, że jej geometria odbiega od tej zaprojektowanej jedynie wykreślnie (Motto, 1992, 2003). Dzieje się tak z powodu silnie nieliniowego zachowania się cięgien. Konstrukcje tensegrity, podobnie jak konstrukcje membranowe i cięgnowe (Kłosowski, 2010; Ambroziak & Kłosowski, 2004), wymagają wyznaczenia kształtu – konfiguracji początkowej, w której konstrukcja osiąga równowagę. Proces ten nazywamy z angielskiego *form-finding*. *Form-finding* jest jednym z głównych zagadnień badawczych związanych ze strukturami tego typu (Song, Scarpa, & Schenk, 2022; Tkachuk, 2022; Zhang et al., 2020; Zhang & Ohsaki, 2006).

W literaturze przedmiotu znaleźć można wiele propozycji realizacji *form-finding* struktur tensegrity, jednak generalnie można je podzielić na metody kinematyczne i statyczne (Tibert & Pellegrino, 2003). Metody kinematyczne wyznaczają konfigurację początkową poprzez wydłużenie prętów przy zachowaniu stałej długości cięgien (lub odwrotnie, przy stałej długości prętów zmniejszana jest długość cięgien). Do tej grupy można zaliczyć metody: analityczną, programowania nieliniowego, relaksacji dynamicznej. Metody te niejako naśladują sposób, w jaki struktury tensegrity wznoszone są w praktyce. Metody statyczne można podzielić na: analityczne, gęstości sił oraz energetyczne (Zhang et al., 2018; Koohestani, 2017; Koohestani & Guest, 2013; Zhang & Ohsaki, 2006). W metodach tych wyznaczanie konfiguracji początkowej rozpoczyna się od zdefiniowania liczby węzłów oraz połączeń między nimi.

Algorytmy *form-finding* są zaimplementowane w niektórych komercyjnych programach obliczeniowych, m.in. w programie SOFiSTiK (SOFiSTiK, 2018) stosowanym przez autora do analizy konstrukcji tensegrity. W tym programie *form-finding* podzielone jest na dwa etapy: pierwszy uwzględnia jedynie wstępne sprężenie cięgien przy jednoczesnej redukcji sztywności tych elementów niemalże do zera; drugi etap uwzględnia ciężar własny oraz sztywność elementów.

Znacząca liczba prac badawczych poświęcona jest problemom nieliniowej analizy tensegrity. Z uwagi na geometryczną nieliniowość (duże przemieszczenia) oraz wrażliwość konstrukcji na utratę stateczności w skutek wyboczenia prętów struktury tensegrity (Ryżyński and Szlendak 2011; Winkelmann et al. 2018) w modelowaniu tensegrity konieczne jest zastosowanie wysublimowanych metod analizy. Dużo prac analizuje również szczególne zagadnienia występujące w analizie konstrukcji tensegrity, t.j. zwis cięgien (Kan et al., 2021), kontakt i krzyżowanie elementów (Xu et al., 2018). W niniejszej pracy struktury tensegrity analizowano

zgodnie z teorią trzeciego rzędu korzystając z algorytmów zaimplementowanych w programie SOFiSTiK, co jest powszechnie przyjętym podejściem (Ryżyński & Szlendak, 2011). W programie (SOFiSTiK, 2018) obliczenia według teorii trzeciego rzędu (*TH3*) uwzględniają nieliniowy model materiałowy, wyłączenie kabli ściskanych (zawarte także w opcji obliczeń nieliniowych – *NONL*) oraz nieliniowość geometryczną uwzględniającą duże odkształcenia, przemieszczenia oraz wyboczenie.

Aby uniknąć niestabilności rozwiązania (osobliwej macierzy sztywności) w większości modeli numerycznych struktur tensegrity konieczne jest podparcie węzłów podporami sprężystymi o bardzo niskiej sztywności. Należy jednocześnie dobrać sztywność sprężyn tak, aby zminimalizować wpływ tego zabiegu numerycznego na wyniki analiz.



## 5. PRACE DOŚWIADCZALNE I ANALIZA WYNIKÓW

Aby rozpoznać zachowanie sklepień ceglanych oraz konstrukcji tensegrity przeprowadzono serie badań statycznych oraz dynamicznych sklepienia ceglanego w skali technicznej oraz namiotu tensegrity o powierzchni 160 m<sup>2</sup>. Oprócz prac eksperymentalnych przeprowadzono również analogiczne badania numeryczne. Pozwoliło to sprawdzić poprawność założeń przyjmowanych przy tworzeniu modeli oraz oszacować możliwe błędy modeli numerycznych. Doświadczenie oraz wiedza zdobyta w trakcie tych prac umożliwiły zaproponowanie oraz przeanalizowanie sposobu wzmocnienia sklepień murowych strukturami tensegrity.

Badania eksperymentalne prezentowane w tym rozdziale, zarówno badania materiałów (cegła, zaprawa) jak i konstrukcji (sklepień, struktur tensegrity), przeprowadzono zgodnie z odpowiednimi normami m.in. (PN-EN 772-1+A1, 2015; PN-EN 1015-11:2001, 2001) lub wzorując się na badaniach przeprowadzonych przez innych badaczy, np. (Winkelmann, Kłos, & Rąpca, 2018; Kołodziejczak, Gołębiowski, & Rucka, 2013; Conte et al., 2011; Quinonez et al., 2010; Bednarz, 2008; Malyszko, 2004).

### 5.1. Teoretyczne podstawy analiz rezultatów badań doświadczalnych

Drgania oraz przemieszczenia konstrukcji, z wyjątkiem sytuacji awaryjnych oraz obiektów błędnie zaprojektowanych lub wykonanych, nie stanowią niebezpieczeństwa ani nie powodują dyskomfortu użytkowników. Dbą się więc aby amplitudy tych drgań były niskie (najlepiej nieodczuwalne) dla użytkowników, a także aby częstotliwości rezonansowe były możliwie różne od częstotliwości wymuszeń (np. częstotliwość rezonansowa kładki dla pieszych powinna odbiegać od częstotliwości marszu człowieka). Również przemieszczenia, np. ugięcia stropów lub konstrukcji przekryć (także struktur tensegrity), powinny być na tyle małe aby nie przeszkadzać w użytkowaniu a najlepiej pozostać niezauważone przez użytkowników.

Wymuszenie dynamiczne możemy przedstawić w funkcji czasu – jako np.  $x(t)$  lub w funkcji częstotliwości  $X(f)$ . W pewnym uproszczeniu można przyjąć, że konstrukcje budowlane są układami, które sygnał wejścia (czyli wymuszenie –  $x(t)$ ;  $X(f)$ ) przetwarzają na sygnał wyjścia – drgania, które można również zapisać w funkcji czasu  $y(t)$  lub częstotliwości  $Y(f)$ . Istnieje wiele metod analitycznego przetwarzania sygnałów w celu wyznaczenia częstości drgań własnych, jednakże w tej pracy zastosowano klasyczną, transformację (przekształcenie) Fouriera. Przekształcenie Fouriera umożliwia przejście z funkcji opisanej w dziedzinie czasu do funkcji opisanej w dziedzinie częstotliwości. Umożliwia więc np. przejście z funkcji  $x(t)$  na  $X(f)$ .

Teoria sygnałów jest intensywnie rozwijana w elektronice i telekomunikacji, a jej metody znajdują zastosowanie również w analizie drgań konstrukcji. Poprawna estymacja charakterystyk modalnych konstrukcji budowlanych jest zagadnieniem złożonym (Tomaszewska, 2007) gdyż na konstrukcje budowlane oddziałują różne czynniki. Celowe więc jest, po spełnieniu pewnych warunków, traktowanie drgań konstrukcji jako drgań losowych.

### 5.1.1. Cyfrowe przetwarzanie sygnałów

W badaniach eksperymentalnych stosunkowo łatwo można zarejestrować funkcję przyspieszeń w dziedzinie czasu ( $a(t)$ ). Funkcję tę ( $a(t)$ ) można przefiltrować (np. filtrem eliptycznym<sup>8</sup>) aby zredukować zakłócenia lub wyodrębnić poszukiwane składowe sygnału.

Tak przygotowaną funkcję przyspieszeń można poddać dyskretnej transformacji Fouriera (ang. *Discrete Fourier Transform* – DFT) stosując algorytm FFT (ang. *Fast Fourier Transform*) będący wydajną implementacją DFT (Lyons, 2006).

Źródłem wspomnianych powyżej numerycznych implementacji transformacji Fouriera (DFT oraz FFT) jest ciągłe przekształcenie Fouriera  $X(f)$  opisane wzorem (5.1):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (5.1)$$

gdzie  $e$  – liczba Eulera, podstawa logarytmu naturalnego, zaś  $j$  – jednostka urojona. Przetwarza ono funkcję  $x(t)$  ciągłą w dziedzinie czasu w funkcję  $X(f)$  ciągłą w dziedzinie częstotliwości.

Dyskretne przekształcenie Fouriera definiuje się jako dyskretny ciąg  $X(m)$  w dziedzinie częstotliwości, który, we współrzędnych biegunowych, można zapisać:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi mn/N} \quad (5.2)$$

gdzie  $x(n)$  – dyskretny ciąg wartości ciągłej zmiennej  $x(t)$  w dziedzinie czasu. Równanie (5.2) można zapisać we współrzędnych prostokątnych (5.3) rozdzielając zespoloną eksponentę na składową zespoloną i rzeczywistą:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(2\pi nm/N) - j \sin(2\pi nm/N)] \quad (5.3)$$

gdzie  $X(m)$  –  $m$ -ta składowa wyjściowa DFT,  $m$  – indeks próbek wyjściowych DFT w dziedzinie częstotliwości,  $x(n)$  – ciąg próbek wejściowych w dziedzinie czasu,  $j$  – jednostka urojona oraz  $N$  – liczba próbek ciągu wejściowego oraz liczba punktów częstotliwości w ciągu wyjściowym DFT.

Otrzymuje się więc dyskretny ciąg wartości, którego składniki nazywane są prążkami DFT. Częstotliwości  $N$  punktów, w których są wyznaczane prążki można określić wzorem (5.4):

<sup>8</sup> Filtr eliptyczny, filtr Cauera, filtr Zołotarjewa – jeden z filtrów o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (*Infinite Impulse Response* – IIR) o największym paśmie przepustowym (*pass band*), jednak z zafalowaniami w paśmie przepustowym oraz zaporowym.

$$f_{analysis}(m) = \frac{mf_s}{N} \quad (5.4)$$

gdzie  $f_{analysis}(m)$  – wartości częstotliwości punktów, dla których wyznaczono składowe wyjściowe DFT  $X(m)$ ,  $f_s$  – częstotliwość próbkowania. Wartość  $f_s/N$  określa się jako ziarnistość (rozdzielczość) transformaty.

Analizując równanie (5.3) można stwierdzić, że wyniki DFT będą symetryczne, tzn. składowe rzeczywiste  $m$ -tego i  $(N-m)$ -tego członu ciągu  $X(m)$  są sobie równe, zaś składowe urojone  $m$ -tego i  $(N-m)$ -tego członu ciągu  $X(m)$  są przeciwnego znaku. Zatem uzyskiwane z dyskretnego przekształcenia Fouriera widmo mocy należy przedstawić dla przedziału częstotliwości od 0 do  $f_s/2$ .

Przekształcenie DFT jest operacją liniową. Co oznacza, że spełniona jest równość(5.5):

$$X_{sum}(m) = X_1(m) + X_2(m) \quad , \quad (5.5)$$

co łatwo udowodnić korzystając z (5.6):

$$X_{sum}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_1(n) + x_2(n)]e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)e^{-j2\pi nm/N} = X_1(m) + X_2(m) \quad . \quad (5.6)$$

Ta właściwość umożliwia przekształcanie rzeczywistych (skomplikowanych, złożonych) sygnałów. Gdyby DFT nie było operacją liniową, a równość (5.5) nie byłaby spełniona, możliwe byłoby przekształcanie tylko sygnałów o pojedynczym przebiegu sinusoidalnym.

Wyniki DFT są dokładne jedynie dla częstotliwości, dla których wyznaczane są prążki, tzn. zgodnie ze wzorem (5.4), dla całkowitych wielokrotności wartości  $f_s/N$ . Jeżeli sygnał wejściowy (w dziedzinie czasu) zawiera składową o częstotliwości pośredniej, np.  $2,5f_s/N$ , wówczas składowa ta ujawni się w pewnym stopniu dla wszystkich  $N$  częstotliwości wyjściowych przekształcenia. Największe wartości DFT będzie miało jednak dla częstotliwości sąsiadujących z ową częstotliwością pośrednią. Zjawisko to, nazywane przeciekiem DFT, zachodzi *de facto* zawsze przy przekształcaniu rzeczywistych sygnałów. Aby zmniejszyć wpływ przecieku na wyniki przekształcenia należy zastosować transformację o możliwie małej ziarnistości lub przeprowadzić okienkowanie, procesy gruntownie opisany m.in. w (Lyons, 2006).

**Szybka Transformacja Fouriera (FFT).** Dyskretne przekształcenie Fouriera (DFT) jest najbardziej bezpośrednią i czytelną implementacją ciągłej transformacji Fouriera, jednak łatwo zauważyć, że jest ona bardzo nieefektywna. Tak zwaną szybką transformację Fouriera (FFT) opublikowano w pracy (Cooley & Tukey, 1965), algorytm ten jest wyczerpująco omówiony w każdej książce dotyczącej cyfrowego przetwarzania sygnałów (m.in. (Lyons, 2006)). Najpopularniejsze jest przekształcenie FFT o podstawie 2. Bazuje ono na podziale ciągu  $x(n)$  na elementy o parzystym i nieparzystym indeksie oraz na wyznaczeniu w wyrazach szeregu (5.2) tożsamy, co do wartości bezwzględnej, elementów. Dzięki tym operacjom zmniejsza się ilość działań matematycznych koniecznych do wyznaczenia transformaty.

Wyznaczając DFT konieczne jest wykonanie  $N^2$  mnożeń zespolonych, przy wyznaczaniu FFT wystarczy wyznaczyć liczbę mnożeń zespolonych określoną wzorem (5.7).

$$\frac{N}{2} \log_2 N \quad (5.7)$$

Warto tu zauważyć, że FFT jest w pełni równoważna DFT. Do wyznaczenia FFT o podstawie 2 konieczny jest ciąg obserwacji (punktów ciągu wejściowego) o liczbie wyrazów wynoszącej  $N=2^k$ , gdzie  $k$  jest pewną liczbą naturalną. Jeżeli długość ciągu wejściowego jest różna od całkowitej potęgi liczby 2 możliwe są dwa rozwiązania:

- odrzucenie pewnej liczby próbek, tak aby otrzymać ciąg wejściowy będący całkowitą potęgą dwójki (nie jest to rozwiązanie polecane, ponieważ pogarsza się rozdzielczość transformaty),
- uzupełnienie ciągu wejściowego wymaganą liczbą próbek o wartościach zerowych.

W pracy transformację zaimplementowano i wykonano w środowisku MATLAB (MathWorks, 2016).

### 5.1.2. Teoria korelacji

Sygnały możemy podzielić na zdeterminowane i niezdeterminowane. Ponieważ w rzeczywistych, złożonych konstrukcjach budowlanych opis ich zachowania w czasie nie jest możliwy do opisanego za pomocą ścisłych zależności matematycznych będziemy mieli do czynienia z sygnałami niezdeterminowanymi (a więc losowymi, stochastycznymi) (Tomaszewska, 2007; Bendat & Piersol, 1976).

Pierwszym momentem procesu losowego  $\{x(t)\}$  nazywamy wartość oczekiwaną, sposobem jej wyznaczenia jest wartość średnia – suma wartości chwilowych sygnału podzielona przez liczbę tych wartości (5.8). Korelację (moment łączny zmiennej losowej, autokorelację opisaną wzorem (5.9)) między wartościami procesu losowego w dwóch różnych chwilach wyznaczymy uśredniając iloczyny wartości chwilowych procesu w chwili  $t_1$  oraz w chwili po przesunięciu wynoszącym  $\tau$  tzn. w chwili  $t_1 + \tau$ .

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (5.8)$$

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau) \quad (5.9)$$

W przypadku, gdy wartości funkcji  $\mu_x(t_1)$  oraz  $R_x(t_1, t_1 + \tau)$  są zależne od czasu, procesy, które opisują te momenty, nazywamy niestacjonarnymi. Gdy wartości funkcji opisanych wzorami (5.8) oraz (5.9) nie zmieniają się wraz ze zmianą czasu  $t_1$  proces nazywamy słabo stacjonarnym lub stacjonarnym w szerszym sensie – dla tych procesów średnia jest stała ( $\mu_x(t_1) = const$ ) zaś autokorelacja zależy tylko od przesunięcia  $\tau$ :  $R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(\tau)$  (Bendat & Piersol, 1976).

Widmowa gęstość mocy  $G_{xx}$  (5.10) opisuje średnią moc sygnału jaka przypada na każde jednostkowe pasmo częstotliwościowe widma  $\Delta f$ . Funkcja ta związana jest z funkcją autokorelacji poprzez przekształcenie Fouriera:

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (5.10)$$

Jeżeli proces losowy jest stacjonarny i wartości  $\mu_x(t_1)$  oraz  $R_x(\tau)$  są jednakowe dla różnych funkcji losowych reprezentujących ten proces to proces ten jest ergodyczny (jak widać tylko procesy stacjonarne mogą być ergodyczne).

Powyższe zależności dotyczą pojedynczych sygnałów (np.  $x(t)$ ) procesów losowych (np.  $\{x(t)\}$ ). W analizie drgań konstrukcji (w której sygnałami mogą być np. przyspieszenia zarejestrowane przez akcelerometry) korzystne jest opisanie wspólnych lub łącznych charakterystyk tych sygnałów.

Jeżeli proces jest ergodyczny zależność (5.9) opisująca autokorelację może zostać uogólniona na przypadek dwóch realizacji tego procesu – funkcję taką nazywa się funkcją interkorelacji (korelacji wzajemnej)(5.11). Funkcja interkorelacji charakteryzuje wzajemną zależność wartości dwóch analizowanych sygnałów. Średnia wartość iloczynu sygnału  $x(t)$  w chwili  $t$  oraz sygnału  $y(t)$  w chwili  $t+\tau$  dąży do dokładnej wartości funkcji interkorelacji gdy  $T$  dąży do nieskończoności:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t) y_k(t + \tau) \quad (5.11)$$

Możliwe jest wyznaczenie funkcji wzajemnej gęstości widmowej mocy dwóch sygnałów  $x(t)$  oraz  $y(t)$  (analogicznie do widmowej gęstości mocy jednego sygnału jest to transformata Fouriera funkcji interkorelacji), (5.12):

$$G_{xy}(f) = 2S_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad f \geq 0 \quad (5.12)$$

W analizie sygnałów opisujących drgania konstrukcji budowlanych nadzwyczaj korzystne jest zastosowanie funkcji koherencji opisanej formułą (5.13) (Tomaszewska, 2007). Funkcja koherencji  $\gamma_{xy}^2$  przyjmuje wartości od 0 do 1 i opisuje stopień liniowej zależności między dwoma sygnałami. Jeżeli dla pewnej wartości częstotliwości  $f$ :  $\gamma_{xy}^2(f) = 0$  mówi się, że funkcje są *niekoherentne*. Jeżeli dla pewnej wartości częstotliwości  $f$ :  $\gamma_{xy}^2(f) = 1$ , oznacza to że funkcje są *całkowicie koherentne* (Bendat & Piersol, 1976), czyli istnieje idealnie liniowa zależność między analizowanymi sygnałami (Tomaszewska, 2007).

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f)G_y(f)} \leq 1 \quad (5.13)$$

Wyznaczając widmową gęstość mocy, wzajemną gęstość widmową mocy oraz koherencję sygnałów opisujących drgania konstrukcji można wskazać częstotliwości drgań swobodnych konstrukcji wyodrębniając je spośród częstotliwości wymuszenia.

### 5.1.3. Modal Assurance Criterion

Kryterium pewności modalnej – *Modal Assurance Criterion (MAC)* to współczynnik korelacji wektorów postaci własnych. Jest to prosta i czytelna metoda dostarczająca miary konsystencji dwóch różnych oszacowań wektorów własnych. *MAC* zapisana poprzez (5.14) została przedstawiona przez (Allemang & Brown, 1982) i od tego czasu jest powszechnie wykorzystywana w analizie dynamicznej (Brigante, Rainieri, & Fabbrocino, 2017; Pastor, Binda, & Harčarik, 2012; Tomaszewska, 2007; Allemang, 2003).

$$MAC = \frac{\left| \left\{ \psi_{X_i}^T \right\} * \left\{ \psi_{A_i}^T \right\} \right|^2}{\left( \left\{ \psi_{X_i}^T \right\} * \left\{ \psi_{X_i} \right\} \right) * \left( \left\{ \psi_{A_i}^T \right\} * \left\{ \psi_{A_i} \right\} \right)} \quad (5.14)$$

We wzorze (5.14) symbol  $\{\Psi\}$  oznacza porównywane wektory własne, zaś w szczególnej aplikacji kryterium wyrażonego tym wzorem w niniejszej pracy:

- $\{\Psi_{X_i}\}$  – to wektor własny układu wyznaczony na podstawie eksperymentu,      zaś
- $\{\Psi_{A_i}\}$  – to wektor własny układu wyznaczony w toku numerycznej analizy modalnej.

Przyjmuje się, że wartości *MAC* w zakresie 0,8-1,0 świadczą o wystarczająco dobrej zbieżności wektorów własnych, wartości poniżej 0,1-0,2 świadczą o braku zbieżności (Brigante, Rainieri, & Fabbrocino, 2017); wektory własne dla których *MAC* = 0 są ortogonalne – tzn. nie-zbieżne. Postacie drgań własnych o dobrej zbieżności (których *MAC* jest w zakresie 0,8-1,0) są na tyle zbliżone, iż można uznać, że dwie różne (domyślnie: niezależne) metody wyznaczania postaci własnych dały wystarczająco bliskie (zbieżne) wyniki.

*MAC* przedstawia się często w formie tablicy, w której wiersze przyporządkowane są pewnej uporządkowanej grupie wektorów własnych (np. uzyskanych z analizy numerycznej) a kolumny przyporządkowane innej grupie wektorów własnych. (np. uzyskanych z eksperymentu). W takim przedstawieniu oczekuje się wartości w zakresie 0,8-1,0 na diagonalu oraz 0,0-0,2 poza diagonalą. Inną metodą przedstawiania kryterium *MAC* jest barwna macierz wykresów słupkowych (w aksonometrii lub rzucie), w którym wysokość słupków odpowiada wartościom z powyższej tablicy.

## 5.2. Badania sklepienia kolebkowego

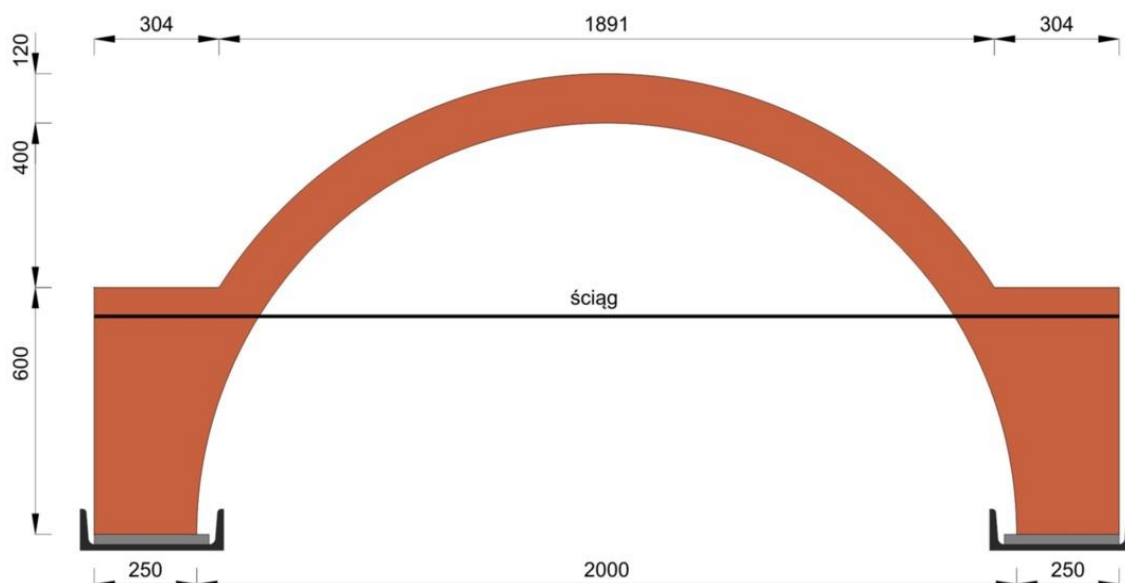
Przeprowadzono badania numeryczne oraz eksperymentalne kolebkowego sklepienia ceglanego w skali technicznej. Sklepienie o promieniu wewnętrznym wynoszącym 1,00 m; głębokości 1,29 m (długość 5 cegieł) oraz grubości łuku w części środkowej 0,12 m (grubość 1 cegły) przedstawiono m.in. na Rys. 36. Sklepienie wzniesiono z cegły pełnej bezotworowej oraz zaprawy cementowo-wapiennej.

Celem eksperymentu było zbadanie zachowania prostego sklepienia kolebkowego pod obciążeniem dynamicznym. Dane zebrane w czasie przeprowadzania eksperymentu umożliwiły walidację modeli numerycznych, a w szczególności możliwości wykorzystania makromodeli sklepień ceglanych (homogenizowanych murów) do obliczeń dynamicznych.

Sklepienie zostało obciążone dynamicznie za pomocą wzbudnika elektrodynamicznego. W trakcie eksperymentu mierzono przyspieszenia. Eksperyment objął również badania materiałowe niezbędne do poprawnego modelowania parametrów wytrzymałościowych poszczególnych materiałów, warunków brzegowych podparcia sklepienia, współpracy zaprawy i cegieł w murze sklepienia oraz przeprowadzenia procedur homogenizacyjnych.

Z uwagi na duże gabaryty rzeczywistych sklepień badania eksperymentalne w laboratoriach często przeprowadza się na modelach w skali pomniejszającej. M.in. (Milani et al., 2016) analizował sklepienie (w skali 1:5) o rozpiętości 0,62 m i strzałce 0,225 m mające odwzorowywać sklepienie krzyżowe o rozpiętości 3,1 m i strzałce 1,125 m. W pracach (Zampieri, Amoroso, & Pellegrino, 2019; P. Zampieri et al., 2018; Paolo Zampieri et al., 2018; Zampieri, Simoncello, & Pellegrino, 2018) badano sklepienia o rozpiętości 228 cm poddane przemieszczeniom podpór. Praca (Ferrero, Calderini, & Roca, 2022) prezentuje wyniki eksperymentów na sklepieniu w skali 1:10. Także klasyczna praca (Page, 1978) zawiera badania tarczy murowej wykonanej w skali pomniejszającej.

Sklepienie wykonano wzorując się na geometrii wykorzystywanej w badaniach doświadczalnych, m.in. (Bednarz, 2008). W pracy tej badano łuki kołowe o rozpiętości 4 metrów wzmocnione różnymi technikami. Łuki miały grubość  $\frac{1}{2}$  cegły (12 cm), jednak do wysokości 120 cm były wymurowane jako rozszerzający się mur, którego część podniebienna była kołowa, a powierzchnia zewnętrzna pozostawała pionowa. Łuki te były również ściągnięte zewnętrznymi ściągamy stalowymi na wysokości ok. 1 metra. Rys. 36 przedstawia ceglane sklepienie kolebkowe w skali technicznej, na którym przeprowadzono badania..



Rys. 36 Szkic stanowiska badawczego [mm]

Podpory wykonano z ceowników C300 UPN ze stali S235JR i wyłożono arkuszami gumy technicznej. Ceowniki zostały wyrównane oraz wypoziomowane. Sporządzono tory jezdne dla deskowania aby zapewnić bezkolizyjne rozszalowanie konstrukcji oraz ustawiono deskowanie na podporach tymczasowych.

Wiązanie muru wzdłuż fragmentów zachowujących pionową płaszczyznę na zewnątrz sklepienia wykonano tak, aby nie powtarzać spoin pionowych w kolejnych warstwach, a jednocześnie zachować krzywiznę sklepienia w jego podniebieniu. Wymagało to zastosowania, oprócz całych cegieł, także cegieł o wymiarach  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  oraz  $\frac{3}{4}$ , (Rys. 37). W ten sposób fragment sklepienia o grubości jednej cegły ma rozpiętość 1,9 m.



Rys. 37 Budowa sklepienia z przyporami

Sklepienie przygotowano do badań wklejając nagwintowane pręty M10 na górnej powierzchni przypór dla zamocowania wzbudnika (Rys. 45). Zastosowano mocowanie chemiczne FIS P300T Fischer z hybridowej



żywicy poliestrowej. Otwory o średnicy 12mm zagruntowano uprzednio gruntem głęboko penetrującym Ceresit CT 17.

Rozdeskowanie sklepienia rozpoczęto od podparcia deskowania siłownikami hydraulicznymi z dwóch stron, następnie wybito kliny podtrzymujące sklepienie. Dzięki zastosowaniu siłowników hydraulicznych możliwe było opuszczenie deskowania w równym, wolnym tempie. Dzięki pokryciu deskowania folią budowlaną oraz płynem antyadhezyjnym deskowanie łatwo odspoiło się od podniebienia sklepienia. Po opuszczeniu deskowania wyciągnięto je delikatnie spod sklepienia.

Na czas rozdeskowania sklepienie wzmocniono drewnianymi zastrzałami usztywniającymi sklepienie i przejmującymi siły rozporu. Zastrzałami wsparto pionowy fragment muru na krytycznej wysokości 7-8 warstwy cegieł. Po wyciągnięciu deskowania spod sklepienia zastrzały drewniane wymieniono na zawłoki z rury kwadratowej zamkniętej RK 30x30x2 umieszczone z obu stron sklepienia na tej samej wysokości ściągniętych prętami stalowymi gwintowanymi o średnicy 6 mm.



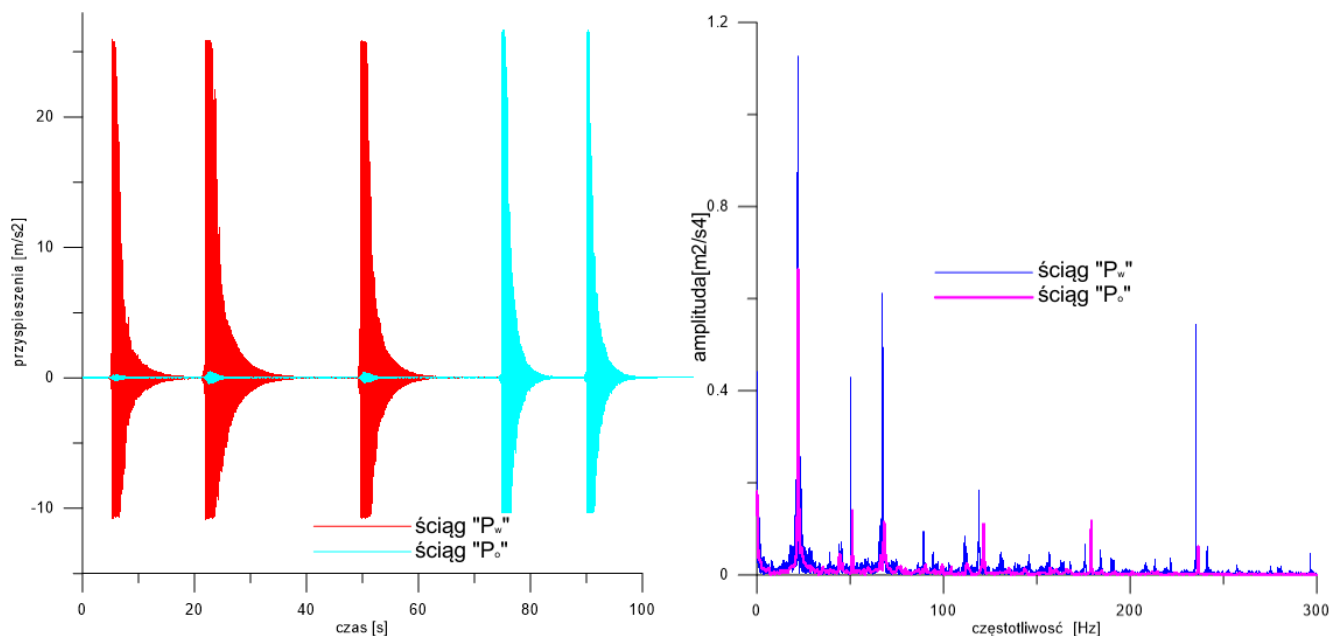
Rys. 38 Badane sklepienie

Ściąg napinano wykorzystując nakrętki samokontrujące założone na zawłokach po obu stronach ściągów. Siły w ściągach oszacowano, korzystając z równania struny, a następnie zgrubnie wyrównano i ponownie oszacowano osiągając zadowalającą zgodność sił w obu ściągach. Dokładniejszy opis przeprowadzonych prac zawiera Załącznik 3. Wyniki obliczeń sił w ściągach przedstawia Tab. 5. Rys. 39 przedstawia wykresy, które posłużyły do wyznaczenia wartości tych sił.

Tab. 5 Obliczenia sił w ściągach.

siła w ściągu	$P$		$\rho$	$L$	$f$
	[kN]	[N]=[kg*m/s <sup>2</sup> ]	[kg/m]	[m]	[Hz]=[1/s]
$P_o$	<b>2,47</b>	2 466	0,222	2,38	22,14
$P_w$	<b>2,39</b>	2 389	0,222	2,36	21,98

Różnica sił  $P_o=2,47$  kN i  $P_w=2,39$  kN, wynosząca 0,08 kN, została uznana za wystarczająco niską. Zaniechano dalszych prób wyrównania naciągu prętów.



Rys. 39 Ściagi po dociągnięciu – przyspieszenia w czasie oraz widmo mocy drgań

### 5.2.1. Określenie stałych materiałowych

Prawidłowe określenie parametrów materiałowych komponentów muru jest kluczowym elementem zarówno w badaniach eksperymentalnych jak i przy szacowaniu nośności lub wykonywaniu ekspertyz dotyczących stanu technicznego historycznych obiektów murowych. Istotne jest również ustalenie wieku tych elementów. Dzięki bogatej literaturze oraz szerokim badaniom przekrojowym, m.in. (Caporale et al., 2015; Siczkowski & Szołomicki, 1999), możliwe jest często porównanie wyznaczonych parametrów z wynikami uzyskanymi przez innych badaczy dla zaprawy, cegieł lub murów wytworzonych w zbliżonym czasie i miejscu.

Prezentowane tu badania materiałowe posłużyły do wyznaczenia parametrów wytrzymałościowych muru, z którego wzniesiono sklepienie kolebkowe prezentowane w tej części pracy.

W ramach badań materiałowych przeprowadzone zostały:

- badania cegły pełnej obejmujące oznaczenie:
  - modułu Younga oraz
- badania zaprawy murarskiej obejmujące oznaczenie:
  - wytrzymałości na zginanie,

- wytrzymałości na ściskanie,
- modułu Younga.

Badania wstępne przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej Zwick/Roell Z400 w laboratorium Katedry Mechaniki Budowli Politechniki Gdańskiej. Badania przeprowadzono zgodnie z obowiązującymi normami tj. zwłaszcza: (PN-EN 772-1+A1, 2015; PN-EN 1015-11:2001, 2001).

**Badania zaprawy cementowej** wykonano zgodnie z Normą (PN-EN 1015-11:2001, 2001) *Metody badań zapraw do murów Cz.11: Określenie wytrzymałości na zginanie i ściskanie stwardniałej zaprawy*. Przygotowano specjalne formy umożliwiające wykonanie próbek o wymiarach 160x40x40mm.

Próbki zostały wykonane z tego samego zarobu, z którego wznoszono sklepienie. Zaprawę do próbek pobierano w trakcie murowania sklepienia. Delikatnie wymieszaną zaprawę ułożono w formie w dwóch mniej więcej równych warstwach. Każdą warstwę zagęszczono 25 uderzeniami ubijaka, nadmiar zaprawy usunięto płaskim zgarniakiem. Próbki zaprawy murarskiej przechowywano przez 2 dni w formie w uszczelnionych workach polietylenowych, następnie przez 5 dni w formie, potem, na 21 dni przed badaniem, wyjęto je z formy. Badania rozpoczęto natychmiast po zakończeniu sezonowania (28 dni).

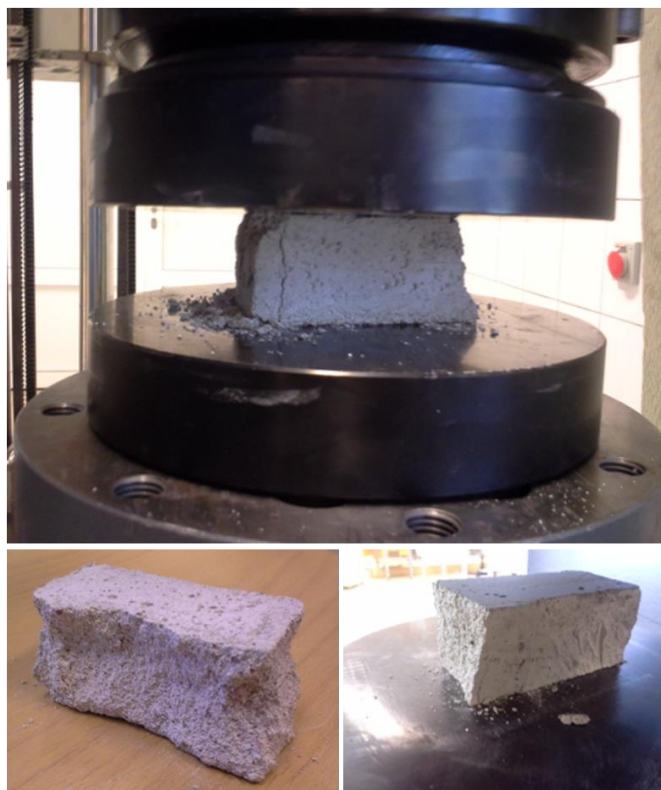


Rys. 40 Próbka zaprawy poddana zginaniu w trakcie oraz po badaniu

Do wzniesienia sklepienia użyto zaprawę murarską Atlas Prestige marki M7. Właściwości zaprawy deklarowane przez producenta:

- proporcje składników (masowo, %) cement: wypełniacze (piasek kwarcowy, kruszywa wapienne, metyloceluloza, żywice proszkowe, środki reologiczne) 1:3, dodatki < 1%,
- wytrzymałość na ściskanie  $\geq 7,0$  N/mm<sup>2</sup>,

- początkowa wytrzymałość na ściskanie (wartość tabelaryczna)  $\geq 0,15 \text{ N/mm}^2$ .



Rys. 41 Próbkę zaprawy poddana ściskaniu w trakcie oraz po badaniu

Stosując szczęki do trzypunktowego zginania oznaczono wytrzymałość próbki zaprawy na zginanie (Rys. 40). Zgodnie z Normą (PN-EN 1015-11:2001, 2001) badanie zaplanowano tak, aby obciążenie zwiększało się bez skoków, jednostajnie w zakresie od 10N/s do 50 N/s oraz w taki sposób, aby zniszczenie wystąpiło w czasie od 30 s do 90 s.

Wytrzymałość na zginanie wyznaczono posługując się wzorem (5.15):

$$f = 1,5 * \frac{F * l}{b * d^2} \quad (5.15)$$

gdzie:  $F$  – maksymalne obciążenie [N],  $l$  – odległość między osiami podtrzymującymi (domyślnie 100) [mm],  $b$ ,  $d$  – szerokość i wysokość próbki (domyślnie 40 na 40) [mm].

Wyniki badania wytrzymałości na zginanie zestawiono w Tab. 6. Wyznaczono również średnią, medianę oraz odchylenie standardowe uzyskanych wyników badanych wielkości.

Tab. 6 Zestawienie wyników badania wytrzymałości na zginanie próbek zaprawy.

próbka	siła		wytrzymałość na zginanie		
	$F_M$	$f_M$	średnia	mediana	odchylenie standardowe
	[N]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]
V1	1668,3	4,01	<b>4,42</b>	<b>4,35</b>	<b>0,40</b>
V2	2378,3	5,19			
V3	1873,3	4,40			
V4	2201,9	4,35			
V5	1817,3	4,17			

Następnie wyznaczono wytrzymałość na ściskanie (Rys. 41). Badaną beleczkę ustawiono tak, aby koniec odlewu znajdował się  $16 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$  od najbliższej krawędzi płyty ściskającej lub płyty przenoszącej obciążenie. Odrzucano wszelkie próbki, które nie stanowią sześcianu litego materiału pomiędzy górną i dolną płytą ściskającą lub płytą przenoszącą obciążenie. Ostrożnie wyrównano próbkę, tak aby obciążenie było przyłożone na całej szerokości powierzchni styku z płytami ściskania. Obciążenie przykładano i zwiększano bez skoków w sposób ciągły z prędkością w zakresie od 50 N/s do 500 N/s aż do zniszczenia próbki w czasie od 30 s do 90 s.

Zgodnie z normą (PN-EN 1015-11:2001, 2001) wytrzymałość na ściskanie określono jako maksymalne obciążenie, które wytrzymała próbka podzielone przez powierzchnię jej przekroju w momencie rozpoczęcia badań. Tak wyznaczone wartości naprężeń i odkształceń są miarami inżynierskimi. Wytrzymałość każdej próbki zarejestrowano z dokładnością do  $0,05 \text{ N/mm}^2$ . Obliczono średnią z dokładnością do  $0,1 \text{ N/mm}^2$ , zarejestrowano wiek próbki i wiek podczas rozformowania.

Wyniki badania wytrzymałości na ściskanie zestawiono w Tab. 7. W przypadku tych wyników także wyznaczono średnią, medianę oraz odchylenie standardowe.

Tab. 7 Zestawienie wyników badania wytrzymałości na ściskanie próbek zaprawy

próbka	długość		siła		wytrzymałość na ściskanie				
	$l_a$	$l_b$	$F_{ca}$	$F_{cb}$	$f_{ca}$	$f_{cb}$	średnia	mediana	odchylenie standardowe
	[mm]	[mm]	[N]	[N]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]
V1	81	81	55 823	58 601	16,81	17,65	<b>16,18</b>	<b>16,52</b>	<b>1,87</b>
V2	81	81	47 173	59 499	13,54	17,08			
V3	78	82	53 189	65 906	16,24	19,14			
V4	81	80	55 733	61 474	16,00	17,87			
V5	77	84	48 285	46 662	14,58	12,92			

Wyniki badań wykorzystano do oznaczenia modułu sprężystości podłużnej zaprawy. Wyznaczono sieczny moduł sprężystości dla zakresu naprężeń występujących w badanym modelu sklepienia (oznaczonego na podstawie wstępnych obliczeń).

Statystyczny rozkład wartości parametrów podanych w Tab. 6-9 poddano testowi Shapiro-Wilka, otrzymane wartości prawdopodobieństw testowych  $p$  ( $p$ -value) nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej ( $H_0$  - próbki pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym). Wartości  $p$  wyników badania modułu Younga zaprawy oraz cegieł wyniosły odpowiednio 0,51 i 0,31. Obliczono również średnią, medianę, odchylenie standardowe, błąd średni oraz współczynnik zmienności wyników modułu sprężystości podłużnej zaprawy. Wyniki zestawiono w Tab. 8.

Parametry statystyczne zostały wyznaczone według następujących formuł:

- średnia arytmetyczna wytrzymałości na ściskanie (5.16):

$$\bar{f}_c = \frac{\sum_{i=1}^n f_{ci}}{n} \quad (5.16)$$

- mediana wytrzymałości na ściskanie (dla parzystego zbioru prób) (5.17):

$$M_{fc} = \frac{f_{c\frac{n}{2}} + f_{c(\frac{n}{2}+1)}}{2} \quad (5.17)$$

- odchylenie standardowe (5.18):

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_{ci} - \bar{f}_c)^2}{n-1}} \quad (5.18)$$

- błąd średni średniej arytmetycznej (5.19):

$$s_r = \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (5.19)$$

- współczynnik zmienności (5.20):

$$v = \frac{s}{\bar{f}_c} * 100\% \quad (5.20).$$

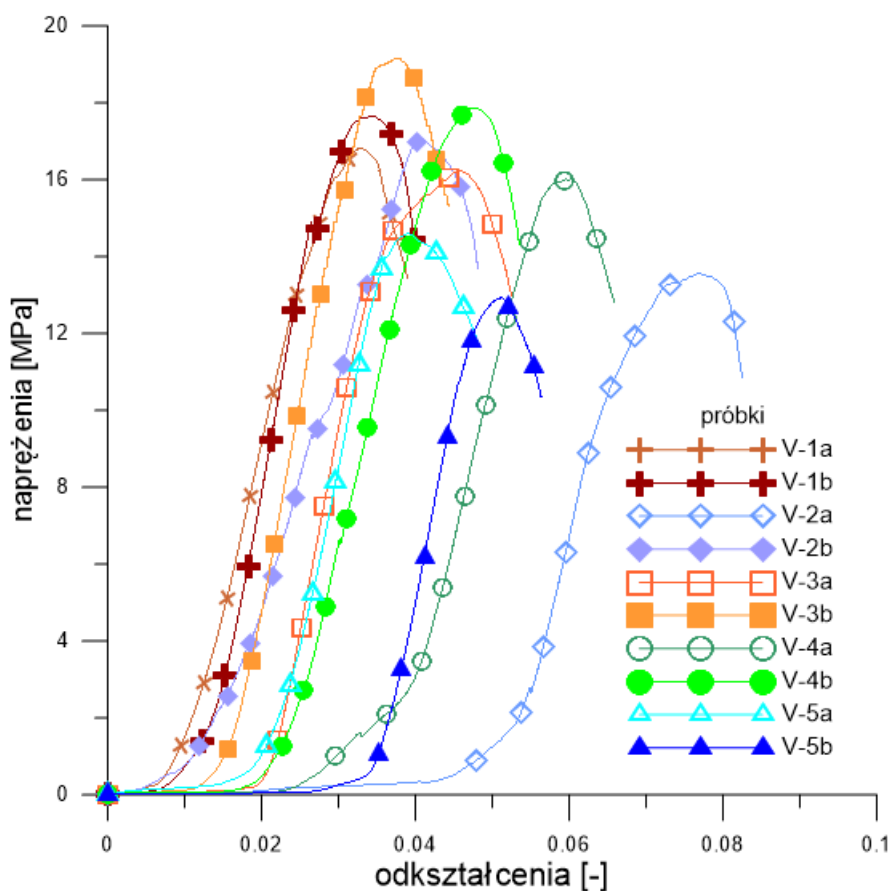
Warto zauważyć, że spośród dwóch wyznaczonych miar zróżnicowania rozkładu (odchylenia standardowego i współczynnika zmienności) współczynnik zmienności jest miarą względną co, w tym przypadku, znaczy zależną od wartości średniej arytmetycznej.

**Tab. 8 Moduł sprężystości podłużnej zaprawy.**

próbka	moduł Younga próbek zaprawy						
	E <sub>a</sub>	E <sub>b</sub>	średnia arytmetyczna	mediana	odchylenie standardowe	błąd średni	współczynnik zmienności
	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	v
<b>V1</b>	861,55	1103,30	<b>752,61</b>	<b>746,34</b>	<b>212,10</b>	<b>67,07</b>	<b>28,18%</b>
<b>V2</b>	529,46	639,51					
<b>V3</b>	809,58	999,02					
<b>V4</b>	479,04	683,09					
<b>V5</b>	940,21	481,30					

Moduł sprężystości podłużnej badanych próbek wykazuje dużą zmienność (wartości od 479 do 1103 MPa, współczynnik zmienności 28,18%). Zróżnicowanie to związane jest z niejednorodnością mieszanki i zostało uznane za akceptowalne. Rys. 42 przedstawia wykresy zależności  $\sigma(\epsilon)$  ściskanych próbek zaprawy. Na wykresie przedstawiono pełne przebiegi prób, tj. łącznie z początkowym fragmentem wykresu zależności  $\sigma(\epsilon)$ , który de facto należy interpretować jako oparcie szczęki maszyny wytrzymałościowej o ziarna wystające na niedostatecznie gładkiej powierzchni badanej próbki. Dopiero powyżej początkowych fragmentów wykresów prób wyniki można uznać za miarodajne. Fakt ten nie ma jednak wpływu na wyznaczoną wartość siecznego modułu Younga i pomijalny wpływ na wartość wytrzymałości na ściskanie. Sieczny moduł Younga wyznaczono dla fragmentów wykresów powyżej początkowych fragmentów wykresów, tj. na odcinku odpowiadającemu zakresowi sprężystemu. Zaburzenia w początkowych odcinkach wykresów sięgają nie

wyżej niż do osiągnięcia w próbce naprężeń inżynierskich rzędu 0,5 MPa. Uwzględniając średnią wartość wytrzymałości na ściskanie  $f_m = 16,18$  MPa można stwierdzić, że możliwy błąd wynikający z tych zaburzeń nie przekracza ok. 3%. Potencjalny błąd wartości tego parametru uznano za dopuszczalny.



Rys. 42 Wykresy zależności naprężeń od odkształceń ( $\sigma(\epsilon)$ ) badanych próbek zaprawy

**Cegły.** Badania modułu sprężystości podłużnej cegieł przeprowadzono na całych cegłach w zakresie naprężeń zawierającym wartości występujące w badanym sklepieniu. Badanie przeprowadzono na 7 próbkach, były to cegły ceramiczne pełne, bezotworowe klasy 15 o standardowych wymiarach 65x120x250 mm pochodzące z partii cegieł użytych do budowy sklepienia. Badania przeprowadzono zgodnie z normą (PN-EN 772-1+A1, 2015). Rys. 43 przedstawia cegły w trakcie oraz po badaniu.



Rys. 43 Badanie cegieł pełnych

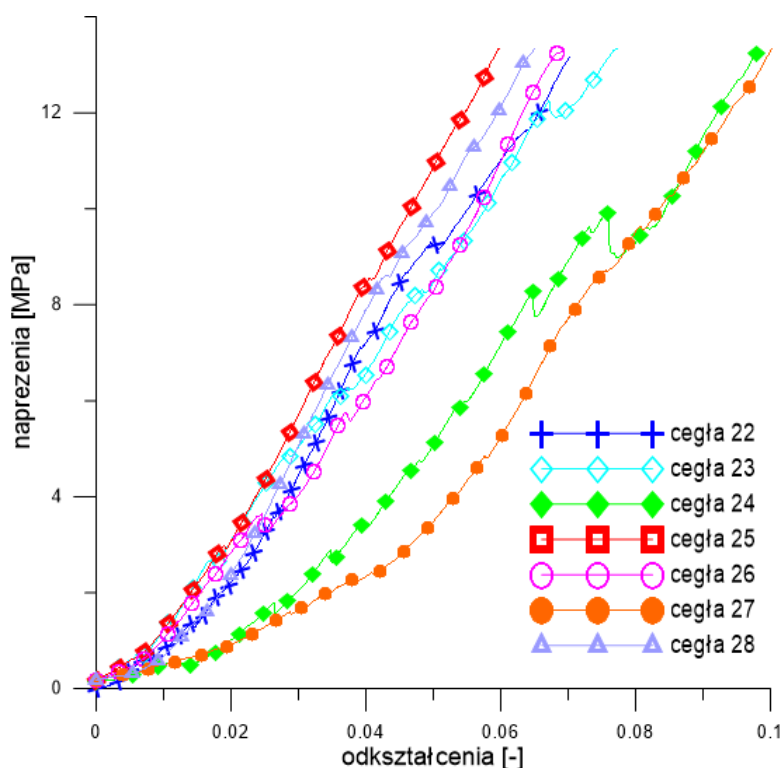
W trakcie badania zapisywano siłę oraz drogę belki trawersowej, wyniki te opracowano za pomocą skryptu sporządzonego w środowisku MATLAB (MathWorks, 2016) wyznaczając sieczny moduł sprężystości

podłużnej dla zakresu naprężeń występujących w badanym sklepieniu w przypadku każdej z próbek. Uzyskane wyniki poddano analizie statystycznej wyznaczając średnią, medianę, odchylenie standardowe, błąd średni oraz współczynnik zmienności. Rys. 44 przedstawia wykresy zależności  $\sigma(\epsilon)$  ściskanych cegieł. Naprężenia oraz odkształcenia wyznaczono odnosząc siłę oraz przemieszczenie belki trawersowej do początkowych wymiarów przekroju poprzecznego cegły, co odpowiada miarom inżynierskim. Tak wyznaczone wartości średnie parametrów wytrzymałościowych wykorzystano do dalszych obliczeń.

Tab. 9 Zestawienie wyników badania cegieł

E	średnia	mediana	odchylenie standardowe	błąd średni $s_r$	współczynnik zmienności
[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	$v$
255,17	<b>233,92</b>	<b>253,17</b>	<b>36,25</b>	<b>13,70</b>	<b>14,32%</b>
184,97					
189,97					
259,70					
253,17					
208,30					
286,16					

Analiza statystyczna uzyskanych wyników wskazuje znaczny rozrzut wyników (współczynnik zmienności 14 %). Jest to związane z niską klasą cegieł i powiązaną z nią niską jakością wykonania oraz niskim reżimem produkcji.



Rys. 44 Wykres zależności naprężeń od odkształceń ( $\sigma(\epsilon)$ ) badanych cegieł

Z uwagi na ograniczenia maksymalnej siły ściskającej w maszynie wytrzymałościowej wykorzystywanej do badań, użycie do badań wytrzymałości na ściskanie całych cegieł okazało się niemożliwe. Widać to na Rys. 44, gdzie w żadnej z prób nie osiągnięto wartości naprężeń odpowiadającej wytrzymałości na ściskanie

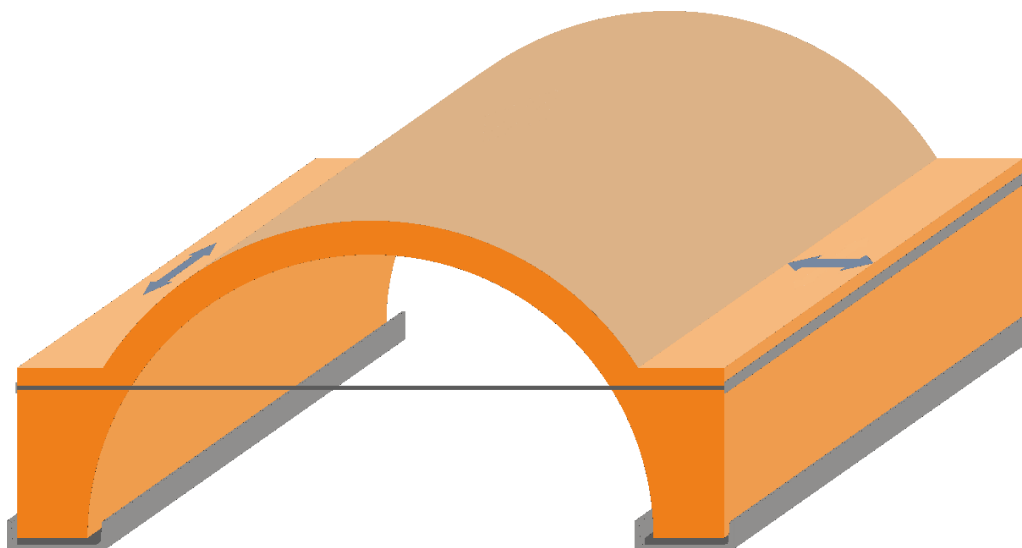


badanych próbek. Zdecydowano się na przyjęcie wartości normowej wytrzymałości cegieł na ściskanie dla klasy zadeklarowanej przez producenta.

Badania sklepienia prowadzono w zakresie obciążeń, w których konstrukcja pracowała w zakresie sprężystym. Z tego powodu zaniechano badań wytrzymałości na ściskanie cegieł, np. na próbkach będących fragmentami cegieł z uwzględnieniem odpowiednich współczynników.

### 5.2.2. Badania doświadczalne sklepienia kolebkowego – analiza dynamiczna

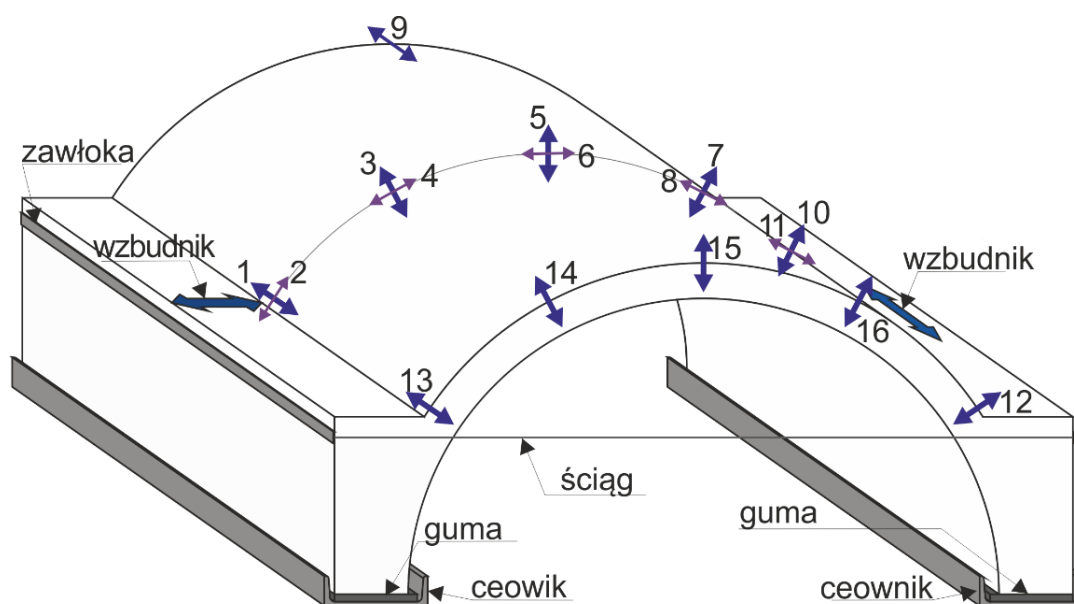
W konstrukcji wywołano drgania generowane przez wzbudnik elektrodynamiczny z cewką poruszającą w szczelinie magnesów. Wzbudnik sterowany jest poprzez sygnał sinusoidalny z arbitralnego generatora sygnałów Rigol DG1022 o rozdzielczości nastawy częstotliwości 1  $\mu$ Hz oraz minimalnym napięciu wyjściowym 2  $\mu$ Vpp. W trakcie badań stosowano wzbudzenie sygnałami sinusoidalnymi o częstotliwościach odpowiadających częstotliwościom własnym sklepienia (zarówno obliczonym numerycznie jak i wyznaczonym eksperymentalnie) oraz sygnałami o stałej amplitudzie i częstotliwości zmieniającej się liniowo w wyznaczonym zakresie (sygnałami typu *sweep*) oraz tzw. białym szumem. W niniejszej pracy przedstawiono wykresy odpowiedzi dynamicznej sklepienia wzbudzonego *sweep'em* w zakresie od 1 do 10 Hz i od 5 do 15 Hz, oraz białym szumem. Wzbudnik montowano na poziomych elementach przypór z obu stron łuku wzbudzając sklepienie drganiami w kierunku podłużnym i poprzecznym konstrukcji. Miejsca przyłożenia wzbudzenia zaprezentowano schematycznie na (Rys. 45). Taki sposób wzbudzenia ma, w zamyśle autora, odpowiadać mechanizmowi przekazywania drgań z konstrukcji ścian obciążonych dynamicznie, np. działaniem wiatru lub drganiami wywołanymi ruchem kołowym, na sklepienia murowe.



Rys. 45 Schemat obciążenia sklepienia

Do rejestracji odpowiedzi konstrukcji wykorzystano akcelerometry i mostek tensometryczny z 16 kanałami. Dało to możliwość rejestracji przyspieszeń 5 akcelerometrami dwuosiowymi i 6 jednoosiowymi. Zastosowano akcelerometry typu MEMS (od ang. *microelectromechanical system*) używające do pomiaru przyspieszenia kondensatorów różnicowych, których pojemność jest mierzona i analizowana w celu

otrzymania wartości przyspieszenia. Użyto akcelerometrów LIS344ALH o zakresie rejestracji przyspieszeń od  $\pm 2$  do  $\pm 6$  g.



Rys. 46 Schemat umiejscowienia akcelerometrów na sklepieniu oraz opis elementów sklepienia.

Akcelerometry dwuosiowe zostały rozmieszczone w środku szerokości sklepienia, akcelerometry jednoosiowe rozmieszczono wzdłuż jednego z brzołów – po 5 sztuk wzdłuż grzbietu sklepienia zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 46. Akcelerometr wykorzystujący ostatni 16 kanał mostka umieszczono na przeciwległym brzołwie w kluczu sklepienia. Akcelerometry mocowano ściskami stolarskimi do kątowników przyklejonych wcześniej do sklepienia klejem dwuskładnikowym Poxipol (Rys. 48). Pomiarów dokonano wzmacniaczem Quantum 840 firmy HBM (Rys. 48). Przyspieszenia rejestrowano w 11 punktach na jednym lub dwóch kierunkach (wg schematu przedstawionego na Rys. 46) z częstotliwością 600 Hz.



Rys. 47 Sklepienie przed i w trakcie badań

Rys. 47 pokazuje sklepienie przed rozpoczęciem eksperymentu, z zamontowanym postumentem wzbudnika, oraz w trakcie badania z zamontowanym wzbudnikiem oraz kompletem akcelerometrów. Rys. 48

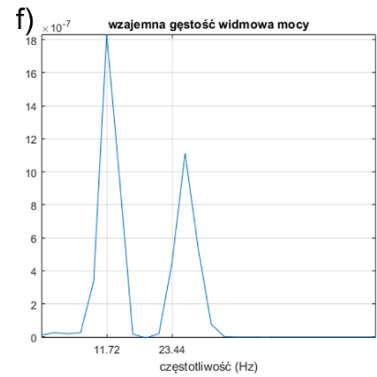
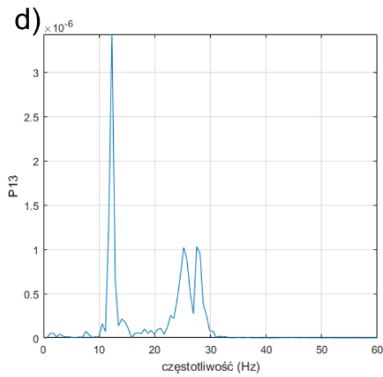
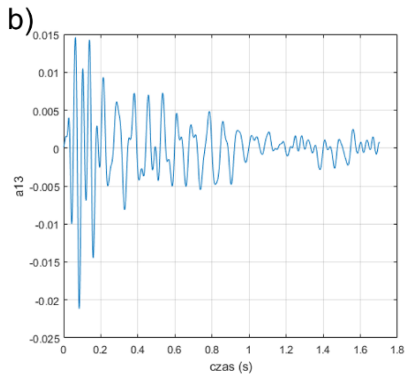
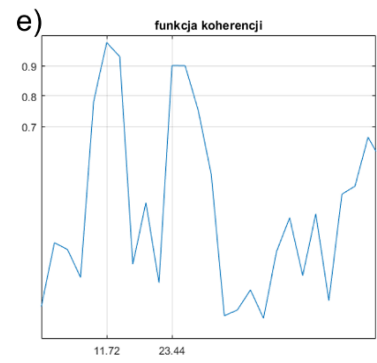
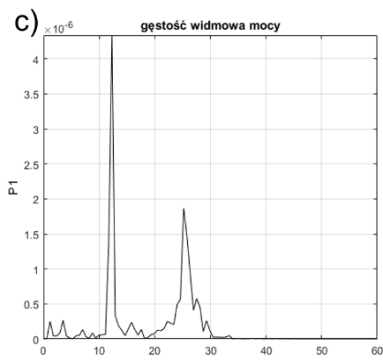
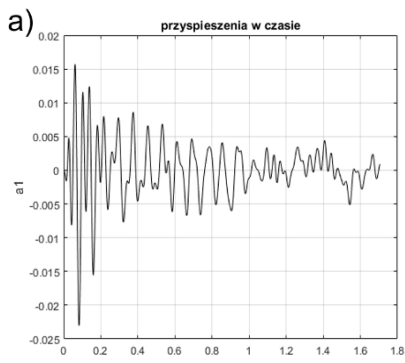
przedstawia dokładniejszy widok stacji pomiarowej (komputer i wzmacniacz) oraz pojedynczy akcelerometr w trakcie badania.



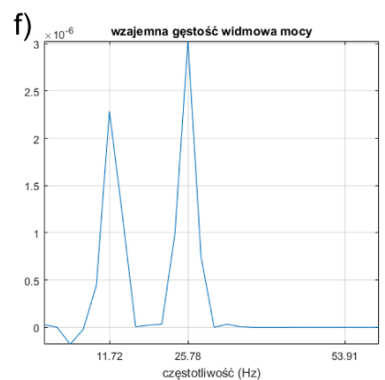
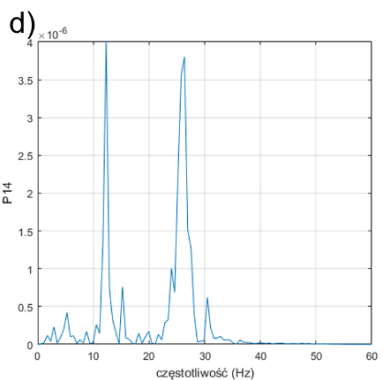
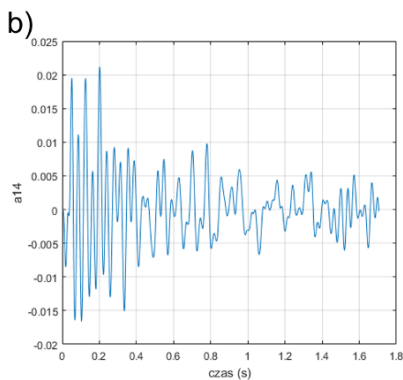
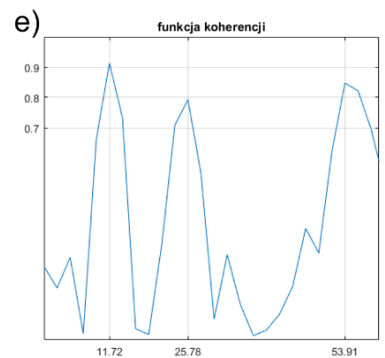
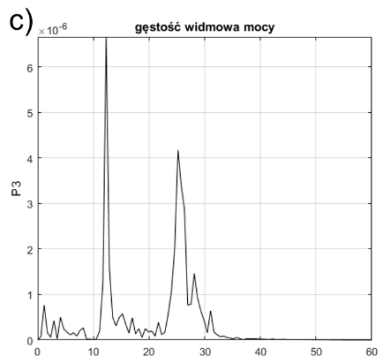
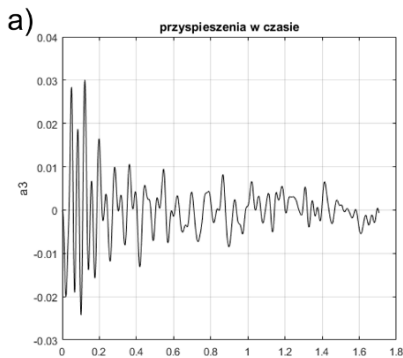
Rys. 48 Wzmacniacz i komputer rejestrujący przyspieszenia oraz akcelerometr.

Sygnaly przyspieszeń w funkcji czasu badanego sklepienia zapisano i przetworzono zgodnie z algorytmami przedstawionymi w rozdziale 5.1. Skrypty wykonujące te zadania zostały opracowane w środowisku MATLAB (MathWorks, 2016).

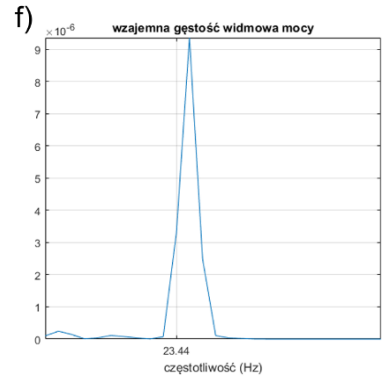
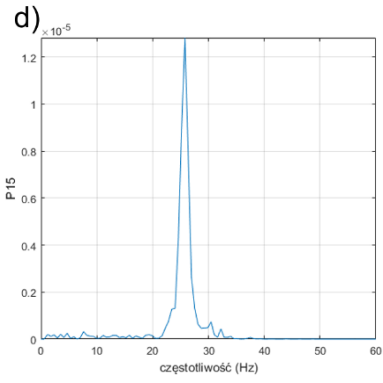
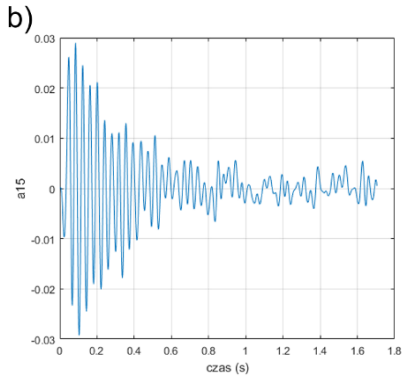
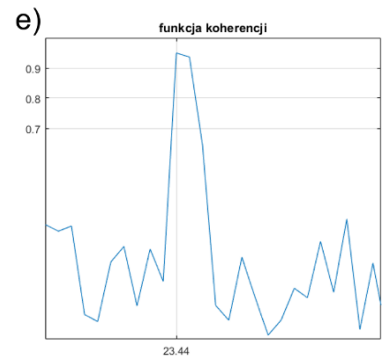
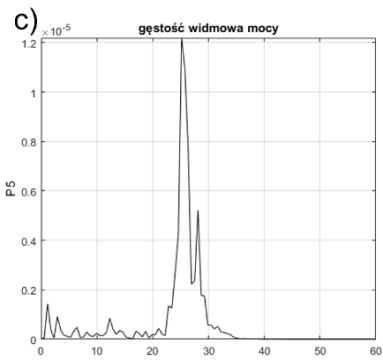
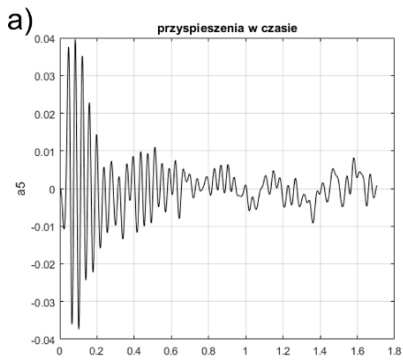
Rys. 49-55 przedstawiają rezultaty zarejestrowane po wzbudzeniu drgań wzbudnikiem generującym drgania o stałej amplitudzie i częstotliwości zmieniającej się liniowo od 1 do 10 Hz. Każdy z rysunków zawiera 6 wykresów. Wykresy a) oraz b) prezentują funkcję przyspieszeń w czasie  $a_i(t)$  dwóch różnych punktów pomiarowych  $i$ . Numery punktów pomiarowych  $i$  zgodne są z oznaczeniem na Rys. 46. Wykresy 49-55 c) oraz d) to gęstości widmowe mocy przedstawione w funkcji częstotliwości  $P_i(f)$  dla tej samej pary punktów pomiarowych. Widmo mocy wyznaczono korzystając z szybkiej transformacji Fouriera (FFT) opisanej równaniem (5.2). Wykresy 49-55 e) to funkcja koherencji zaś f) to wykres wzajemnej gęstości widmowej mocy pary analizowanych sygnałów opisane odpowiednio formułami (5.13) i (5.12). Obydwa wykresy przedstawiono w funkcji częstotliwości.



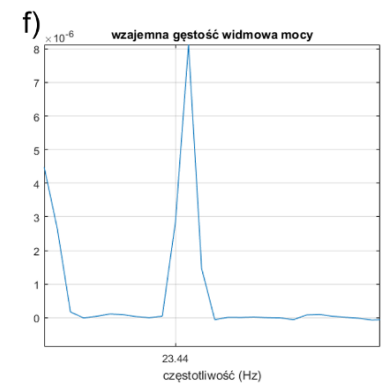
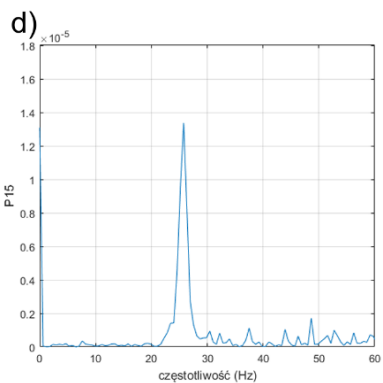
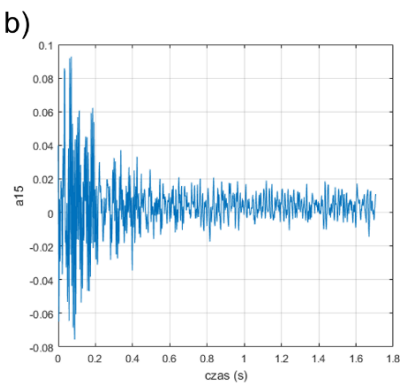
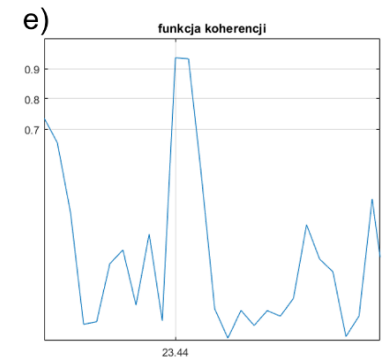
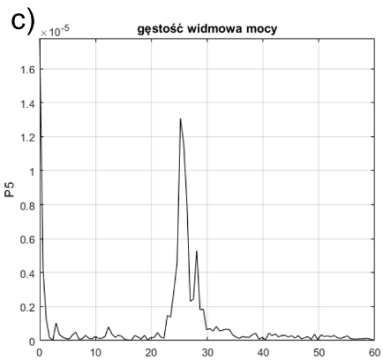
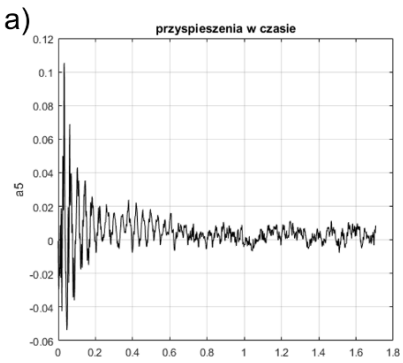
**Rys. 49** Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 1 i 13 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.



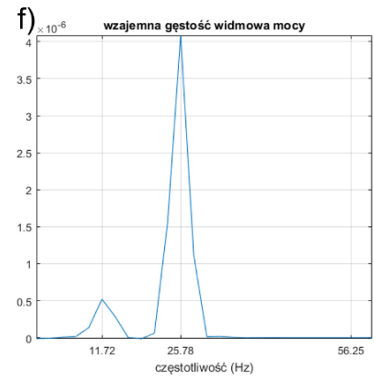
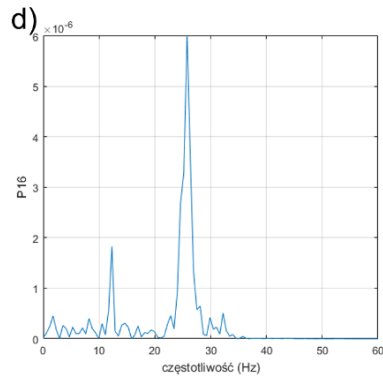
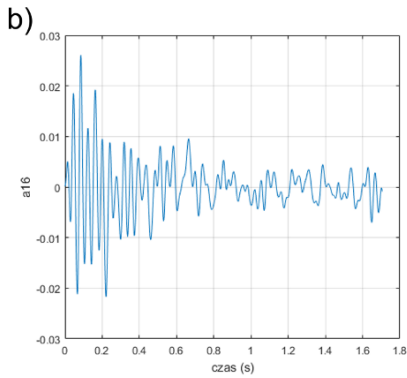
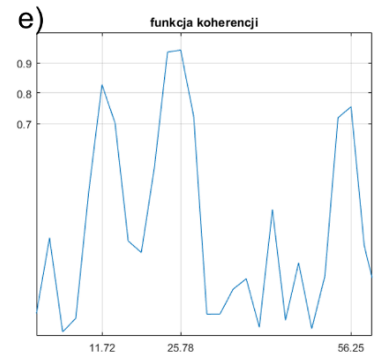
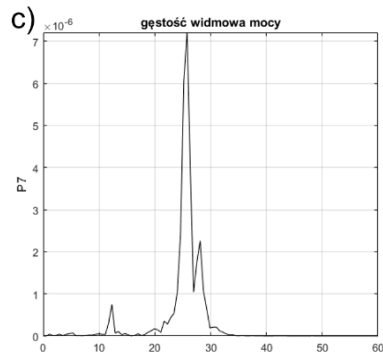
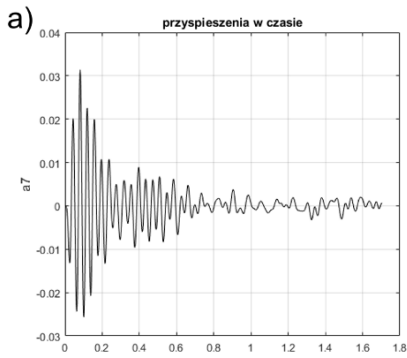
**Rys. 50** Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 3 i 14 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.



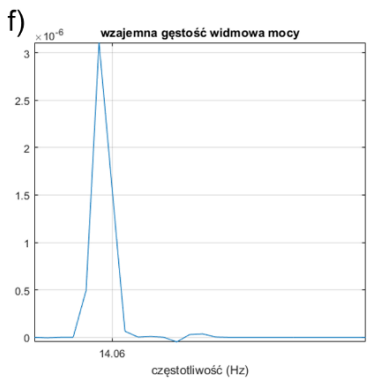
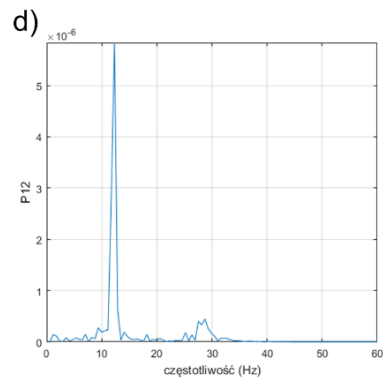
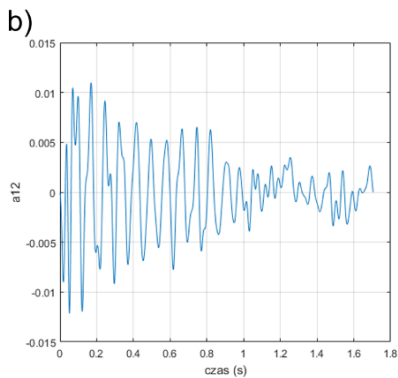
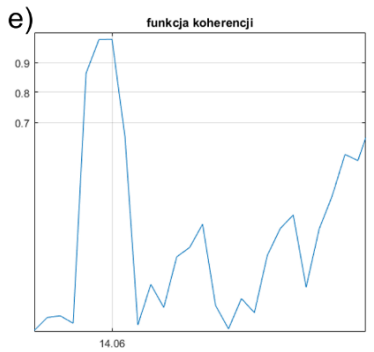
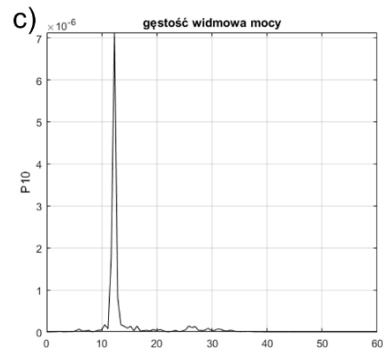
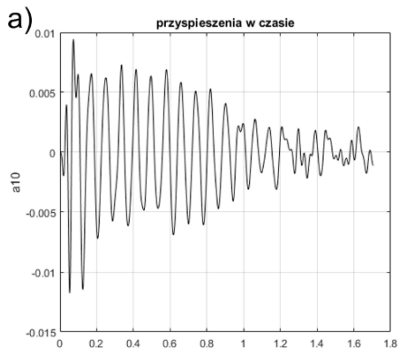
Rys. 51 Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 5 i 15 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.



Rys. 52 Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 5 i 15 (przyspieszenia w tym samym kierunku) – funkcja przyspieszeń nie poddana filtracji: przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.

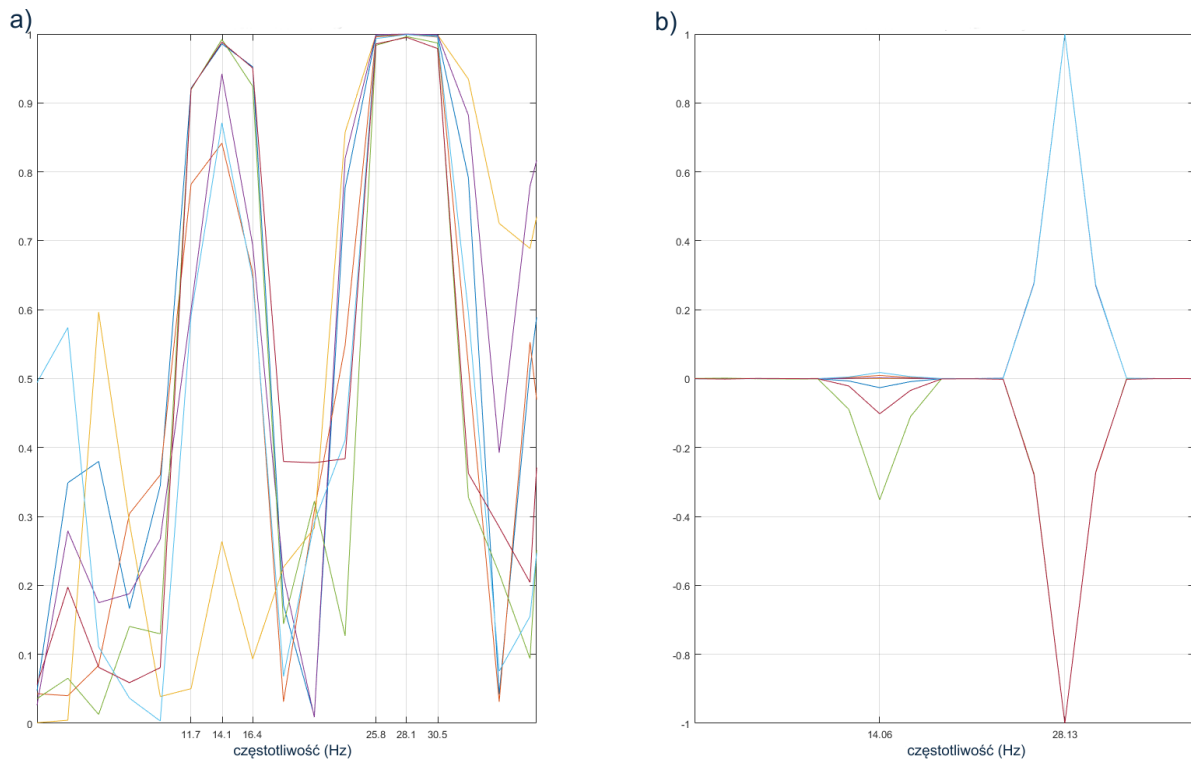


**Rys. 53** Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 7 i 16 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.

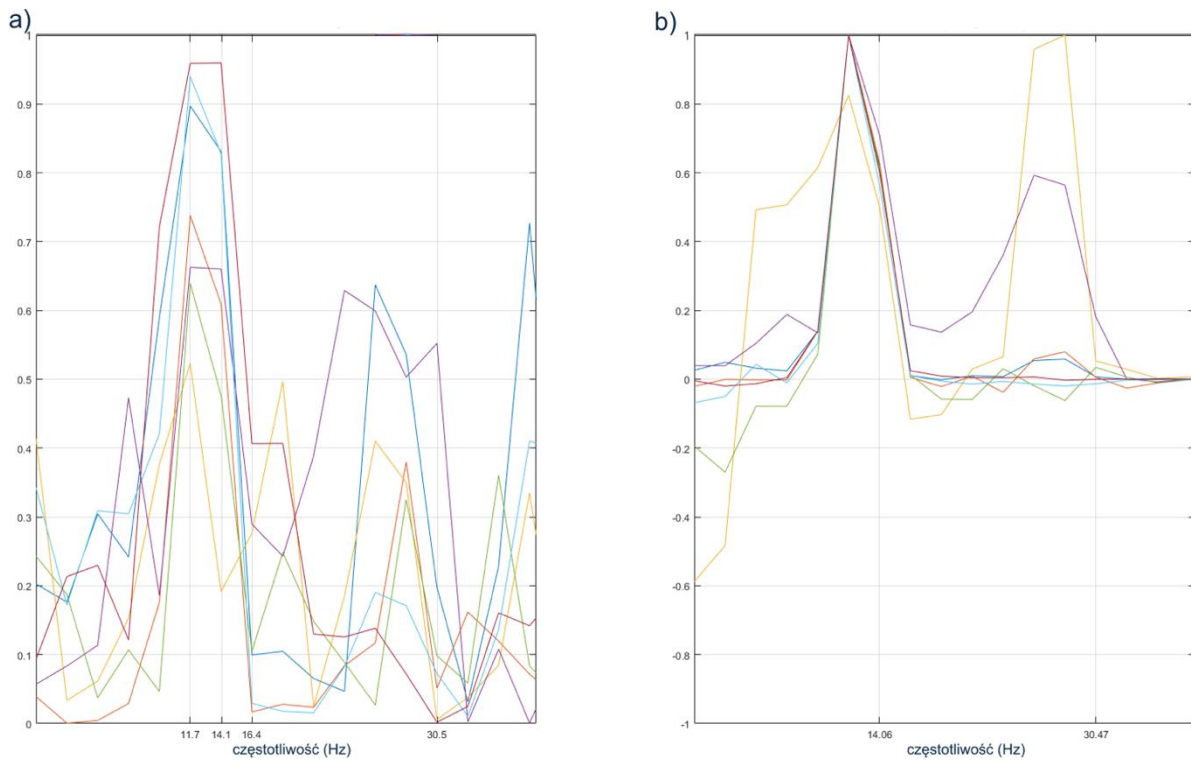


**Rys. 54** Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 10 i 12 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.

Wykresy koherencji oraz wzajemnej gęstości widmowej mocy wszystkich analizowanych par punktów pomiarowych *i* po wzbudzenia *sweep'em* 1-10 Hz zebrano i przedstawiono na Rys. 55.

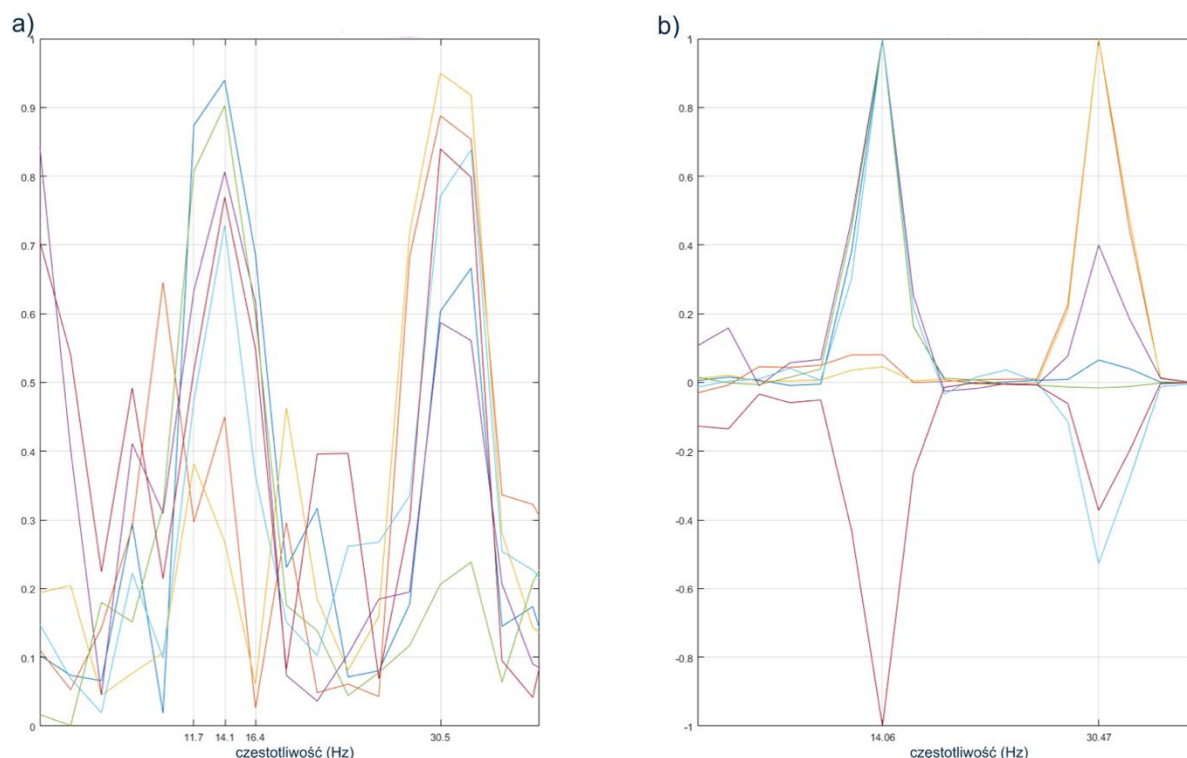


**Rys. 55** Odpowiedź dynamiczna sklepienia (wzbudzenie *sweep'em* 1-10 Hz):  
a) koherencja i b) wzajemna gęstość widmowa mocy analizowanych par punktów.



**Rys. 56** Odpowiedź dynamiczna sklepienia (wzbudzenie *sweep'em* 5-15 Hz):  
a) koherencja i b) wzajemna gęstość widmowa mocy analizowanych par punktów.

Analogiczne rezultaty prezentują: Rys. 56 przy wzbudzeniu drganiami o stałej amplitudzie i częstotliwości zmieniającej się liniowo od 5 do 15 Hz oraz Rys. 57 przy wzbudzeniu tzw. białym szumem generowanym przez arbitralny generator sygnałów Rigol DG1022.



**Rys. 57 Odpowiedź dynamiczna sklepienia (wzbudzenie białym szumem):**  
**a) koherencja i b) wzajemna gęstość widmowa mocy analizowanych par punktów.**

Na podstawie przeprowadzonych analiz (rys.(Rys. 50-58) wyznaczono częstotliwości drgań własnych konstrukcji, które zestawiono w Tab. 10. Podstawowa analiza FFT została wzbogacona o wyznaczenie funkcji koherencji oraz wzajemnej gęstości widmowej mocy. Umożliwiło to łatwiejsze rozpoznanie częstotliwości własnych całej konstrukcji wyodrębniając je spośród zaburzeń oraz efektów lokalnych.

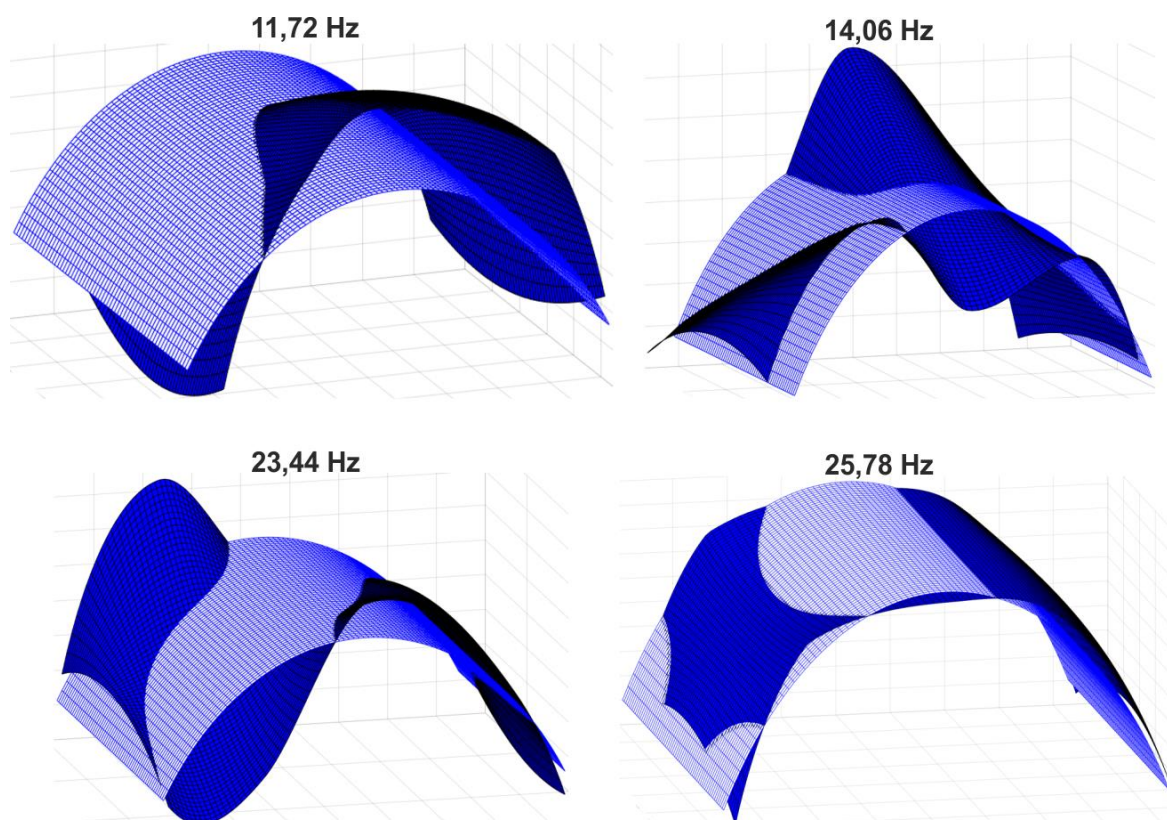
**Tab. 10 Częstotliwości własne sklepienia w skali technicznej estymowane na podstawie eksperymentu.**

kolejne częstotliwości własne sklepienia estymowane na podstawie eksperymentu [Hz]				
1	2	3	4	5
11,72	14,06	23,44	25,78	28,13

Wynikiem przeprowadzonych badań eksperymentalnych są również przybliżone postacie drgań własnych sklepienia. Przyspieszenia zarejestrowane w 16 punktach pomiarowych umożliwiają wyznaczenie 16-elementowego wektora opisującego postać drgań własnych sklepienia. Wektory postaci własnych wyznaczono korzystając z procedury tzw. ugięć eksploatacyjnych (ang. *Operational Deflection Shapes* – ODS) (Radzieński, 2011; Schwarz & Richardson, 1999). Sklepienie wzbudzano wymuszeniem sinusoidalnym o częstotliwości odpowiadającej poszczególnym częstotliwościom własnym sklepienia. Zarejestrowane przyspieszenia poddane dwukrotnemu całkowaniu dyskretnemu pozwoliły, po znormalizowaniu, wyznaczyć 16 elementowe wektory postaci własnych sklepienia.



Przybliżone postacie drgań własnych całego sklepienia uzyskano interpolując wartości wektora 16-elementowej funkcją sklejaną drugiego stopnia. Rys. 58 prezentuje przybliżone postacie własne badanego sklepienia (przedstawione jako ciemne powierzchnie) z powierzchnią środkową sklepienia w konfiguracji początkowej (jaśniejsza siatka). Szkice prezentowane na tym rysunku obejmują tylko fragment sklepienia, na którym zamontowane były akcelerometry – tzn. fragment sklepienia o grubości  $\frac{1}{2}$  cegły, czyli fragment powyżej przypór (od 60 cm nad posadzką).



Rys. 58 Przybliżone postacie drgań własnych sklepienia estymowane na podstawie badań doświadczalnych.

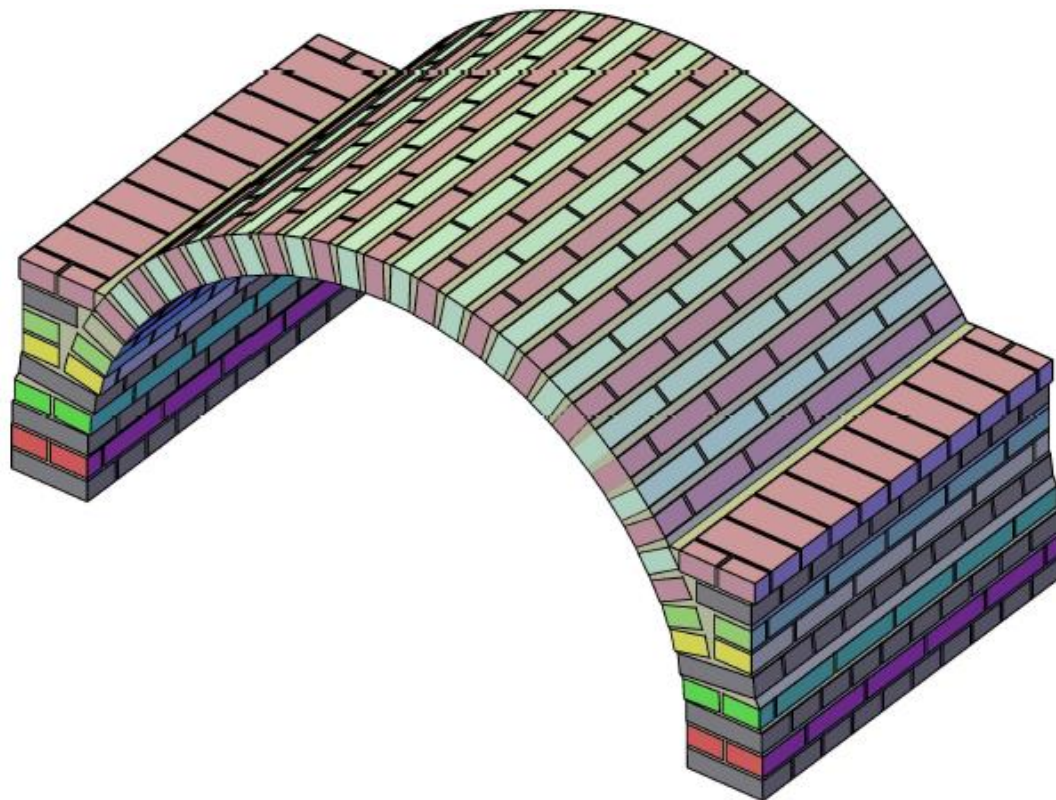
### 5.2.3. Badania numeryczne sklepienia kolebkowego

Przedstawione wcześniej badania eksperymentalne sklepienia ceglanego w skali technicznej miały na celu m.in. dostarczenie danych do walidacji modeli numerycznych. W celu przeprowadzenia analizy pracy sklepienia zaproponowano dwa modele numeryczne (mikro- i makro-), które zdefiniowano w programie Abaqus/CAE 6.14-2 (Dassault Systèmes Simulia Corp, 2014).

Spośród metod modelowania sklepień ceglanych opisywanych w literaturze i referowanych w rozdziale 4.1.2. wybrano Metodę Elementów Skończonych z uwagi na powszechną wśród inżynierów znajomość tej metody, możliwość zastosowania homogenizacji znacząco ułatwiającej definiowanie modelu oraz ze względu na stosunkową łatwość modelowania sklepień ze wzmocnieniem tensegrity (patrz rozdział 6).

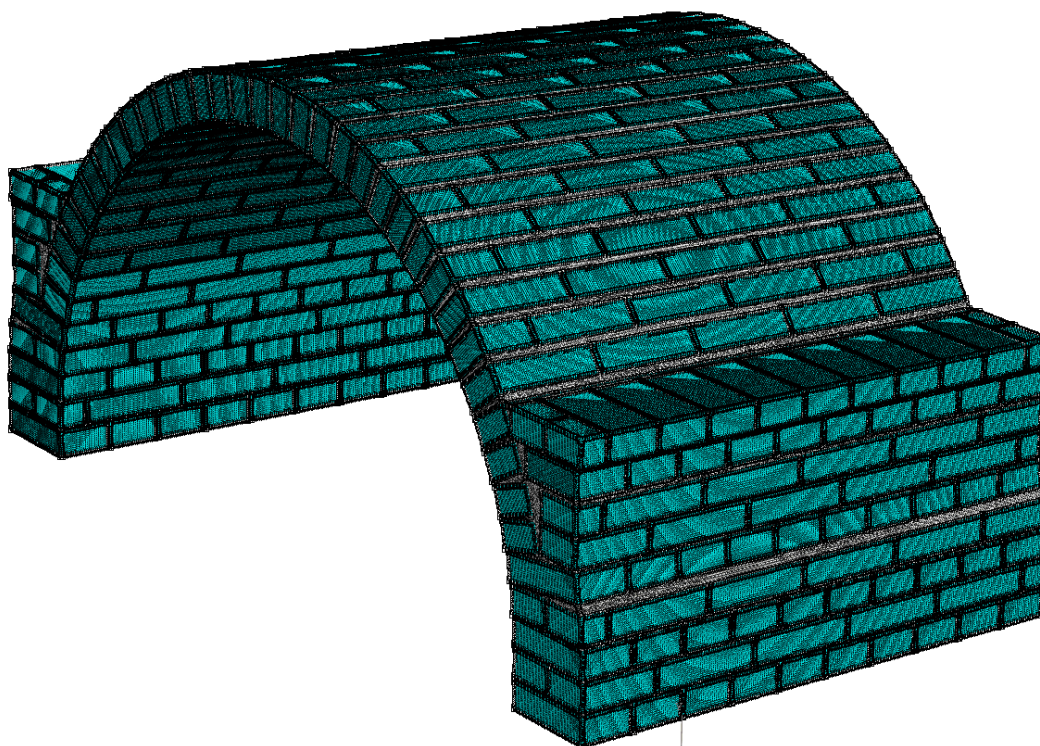
**Mikromodel sklepienia.** Geometrię modelu opracowano w programie Autodesk AutoCAD 2017. Prostokątne odpowiadające cegłom o rozmiarach 1 (cała cegła),  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  oraz  $\frac{1}{4}$  (fragmenty) cegły usytuowano w sposób odpowiadający geometrii badanego sklepienia. Następnie stworzono obrys całego

sklepienia od czoła, obrys ten następnie wyciągnięto za pomocą polecenia *extrude* tworząc bryłę całego sklepienia. Aby uzyskać bryłę zaprawy z tej bryły „wycięto” cegły używając polecenia *subtract*.



Rys. 59 Model trójwymiarowy sklepienia w programie AutoCAD.

Tak opracowaną geometrię wyeksportowano do plików ACIS (o rozszerzeniu \*.sat) a następnie wprowadzono jako części (parts) w programie Abaqus/CAE 6.14-2 – Rys. 60.



Rys. 60 Mikromodel sklepienia w programie Abaqus/CAE 6.14-2.

Cegły modelowano elementami typu C3D8R, są to 8-węzłowe elementy objętościowe z liniową funkcją kształtu. Z uwagi na złożony kształt bryły zaprawy do jej modelowania użyto innego typu elementów, 10-węzłowych elementów czworościennych o kwadratowej funkcji kształtu oznaczonych jako C3D10. Zadbano jednak o zastosowanie tego samego rozmiaru elementów oraz zastosowanie wspólnych węzłów na płaszczyznach kontaktu. W sumie zastosowano 15600 elementów do modelowania cegieł oraz 2244496 elementów do modelowania zaprawy. Parametry wytrzymałościowe materiałów sklepienia przyjęto zgodnie z danymi uzyskanymi w badaniach materiałowych zestawionymi w Tab. 11.

**Tab. 11 Podstawowe parametry komponentów muru przyjęte w modelu numerycznym**  
\* – wartość normowa wytrzymałości na ściskanie cegły klasy 15.

parametry komponentów muru	wytrzymałość na ściskanie [MPa]	moduł Younga [MPa]	liczba Poissona [-]	gęstość objętościowa [kg/m <sup>3</sup> ]
zaprawa	16,18	752,61	0,17	1850
cegły	15,00*	233,92	0,21	2000

**Makromodel badanego sklepienia** (Rys. 61) powstał ze wspomnianej wcześniej bryły całego sklepienia, zastosowano elementy typu C3D8R, 8-węzłowe elementy objętościowe z liniową funkcją kształtu o tym samym rozmiarze, który przyjęto w mikromodelu. Parametry muru oszacowano stosując algorytm homogenizacji zaprezentowany w sekcji nr 5.1.2; wartości parametrów zhomogenizowanego muru zestawiono w Tab. 12.

**Tab. 12 Podstawowe parametry zhomogenizowanego muru.**

parametry zhomogenizowanego muru	wytrzymałość na ściskanie [MPa]	moduł Younga [MPa]	liczba Poissona [-]	gęstość objętościowa [kg/m <sup>3</sup> ]
	3,45	373,9	0,185	1945

Tab. 12 przedstawia wartość obliczeniowej wytrzymałości muru na ściskanie wyznaczonej zgodnie z (PN-EN 1996-1-1, 2013). Korzystając ze wzoru na charakterystyczną wytrzymałość muru na ściskanie (5.21) wyznaczono jej wartość:  $f_k = 6,905 \text{ MPa}$ . Z uwagi na małe doświadczenie murarskie wykonawcy sklepienia przyjęto materiałowy współczynnik bezpieczeństwa wynoszący  $\gamma_M = 2,0$  otrzymując wartość obliczeniową wytrzymałości muru na ściskanie  $f_d$  przedstawioną w tabeli.

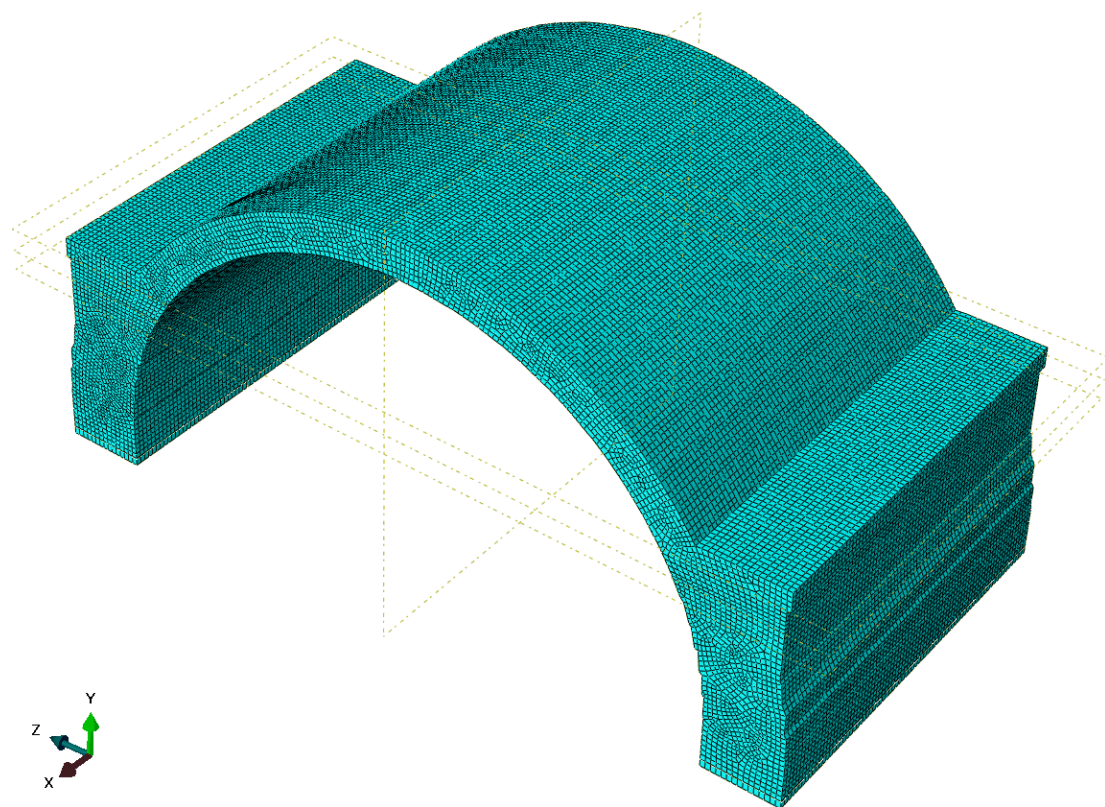
Charakterystyczna wytrzymałość muru na ściskanie  $f_k$  wg (PN-EN 1996-1-1, 2013) dana jest wzorem:

$$f_k = K f_b^{0,70} \cdot f_m^{0,30} \quad (5.21)$$

gdzie:  $K$  – współczynnik przyjmowany zgodnie z tabelą NA.5 Normy;

$f_b$  – znormalizowana wytrzymałość elementu murowego na ściskanie;

$f_m$  – wytrzymałość zaprawy murarskiej na ściskanie.

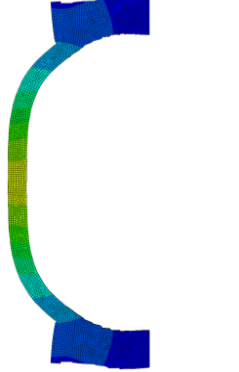
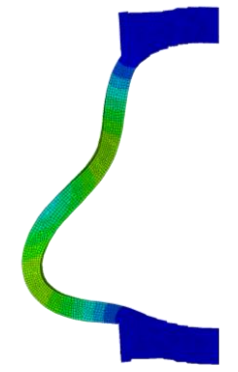
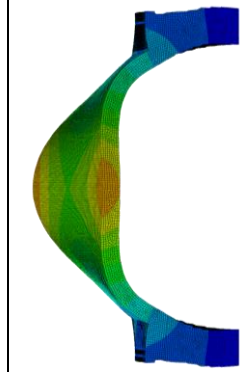
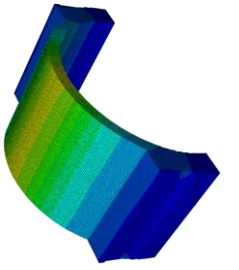
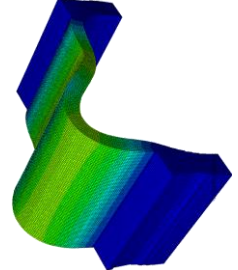
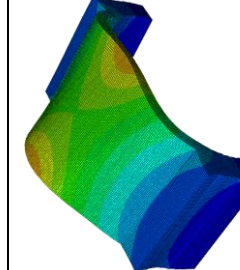
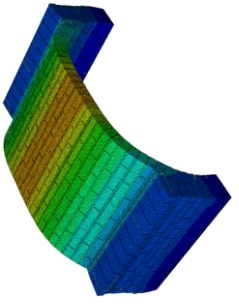
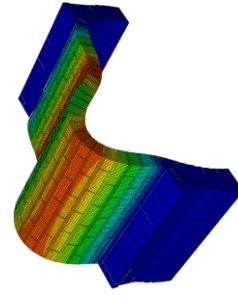
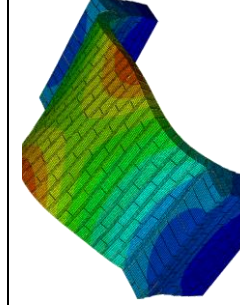
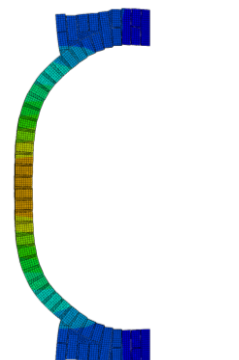
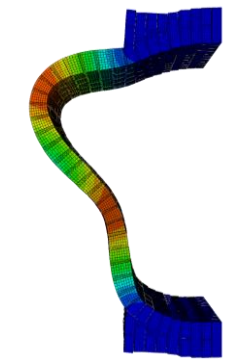
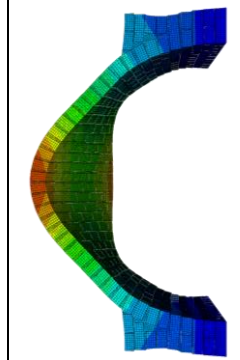


Rys. 61 Makromodel sklepienia w programie Abaqus/CAE 6.14-2.

**Analiza i wyniki badań numerycznych sklepienia.** Na bazie przygotowanych modeli numerycznych badanego sklepienia (mikro- oraz makro-modelu) przeprowadzono analizę statyczną (obciążenie tylko ciężarem własnym) oraz analizę modalną. Rozwiązano zagadnienie własne otrzymując częstotliwości oraz postacie drgań własnych. Ponieważ celem przedstawionych prac było m.in. zweryfikowanie przydatności metody homogenizacji ze związków konstytutywnych oraz utworzonych z jej pomocą makromodeli do podstawowych analiz dynamicznych sklepień murowych w dalszej części pracy znajdują się przeważnie odwołania do wartości częstotliwości drgań własnych uzyskanych z makromodelu.

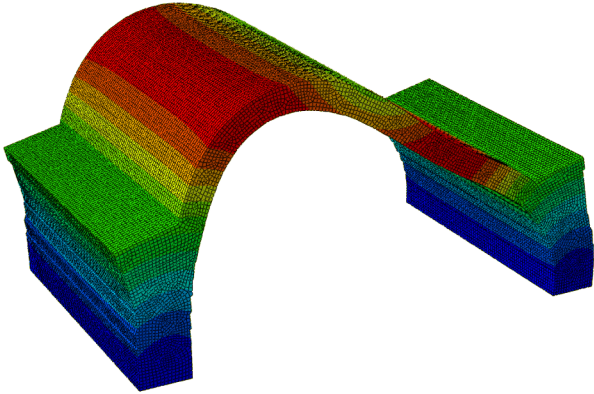
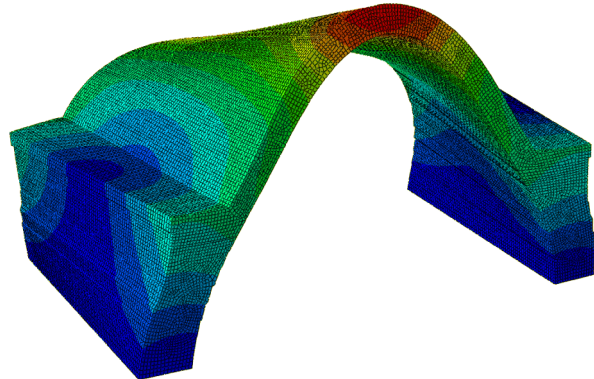
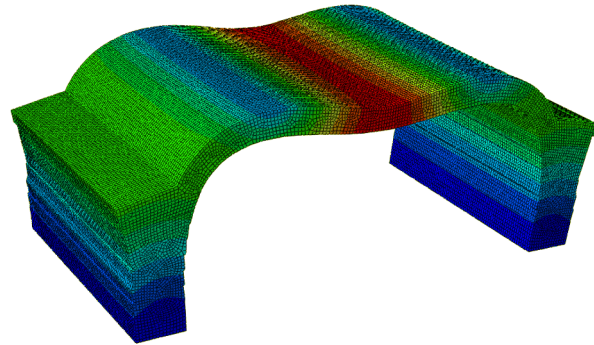
Tab. 13 zestawia postacie oraz częstotliwości drgań własnych mikro- oraz makromodelu sklepienia. Można zauważyć, że w analizowanych modelach osiągnięto zgodność obliczeń i eksperymentu w zakresie postaci drgań własnych. Błąd względny pomiędzy wyznaczonymi wartościami częstotliwości waha się w zakresie 9-10%; błąd względny pomiędzy wyznaczonymi wartościami strzałki ugięcia przy obciążeniu ciężarem własnym wynosi 14,6%. Ponieważ celem przedstawionych prac było m.in. zweryfikowanie przydatności metody homogenizacji ze związków konstytutywnych oraz utworzonych z jej pomocą makromodeli do podstawowych analiz dynamicznych sklepień murowych w dalszej części pracy znajdują się przeważnie odwołania do wartości częstotliwości drgań własnych uzyskanych z makromodelu.

Tab. 13 Zestawienie przemieszczeń sklepienia przy obciążeniu ciężarem własnym oraz postaci i częstotliwości drgań własnych mikro- i makromodelu.

	ciężar własny	1 postać własna	2 postać własna	3 postać własna
<b>makromodel</b>	$U_{max} = 0,175 \text{ mm}$			
			$f_1 = 13,73 \text{ Hz}$ 	$f_2 = 21,14 \text{ Hz}$ 
<b>mikromodel</b>	$U_{max} = 0,205 \text{ mm}$			
			$f_1 = 12,29 \text{ Hz}$ 	$f_2 = 19,15 \text{ Hz}$ 

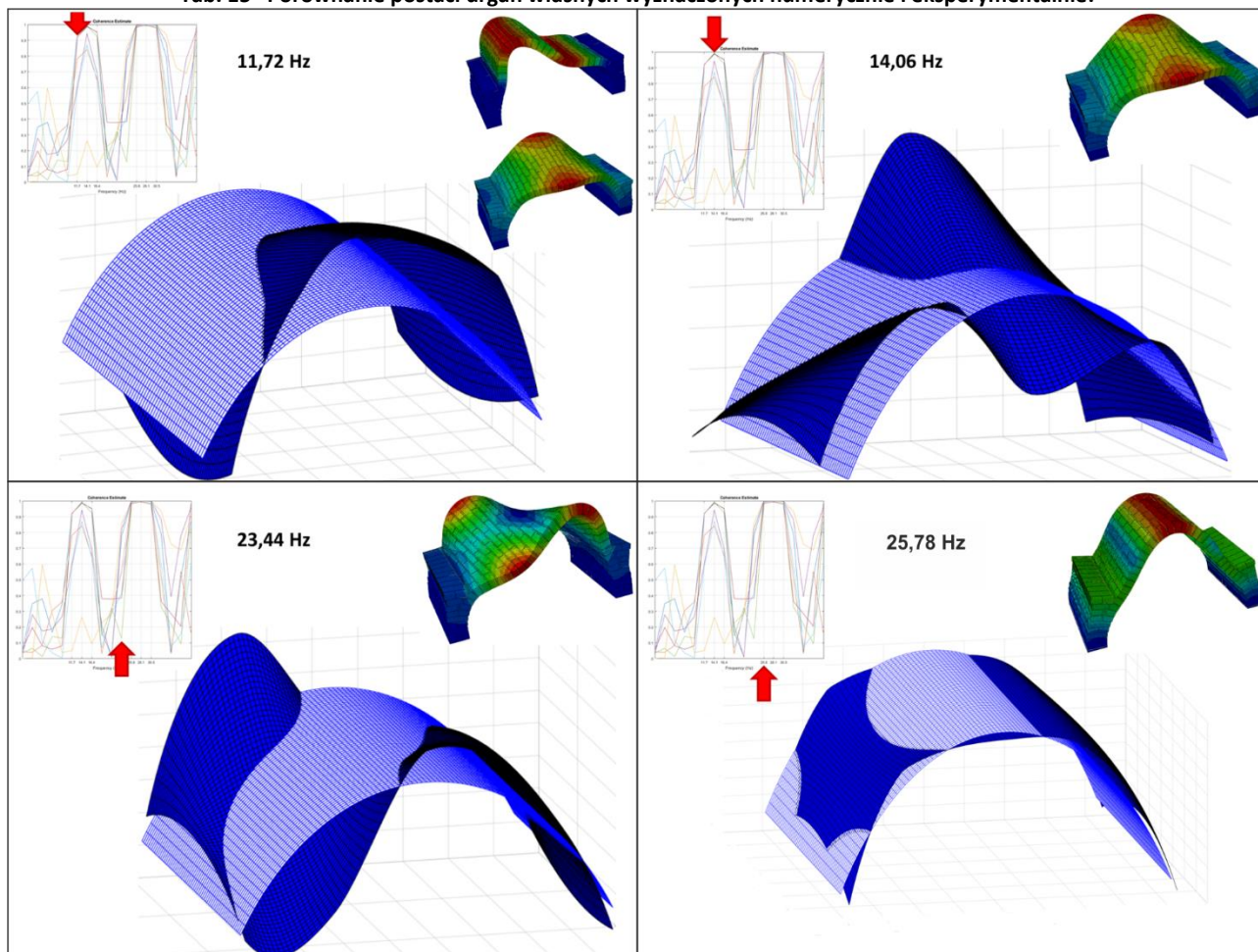
## 5.2.4. Porównanie wyników eksperymentalnych oraz uzyskanych w obliczeniach

Tab. 14 Porównanie częstotliwości własnych [Hz] badanego sklepienia wyznaczonych z makromodelu oraz uzyskanych w eksperymencie eksperymentalnie.

	Postać własna uzyskana z obliczeń	Częstotliwość własna [Hz]	
		Mikro- / makro-model	Eksperyment
1 postać własna		12,29 / 13,73	11,72
2 postać własna		19,15 / 21,14	14,06
3 postać własna		20,39 / 22,61	23,44

Tab. 15 zestawia szkice estymowanych na podstawie badań eksperymentalnych postaci drgań własnych sklepienia (przedstawione jako ciemne powierzchnie) z powierzchnią środkową sklepienia w konfiguracji początkowej (jasna siatka). Przy każdej częstotliwości pokazano postać drgań własnych uzyskanych z analizy numerycznej (prawy górny róg każdego szkicu) oraz wykres koherencji dla wszystkich par punktów (lewy górny róg każdego szkicu – źródło: Rys. 55 a). Szkice prezentowane w Tab. 15 opisują tylko fragment sklepienia, na którym zamontowane były akcelerometry, tzn. fragment powyżej przypór (od 60 cm nad posadzką).

Tab. 15 Porównanie postaci drgań własnych wyznaczonych numerycznie i eksperymentalnie.

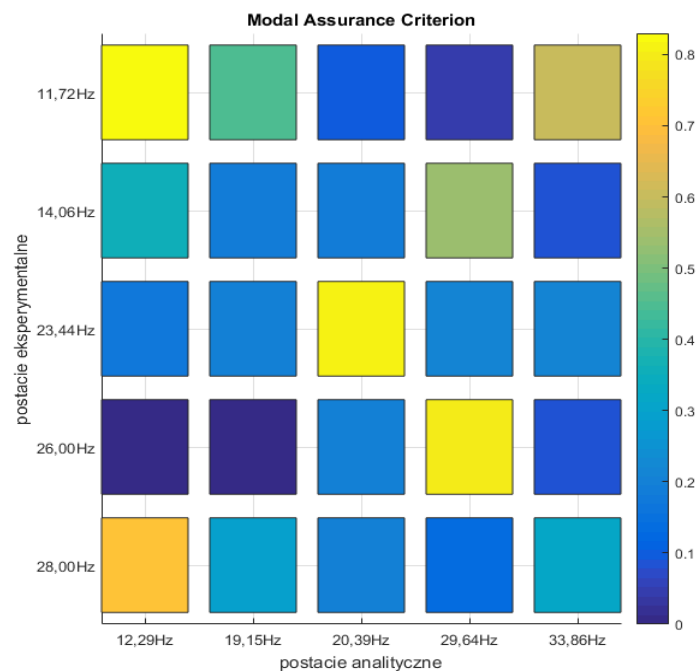


**Modal Assurance Criterion badanego sklepienia.** Aby porównać postaci drgań własnych otrzymane obliczeniowo i eksperymentalnie zastosowano Modal Assurance Criterion (*MAC*) przedstawione szerzej w rozdziale 5.1.3. *MAC* opisuje korelację między wektorami własnymi. Wartości bliskie 1 świadczą o dobrej korelacji wektorów. Wartości kryterium *MAC* znajdujące się na przecięciu wiersza *i* oraz kolumny *j* są współczynnikiem korelacji wektorów własnych  $\{\Psi_{Xi}\}$  oraz  $\{\Psi_{Aj}\}$ . *MAC* przedstawiono w formie tabelarycznej (Tab. 16) oraz w formie barwnych trójwymiarowych wykresów słupkowych przedstawionych w rzucie (Rys. 62) oraz w aksonometrii (Rys. 63).

Tab. 16 Tabela *MAC* analizowanego sklepienia kolebkowego.

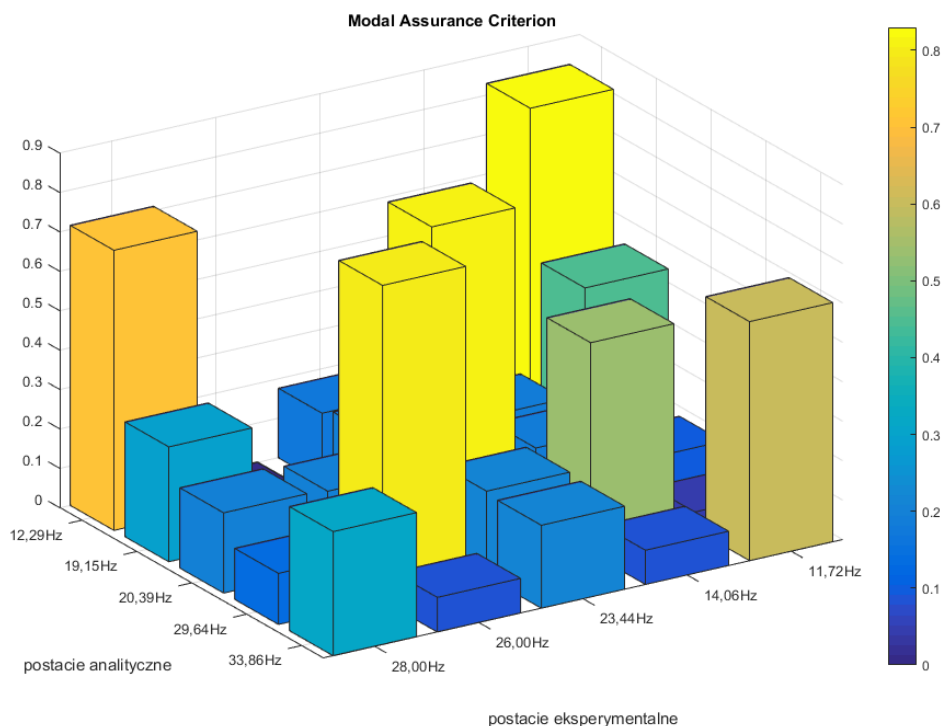
<i>MAC</i> [-]		postacie uzyskane <b>analitycznie</b> dla częstotliwości drgań własnych				
		12,29 Hz	19,15 Hz	20,39 Hz	29,64 Hz	33,86 Hz
postacie uzyskane eksperymentalnie dla częstotliwości:	11,72 Hz	<b>0,8298</b>	0,4534	0,0957	0,0439	0,6067
	14,06 Hz	0,3583	<b>0,1840</b>	0,1871	0,5339	0,0868
	23,44 Hz	0,1765	0,1958	<b>0,8086</b>	0,2175	0,2105
	25,78 Hz	0,0018	0,0001	0,1982	<b>0,8000</b>	0,0879
	28,00 Hz	0,7109	0,2914	0,2037	0,1297	<b>0,3152</b>





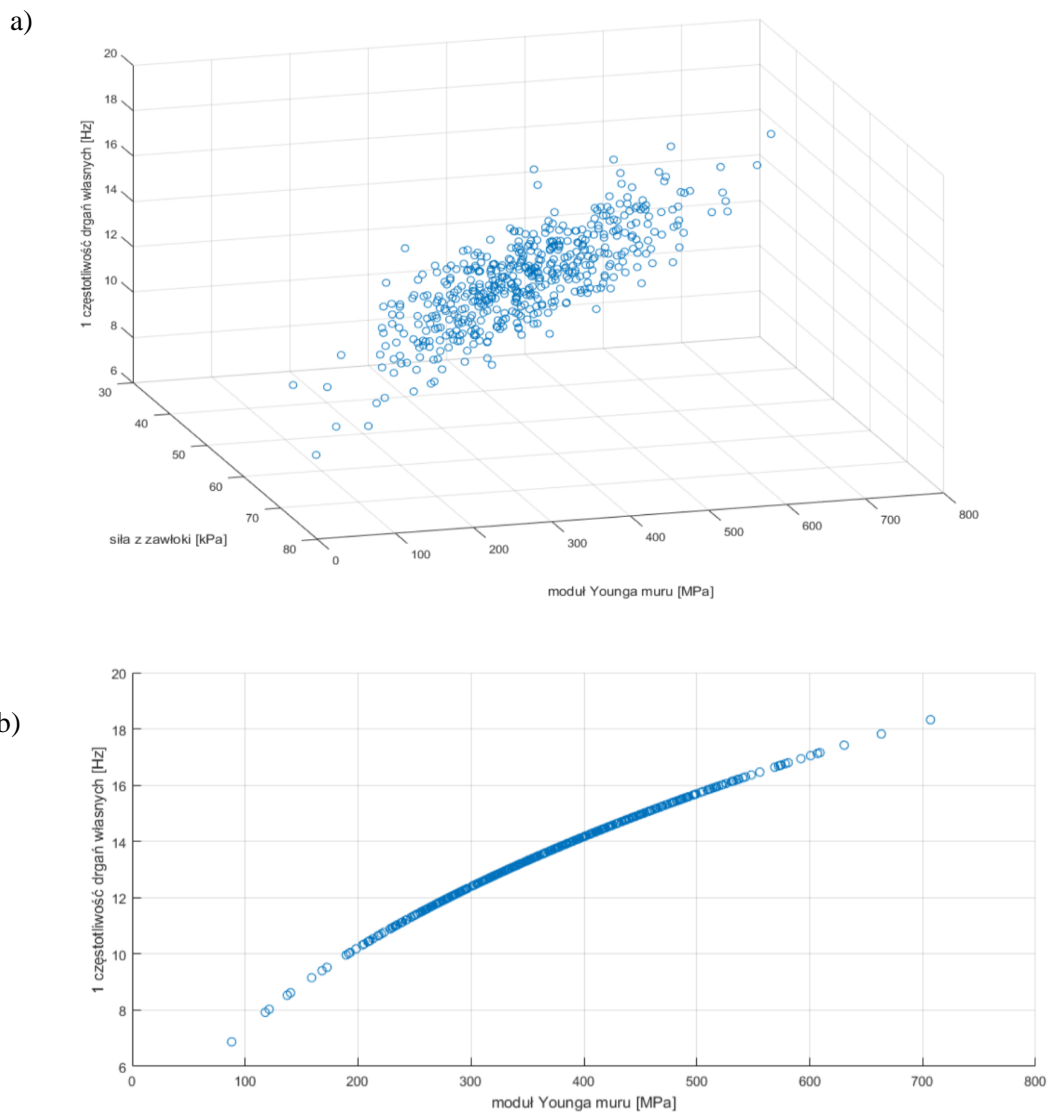
Rys. 62 Rzut wykresu MAC badanego sklepienia kolebkowego.

Zgodnie z wytycznymi przyjętymi w literaturze (Brigante, Rainieri, & Fabbrocino, 2017; Allemang, 2003; Allemang & Brown, 1982) przyjmuje się, że wartość *MAC* nie mniejsza od 0,8 świadczy o dobrej zbieżności postaci, zaś wartości poniżej 0,2 świadczą o braku zbieżności. W Tab. 16 zaznaczono na czerwono wartości *MAC* na głównej przekątnej, na której oczekiwano wyniku współczynnika *MAC* powyżej 0,8. Są to 0,184 na przecięciu drugiego wiersza i drugiej kolumny oraz 0,3152 na przecięciu piątego wiersza i piątej kolumny. Pomimo braku zbieżności tych dwóch postaci należy zauważyć, że wyznaczone eksperymentalnie 1, 3 oraz 4 postać własna są zbieżne z tymi uzyskanymi z modelu numerycznego.



Rys. 63 Wykres MAC badanego sklepienia kolebkowego w widoku aksonometrycznym

**Niepewności.** Wyniki porównania eksperymentu z obliczeniami mogą zależeć od parametrów modelu numerycznego oraz fizycznego, które są obarczone niepewnościami. W tym przypadku analizowano wyznaczony eksperymentalnie moduł Younga muru oraz siłę w ściągach. W związku z tym wykonano analizę parametryczną uwzględniającą zmienność wskazanych danych. Analizę przeprowadzono za pomocą narzędzia Dassault Systemes SIMULIA Isight. Na podstawie modelu numerycznego poszukiwano pierwszej częstotliwości drgań własnych w funkcji modułu Younga zhomogenizowanego muru oraz siły w ściągach. Podczas analizy sterowano naprężeniem przenoszonym przez zawłoki na konstrukcję sklepienia. Narzędzie Isight realizowało obliczenia numeryczne stworzonego uprzednio modelu obliczeniowego sklepienia, jednakże w każdej z tych realizacji przyjęto odmienne wartości wybranych przez użytkownika parametrów. Program losował wartości niepewnych parametrów na podstawie ich wartości średniej oraz odchylenia standardowego według zadanego rozkładu zgodnie z metodą Monte Carlo. Przy realizacji tej analizy przyjęto, że parametry te podlegają rozkładowi normalnemu<sup>9</sup>.



**Rys. 64** Wynik symulacji w Dassault Systemes SIMULIA Isight w postaci uzyskanych pierwszych częstotliwości drgań własnych sklepienia w zależności od siły w zawłoce i modułu Younga muru; a) w aksjonometrii, b) w rzucie na płaszczyznę (z zaniedbaniem siły w zawłoce).

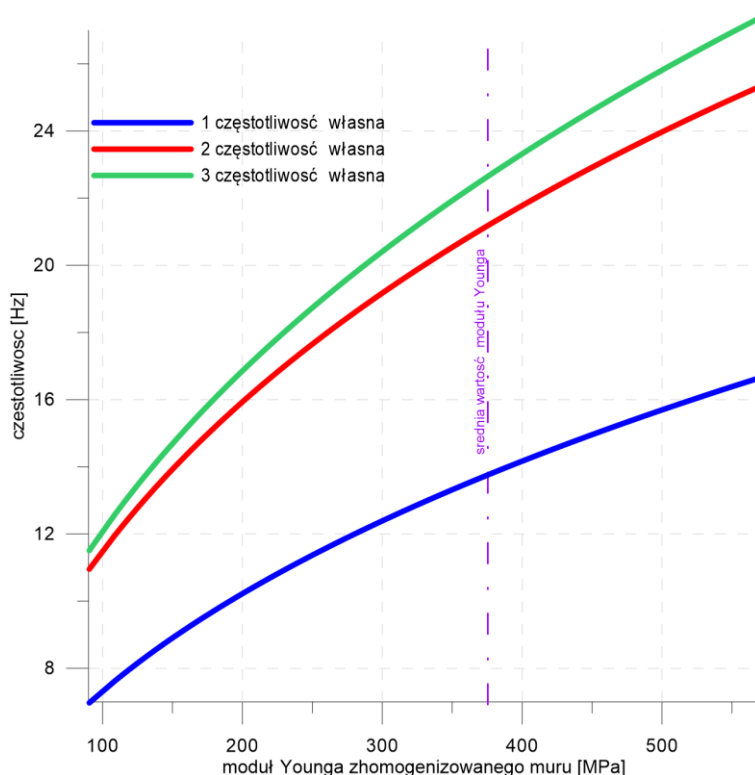
<sup>9</sup> Rozkład statystyczny stałych materiałowych komponentów muru testowano w rozdziale 5.2.1.

Wartości modułu Younga zhomogenizowanego muru wyznaczone na podstawie realizacji algorytmu homogenizacji muru dla wszystkich uzyskanych wartości parametrów wytrzymałościowych zaprawy i cegieł<sup>10</sup>. Odchylenie standardowe siły w ściągach przyjęto tak, aby w jego zakresie mieściły się wszystkie wartości uzyskane w trakcie badań. Rys. 64 przedstawia punkty odpowiadające poszczególnym realizacjom zadania dla parametrów określonych na podstawie podanego typu rozkładu, wartości średniej oraz odchylenia standardowego. W ten sposób zweryfikowano m.in. znaczenie precyzji wyznaczonego naciągu ściągów. Analiza Rys. 64 potwierdza założenie, że w zbadanym zakresie siły w ściągach (wyrażone poprzez naprężenia przenoszone z zawłok na sklepienie) nie mają wpływu na częstotliwość drgań własnych konstrukcji. Widoczne jest również, że wyniki porównania częstotliwości drgań własnych uzyskanych obliczeniowo i na drodze eksperymentalnej mogą być obarczone niepewnością związaną z wyznaczeniem wartości modułu Younga.

**Tab. 17 Zestawienie wartości średniej, odchylenia standardowego oraz współczynnika zmienności analizowanych parametrów.**

	moduł Younga zhomogenizowanego muru		ciśnienie wywierane przez zawłoki	
średnia arytmetyczna	373,876	[MPa]	58	[kPa]
odchylenie standardowe	85,571	[MPa]	2,9	[kPa]
współczynnik zmienności	0,229	[-]	0,05	[-]

Przeprowadzono również analizę parametryczną zależności pierwszych trzech częstotliwości własnych sklepienia w skali technicznej od wartości modułu Younga zhomogenizowanego muru. Wyniki tej analizy przedstawia Rys. 65.



**Rys. 65 Wynik symulacji w Dassault Systemes SIMULIA Isight w postaci wykresu trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych sklepienia w funkcji modułu Younga zhomogenizowanego muru. Zaznaczono średnią wartość modułu Younga zhomogenizowanego muru.**

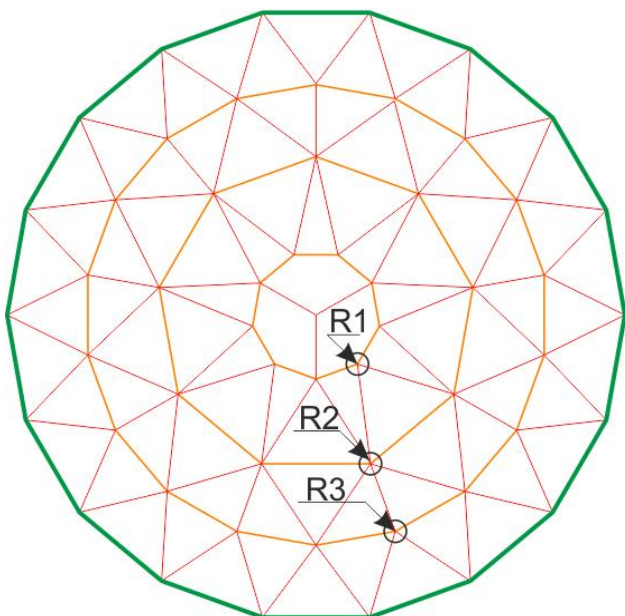
<sup>10</sup> Zastosowaną procedurę homogenizacji przedstawiono w rozdziale 4.1.2, przyjętą do obliczeń wartość średnią parametrów materiałowych zhomogenizowanego muru zestawiono w Tab. 12.

### 5.3. Badania kopuły tensegrity

W ramach części eksperymentalnej dotyczącej struktur tensegrity zbadano namiot o konstrukcji tensegrity i średnicy 14,5m.

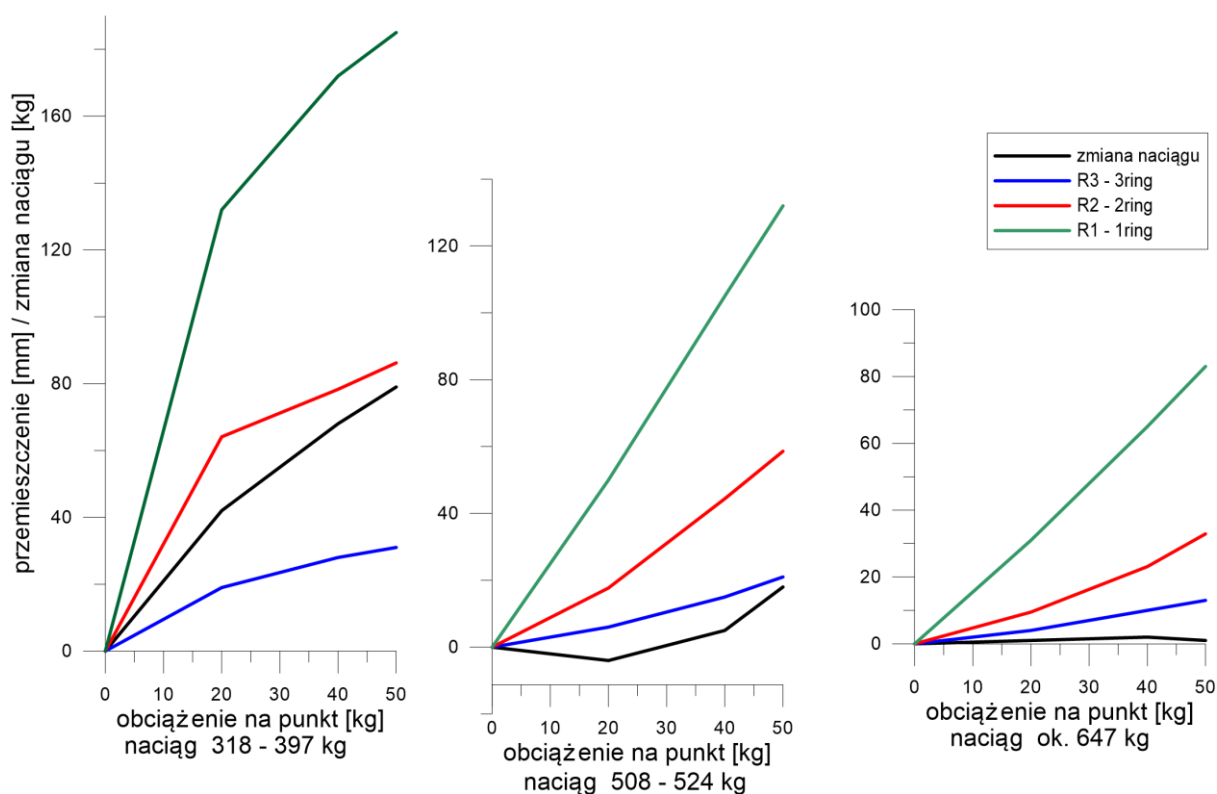
#### 5.3.1. Badania statyczne namiotów – kopuł tensegrity

Badania przeprowadzono obciążając jednocześnie dolne węzły trzech sąsiadujących prętów na kolejnych pierścieniach – obciążano punkty wskazane na Rys. 66. Rejestrowano przemieszczenia pionowe punktów obciążanych ciężarem 0, 20, 40 oraz 50 kg. Pomiar przemieszczeń z dokładnością do 1mm wykonano za pomocą dalmierzy laserowych. Obciążenie realizowano za pomocą obciążników o wadze 10kg z dokładnością do 0,1kg. Jednocześnie rejestrowano naciąg dolnego cięgna obwodowego zewnętrznego pierścienia. Naciąg rejestrowano wagą hakową firmy Hangzhou Gongheng Weighing Equipment model OCS-SL-2, o zakresie 20-2000 kg i dokładności 1 kg.



Rys. 66 Punkty przyłożenia obciążenia i rejestrowania przemieszczeń w badaniu statycznym namiotu o powierzchni 160 m<sup>2</sup>.

Naciąg zewnętrznego, dolnego cięgna obwodowego jest kluczowym parametrem konstrukcji ponieważ wpływa on zarówno na położenie jak i na podatność górnych węzłów prętów zewnętrznego pierścienia (na których opiera się wewnętrzna część konstrukcji). Ponadto naprężenie tego cięgna jest przyjętą metodą wypiętrzania i usztywniania kopuły badanego namiotu. Zewnętrzne, dolne cięgno obwodowe w normalnych warunkach jest naciągane aż do osiągnięcia wcześniej ustalonej długości, przy której naprężenia w cięgnie wynoszą około 5 kN. Badania przeprowadzono dla trzech wartości naciągu początkowego: 318, 508 oraz 647 kg. Z uwagi na technologię naciągania cięgna, za pomocą ręcznej wyciągarki łańcuchowej o skokowej (nieciągłej) zmianie długości, niemożliwe było swobodne ustalenie wartości naciągu początkowego. Zanedbano kontrolę naciągu pozostałych cięgien obwodowych z uwagi na ich mniejsze znaczenie dla sztywności całej konstrukcji.



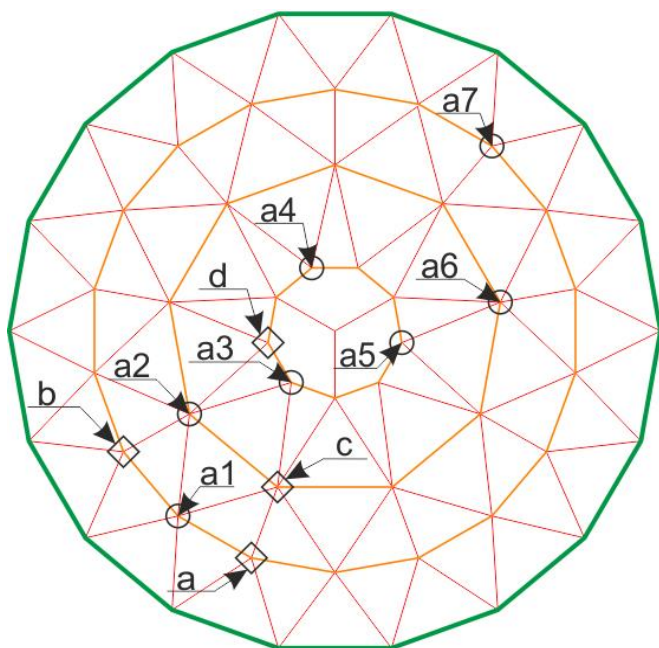
Rys. 67 Wykresy przemieszczeń punktów kopuły w zależności od początkowego naciągu ciągną

Przemieszczeń badanych punktów oraz zarejestrowaną zmianę naciągu w ciągnie obwodowym przedstawia Rys. 67. Porównanie wykresów pozwala zauważyć, że przemieszczenia punktów pomiarowych maleją przy rosnącym naciągu ciągną obwodowego. W przypadku początkowego naciągu wynoszącego 318 kg można zauważyć nieliniowe zachowanie zarówno w zakresie przemieszczeń jak i zmian naciągu. Jest to związane z mniejszą sztywnością konstrukcji – wyraźnie nieliniowe zachowanie występuje przy niższej wartości obciążenia. Zmniejszenie naciągu ciągną obwodowego przy wstępnym naciągu wynoszącym 508 kg (i obciążeniu wynoszącym 20 kg na punkt) wynika z ułożenia się elementów konstrukcji (ciągien, szekli i węzłów prętów). Konstrukcja, w której ciągną obwodowe naciągnięte jest z siłą 647 kg, wykazuje najmniej nieliniowe zachowanie oraz najmniej wpływ obciążenia na wartość siły w ciągnie obwodowym.

### 5.3.2. Badania dynamiczne namiotów – kopuł tensegrity

Analizowaną konstrukcję tensegrity wzbudzano do drgań przez przemieszczenie i zwolnienie prętów opisanych na Rys. 68 jako *a*, *b*, *c* i *d* oraz zaznaczonych rombami. Wzbudzenie w każdym z 4 punktów powtarzano przy naciągu ciągną obwodowego wynoszącym 317, 450 oraz 685 kg. Łącznie przeprowadzono więc 12 pomiarów. Do rejestracji odpowiedzi konstrukcji wykorzystano akcelerometry i mostek tensometryczny z 8 kanałami. Rejestrowano przyspieszenia pionowe dolnych węzłów prętów tensegrity w 7 punktach akcelerometrami jednoosiowymi. Zastosowano akcelerometry typu MEMS używające do pomiaru przyspieszenia kondensatorów różnicowych. Użyto akcelerometrów o zakresie rejestracji przyspieszeń od  $\pm 2$  do  $\pm 6$  g. Akcelerometry zostały zamocowane przy dolnych węzłach prętów w sposób pokazany na Rys. 68. Akcelerometry, oprócz połączenia magnetycznego ze śrubą oczkową, tworzącą dolny węzeł pręta, mocowano

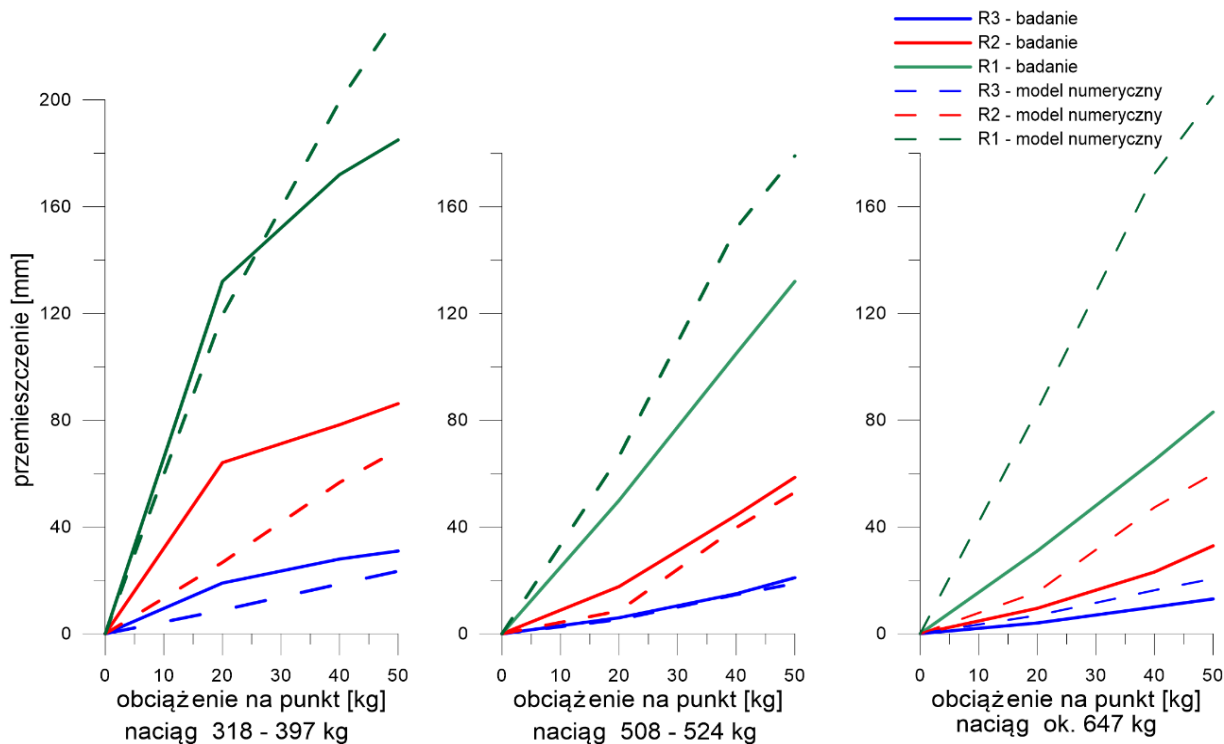
opaskami zaciskowymi do prętów. Pomiarów dokonano wzmacniaczem Quantum 840 firmy HBM. Oprócz przyspieszeń w punktach pomiarowych a1-a8 rejestrowano również przemieszczenia w punkcie a3.



Rys. 68 Punkty wzbudzenia oraz rejestrowania przyspieszeń w badaniu dynamicznym namiotu o powierzchni 160 m<sup>2</sup>.

### 5.3.3. Analizy numeryczne oraz porównanie z wynikami eksperymentalnymi

#### Badania statyczne namiotów typu tensegrity.



Rys. 69 Przemieszczenia wybranych punktów konstrukcji tensegrity – porównanie wyników badania oraz analiz numerycznych.

Modele namiotów tensegrity sporządzono z wykorzystaniem programu (SOFiSTiK, 2018). Materiały oraz przekroje zdefiniowano korzystając z dedykowanych poleceń w module AQUA. Pręty struktury

tensegrity zdefiniowano jako przestrzenne elementy kratowe o 1 stopniu swobody w węźle; ciągną tensegrity jako kable o 1 stopniu swobody w węźle, ramę obwodową oraz podtrzymujące ją słupy jako belki o 6 stopniach swobody w węźle. Ponadto, w celu stabilizacji obliczeń numerycznych, konieczne było zdefiniowanie podpór sprężystych o bardzo niskiej (infinitesimalnej) sprężystości ( $k = 0,0001 \text{ kN/m}$ ) w węzłach struktury tensegrity. Reakcje w tych węzłach są bardzo niskie (rzędu  $10^{-7} \text{ kN}$ ) uznano więc, że ich wpływ na wyniki uzyskane z analizy tego modelu jest pomijalny. Model konstrukcji bez infinitesimalnych podpór sprężystych powoduje niestabilność rozwiązania – generowana jest osobliwa macierz sztywności.

**Tab. 18** Błąd względny numerycznie wyznaczonych przemieszczeń punktów R1, R2 oraz R3; obciążenie punktów po 50 kg.

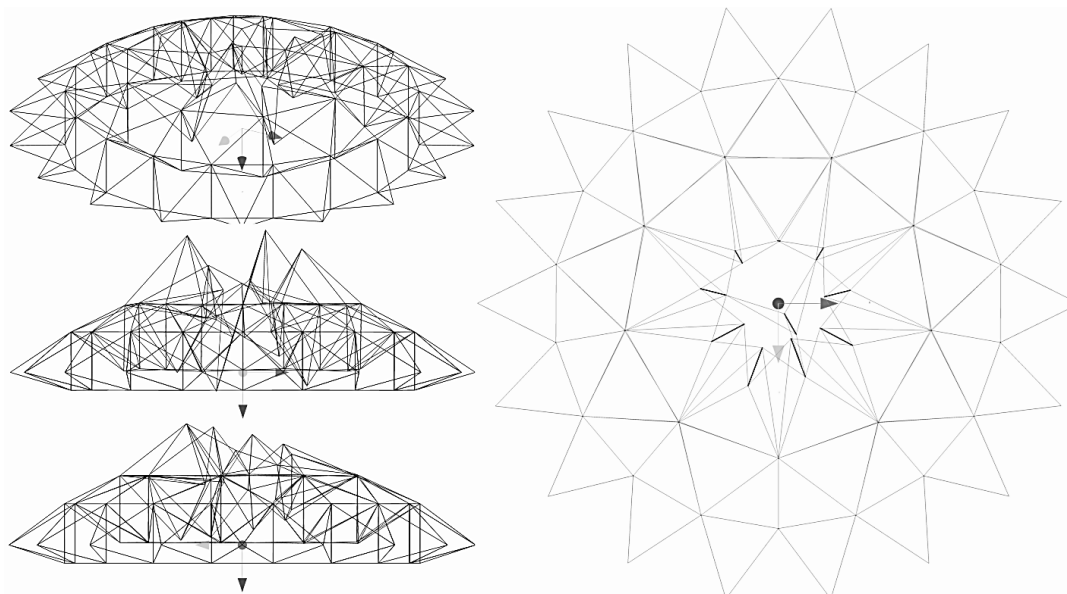
obciążenie 50kg naciąg [kg]	$\delta$ – błąd przemieszczenia punktów		
	R3	R2	R1
318-397	24,4%	20,1%	25,4%
<b>508-524</b>	<b>1,9%</b>	<b>2,0%</b>	52,6%
ok.647	44,8%	61,1%	115,7%

Rys. 69 zestawia wyniki badania namiotu imprezowego prezentowanego wcześniej z przemieszczeniami badanych punktów uzyskanymi w analizach modeli numerycznych. Tab. 18 zestawia wartości błędu względnego pomiędzy wartościami przemieszczeń punktów R1, R2 oraz R3 wyznaczonymi numerycznie oraz eksperymentalnie (usytuowanie punktów R1, R2 oraz R3 zaprezentowano na Rys. 66). Tylko błąd względny przemieszczeń w punktach na dwóch zewnętrznych pierścieniach przy naciągu wstępnym ok. 500 kg ma wartości poniżej 10% (ok. 2%). Wynika to ze skalibrowania modelu numerycznego względem wstępnego naciągu około 500 kg oraz braku kontroli rzeczywistego naciągu cięgien obwodowych w wewnętrznych pierścieniach struktury tensegrity. Błąd względny  $\delta$  wyznaczono ze wzoru (5.22), jako wartość dokładną przyjmując przemieszczenie punktów zmierzone w trakcie eksperymentu:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} = \frac{|x - x_0|}{x} \quad (5.22)$$

gdzie:  $\delta$  – błąd względny;  $\Delta x$  – błąd bezwzględny;  $x$  – wartość dokładna (rzeczywista), tu jako  $x$  przyjęto wyniki pomiarów eksperymentalnych;  $x_0$  – wartość oszacowana numerycznie.

## Badania dynamiczne namiotów typu tensegrity.



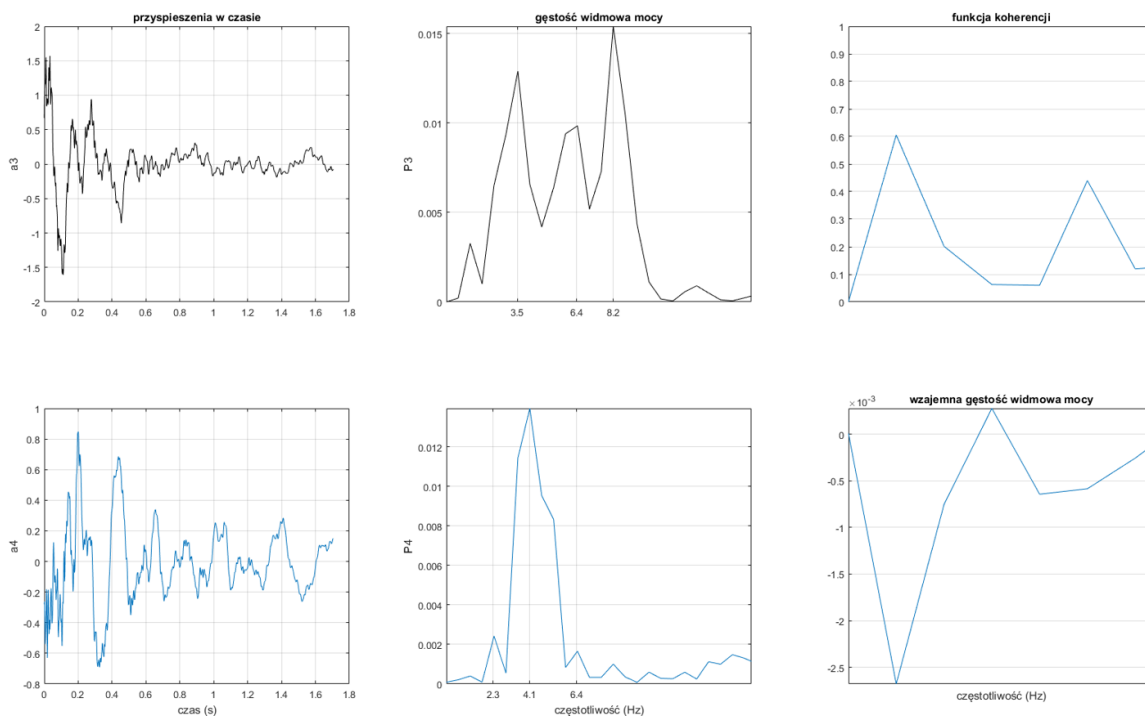
Rys. 70 Pierwsza postać drgań własnych uzyskana w modelu numerycznym;  $f_1=2,96$  Hz (naciąg zewnętrznego cięgna obwodowego 500 kg).

Postacie oraz częstotliwości drgań własnych namiotu tensegrity uzyskano numerycznie w wyniku analizy modalnej modelu przedstawionego na Rys. 70. Obliczenia przeprowadzono dla wszystkich badanych wartości naciągu zewnętrznego dolnego cięgna obwodowego.

Sygnały przyspieszeń w funkcji czasu konstrukcji tensegrity zapisano i przetworzono zgodnie z algorytmami zastosowanymi uprzednio dla sklepienia ceglano w rozdziale 6.2.2, a wprowadzonymi oraz opisanymi w rozdziale 6.1. Skrypty wykonujące te zadania zostały opracowane w środowisku MATLAB (MathWorks, 2016). Każdy z rysunków (Rys. 71 i 72) zawiera 6 wykresów. Wykresy a) oraz b) prezentują funkcję przyspieszeń w czasie dwóch różnych punktów. Numery punktów zgodne są z oznaczeniem na Rys. 68. Wykresy c) oraz d) to gęstości widmowe mocy w funkcji częstotliwości  $P_i(f)$  dla tej samej pary punktów. Widmo mocy wyznaczono korzystając z Szybkiej Transformacji Fouriera (FFT) opisanej w rozdziale 5.1.1. Wykres e) to funkcja koherencji zaś f) to wykres wzajemnej gęstości widmowej mocy pary analizowanych sygnałów, oba wykresy w funkcji częstotliwości. Opis funkcji koherencji wz. (5.13) oraz wzajemnej gęstości widmowej mocy wz. (5.12) znajduje się w rozdziale 5.1.2.

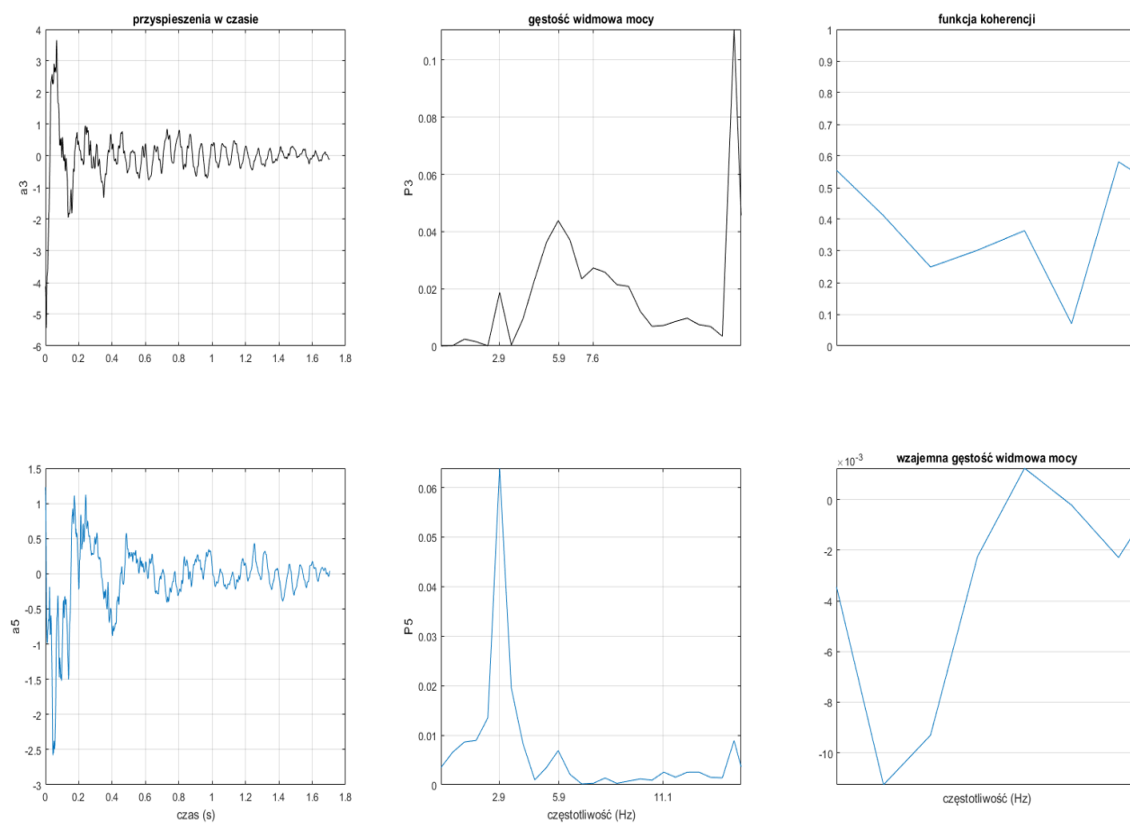
Rys. 70 prezentuje pierwszą postać drgań własnych namiotu tensegrity. Na rysunku, widać wzburzone głównie elementy wewnętrznego pierścienia. Elementy te, mające najmniejszy naciąg początkowy, najłatwiej ulegają wzbudzeniu.





**Rys. 71** Wynik wzbudzenia w punkcie *a*, zarejestrowany w punktach 3 i 4. Przyspieszenia w funkcji czasu, gęstość widmowa mocy w funkcji częstotliwości; funkcja koherencji oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.

Rys. 71 oraz Rys. 72 zestawiają przyspieszenia w funkcji czasu oraz gęstość widmową mocy w funkcji przyspieszenia wykreślone na podstawie danych zarejestrowanych w dwóch parach punktów (a3-a4 oraz a3-a5). Są to pary punktów położone na wewnętrznym (pierwszym) pierścieniu.



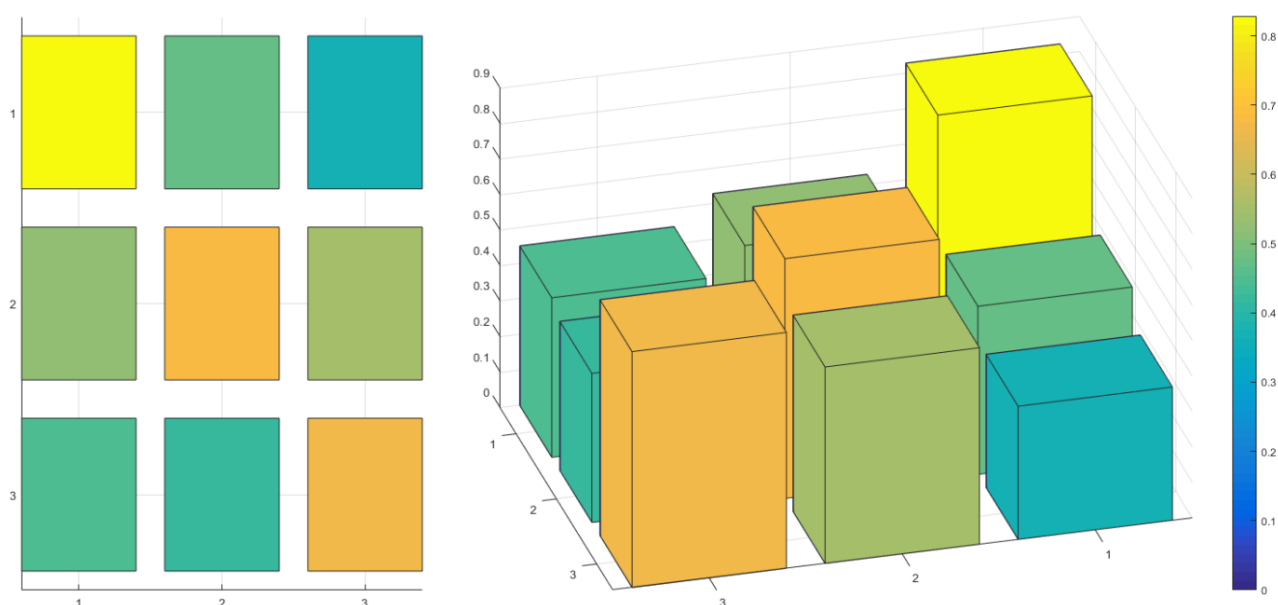
**Rys. 72** Wynik wzbudzenia w punkcie *d*, zarejestrowany w punktach 3 i 5. Przyspieszenia w funkcji czasu, gęstość widmowa mocy w funkcji częstotliwości oraz funkcja koherencji i wzajemna gęstość widmowa mocy.

Wyniki te są zbliżone do postaci drgań własnych obliczonych numerycznie. Pierwsza postać drgań własnych (Rys. 70) związana jest ze wzbudzeniem pierwszego, wewnętrznego pierścienia struktury tensegrity. Wysoka amplituda drgań elementów pierwszego pierścienia konstrukcji jest prawdopodobnie związana z najniższym naciągiem wstępnym elementów tego pierścienia – stąd jest to część struktury, której drgania najłatwiej wzbudzić.

Tab. 19 Modal Assurance Criterion wektorów drgań własnych uzyskanych w eksperymencie oraz w modelu numerycznym.

MAC			wektory własne		
			uzyskane eksperymentalnie		
			1	2	3
			2,34 Hz	3,516 Hz	8,50 Hz
wektory własne uzyskane analitycznie	1	2,96 Hz	<b>0,829</b>	0,474	0,375
	2	3,03 Hz	0,529	<b>0,675</b>	0,554
	3	6,05 Hz	0,450	0,420	<b>0,665</b>

Rys. 73 oraz Tab. 19 prezentują MAC (Modal Assurance Criterion) postaci drgań własnych uzyskanych eksperymentalnie oraz w wyniku analiz numerycznych. Dobrą koherencję postaci drgań własnych (wg (Allemang, 2003)) udało się uzyskać tylko dla pierwszej częstotliwości drgań własnych. Wartości parametru MAC związane z drugą oraz trzecią postacią drgań własnych nie wskazują na dobrą koherencję wyników eksperymentalnych i numerycznych (0,675 oraz 0,665 – obie wartości poniżej powszechnie przyjętego progu 0,8). Warto jednak zauważyć, że wartości te przewyższają jakiegokolwiek wartości parametru MAC poza główną przekątną, wykazują więc lepszą (choć nie dostateczną wg powszechnie przyjętych w literaturze kryteriów) zbieżność niż postaci poza diagonalą.



Rys. 73 Modal Assurance Criterion MAC dla wektorów drgań własnych uzyskanych w eksperymencie oraz w modelu numerycznym.

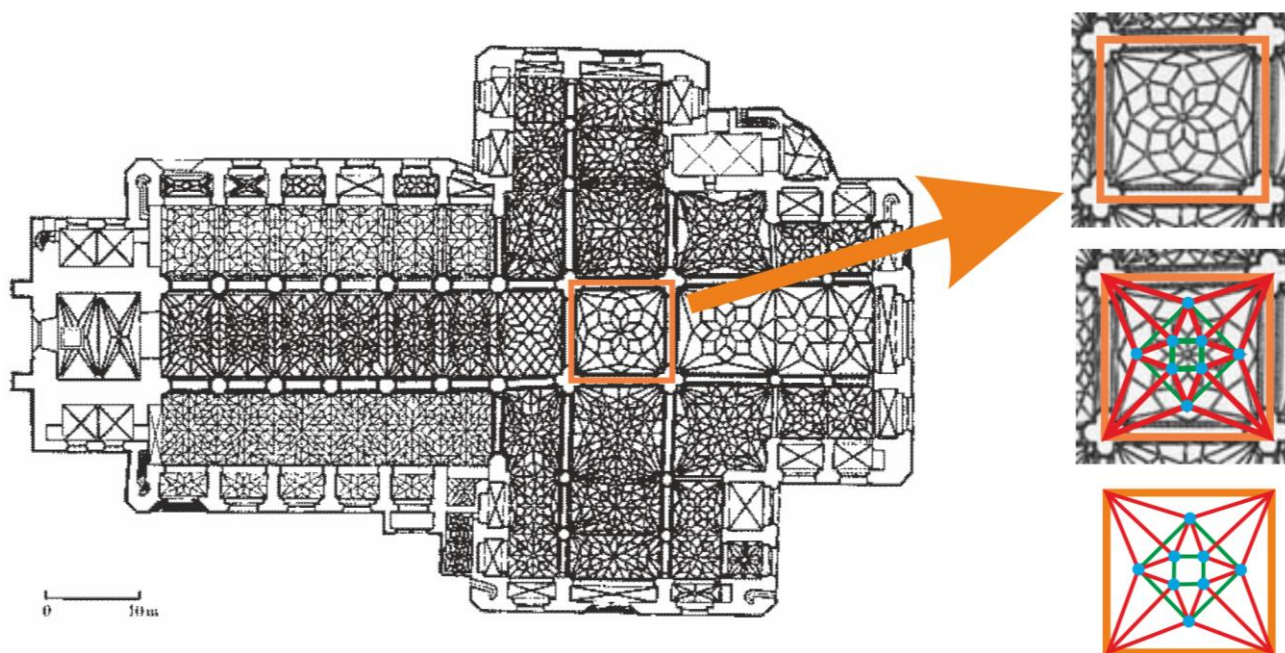
Jak wcześniej wskazano – model numeryczny jest skalibrowany względem wstępnego naciągu, w którym konstrukcja rzeczywiście pracuje, a wartości przemieszczeń uzyskane dla tych warunków wykazują dobrą zgodność z wartościami uzyskanymi eksperymentalnie (błąd względny  $\delta \approx 2\%$ ).

Częstotliwości oraz postaci drgań własnych istotnie odbiegają od tych uzyskanych w eksperymencie. W opinii autora jest to spowodowane kontrolą naciągu niewielkiej liczby cięgien – skalibrowanie modelu powinno przynieść znaczącą poprawę zgodności wyników. Należy tu jednak zauważyć, że współczynnik Modal Assurance Criterion dla pierwszej postaci własnej jest wystarczająco wysoki (0,83), aby mówić o dobrej zgodności postaci drgań własnych uzyskanych eksperymentalnie oraz numerycznie.

## 6. PROPOZYCJA SYSTEMU WZMACNIANIA SKLEPIEŃ CEGLANYCH KRATOWNICAMI TENSEGRITY

Koncepcja wzmocnienia historycznych sklepień ceglanych kratownicami tensegrity powstała jako naturalne połączenie zainteresowań badawczych autora zaprezentowanych w poprzednich rozdziałach. Zwłaszcza prezentowana w Załączniku 1 metoda obliczania wzmocnienia sklepień, w której myślowo traktuje się układ sklepienia z materiałem kompozytowym jako układ tensegrity (odpowiednio: pręty-ciężna) doprowadziła do opracowania koncepcji wzmocnienia sklepienia strukturami tensegrity. Celem prezentowanej poniżej analizy jest zaproponowanie nowego sposobu wzmocnienia konstrukcji sklepień.

Badacze murowych konstrukcji gotyckich, wskazują że są to w istocie lekkie konstrukcje składające się z „żebrowych sklepień podpartych na wysokich filarach, wspartych z boku (...) przez łuki przyporowe” (Sieczkowski & Szołomicki, 1999), w konstrukcji tej „filary i żebra połączone z przyporami odgrywały ważną rolę konstrukcyjną, podczas gdy ściany i wysklepki stanowiły wypełnienie” (Sieczkowski & Szołomicki, 1999). Również (Heyman, 1995) wskazuje kluczową rolę żeber sklepiennych. Jednocześnie jako pewien wyjątek (Heyman, 1995) wskazuje żebra w kopule Bazyliki św. Piotra na Watykanie autorstwa Michała Anioła, które „nie są konstrukcyjnie efektywne” i „nie przejmują obciążeń”<sup>11</sup> ze sklepienia.



Rys. 74 Propozycja wzmocnienia tensegrity na przykładzie sklepienia na skrzyżowaniu naw kościoła NMP w Gdańsku (czerwone – ciężna "radialne", zielone – ciężna "obwodowe", niebieskie – pręty pionowe)

<sup>11</sup> „By contrast with Brunelleschi's dome, the sixteen ribs of Michelangelo's dome of St Peter's are applied to a smoothly turning shell of revolution; the ribs do not collect forces, and are not structurally effective, although they define visually the surface of the dome.” (Heyman, 1995) (str. 47)

Wzmocnienie sklepień kratownicą tensegrity odbywać się może poprzez umieszczenie pionowych prętów pod zwornikami bocznymi i, ewentualnie, pod zwornikiem centralnym (czyli pod punktami przecięcia żeber sklepiennych). Dzięki temu uzyskuje się strukturę nawiązującą lub wręcz powtarzającą w swoim rzucie rzut wzmocnianego sklepienia (patrz Rys. 74). Ponadto podparcie sklepienia kratownicą tensegrity odbywa się w najmocniejszych (pogrubionych) punktach wzmocnianego obiektu. Wykorzystywane są istniejące już wzmocnienia sklepienia liniami żeber (wykonanych niejednokrotnie ze specjalnie przygotowanych kształtek), zaś węższe wysklepki wypełniające obszary pomiędzy żebrami nie są bezpośrednio podpierane.

W trakcie montażu wzmocnienia tensegrity konieczna jest ciągła, bieżąca kontrola przemieszczeń kluczowych punktów sklepienia, np. z zastosowaniem technik proponowanych w (Turoń, Ziaja, & Miller, 2017). Przy braku zachowania tego wymogu istnieje niebezpieczeństwo uszkodzenia sklepienia poprzez wypchnięcie sklepienia do góry w trakcie montażu.

Przy odpowiednim ograniczeniu naciągu i średnicy cięgien oraz przekroju poprzecznego prętów wzmocnienie tensegrity jest podatne. Dzięki temu nie usztywnia nadmiernie konstrukcji sklepienia, co jak wskazują m.in. (Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007; Masłowski & Spizewska, 2000) byłoby niekorzystne dla konstrukcji sklepienia.

Z uwagi na konieczność napinania konstrukcji tensegrity i możliwość regulacji geometrii naciągiem cięgien ten system wzmocniania znakomicie nadaje się do prac interwencyjnych lub tymczasowego zabezpieczenia uszkodzonych sklepień. Napinanie wzmocnienia tensegrity umożliwia przywrócenie oryginalnej geometrii spękanego sklepienia na czas prac związanych np. z przeprowadzeniem wzmocnienia sklepienia materiałami kompozytowymi po jego stronie grzbietowej. Metoda wzmocniania sklepień materiałami kompozytowymi po stronie grzbietowej jest szeroko rozpowszechnioną metodą o dowiedzionej skuteczności na co wskazują m.in. badania opisane przez (Bertolesi et al., 2018; Fraternali et al., 2015; Milani & Bucci, 2010; Bednarz, 2003; Saadatmanesh, 1997). W swojej książce (Masłowski & Spizewska, 2000) prezentują możliwość wypierania remontowanego sklepienia do góry za pomocą drewnianych krążyn; struktura tensegrity w proponowanej postaci mogłaby pełnić rolę takiej wypychającej krążyny. Ponadto dolne punkty prętów tensegrity można wykorzystać jako punkty montażu powłok zabezpieczających wewnątrz przed spadającymi fragmentami tynku lub luźnymi cegłami w czasie prac naprawczych lub interwencyjnych. Umożliwia to wykorzystywanie przestrzeni przekrytej remontowanymi lub wzmocnianymi sklepieniami lub co najmniej ułatwia zabezpieczenie obiektów (np. historycznych ołtarzy lub dzieł sztuki) zgromadzonych w tej przestrzeni.

Zaproponowany sposób wzmocniania sklepień może przejmować również rozpór wywołany przez sklepienie, zazwyczaj przenoszony w historycznych budowlach przez system przypór i ściągów. Struktura tensegrity umożliwia więc naprawę lub wymianę zainstalowanych wcześniej ściągów, a zastosowana na stałe może je zastąpić.

Sklepienia ceglane wzniesione z drobnowymiarowych elementów zrobionych z kruchych materiałów nie powinny być podpierane punktowo (Kołodziejczak, Gołębiewski, & Rucka, 2013; Szymczak et al., 2004; Masłowski & Spiżewska, 2000). Z uwagi na powyższe podparcie sklepienia ceglanego systemem tensegrity w nieprzemyślany sposób może być niekorzystne. Może bowiem grozić wybiciem otworu w miejscu podparcia sklepienia. Ponadto w takim schemacie zniszczenia uszkodzonym elementem byłby zwornik. W tej sytuacji zniszczeniu mogłyby ulec kaskadowo żebra dochodzące do wybitego zwornika (które straciłyby punkt, w którym wypadkowe sił z żeber równoważą się), kolejne mogłyby być przylegające wysklepki, a potencjalnie znaczny fragment lub nawet całe sklepienie (Masłowski & Spiżewska, 2000; Sieczkowski & Szołomicki, 1999). Konieczna zatem jest pieczołowita analiza każdego punktu podparcia zwornika uwzględniająca konsekwencje potencjalnej awarii. Aby zabezpieczyć sklepienie przed wystąpieniem tego mechanizmu zniszczenia prezentowany tu system wzmacniania strukturami tensegrity może zostać uzupełniony poprzez zastosowanie mat kompozytowych po stronie grzbietowej sklepienia w miejscach podparcia zwornika przez pręt. Stosowanie materiałów kompozytowych, jak maty i taśmy, znajduje szerokie uzasadnienie w literaturze (Fraternali et al., 2015; Janowski, Hojdys, & Krajewski, 2007) i jest powszechnie przyjętą praktyką. Rys. 75 przedstawia schematycznie zwornik sklepienia ceglanego podpartego prętem tensegrity – materiały kompozytowe ułożone po grzbietowej stronie sklepienia..



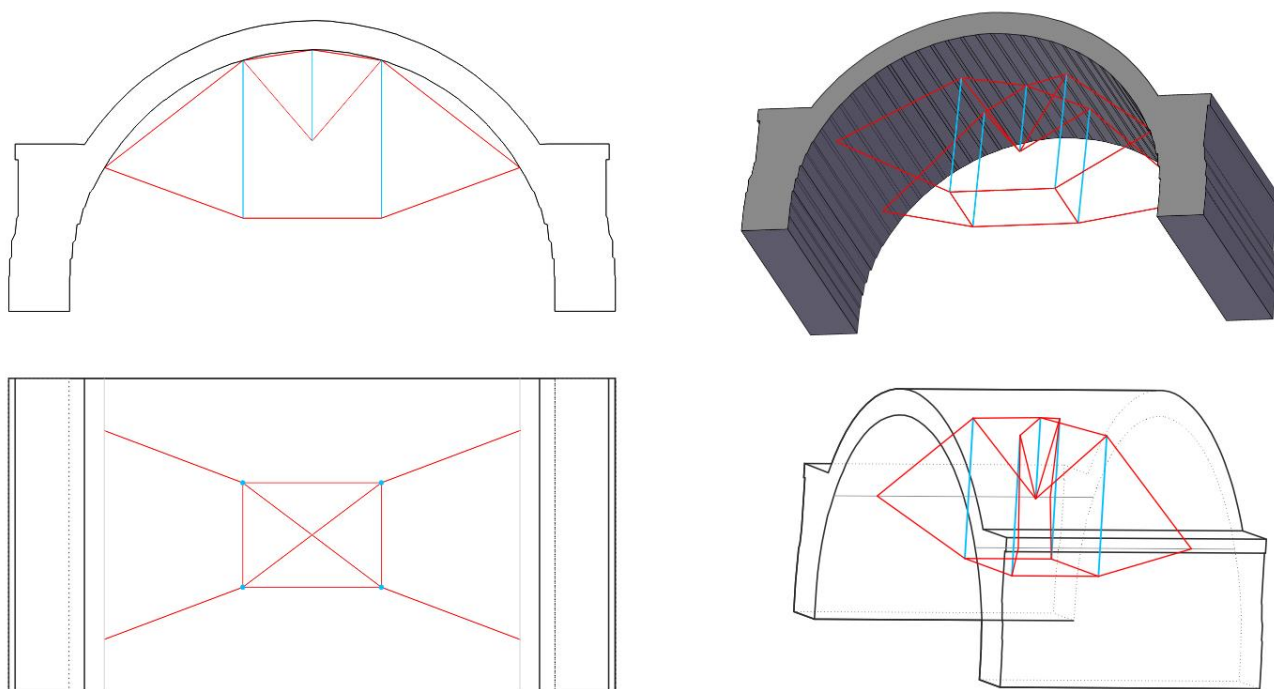
**Rys. 75 Schemat węzła pręt tensegrity – zwornik, w aksonometrii i przekroju, z zaznaczonym proponowanym wzmocnieniem matą kompozytową (Bednarz, 2003).**

Innym sposobem zapobieżenia negatywnym skutkom punktowego podparcia zworników jest zastosowanie rusztu przestrzennego umieszczonego pomiędzy żebrami sklepienia a wzmacniającą je strukturą. Ruszt ten mógłby być wydrukowany z tworzyw sztucznych tak aby odpowiadał kształtowi żeber uzyskanemu ze skaningu trójwymiarowego. Szereg prac, w tym m.in. (Zuo et al., 2019; Andreotti, Liberatore, & Sorrentino, 2014; Lubowiecka et al., 2009), dowodzi możliwości stosowania zarówno trójwymiarowych skanerów laserowych jak i wydruków 3D w budownictwie i analizie konstrukcji. Tak przygotowany ruszt rozkładałby punktowe podparcie sklepienia na podparcie liniowe żeber. Obie te koncepcje wymagają jednak dalszych badań.

## 6.1. Zastosowanie zaproponowanego systemu wzmocnienia do sklepienia kolebkowego.

Badania doświadczalne sklepienia kolebkowego w skali technicznej obciążonego statycznie ze wzmocnieniem tensegrity oraz bez niego przeprowadzono na obiekcie wzniesionym dla potrzeb niniejszej pracy. Zdecydowano się na obciążenie liniowe w 1/3 rozpiętości sklepienia ze względu na możliwości techniczne oraz powszechność tego sposobu badań sklepień kolebkowych m.in. (Corradi et al., 2015; Bednarz et al., 2011). Także (Garmendia et al., 2015) obciąża sklepienie kolebkowe nie w kluczu lecz w 0,25 rozpiętości. Sklepienie obciążano za pośrednictwem dwóch siłomierzy firmy HBM rejestrujących siły z dokładnością do 1 kg. Obciążenie było przenoszone na sklepienie przez dwuteownik szerokostopowy HEB100 umieszczony na wylewce poziomującej (patrz Rys. 78). Przemieszczenia rejestrowano w 5 punktach równomiernie rozłożonych wzdłuż podłużnej osi symetrii sklepienia, w tym na trawersie oraz w kluczu sklepienia (w punkcie centralnym). Pomiarów przemieszczeń dokonano czujnikami laserowymi firmy Wobit oraz indukcyjnymi firmy Peltron, pomiary rejestrowano wzmacniaczem Quantum 840 firmy HBM.

Schemat koncepcji badanego wzmocnienia tensegrity oraz jego realizację i badania przedstawiają Rys. 76, Rys. 77 oraz Rys. 78.



Rys. 76 Wzmocnienie sklepienia w skali technicznej; odcinki czerwone – cięgna, niebieskie – pręty

Wzmocnienie tensegrity wykonano z lin stalowych, ocynkowanych ogniowo, o średnicy nominalnej 3 mm; są to liny na rdzeniu włókiennym z włókien syntetycznych (polipropylenowych: SFC-PP) o splocie 6x7, zgodne z (DIN 3055, 1972). Liny zakończono pętlami na kauszach i zaciśnięto tulejami aluminiowymi zgodnie z (PN-EN 13411-3, 2009). Jako pręty zastosowano rury okrągłe RO 14x2, każdy zakończony śrubą oczkową zgodną z (DIN 580, 2010). Węzły wykonano za pomocą szekli normalnych lub szekli wzmocnionych klasy 6 łączących liny stalowe z prętami jak przedstawiono na Rys. 77.



Rys. 77 Pręt wzmocnienia tensegrity z widoczną konstrukcją węzłów.

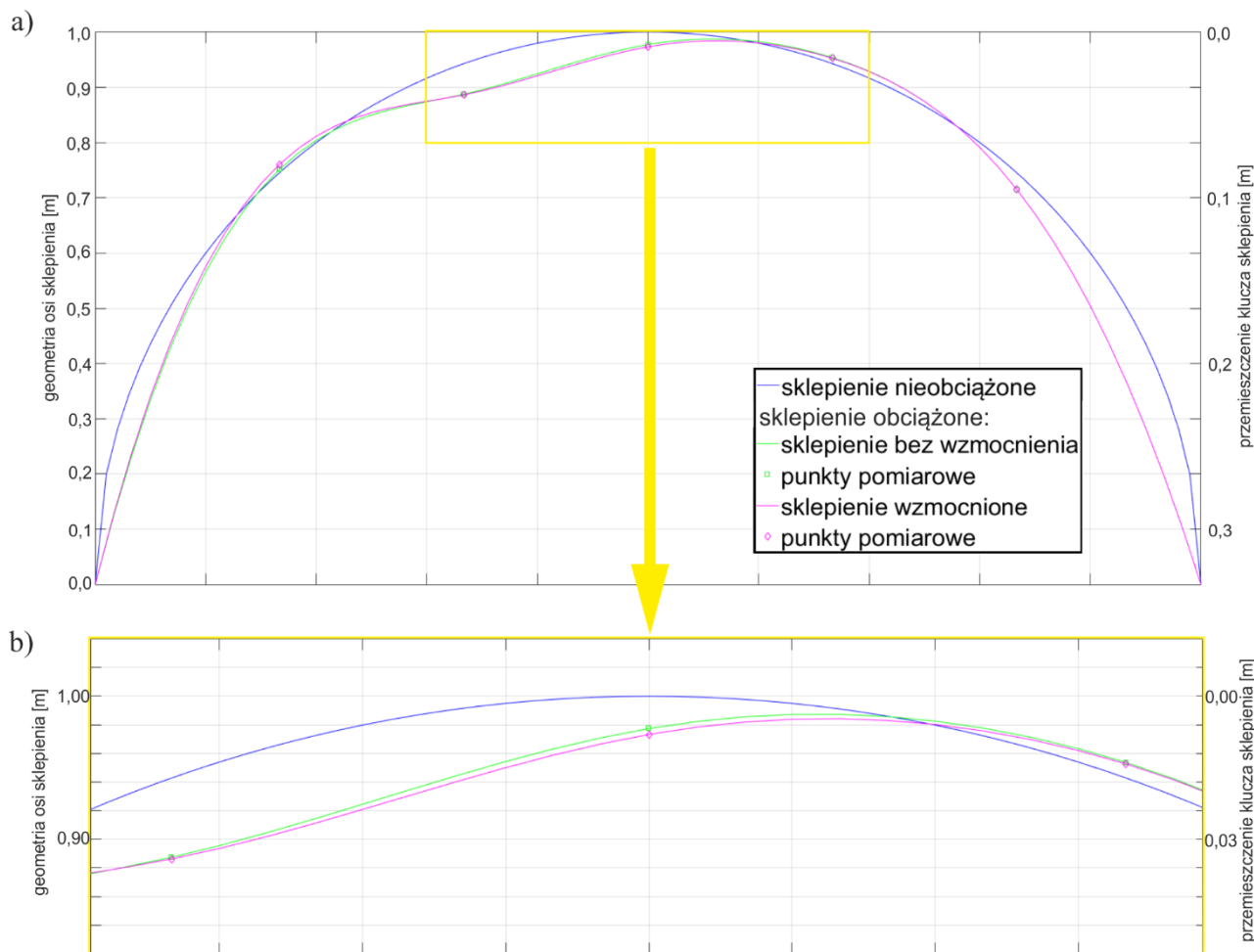
Obciążano sklepienie bez wzmocnienia oraz sklepienie wzmocnione strukturą tensegrity prezentowaną na Rys. 76 oraz Rys. 78. Na podstawie wstępnych symulacji numerycznych przyjęto wartość obciążenia po 400 kg na każdy z siłowników (w sumie 800 kg  $\approx$  7,85 kN) jako bezpieczną wartość obciążenia umożliwiającą zarejestrowanie w wybranych punktach znacznych przemieszczeń a jednocześnie nie stwarzającą niebezpieczeństwa awarii sklepienia.



Rys. 78 Badane sklepienie w skali technicznej (zdjęcie oraz zdjęcie z uwidocznionym schematem kratownicy tensegrity).



Wyniki eksperymentu zaprezentowano w postaci graficznej na Rys. 79 (dla jasności przedstawienia zastosowano 3-krotne zwiększenie wartości przemieszczeń na wykresie oraz przybliżenie postaci przemieszczonego sklepienia za pomocą interpolacji funkcją sklejaną drugiego rzędu – *cubic spline* (de Boor, 2001), wykres opracowano w środowisku MATLAB (MathWorks, 2016)) oraz w Tab. 20.



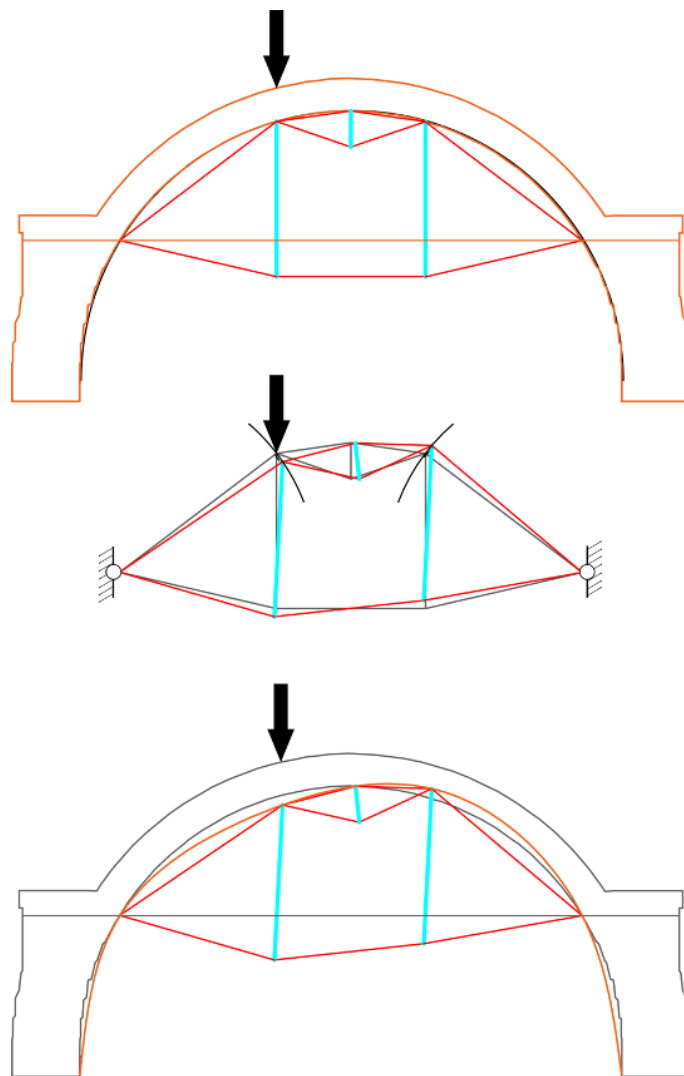
Rys. 79 Szkic przybliżonej postaci badanego sklepienia (wartości przemieszczeń zwiększono 3 krotnie): a) całe sklepienie, b) powiększenie klucza sklepienia.

Wyniki eksperymentu wskazują na znaczący wpływ wzmocnienia tensegrity (do 39%) na przemieszczenia sklepienia. Niestety struktura tensegrity w tej postaci powoduje zwiększenie przemieszczeń (patrz Tab. 20). W Tab. 20 przemieszczenia punktów w dół podano jako dodatnie, w górę jako ujemne. Rekonstrukcję schematu działania sklepienia ceglano ze wzmocnieniem tensegrity przedstawiono na Rys. 80.

Tab. 20 Wartości przemieszczeń punktów pomiarowych zarejestrowanych dla sklepienia bez wzmocnienia i wzmocnionego.

wyniki eksperymentu	przemieszczenia [mm]				
punkty pomiarowe:	1	2 – trawers	3 – klucz	4	5
sklepienie bez wzmocnienia	0,2	1,6937	0,7538	<b>-0,3606</b>	-0,1
sklepienie wzmocnione	0,2	<b>2,3577</b>	<b>0,8919</b>	-0,3274	-0,1
różnica [mm]	–	0,664	0,1381	0,0332	–
(%)	–	(39%)	(18%)	(9%)	–

Niekorzystny wpływ struktury tensegrity na przemieszczenia całego układu wynika z połączenia górnych węzłów prętów tensegrity z centralnym prętem struktury tensegrity. Połączenie to tworzy punkt obrotu, wokół którego obraca się struktura tensegrity zwiększając przemieszczenia całego układu. Powstaje niejako negatywne sprzężenie zwrotne.



Rys. 80 Schemat działania wzmocnienia tensegrity w sklepieniu.

**Uszkodzone sklepienie kolebkowe wzmocnione strukturą tensegrity.** Po dokonaniu pomiarów zaprezentowanych powyżej, w trakcie modyfikacji naprężenia wstępnego struktury tensegrity oraz sposobu podparcia sklepienia, doszło do rozspojenia warstwy zaprawy, a tym samym do przełamania sklepienia (patrz Rys. 81). Doszło do pęknięcia między warstwą zaprawy a cegiel (patrz Rys. 81) na całej grubości łuku. Pomimo awarii, dzięki wzmocnieniu konstrukcją tensegrity, układ sklepienia ze wzmocnieniem zachował zdolność przenoszenia obciążeń oraz geometrię.

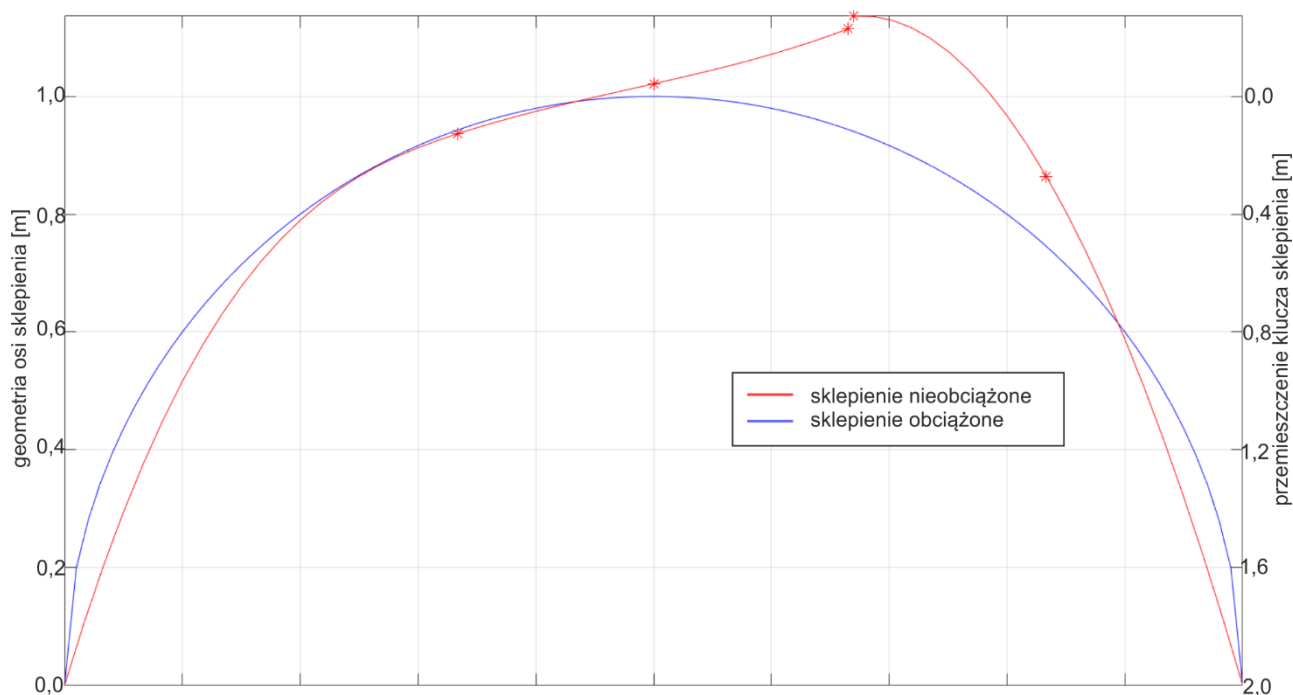
Tab. 21 Wartości przemieszczeń punktów pomiarowych zarejestrowanych w uszkodzonym sklepieniu ze wzmocnieniem.

		przemieszczenia [mm]				
uszkodzone, wzmocnione sklepienie	1	2 – trawers	3 – klucz	4 na lewo od pęknięcia	4 na prawo od pęknięcia	5
	–	0,3176	-1,073	-8,536	-9,8	-5,951

Na uszkodzonym sklepieniu przeprowadzono pomiary przemieszczeń rejestrując m.in. przemieszczenie pionowe punktów po obu stronach pęknięcia. Schemat obciążenia sklepienia pozostał bez zmian (2x400kg za pośrednictwem trawersu). Zarejestrowane przemieszczenia prezentuje Tab. 21 oraz Rys. 82. Wykonanie analogicznego eksperymentu na sklepieniu bez wzmocnienia było niemożliwe, ponieważ bez wzmocnienia tensegrity sklepienie kolebkowe uległoby katastrofie. Uszkodzenie to uniemożliwiło również przeprowadzenie doświadczeń dynamicznych na wzmocnionym sklepieniu.



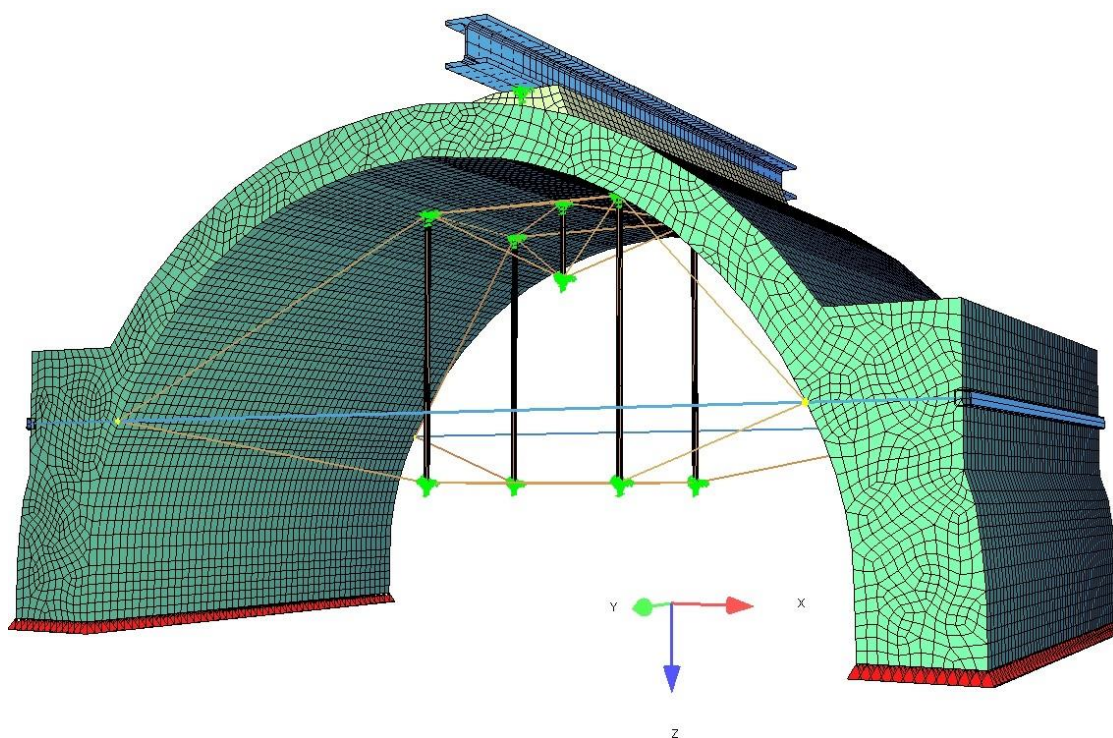
Rys. 81 Badane sklepienie ze wzmocnieniem, obciążenie 2x400kg, widoczne pęknięcie.



Rys. 82 Szkic przybliżonej postaci badanego, uszkodzonego sklepienia (wartości przemieszczeń zwiększono 2 krotnie)

### 6.1.1. Analiza numeryczna wzmocnionego sklepienia kolebkowego

Model numeryczny badanego sklepienia w skali technicznej wykonano w programie (SOFiSTiK, 2018). Materiały oraz przekroje zdefiniowano korzystając z dedykowanych poleceń w module AQUA, umożliwiło to łatwe zdefiniowanie zachowania muru ceglanego z pomocą polecenia *maso*. Sklepienie modelowano za pomocą prostopadłościennych, 8 węzłowych bryłowych elementów skończonych o 24 stopniach swobody (po 3 w węźle); pręty struktury tensegrity zdefiniowano jako pręty o 1 stopniu swobody w węźle; cięgna tensegrity oraz ściągi sklepienia jako kable o 1 stopniu swobody w węźle, zawłoki (RK 30x2) oraz trawers (HEB100) jako belki o 6 stopniach swobody w węźle. Geometrię belek zdefiniowano korzystając z punktów opisujących geometrię sklepienia, umieszczając osie belek na mimośrodku. W cięgnach struktury tensegrity oraz w ściągach sklepienia zdefiniowano naciąg wstępny korzystając z wcześniejszych badań; naciąg wstępny w ściągach wynosił 2,43 kN. Zablokowano przesuw węzłów na dolnych powierzchniach podpór. Współpracę prętów tensegrity ze sklepieniem zapewniono wiążąc przemieszczenie pionowe górnych węzłów prętów z przemieszczeniami pionowymi sąsiednich węzłów sklepienia (polecenie *kine*). Ponadto, aby zapewnić stabilność obliczeń numerycznych, zdefiniowano podpór sprężystych o bardzo małej sztywności ( $k=0,0001$  kN/m) w węzłach struktury tensegrity. Podobne podpory sprężyste zastosowano w skrajnych węzłach mimośrodkowo zdefiniowanych belek trawersu i zawłok. Warunki brzegowe ilustruje Rys. 83. Taka wartość sztywności nie miała istotnego wpływu na wyniki obliczeń. Wykonano 3 modele sklepienia liczące 3078, 24624 oraz 51750 bryłowych elementów skończonych. Tab. 22 przedstawia zestawienie ekstremalnych wartości przemieszczeń węzłów sklepienia w analizowanych modelach.



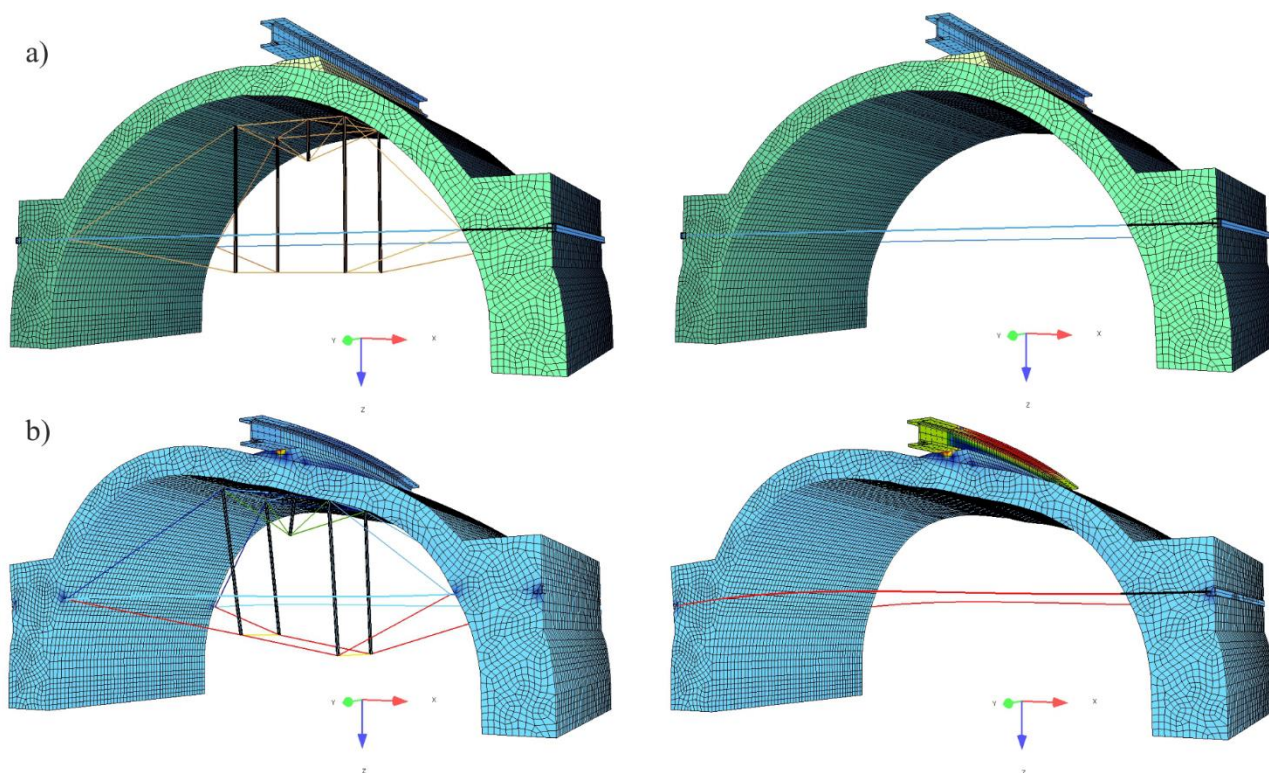
Rys. 83 Warunki brzegowe w modelu numerycznym wzmocnionego sklepienia (51750 bryłowych ES).

W modelu o 3.078 bryłowych elementach skończonych przeanalizowano wpływ posadowienia badanego sklepienia na arkuszach gumy technicznej na przemieszczenia analizowanych punktów oraz przemieszczenia ekstremalne. W tym celu porównano przemieszczenia w sklepieniu podpartym sprężysto oraz podpartym nieprzesuwnie. Bezwzględne wartości przemieszczeń pionowych w modelu sklepienia podpartego sprężysto są większe nawet o 0,02 mm co stanowi do 3% analizowanych wartości. Jednakże wzajemny stosunek przemieszczeń w badanych punktach pozostaje bez zmian w obydwu przypadkach podparcia. Z uwagi na efektywność obliczeń zdecydowano się analizować modele podparte nieprzesuwnie zaniebując wpływ sprężystego podparcia sklepienia na arkuszach gumy technicznej.

Tab. 22 Maksymalne i minimalne przemieszczenia w modelach numerycznych sklepienia (obciążenie trawersem) o różnych liczbach bryłowych ES.

przemieszczenia sklepienia $u$	sklepienie bez wzmocnienia		sklepienie wzmocnione	
	$u_{max}$ [mm]	$u_{min}$ [mm]	$u_{max}$ [mm]	$u_{min}$ [mm]
liczba bryłowych ES				
3078	<b>1,058</b>	-0,473	1,023	<b>-0,482</b>
24624	<b>1,092</b>	-0,474	1,031	<b>-0,488</b>
51750	<b>1,105</b>	-0,504	1,033	<b>-0,511</b>

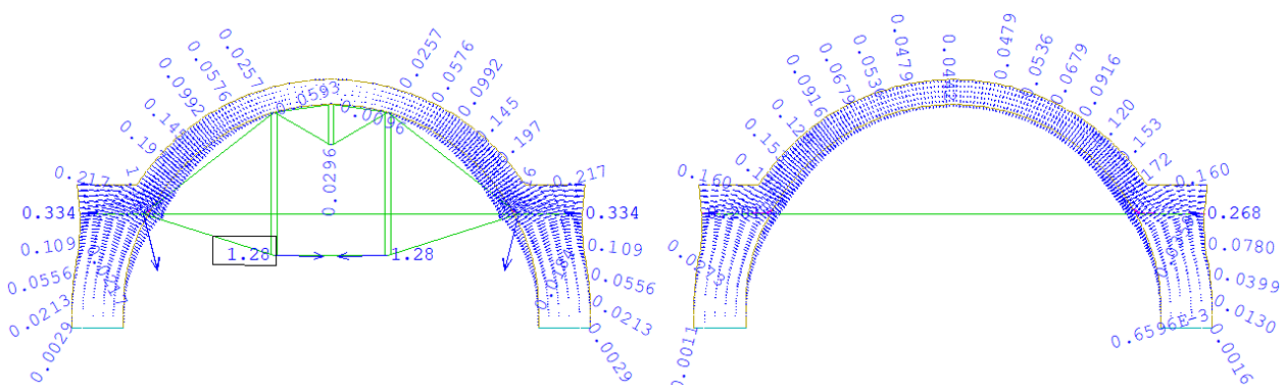
W modelach analizowano dwa przypadki obciążenia: ciężar własny (z uwzględnieniem ciężaru trawersu oraz wylewki pod trawersem) oraz obciążenie skrajnych punktów trawersu; obliczenia wykonano w dwóch konfiguracjach: sklepienia bez wzmocnienia oraz sklepienia wzmocnionego kratownicą tensegrity.



**Rys. 84** Model numeryczny (51750 bryłowych ES) sklepienia wzmocnionego i sklepienia bez wzmocnienia: a) bez obciążenia, b) obciążonego za pośrednictwem trawersu.

W analizie wyników uzyskanych z symulacji numerycznych badanego sklepienia (patrz Tab. 22 oraz Rys. 87) uwidacznia się znaczący, acz niekorzystny, wpływ wzmocnienia tensegrity na wartości przemieszczeń sklepienia.

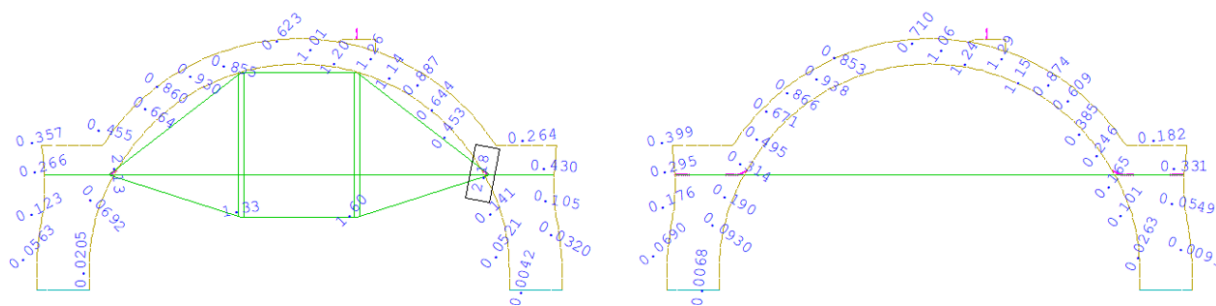
Należy zauważyć, że niekorzystny wpływ współpracy struktury tensegrity ze sklepieniem ceglany występuje w przypadku niesymetrycznego obciążenia sklepienia. Rys. 85 prezentuje wektory wypadkowych przemieszczeń węzłów sklepienia wzmocnionego i bez wzmocnienia. Przemieszczenia sklepienia bez wzmocnienia, zwłaszcza w środku sklepienia, są znacząco wyższe niż w sklepieniu wzmocnionym.



**Rys. 85** Przemieszczenia punktów sklepienia wzmocnionego i bez wzmocnienia pod wpływem ciężaru własnego [mm].

Niekorzystny wpływ wzmocnienia tensegrity wykazany w eksperymencie może również zostać zniesiony przez zmianę geometrii wzmocnienia tensegrity. Usunięcie centralnego pręta tensegrity spowoduje zmianę schematu statycznego i zapobiegnie negatywnemu sprzężeniu zwrotnemu zaprezentowanemu na Rys. 80. Rys. 86 prezentuje wektory przemieszczeń węzłów sklepienia ze zmodyfikowanym wzmocnieniem

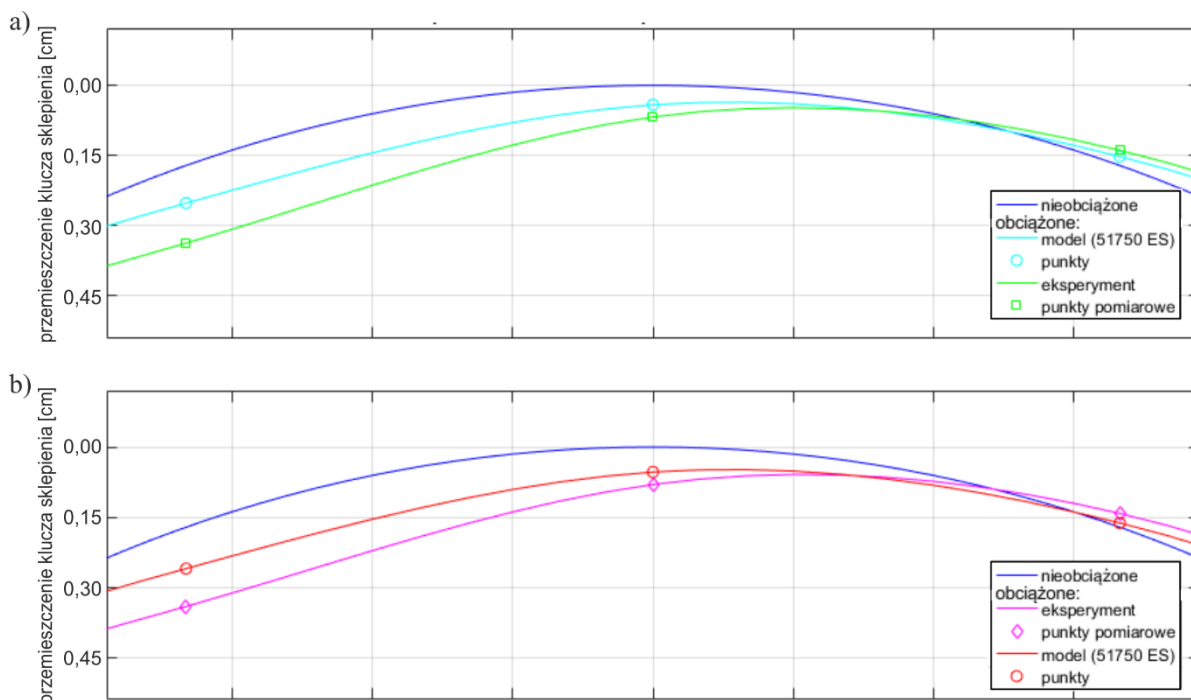
tensegrity (bez centralnego pręta) pod wpływem obciążenia trawersem. Widoczne są mniejsze przemieszczenia sklepienia ze wzmocnieniem.



Rys. 86 Wartości przemieszczeń węzłów sklepienia wzmocnionego zmodyfikowaną strukturą tensegrity oraz bez wzmocnienia [mm].

### 6.1.2. Dyskusja wyników doświadczenia oraz symulacji numerycznych wzmocnionego sklepienia kolebkowego

Tab. 23 oraz Rys. 87 zestawiają wartości przemieszczeń punktów pomiarowych uzyskanych w eksperymentach oraz w modelach numerycznych. Porównanie uzyskanych wartości pozwala wnioskować o poprawności zastosowanego modelu numerycznego konstrukcji złożonej z murowego, zhomogenizowanego sklepienia kolebkowego oraz współdziałającej z nim struktury tensegrity.



Rys. 87 Porównanie przybliżonych wykresów przemieszczeń klucza badanego sklepienia otrzymanych w eksperymencie oraz z modeli numerycznych (wartości przemieszczeń zwiększono 3 krotnie): a) sklepienie bez wzmocnienia, b) sklepienie wzmocnione tensegrity.

Na tej podstawie można wnioskować, iż możliwe jest modelowanie sklepień murowych wzmocnionych strukturą tensegrity także w bardziej złożonych przypadkach. Z uwagi na znaczną wartość kulturową większości wzmocnianych sklepień murowych (Kamal, Hamdy, & El-Salakawy, 2014; International Council on Monuments and Sites, 2003), a co za tym idzie ogromne znaczenie bezpieczeństwa tych konstrukcji dla dziedzictwa kulturowego, konieczne będą dalsze badania przed zastosowaniem tego typu wzmocnień w

rzeczywistych konstrukcjach wymagających interwencji. Należy również pamiętać o ograniczeniach stosowania parametrów zhomogenizowanego muru w modelowaniu konstrukcji murowych (Gołębiowski, Lubowiecka, & Kujawa, 2015; Lopez et al., 1999; Sieczkowski & Szolomicki, 1999).

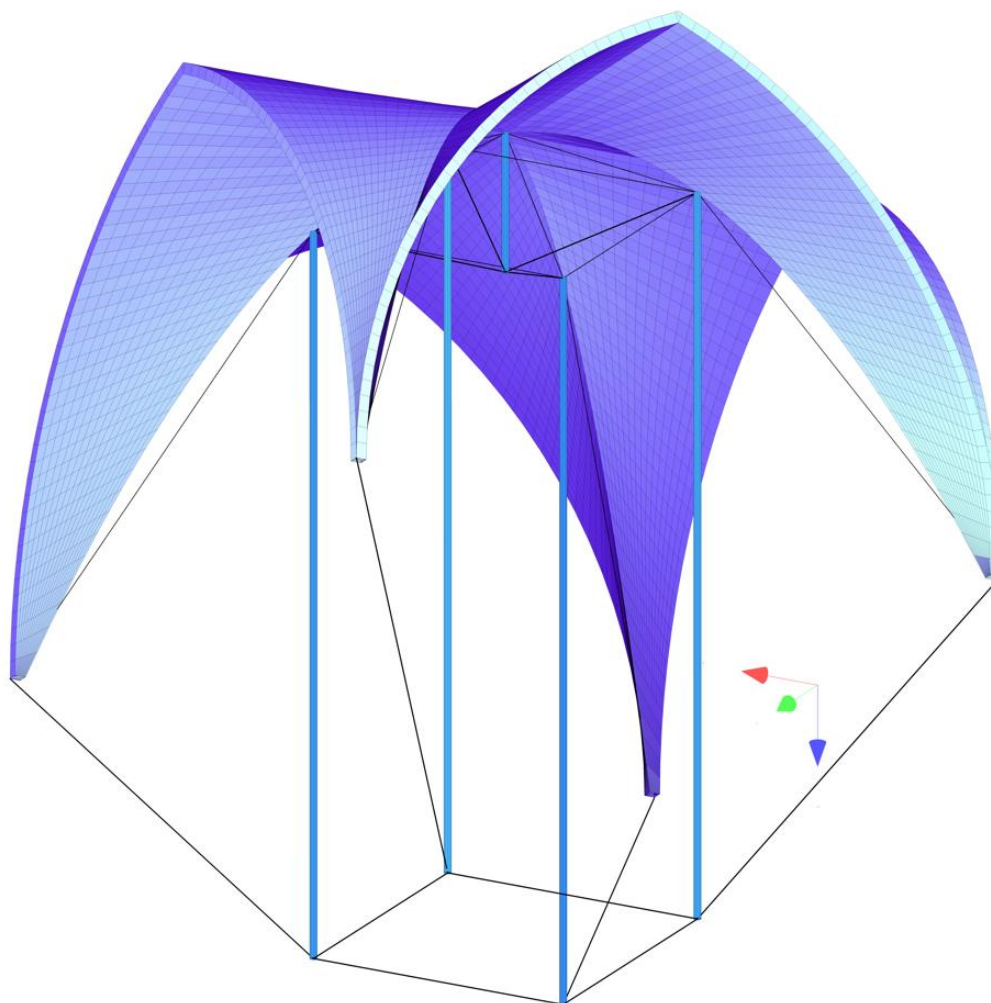
**Tab. 23** Porównanie przemieszczeń punktów pomiarowych uzyskanych w eksperymencie z wartościami z symulacji zachowania modelu numerycznego dla 51750 bryłowych elementów skończonych.

przemieszczenia [mm]						
punkty pomiarowe:		1	2 – trawers	3 – klucz	4	5
sklepienie bez wzmocnienia	eksperyment	0,2	1,6937	0,7538	-0,3606	-0,1
	model numeryczny	0,1799	0,9852	0,5954	-0,1001	-0,2453
sklepienie wzmocnione	eksperyment	0,2	2,3577	0,8919	-0,3274	-0,1
	model numeryczny	0,1917	0,8952	0,4627	-0,2126	-0,2352

## 6.2. Zastosowanie zaproponowanego systemu wzmocnienia do sklepienia krzyżowego.

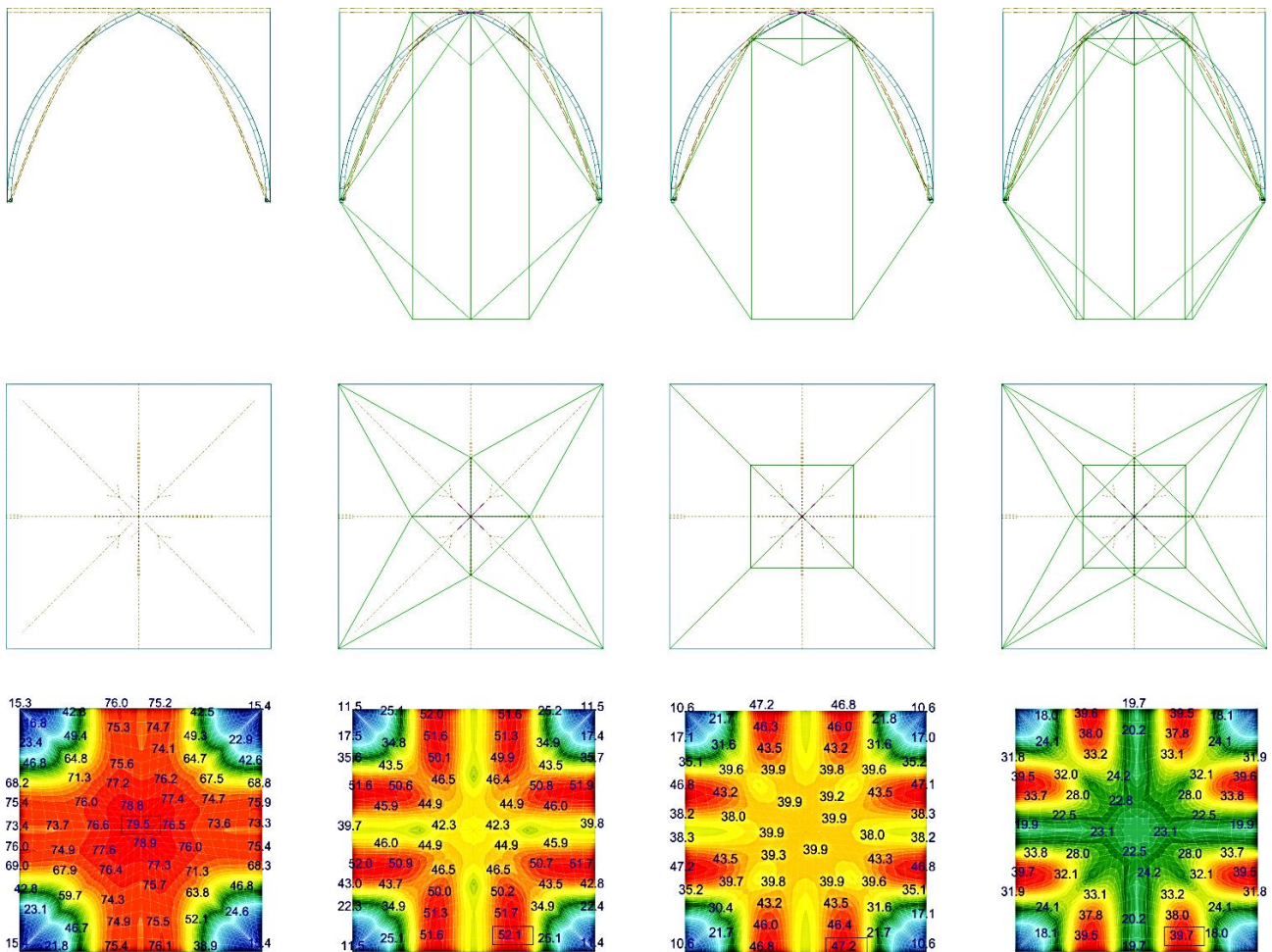
Aby zweryfikować celowość i możliwość zastosowania wzmocnień sklepień ceglanych strukturami tensegrity zrealizowano serię modeli numerycznych sklepień krzyżowych o bardziej złożonej i rzeczywistej geometrii. Do analizy przyjęto sklepienie krzyżowe o topologii wzorowanej na sklepieniach badanych przez (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011). Rzut analizowanego sklepienia mieści się w kwadracie o boku 7,7 m, wysokość sklepienia wynosi 5,7 m. Pręty struktury tensegrity mają długość 8,3 lub 9 m; pręt centralny 1,6m. Zaproponowano 3 schematy tensegrity wspierające sklepienie. W każdym ze schematów zastosowano pręt centralny wspierający zwornik sklepienia. W pierwszym ze schematów wzmocnienia kolejne 4 pręty usytuowano pod liniami grzbietowymi sklepienia, w następnym 4 pręty umieszczono tak aby wspierały żebra. Ostatni przeanalizowany schemat składa się z 9 prętów: 4 wspierających linie grzbietowe, 4 pod żebrami oraz ostatnim prętem umieszczonym centralnie. Rys. 88 oraz Rys. 89 prezentują zaproponowane wzmocnienia oraz pola przemieszczeń sklepienia bez wzmocnienia oraz wzmocnionego każdą z zaproponowanych struktur tensegrity (uwzględniono jedynie ciężar własny konstrukcji murowej).





Rys. 88 Widok aksonometryczny sklepienia krzyżowego wzmocnionego strukturą tensegrity.

Modele numeryczne sklepienia zdefiniowano w programie (SOFiSTiK, 2018). Sklepienie, którego materiał definiowano za pomocą polecenia *maso*, modelowano za pomocą prostopadłościennych, 8 węzłowych elementów skończonych o 3 stopniach swobody w węźle. Zdefiniowano 5904 bryłowe elementy skończone w obrębie sklepienia ceglanego. Zastosowano elementy prętowe o 1 stopniu swobody w węźle jako pręty tensegrity oraz kable o 1 stopniu swobody w węźle jako ciągnia – liny stalowe. Przeprowadzono analizę zbieżności rozwiązania uwzględniając modele numeryczne o 2952, 5904 oraz 11808 bryłowych elementach skończonych. Oprócz prezentowanych wyników przeprowadzono szereg obliczeń numerycznych aby zidentyfikować korzystne położenie dolnego węzła oraz naciąg kluczowych ciągów. Jako kryterium przyjęto maksymalne przemieszczenie węzła w kluczu sklepienia. Dolne węzły prętów zdefiniowano jako położone 3,5 m poniżej węzłów podporowych analizowanego sklepienia. Przy takim obniżeniu ciągła podtrzymujące ten węzeł nachylone są pod kątem około  $45^\circ$  do poziomu.



Rys. 89 Widok, rzut oraz mapa przemieszczeń [mm] pod obciążeniem ciężarem własnym sklepień: a) krzyżowego; b) i c) krzyżowego ze wzmocnieniem tensegrity 5 prętami w dwóch konfiguracjach; d) krzyżowego ze wzmocnieniem tensegrity 9 prętami.

Zaproponowane wzmocnienie 9 prętami redukuje przemieszczenie pionowe w kluczu sklepienia do 30% wartości przemieszczenia tego punktu w sklepieniu bez wzmocnienia, zaś wartość przemieszczenia maksymalnego do około 50%. Uzyskane wyniki wskazują, że zastosowanie systemu tensegrity jako wzmocnienia sklepienia ceglanego znacząco obniża przemieszczenia punktów sklepienia.

## 7. PODSUMOWANIE

Sklepienia oraz kopuły są niewątpliwie jednymi z cenniejszych obiektów dziedzictwa kulturowego zarówno z uwagi na dzieła sztuki, które chronią lub którymi są pokryte, jak i z uwagi na ich istotność dla historii architektury i techniki *per se*. W niniejszej rozprawie podjęto zagadnienia uszkodzeń, analizy oraz wzmocnienia sklepień murowych, a także przeprowadzono prace doświadczalne na modelu fizycznym sklepienia kolebkowego w warunkach laboratoryjnych. Przedstawiono również prace badawczo-rozwojowe zakończone skutecznym wdrożeniem typoszeregu hal namiotowych o konstrukcji tensegrity. Przeprowadzono badania dynamiczne oraz statyczne jednej z tych hal. Naturalnym połączeniem tych kierunków badań jest zaproponowany w pracy system wzmocnienia sklepień ceglanych z zastosowaniem struktur prętowo-ciężnowych omówiony w ostatniej części dysertacji. System ten został przebadany doświadczalnie oraz numerycznie na fizycznym i numerycznym modelu sklepienia kolebkowego. Ponadto wykonano serię symulacji numerycznych wzmocnionego poprzez tensegrity sklepienia krzyżowego w rzeczywistych wymiarach zaczerpniętych z literatury pokazując możliwość zastosowania proponowanego wzmocnienia do sklepień o bardziej złożonej geometrii.

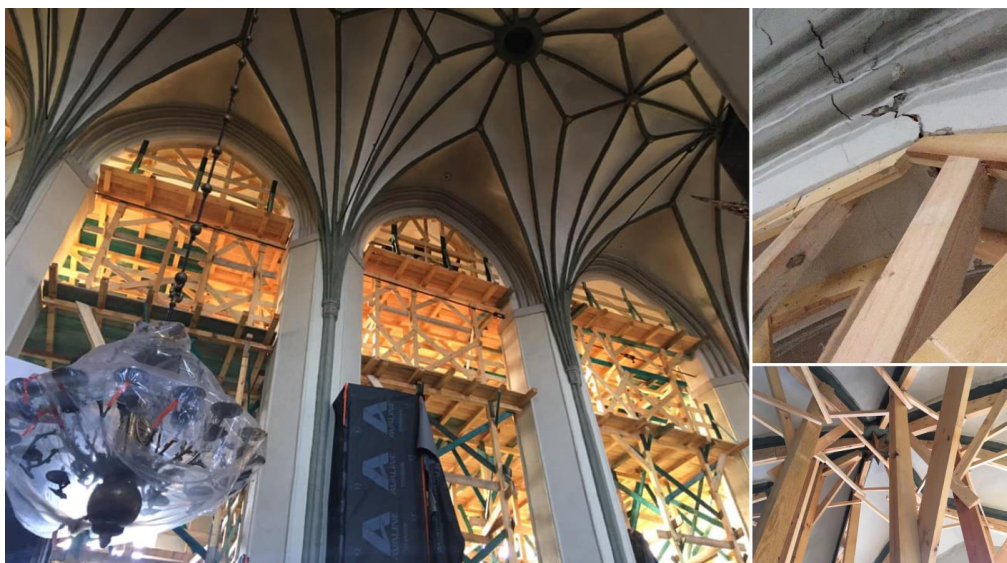
Istotą proponowanego rozwiązania jest zastosowanie struktury tensegrity do wzmocnienia (podparcia i przejścia rozporu) konstrukcji wzmocnianego sklepienia ceglano. Układy prętowo-ciężnowe typu tensegrity znane są od lat 60-tych ubiegłego wieku; dotychczas jednakże nie były używane w proponowany w pracy sposób. Natomiast prętowo-ciężnowe konstrukcje wzmocniające historyczne obiekty murowe realizowano w przestrzeni więźby dachowej, powyżej grzbietu sklepienia, zob. m.in.: (Jurczakiewicz & Karczmarczyk, 2020).

Zaproponowany system wzmocnienia sklepień strukturami tensegrity ma cechy, które wyróżniają go na tle innych stosowanych obecnie sposobów wzmocnienia i naprawy sklepień. Oferuje możliwość przejścia rozporu przekazywanego przez sklepienia na konstrukcję ścian lub filarów.

Uszkodzone sklepienia wzmocnia się interwencyjnie rusztowaniami np. drewnianymi, jest to jednak rozwiązanie tymczasowe a ponadto wyłącza z użytkowania przestrzeń pod uszkodzonym sklepieniem (patrz Rys. 90). Zastosowanie wzmocnienia tensegrity umożliwia również podwieszenie siatki zabezpieczającej przestrzeń poniżej przed odpadającymi fragmentami uszkodzonego sklepienia (cegłami, fragmentami zaprawy, tynku itp.). Zdaje się więc to być dobrą alternatywą szczególnie dla tymczasowych metod wzmocnienia uszkodzonych sklepień ceglanych.

W literaturze przedmiotu, m.in. (Bednarz, 2003; Masłowski & Spiżewska, 2000) powszechne są wskazania oraz przykłady wzmocnienia sklepień kilkoma różnorodnymi metodami lub metodami kombinowanymi. (Jurczakiewicz, 2017) wskazuje, że „dzięki zastosowaniu ustrojów prętowo-ciężnowych w dziedzinie konserwacji zabytków można osiągnąć zamierzone efekty konstrukcyjnego wzmocnienia i zabezpieczenia obiektów przy minimalnej ingerencji w zabytkową substancję w zgodności z obowiązującą

doktryną konserwatorską” zaś „ingerencje tego rodzaju są jednoznacznie podporządkowane zabytkowi i odczytywane jako środek do jego zachowania”. Autor ma nadzieję, że zaproponowana tutaj metoda dołączy do wachlarza technik stosowanych do wzmacniania konstrukcji zabytkowych.



Rys. 90 Rusztowania wsporcze w kościele św. Mikołaja w Gdańsku.

Opisywane w dysertacji wdrożenie namiotów imprezowych typu tensegrity jest wzorem użytkowym, na który udzielono prawa ochronnego pt. *Hala namiotowa o konstrukcji prętowo-ciężnowej na planie wielokąta zwłaszcza foremnej* o numerze 126525.

**Kierunki dalszych badań.** Zaproponowany w niniejszej pracy system wzmocnienia sklepień murowych strukturami tensegrity wymaga dalszych analiz. Celowe jest zaproponowanie oraz przeanalizowanie topologii wzmocnień tensegrity dla powszechnie występujących schematów sklepień murowych. Z uwagi na znaczne siły potrzebne do wstępnego napięcia struktury tensegrity konieczna jest również dogłębna analiza sposobów zakotwienia tych układów w ścianach, filarach lub pilastrach wzmocnianej konstrukcji. Także stosowanie wzmocnienia tensegrity w przypadku nierównomiernego osiadania podpór wymaga dalszych analiz. Konieczne jest również zbadanie współpracy wzmocnienia tensegrity z materiałami kompozytowymi zastosowanymi po stronie grzbietowej sklepienia (patrz Rys. 75) oraz analiza pracy dynamicznej tak wzmocnionego sklepienia. Obiecującym rozwiązaniem wydaje się być zaadaptowanie algorytmu obliczania wzmocnienia sklepień materiałami kompozytowymi zaproponowanego w (Fraternali et al., 2015) do obliczeń wzmocnienia sklepienia strukturą tensegrity i materiałami kompozytowymi.

# ZAŁĄCZNIKI

## Załącznik 1.

### Algorytm wyznaczania wzmocnienia sklepień materiałami kompozytowymi

W algorytmie obliczania wzmocnienia sklepień opracowanym przez (Fraternali et al., 2015) z wykorzystaniem metod optymalizacji masy konstrukcji tensegrity zaproponowanej przez (Nagase & Skelton, 2014) opisuje się powierzchnię środkową kopuły lub sklepień grupą  $n_n$  węzłów o współrzędnych  $(x_k, y_k, z_k)$ . Wektory wodzące tych węzłów oznaczone jako  $n_k$ , gdzie  $k = (1, 2, \dots, n_n)$  można zestawzić w macierzy współrzędnych węzłów  $N$ :

$$N = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_{n_n} \\ y_1 & \dots & y_{n_n} \\ z_1 & \dots & z_{n_n} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Model analizowanej, trójwymiarowej konstrukcji otrzymuje się łącząc każdy  $n_k$  węzeł z sąsiadującymi węzłami  $n_j$  zachowując warunek  $|n_k - n_j| \leq r_k$  (gdzie  $r_k$  jest tak dobrane, aby połączono tylko bezpośrednio sąsiadujące węzły). Każdą parę węzłów  $n_k$  oraz  $n_j$  łączymy dwoma równoległymi elementami: ściskanym graniastosłupem mурowym (prętem)  $b_i = n_k - n_j$  oraz rozciągającym materiałem kompozytowym FRP (ciągnem)  $s_i = n_k - n_j$ . W konfiguracji początkowej (nieoptymalnej) konstrukcja składa się z takiej samej liczby „prętów”  $n_b$  oraz „ciągnięć”  $n_s$ . ( $n_b = n_s$ ). Całkowitą liczbę elementów wyznaczymy jako  $n_x = n_b + n_s$ .

Równowagę statyczną można wyrazić w postaci:

$$Ax^{(j)} = w^{(j)} \quad (8.2)$$

gdzie:  $A$  – macierz statyczna konstrukcji (macierz konwersji statycznej) o wymiarach  $3n_n \times n_x$ ,  $w^{(j)}$  – wektor obciążeń zewnętrznych o wymiarze  $3n_n$ ,  $x^{(j)}$  – wektor intensywności sił elementowych o wymiarze  $n_x$  postaci:

$$x^{(j)} = [\lambda_1^{(j)} \dots \lambda_{n_b}^{(j)} | \gamma_1^{(j)} \dots \gamma_{n_s}^{(j)}]^T \quad (8.3)$$

gdzie:  $\lambda_{b_i}^{(j)}$  – intensywność siły ściskającej, siła ściskająca na jednostkę długości  $i$ -tego pręta;  $\gamma_{s_i}^{(j)}$  – intensywność siły rozciągającej, siła rozciągająca na jednostkę długości  $i$ -tego cięgna. Siły normalne (osiowe) w elementach ściskanych i rozciąganych, odpowiednio  $t_{b_i}$  oraz  $t_{s_i}$ , o długościach  $b_i$  oraz  $s_i$ , można przedstawić jako:

$$t_{b_i} = \lambda_i b_i, \quad t_{s_i} = \gamma_i s_i \quad (8.4)$$

Macierz statyczną  $A$  można wyznaczyć:

$$A = [-(C_B^T \otimes I_3)B \quad (C_S^T \otimes I_3)S] \quad (8.5)$$

gdzie:

macierz  $C_B$  jest zbudowana w ten sposób, że:

element  $[C_B]_{ij} = -1$  jeżeli wektor elementu ściskanego  $b_i$  jest skierowany od węzła  $n_j$ ,

element  $[C_B]_{ij} = 1$  jeżeli wektor elementu ściskanego  $b_i$  jest skierowany do węzła  $n_j$  albo

element  $[C_B]_{ij} = 0$  jeżeli wektor elementu ściskanego  $b_i$  nie łączy się z węzłem  $n_j$ ;

macierz  $C_S$  jest zbudowana w analogiczny sposób dla elementów rozciąganych

$b_i$ ;  $I_3$  – macierz jednostkowa;

$B$  oraz  $S$  to macierze diagonalne zbierające długości odpowiednio elementów ściskanych oraz rozciąganych zaś  $\otimes$  to iloczyn Kroneckera.

Oznaczając przez  $\sigma_{b_i}$  oraz  $\sigma_{s_i}$  maksymalne dopuszczalne naprężenia w prętach i cięgnach a przez  $A_{b_i}$  oraz  $A_{s_i}$  pole przekroju poprzecznego prętów i cięgien można zapisać warunek ograniczający intensywność sił w elementach:

$$\lambda_i^{(j)} b_i \leq \sigma_{b_i} A_{b_i}, \quad \gamma_i^{(j)} s_i \leq \sigma_{s_i} A_{s_i} \quad (8.6)$$

Masa elementów o gęstościach objętościowych prętów  $\rho_{b_i}$  oraz cięgien  $\rho_{s_i}$  może zostać wyrażona poniższymi wzorami:

$$m_{b_i} = \rho_{b_i} A_{b_i} b_i, \quad m_{s_i} = \rho_{s_i} A_{s_i} s_i \quad (8.7)$$

Optymalizację tak zdyskretyzowanej konstrukcji uzyskuje się stosując algorytm wyznaczania minimalnej masy struktury tensegrity zaproponowany przez (Nagase & Skelton, 2014). Dążymy więc do minimalizacji masy

$$m = d^T y \quad (8.8)$$

z zastrzeżeniem, że:

$$\begin{cases} Ax^{(j)} = w^{(j)} \\ Cx^{(j)} \leq Dy \\ x^{(j)} \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

gdzie:

$$y = [A_{b_1} \cdots A_{b_{n_b}} \mid A_{s_1} \cdots A_{s_{n_s}}]^T \quad (8.10)$$

$$d^T = [\rho_{b_1} b_1 \cdots \rho_{b_{n_b}} b_{n_b} \mid \rho_{s_1} s_1 \cdots \rho_{s_{n_s}} s_{n_s}] \quad (8.11)$$

$$C = \begin{bmatrix} \text{diag}(b_1, \dots, b_{n_b}) & 0 \\ 0 & \text{diag}(s_1, \dots, s_{n_s}) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

$$D = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_{b_1}, \dots, \sigma_{b_{n_b}}) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\sigma_{s_1}, \dots, \sigma_{s_{n_s}}) \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Rozwiązanie układu równań (8.8) i (8.9) zwraca optymalny układ konstrukcyjny tensegrity, który składa się ze zbioru wszystkich elementów (prętów i cięgien) o niezerowej gęstości siły ( $\lambda_{bi}^{(j)}$  lub  $\gamma_{si}^{(j)}$ ) w co najmniej jednym z analizowanych przypadków obciążenia. Ten układ konstrukcyjny ma minimalną masę spośród wszystkich możliwych konfiguracji spełniających równanie równowagi (8.2) oraz warunki nośności elementów (8.6). Warto zauważyć, że masy analizowanej konstrukcji tensegrity nie należy mylić z ciężarem własnym wzmocnionej kopuły lub sklepienia murowanego, które autorzy (Fraternali et al., 2015) proponują uwzględnić w zewnętrznym wektorze obciążenia  $w^{(j)}$ . Masa podlegająca minimalizacji w zagadnieniu (8.9) powinna być traktowana jako masa myślowo wyodrębnionych z konstrukcji murowej ściskanych „prętów” murowych.

## Załącznik 2.

### Zestawienia parametrów wytrzymałościowych komponentów muru opracowane na podstawie (Caporale et al., 2015)

Tab. 24 Parametry wytrzymałościowe cegieł historycznych, zestawienie na podstawie (Caporale et al., 2015)  
 $f_{cb}$  – wytrzymałość cegły na ściskanie,  $f_{tb}$  – wytrzymałość cegły na rozciąganie (w nawiasie stosunek  $f_{tb}/f_{cb}$ ),  $E_{cb}$  – moduł sprężystości,  $\nu_{cb}$  – współczynnik Poissona, (ż) – żółta cegła, (B) – cegła brązowa.

Źródło	$f_{cb}$ [MPa]	$f_{tb}$ [MPa]	$E_{cb}$ [MPa]	$\nu_{cb}$
(Adriani, Frunzio, & Pasquino, 1991)	20,7			
(Angelillo & Olivito, 1995)	22		8500–9736	0,22–0,28
(Annamalai, Jayaraman, & Madhava Rao, 1982)	6,8–7,72	0,13–0,16 (2%)		
(Arduini et al., 1994)	52,3			
(Atkinson et al., 1989)	38,6	3,14–3,45 (9%)		
(Binda, Fontana, & Frigerio, 1988)	26,9			
(Binda, Mirabella Roberti, & Tiraboschi, 1996)	26,5	2,44 (9%)	2469	0,17–0,28
(Calvi & Magenes, 1991)	19,72	1,26 (6%)		
(Contini, Debernardi, & Palladino, 1992)	19,7			
(Decanini, Payer, & Terzariol, 1982)	14,75–15,94			
(Derakhshan, 2011)	25,9			
(Ewing & Kowalsky, 2004)	34	1,72 (5%)		
(Ewing & Kariotis, 1981)	48,45			
(Frederiksen, 1992)	40,54			
(Ismail et al., 2010)	39,4			
(Kawahara et al., 2004)	30,95		6240	
(Laner, 1982)	28–29			
(Malyszko, 2004)	27,1	0,6 (2%)		
(Mayorca & Meguro, 2004)	80	4,2 (5%)	15,700	
(Meli, 1972)	15			
(Modena et al., 2002)	28–33 (B)		2050–5300	
	4–12		500–1330	
(Page, 1982)	15,41			
(Pistone & Roccati, 1991)	15,2			
(Powell & Hodgkinson, 1976)	25,5–45,3			
(Riddington & Jukes, 1994)	18,3			
(Ronca, Franchi, & Crespi, 2004)	48,86			
(Samarasinghe & Hendry, 1980)	30,5			
(Stratford et al., 2004)	92		15,800	
(Valluzzi, Tinazzi, & Modena, 2002)	8,83	0,95 (11%)		
(Vermeltfoort, 1992)	66 (ż)			
(Yi, Oh, & Lee, 2004)	42,5			
(Yi et al., 2006)	41,6			
(Zarri, 1994)	60,5			



**Tab. 25 Parametry wytrzymałościowe zaprawy cementowej, zestawienie na podstawie (Caporale et al., 2015)**  
 $f_{cm}$  – wytrzymałość na ściskanie,  $f_{tm}$  – wytrzymałość na rozciąganie (w nawiasie stosunek  $f_{tm}/f_{cm}$ ),  $E_{cm}$  – moduł sprężystości,  
 $\nu_{cm}$  – współczynnik Poissona.

Źródło	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{tm}$ [MPa]	$E_{cm}$ [MPa]
(Annamalai, Jayaraman, & Madhava Rao, 1982)	3,51		
(Atkinson et al., 1989)	4,7–9,22		1050–2109
(Decanini, Payer, & Terzariol, 1982)	6,64–12,7		
(Drysdale & Hamid, 1982)	5,8–13,5		
(Laner, 1982)	9,3–9,4	3,4–5,6 (37–60%)	
(Mattone et al., 1982)	9,8		
(Pistone & Roccati, 1991)	9,8		
(Riddington & Jukes, 1994)	6,6		
(Vermeltfoort, 1992)	3,2		
(Zarri, 1994)	1,5–4,95		
(Zhuge, Thambiratnam, & Corderoy, 1994)	5,4–6,2		

**Tab. 26 Parametry wytrzymałościowe zaprawy cementowo-wapiennej, zestawienie na podstawie (Caporale et al., 2015)**  
 $f_{cm}$  – wytrzymałość na ściskanie,  $f_{tm}$  – wytrzymałość na rozciąganie (w nawiasie stosunek  $f_{tm}/f_{cm}$ ),  $E_{cm}$  – moduł sprężystości,  
 $\nu_{cm}$  – współczynnik Poissona.

Źródło	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{tm}$ [MPa]	$E_{cm}$ [MPa]	$\nu_{cm}$
(Angelillo & Olivito, 1995)	20		2900–4137	0,12–0,16
(Braga, Dolce, & Masi, 1993)		2,81		
(Daou & Hobbs, 1991)	12,1–13,3			
(Decanini, Payer, & Terzariol, 1982) (Derakhshan, 2011)	9,28–17,08			
(Derakhshan, 2011)	22,4			
(Drysdale & Hamid, 1982)	23,2			
(Ewing & Kowalsky, 2004)	15,7			
(Malyszko, 2004)	8,5	2,21 (26%)		
(Mayorca & Meguro, 2004)	8,2	0,7 (9%)	8600	
(Page, 1982)	5,08			
(Powell & Hodgkinson, 1976)	14,62–16,11			
(Riddington & Jukes, 1994)	6,8–6,9			
(Samarasinghe & Hendry, 1980)	9,6			
(Valluzzi, Tinazzi, & Modena, 2002)		1,48		
(Vermeltfoort, 1992)	10,63			
(Yi, Oh, & Lee, 2004)	8,34–14,71	0,98–1,31 (9–12%)		

**Tab. 27 Parametry wytrzymałościowe zaprawy wapiennej, zestawienie na podstawie (Caporale et al., 2015)**  
 $f_{cm}$  – wytrzymałość na ściskanie,  $f_{tm}$  – wytrzymałość na rozciąganie (w nawiasie stosunek  $f_{tm}/f_{cm}$ ),  $E_{cm}$  – moduł sprężystości,  
 $\nu_{cm}$  – współczynnik Poissona.

Źródło	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{tm}$ [MPa]	$E_{cm}$ [MPa]	$\nu_{cm}$
(Arduini et al., 1994)	6.31			
(Augenti & Parisi, 2010)	2.50	1.43 (57%)	1520	0.15
(Binda, Mirabella Roberti, & Tiraboschi, 1996)		1.08		
(Calvi & Magenes, 1991)	4.33	1.59 (37%)		
(Contini, Debernardi, & Palladino,		0.49		
(Mattone et al., 1982)	4.7–5.8			
(Pistone & Roccati, 1991)	5.8			

### Załącznik 3.

#### Regulacja ściągów z wykorzystaniem równania struny

Wiedząc, że prędkość fali harmoniczej można wyrazić wzorem(8.14):

$$v = \lambda f \quad (8.14)$$

gdzie:  $v$  – prędkość fali [m/s];  $\lambda = 2L$  – długość fali dźwiękowej [m] równa podwójnej długości struny ( $L$ );  
 $f$  – częstotliwość [Hz] oraz, że prędkość dźwięku w strunie można opisać wzorem(8.15):

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (8.15)$$

gdzie:  $P$  – siła w strunie;  $\rho$  – gęstość liniowa struny [kg/m]; można porównując te wzory uzyskać zależność (8.16):

$$\sqrt{\frac{P}{\rho}} = 2Lf \quad (8.16)$$

co następnie można wyrazić(8.17):

$$P = \rho * (2Lf)^2 \quad (8.17).$$

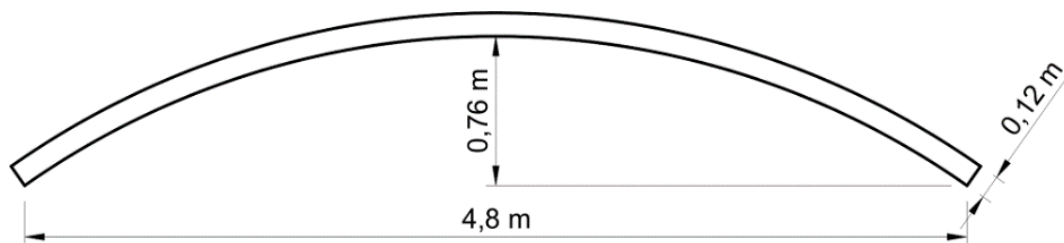
Częstotliwość drgań własnych oszacowano wzbudzając ściągi i rejestrując ich przyspieszenia w funkcji czasu za pomocą dwóch akcelerometrów. Funkcję przyspieszeń poddano dyskretnej transformacji Fouriera stosując algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT – *fast Fourier transform*). Dzięki tej transformacji możliwe stało się znalezienie częstotliwości własnych ściągów na widmie przyspieszeń drgań. Do transformacji wycięto fragmenty funkcji przyspieszeń po wzbudzeniu, bez samego momentu wzbudzenia. Obliczenia przeprowadzono korzystając ze skryptu napisanego w środowisku MATLAB (MathWorks, 2016).

#### Załącznik 4.

### Testy zastosowania homogenizacji ze związków konstytutywnych do wyznaczenia parametrów wytrzymałościowych sklepień poddanych analizie modalnej.

W trakcie badań przeprowadzono m.in. porównanie wyników analizy modalnej sklepienia kolebkowego (Corradi et al., 2015) oraz sklepienia krzyżowego (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011) dostępnych w literaturze (ibidem) z wynikami analiz modalnych modeli numerycznych opracowanych przez autora. Moduł Younga murów modelowanych sklepień określono za pomocą procedury homogenizacji opisanej w rozdziale 5.1.2. zaś modele numeryczne stworzono analogicznie do modeli zaprezentowanych w rozdziale 6.2.3. Prezentowane poniżej prace stanowiły wstęp do przeprowadzenia badań numerycznych a następnie również badań doświadczalnych sklepienia kolebkowego w skali technicznej. Wymiary oraz podstawowe parametry materiałów sklepień podano w cytowanych pracach.

**Sklepienie kolebkowe.** W artykule (Corradi et al., 2015) oraz (Barbieri et al., 2002) badano ceglane spłaszczone sklepienie kolebkowe w trzech fazach: nieuszkodzone, uszkodzone (przegub zmieniający schemat statyczny sklepienia) oraz wzmocnione taśmami polimerowymi zbrojonymi włóknami szklanymi GFRP (ang.: *Glass Fibre Reinforced Polymers*). Wymiary sklepień badanych w artykule przedstawiono na Rys. 91. Sklepienie miało szerokość 1,4m i było podparte z obu stron na węzłowie z zaprawy umieszczonym we wnętrzu kątownika równoramiennego.



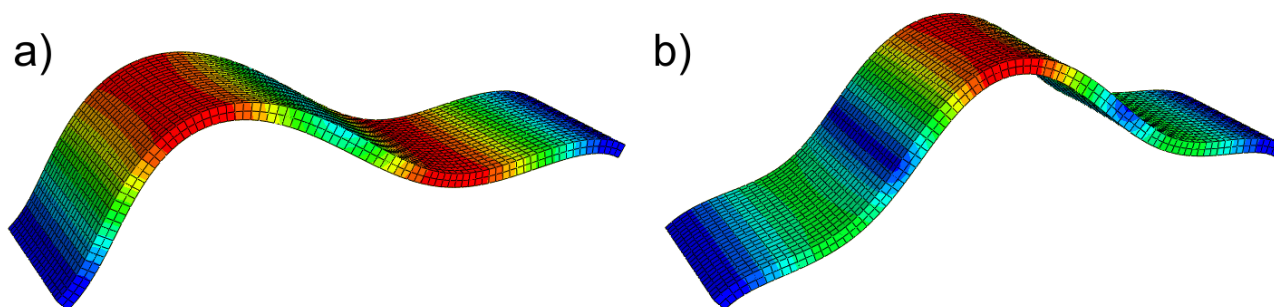
Rys. 91 Wymiary sklepienia badanego w (Corradi et al. 2015)

Sklepienia były testowane 45 dni po wybudowaniu, zastosowano wibrometr laserowy Polytec Doppler model OFV 3001-OFV 303. Autorzy artykułu opracowali również prosty trójwymiarowy model numeryczny w programie Ansys z wykorzystaniem elementów skończonych typu Solid 65 (sześciiany ośmiowęzłowe), na podporach założono możliwość obrotu oraz zablokowane przesuwu.

Tab. 28 Częstotliwości własne sklepienia (Corradi et al. 2015) porównane z obliczeniami Autora

porównanie pierwszych częstotliwości własnych badanych przez (Corradi et al., 2015) z wynikami autora	pierwsza częstotliwość własna [Hz]	druga częstotliwość własna [Hz]
eksperyment (próbki BV1 oraz BV2) (Corradi et al. 2015)	10,00 / 11,25	–
model analityczny (Corradi et al. 2015)	10,66	–
model analityczny autora	11,14	19,70

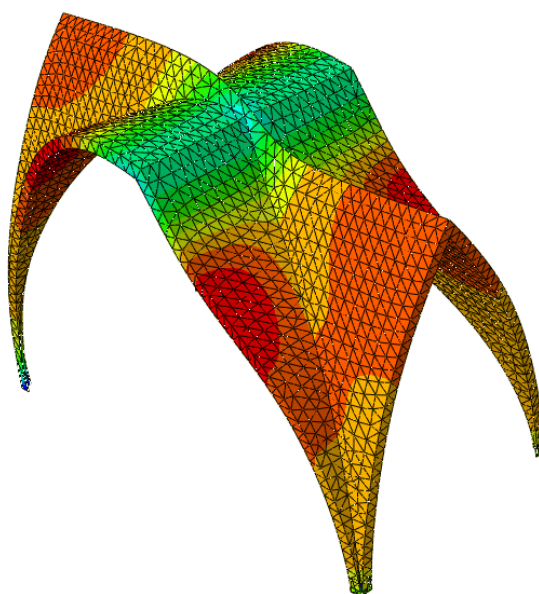
Błąd względny procentowy wartości pierwszej częstotliwości własnej sklepienia wynosi  $\delta = 11,4\%$  oraz  $\delta = 1,0\%$  dla próbek BV1 oraz BV2; co daje błąd względny  $\delta = 4,8\%$  dla wartości średniej. Różnica względna wartości pierwszej częstotliwości własnej modeli sklepienia wynosi  $\delta = 4,5\%$ . Porównanie częstotliwości własnych uzyskanych przez (Corradi et al., 2015) zestawionych w Tab. 28 z wynikami uzyskanymi przez autora, jak również postaci drgań własnych z postaciami przedstawionymi w powyższym artykule, pozwala wnioskować o trafności zastosowanej metody.



Rys. 92 Pierwsza (a) i druga (b) postać drgań własnych wg opracowania autora.

Postacie drgań własnych uzyskanych przez autora (Rys. 92) oraz prezentowane w artykule (Corradi et al., 2015) mają zbliżoną formę. Niestety z braku dokładniejszych danych nie jest możliwe przeprowadzenie porównania postaci drgań własnych (np. z wykorzystaniem *Modal Assurance Criterion – MAC*).

**Sklepienie krzyżowe.** W artykule (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011) badano możliwość identyfikowania spękań oraz odspojenia sklepienia od konstrukcji nawy za pomocą analizy drgań własnych sklepień. Choć różnica między częstotliwościami drgań własnych sklepień uszkodzonych oraz nieuszkodzonych okazała się zbyt mała (porównywalna z niepewnościami pomiarów) aby dokonać identyfikacji to możliwe okazało się zidentyfikowanie uszkodzonych sklepień na podstawie różnic w amplitudach widma mocy.



Rys. 93 Pierwsza postać drgań własnych uzyskana w modelu sklepienia krzyżowego na podstawie badania (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011)

Tab. 29 zestawia częstotliwości drgań własnych prezentowane w pracy (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011) uzyskanych w eksperymencie na istniejącej, historycznej konstrukcji z wartościami z modelu analitycznego autora z wykorzystaniem metody homogenizacji do modelowania materiału muru sklepienia. Pierwsze częstotliwości drgań własnych uzyskanych eksperymentalnie oraz w modelu analitycznym opracowanym przez autora wg powyższej metody są zbliżone (błąd względny  $\delta=0,89\%$ ). Ponadto trzecia częstotliwość drgań własnych wyznaczona eksperymentalnie ma zbliżoną wartość do drugiej wartości drgań własnych wyznaczonych numerycznie.

**Tab. 29 Porównanie częstotliwości drgań własnych**

postać drgań własnych	częstotliwości drgań własnych [Hz]	
	eksperyment (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011)	model analityczny autora
1	3,38	3,41
2	3,87	4,87
3	4,85	6,11
4	5,62	6,66
5	6,36	8,96
6	7,77	9,31
7	8,59	12,31
8	8,99	12,795

Niestety z braku danych dotyczących postaci drgań własnych sklepienia prezentowanego przez (Atamturktur, Bornn, & Hemez, 2011) nie jest możliwe porównanie postaci drgań własnych badanej konstrukcji oraz jej modelu numerycznego.

W obu analizowanych przypadkach model numeryczny opracowany przez autora okazał się przydatny do szacowania częstotliwości drgań własnych.

## SPIS LITERATURY

- Adriani, L., Frunzio, G. & Pasquino, M. (1991). Utilità Della Componentistica a Montaggio Rapido Nel Ripristino e Rinnovo Edilizio Con Adeguamento Antisismico, in: *9th IB2MaC*, (pp. 1436–48). Berlin.
- Aiello, M. a. & Sciolti, S. M. (2006). Bond Analysis of Masonry Structures Strengthened with CFRP Sheets. *Construction and Building Materials*, 20(1–2), 90–100.
- Allemang, R. J. (2003). The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse. *Sound and Vibration*, 37(8), 14–21.
- Allemang, R. J. & Brown, D. L. (1982). A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, in: *Proceedings of the first international Modal Analysis Conference*, (pp. 110–116).
- Ambroziak, A. & Kłosowski, P. (2004). On Aspects of Tensile Structures Analysis. *Lightweight structures in civil engineering international seminar of IASS polish chapter*, 17–20.
- Andreotti, C., Liberatore, D. & Sorrentino, L. (2014). Identifying Seismic Local Collapse Mechanisms in Unreinforced Masonry Buildings through 3D Laser Scanning. *Key Engineering Materials*, 628, 79–84. Retrieved from <https://www.scientific.net/KEM.628.79>
- Angelillo, M. & Olivito, R. S. (1995). Experimental Analysis of Masonry Walls Loaded Horizontally in Plane. *Masonry International*, 8(3), 91–100.
- Annamalai, G., Jayaraman, R. & Madhava Rao, A. G. (1982). Investigations on the Compressive Strength of Walls Built Using Local Chamber Burnt Bricks, in: *6th international brick and block masonry conference*, (pp. 442–57). Rome.
- Arduini, M., Di Leo, A., Di Tommaso, A. & Pascale, G. (1994). Experimental Methods for on Site Evaluation of the Mechanical Properties of Masonry, in: *10th international brick and block masonry conference*, (pp. 1267–76). Calgary.
- Asteris, P. G. & Plevris, V. (2015). *Handbook of Research on Seismic Assessment and Rehabilitation of Historic Structures*. Hershey, PA: IGI Global.
- Atamturktur, S., Bornn, L. & Hemez, F. (2011). Vibration Characteristics of Vaulted Masonry Monuments Undergoing Differential Support Settlement. *Engineering Structures*, 33(9), 2472–2484. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.04.020>
- Atkinson, R. H., Amadei, B. P., Saeb, S. & Sture, S. (1989). Response of Masonry Bed Joints in Direct Shear. *Journal of Structural Engineering*, 115(9), 2276–96.
- Augenti, N. & Parisi, F. (2010). Constitutive Models for Tuff Masonry under Uniaxial Compression. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 22(11), 1102–11.
- Bagi, K. (2014). When Heyman's Safe Theorem of Rigid Block Systems Fails: Non-Heymanian Collapse Modes of Masonry Structures. *International Journal of Solids and Structures*, 51(14), 2696–2705. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.03.041>
- Baraldi, D., Cecchi, A. & Tralli, A. (2015). Continuous and Discrete Models for Masonry like Material: A Critical Comparative Study. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 50, 39–58. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.10.007>
- Baratta, A. & Corbi, O. (2011). On the Statics of No-Tension Masonry-like Vaults and Shells: Solution Domains, Operative Treatment and Numerical Validation. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 2(2–4), 107–122.
- Barbieri, A., Borri, A., Corradi, M. & Di Tommaso, A. (2002). Dynamic Behaviour of Masonry Vaults Repaired with FRP: Experimental Analysis. , (January), 7–16.
- Basilio, I., Fedele, R., Lourenço, P. B. & Milani, G. (2014). Assessment of Curved FRP-Reinforced Masonry Prisms: Experiments and Modeling. *Construction and Building Materials*, 51, 492–505. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2013.11.011>

- BD 21/01. (2001). *The Assessment of Highway Bridges and Structures*.
- Bednarz, Ł. (2003). Metody Wzmacniania Zabytkowych, Zakrzywionych Konstrukcji Ceglanych. *Wiadomości Konserwatorskie*, 14, 34–42.
- Bednarz, Ł. (2008). Praca Statyczna Zabytkowych, Zakrzywionych Konstrukcji Ceglanych, Poddanych Zabiegom Naprawy i Wzmacniania. *Praca Doktorska, Politechnika Wroclawska*.
- Bednarz, Ł., Górski, A., Jasińko, J. & Rusiński, E. (2011). Simulations and Analyses of Arched Brick Structures. *Automation in Construction*, 20(7), 741–754.
- Bendat, J. S. & Piersol, A. G. (1976). *Metody Analizy i Pomiaru Sygnałów Losowych*. Warszawa.
- Berardi, V. P. & De Piano, M. (2018). On the Statics of Curved Masonry Structures via Numerical Models. *PSU Research Review*, 2(2), 181–188.
- Bertolesi, E., Milani, G., Carozzi, F. G. & Poggi, C. (2018). Ancient Masonry Arches and Vaults Strengthened with TRM, SRG and FRP Composites: Numerical Analyses. *Composite Structures*, 187(October 2017), 385–402. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.021>
- Binda, L., Fontana, A. & Frigerio, G. (1988). Mechanical Behaviour of Brick Masonries Derived from Unit and Mortar Characteristics, in: *8th international brick and block masonry conference*, (pp. 205–16). Dublin.
- Binda, L., Mirabella Roberti, G. & Tiraboschi, C. (1996). Problemi Di Misura Dei Parametri Meccanici Della Muratura e Dei Suoi Componenti, in: *La meccanica delle murature tra teoria e progetto*, (pp. 45–54). Messina.
- Block, P. (2009). Thrust Network Analysis: Exploring Three-Dimensional Equilibrium. *PhD thesis*, 155.
- Block, P., Dejong, M. & Ochsendorf, J. (2006). As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Network Journal*, 8, 13–24.
- Bogusz, W. (1996). *Zarys Historii Architektury*. Warszawa: WSiP.
- de Boor, C. (2001). *A Practical Guide to Splines*.
- Braga, F., Dolce, M. & Masi, A. (1993). Interpretazione Statistica Di Prove Sperimentali per l'accertamento Della Resistenza a Taglio Della Muratura Di Edifici Esistenti, in: *6th Italian conference on earthquake engineering*, (pp. 577–86). Perugia.
- Brigante, D., Rainieri, C. & Fabbrocino, G. (2017). The Role of the Modal Assurance Criterion in the Interpretation and Validation of Models for Seismic Analysis of Architectural Complexes. *Procedia Engineering*, 199, 3404–3409. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.484>
- Broniewski, T. (1990). *Historia Architektury Dla Wszystkich*. Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk: Zakład Narodowy imienia Ossolińskich Wydawnictwo.
- Buckminster Fuller, R. (1962). Tentional Integrity Structures US3139957A Patent.
- Calladine, C. R. (1978). Buckminster Fuller's "Tensegrity" Structures and Clerk Maxwell's Rules for the Construction of Stiff Frames. *International Journal of Solids and Structures*, 14(2), 161–172. Retrieved July 16, 2019, from <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768378900525>
- Calvi, G. M. & Magenes, G. (1991). Experimental Evaluation of Seismic Strength of Old Masonry Structures, in: *9th international brick and block masonry conference*, (pp. 490–7). Berlin.
- Caporale, A., Parisi, F., Asprone, D., Luciano, R. & Prota, A. (2015). Comparative Micromechanical Assessment of Adobe and Clay Brick Masonry Assemblages Based on Experimental Data Sets. *Composite Structures*, 120, 208–220. Retrieved August 5, 2015, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822314004942>
- Casas, J. R. (2009). A Probabilistic Fatigue Strength Model for Brick Masonry under Compression. *Construction and Building Materials*, 23, 2964–2972.
- Casas, J. R. (2011). Reliability-Based Assessment of Masonry Arch Bridges. *Construction and Building Materials*, 25, 1621–1631.
- Cercadillo-García, C. & Fernández-Cabo, J. L. (2016). Analytical and Numerical Funicular Analysis by

Means of the Parametric Force Density Method. *Journal of Applied Research and Technology*, 14(2), 108–124. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.jart.2016.03.001>

- Chaimoon, K. & Attard, M. M. (2007). Modeling of Unreinforced Masonry Walls under Shear and Compression. *Engineering Structures*, 29(9), 2056–2068.
- Conte, C., Rainieri, C., Aiello, M. A. & Fabbrocino, G. (2011). On-Site Assessment of Masonry Vaults: Dynamic Tests and Numerical Analysis | In-Situ Procjena Zidanih Svodova: Dinamička Ispitivanja i Numerička Analiza. *Geofizika*, 28(1).
- Contini, P., Debernardi, P. G. & Palladino, R. (1992). Sul Consolidamento Delle Murature Storiche: La Riquilificazione Strutturale Delle Murature a Sacco Piene, in: *4th ASS.I.R.C.CO conference*, (pp. 501–8). Prato.
- Cooley, J. W. & Tukey, J. W. (1965). An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297–301.
- Corradi, M., Borri, A., Castori, G. & Coventry, K. (2015). Experimental Analysis of Dynamic Effects of FRP Reinforced Masonry Vaults. *Materials*, 8(12), 8059–8071.
- Daou, Y. & Hobbs, B. (1991). Strength of Brickwork Loaded in Different Orientations, in: *9th international brick and block masonry conference*, (pp. 157–63). Berlin.
- Dassault Systèmes Simulia Corp. (2014). Abaqus/CAE 6.14-2.
- Decanini, L. D., Payer, A. & Terzariol, R. (1982). Contribucion Al Establecimiento de Los Indices de Resistencia de La Mamposteria – Resultados Experimentales. *Revista de Ingegneria Estructural*, 1(1), 20–59.
- Dell’Endice, A., Iannuzzo, A., DeJong, M. J., Van Mele, T. & Block, P. (2021). Modelling Imperfections in Unreinforced Masonry Structures: Discrete Element Simulations and Scale Model Experiments of a Pavilion Vault. *Engineering Structures*, 228, 111499. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111499>
- Derakhshan, H. (2011). Seismic Assessment of out of Plane Loaded Unreinforced Masonry Walls. Retrieved from <https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/6576>
- DIN 3055. (1972). *DIN 3055 Steel Wire Ropes; Round Strand Rope 6 × 7*.
- DIN 580. (2010). *DIN 580 : 2010 Lifting Eye Bolts*.
- Drysdale, R. & Hamid, A. (1982). Tensile Strength of Brick Masonry. *International journal of masonry construction*, 2(4), 172–177.
- Emmerich, D. G. (1964). Construction de Réseaux Autotendants FR1377290A Patent.
- Ewing, B. D. & Kowalsky, M. J. (2004). Compressive Behavior of Unconfined and Confined Clay Brick Masonry. *Journal of Structural Engineering*, 130(4), 650–661.
- Ewing, R. D. & Kariotis, J. C. (1981). Methodology for Mitigation of Seismic Hazards in Existing Unreinforced Masonry Buildings: Wall Testing, out-of-Plane. *Methodology for Mitigation of Seismic Hazards in Existing Unreinforced Masonry Buildings: Diaphragm Testing*, Topica Ireport 04.
- Fabbrocino, F. & Carpentieri, G. (2017). Three-Dimensional Modeling of the Wave Dynamics of Tensegrity Lattices. *Composite Structures*, 173, 9–16. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.102>
- Ferrero, C. (2021). Structural Behaviour of Masonry Arches on Moving Supports : From on-Site Observation to Experimental and Numerical Analysis.
- Ferrero, C., Calderini, C. & Roca, P. (2022). Experimental Response of a Scaled Dry-Joint Masonry Arch Subject to Inclined Support Displacements. *Engineering Structures*, 253(November 2021), 113804. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113804>
- Fraddosio, A., Lepore, N. & Piccioni, M. D. (2020). Thrust Surface Method: An Innovative Approach for the Three-Dimensional Lower Bound Limit Analysis of Masonry Vaults. *Engineering Structures*, 202(January 2019), 109846. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109846>



- Fraternali, F., Carpentieri, G., Modano, M., Fabbrocino, F. & Skelton, R. E. (2015). A Tensegrity Approach to the Optimal Reinforcement of Masonry Domes and Vaults through Fiber-Reinforced Composite Materials. *Composite Structures*, 134, 247–254. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.087>
- Frederiksen, V. T. (1992). Membrane Effect in Laterally Loaded Masonry Walls: A Second Order Phenomenon, in: *6th Canadian masonry symposium*, (pp. 537–47). Saskatchewan.
- Fu, F. (2005). Structural Behavior and Design Methods of Tensegrity Domes. *Journal of Constructional Steel Research*, 61(1), 23–35.
- Galassi, S., Misseri, G., Rovero, L. & Tempesta, G. (2018). Failure Modes Prediction of Masonry Voussoir Arches on Moving Supports. *Engineering Structures*, 173(July), 706–717. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.07.015>
- Galassi, S. & Tempesta, G. (2019). The Matlab Code of the Method Based on the Full Range Factor for Assessing the Safety of Masonry Arches. *MethodsX*, 6(May), 1521–1542. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.mex.2019.05.033>
- Garmendia, L., Larrinaga, P., San-Mateos, R. & San-José, J. T. (2015). Strengthening Masonry Vaults with Organic and Inorganic Composites: An Experimental Approach. *Materials & Design*, 85, 102–114. Retrieved from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0264127515300447>
- Geiger, D. H., Stefaniuk, A. & Chen, D. (1986). The Design and Construction of Two Cable Domes for the Korean Olympics. *Proc. of the IASS Symposium on Shells, Membranes and Space Frames*, 2, 265–272.
- Giamundo, V., Sarhosis, V., Lignola, G. P., Sheng, Y. & Manfredi, G. (2014). Evaluation of Different Computational Modelling Strategies for the Analysis of Low Strength Masonry Structures. *Engineering Structures*, 73, 160–169. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.007>
- Gidak, P. & Fresl, K. (2012). Programming the Force Density Method. , 0–7.
- Gilewski, W. & Obara, P. (2015). Applications of Tensegrity Structures in Civil Engineering. , i(TFoCE), 242–248.
- Gilewski, W. & Al Sabouni-Zawadzka, A. (2020). Equivalent Mechanical Properties of Tensegrity Truss Structures with Self-Stress Included. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 83(March), 103998. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103998>
- Giordano, A., Mele, E. & De Luca, A. (2002). Modelling of Historical Masonry Structures: Comparison of Different Approaches through a Case Study. *Engineering Structures*, 24(8), 1057–1069.
- Gołębiowski, M., Lubowiecka, I. & Kujawa, M. (2015). Strength Parameters of Masonry Walls in Modelling Historic Constructions. *Civil And Environmental Engineering Reports*, 18(3), 55–63.
- Gómez Jáuregui, V. (2009). Controversial Origins of Tensegrity, in: Domingo, A. and Lazaro, C. (Eds.), *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*, (pp. 1642–1652). Valencia: Universidad Politecnica de Valencia, Spain.
- Gregory, D. (1697). Catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 19(231), 637–652. Retrieved from <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1695.0114>
- Gruszczyński, M. & Matysek, P. (2011). Ocena Wytrzymałości Murów Ceglanych Na Podstawie Badań Odwiertów Rdzeniowych. *Czasopismo Techniczne*, 3-B/2011(19), 57–69.
- Harish, A. B., Deshpande, S. & Andress, S. R. (2021). *Mathematics of Stable Tensegrity Structures*. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/2101.09616>
- Heartney, E. & Snelson, K. D. (2013). *Art and Ideas*.
- Heyman, J. (1966). The Stone Skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, 2(2), 249–279. Retrieved from <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020768366900187>
- Heyman, J. (1969). The Safety of Masonry Arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 11(4), 363–385.
- Heyman, J. (1995). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge.

- Hojdys, Ł. & Janowski, Z. (2000). Wzmacnianie Sklepień Murowych Siatkami z Włókien Szklanych.
- Hong, S.-W. (2004). The Analysis on the Collapse of the Tallest Gothic Cathedral. *CTBUH 2004 Seoul Conference*, 913–920.
- Huerta, S. (2001). Mechanics of Masonry Vaults: The Equilibrium Approach, in: *Historical Constructions*, (pp. 47–70).
- Huerta, S. (2006). Galileo Was Wrong: The Geometrical Design of Masonry Arches. *Nexus Network Journal*, 8(2), 25–52.
- Iannuzzo, A., Dell’Endice, A., Avelino, R., Kao, G., Van Mele, T. & Block, P. (2021). COMPAS Masonry: A Computational Framework for Practical Assessment of Unreinforced Masonry Structures, in: *12th International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions SAHC 2020*, (pp. 1882–1892).
- International Council on Monuments and Sites. (2003). *ICOMOS CHARTER - Principles for the Analysis, Conservation and Structural Restoration of Architectural Heritage*. Zimbabwe.
- Ismail, N., Lazzarini, D. L. L., Laursen, P. T. T. & Ingham, J. M. M. (2010). Seismic Performance of Face Loaded Unreinforced Masonry Walls Retrofitted Using Posttensioning. *Australian Journal of Structural Engineering*, 11(3), 243–52.
- Janowski, Z., Hojdys, Ł. & Krajewski, P. (2007). Analiza Oraz Naprawa i Rekonstrukcja Sklepień w Obiektach Historycznych, in: *XXIII Konferencja Naukowo-techniczna szczecin- Międzydroje Awarie budowlane*, (pp. 251–260).
- Juan, S. H. & Mirats Tur, J. M. (2008). Tensegrity Frameworks: Static Analysis Review. *Mechanism and Machine Theory*, 43(7), 859–881.
- Jurczakiewicz, S. (2017). Ewolucja Form Systemów Prętowo-Cięgnowych w Architekturze Współczesnej. Retrieved from <https://repozytorium.biblos.pk.edu.pl/resources/26165>
- Jurczakiewicz, S. & Karczmarczyk, S. (2020). Tension-Strut Systems in Conservation of Historical Buildings: Examples of Applications. *Archives of Civil Engineering*, 66(3), 659–671.
- Kamal, O. A., Hamdy, G. A. & El-Salakawy, T. S. (2014). Nonlinear Analysis of Historic and Contemporary Vaulted Masonry Assemblages. *HBRC Journal*, 10(3), 235–246. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.hbrj.2013.11.004>
- Kan, Z., Li, F., Song, N. & Peng, H. (2021). Novel Nonlinear Complementarity Function Approach for Mechanical Analysis of Tensegrity Structures. *AIAA Journal*, 59(4), 1483–1495.
- Karczmarczyk, S., Kawecki, J., Kozioł, K. & Stypuła, K. (2011). Diagnostyka Zabytkowego Kościoła z Uwzględnieniem Wpływu Drgań Komunikacyjnych. *Czasopismo Techniczne*, (19), 153–161.
- Kasprzak, A. (2013). Propozycja Klasyfikacji Konstrukcji Typu Tensegrity. *Proceedings of the 11th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings*, 93–96.
- Kassotakis, N., Vasilis, S., Tamas, F. & Bagi, K. (2017). Discrete Element Modelling of Multi-Ring Brickwork Masonry Arches, in: *13th Canadian Masonry Symposium*. Halifax, Canada.
- Kawahara, R., Baba, A., Mori, A. & Dainobu, T. (2004). Axial Compression Behavior of Burnt Clay Masonry Units and Improving Load Bearing Capacity on Brick Assemblages with Injection Materials, in: *13th international brick and block masonry conference*. Amsterdam.
- Kłosowski, P. (2010). Form-Finding of Textile Hanging Roof of Opera Lesna Open-Air Theatre in Sopot, in: *Shell Structures: Theory and Applications - Proceedings of the 9th SSTA Conference*, (pp. 303–306). CRC Press. Retrieved from <http://www.crcnetbase.com/doi/10.1201/9780203859766.ch68>
- Koch, W. (1996). *Style w Architekturze*.
- Kołodziejczak, J., Gołębiowski, M. & Rucka, M. (2013). Diagnostyka Bramy Nizinnej w Gdańsku w Kontekście Procesu Rewitalizacji. *Budownictwo i Architektura*, 12(3), 255–262.
- Koohestani, K. (2017). On the Analytical Form-Finding of Tensegrities. *Composite Structures*, 166, 114–119. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.059>

- Koohestani, K. & Guest, S. D. (2013). A New Approach to the Analytical and Numerical Form-Finding of Tensegrity Structures. *International Journal of Solids and Structures*.
- Krajewski, P. & Janowski, Z. (2011). Wpływ Rodzaju Materiału Zasywowego Na Pracę Sklepień Walcowych. *Czasopismo Techniczne. Budownictwo*, 108(19), 187–204.
- Kreja, I. (2011). A Literature Review on Computational Models for Laminated Composite and Sandwich Panels. *Central European Journal of Engineering*, 1(1), 59–80.
- Kujawa, M., Lubowiecka, I. & Szymczak, C. (2020). Finite Element Modelling of a Historic Church Structure in the Context of a Masonry Damage Analysis. *Engineering Failure Analysis*, 107, 1–27.
- Laner, F. (1982). Prova Di Resistenza Al Taglio Della Muratura in Laterizio, in: *6th international brick and block masonry conference*, (pp. 335–51). Rome.
- Lemos, J. V. (2007). Discrete Element Modeling of Masonry Structures. *International Journal of Architectural Heritage*, 1(2), 190–213.
- Li, S., Xu, X., Tu, J., Wang, Y. & Luo, Y. (2020). Research on a New Class of Planar Tensegrity Trusses Consisting of Repetitive Units. *International Journal of Steel Structures*, 20(5), 1582–1595. Retrieved from <https://doi.org/10.1007/s13296-020-00392-8>
- Lopez, J., Oller, S., On, E. & Lubliner, J. (1999). A Homogeneous Constitutive Model for Masonry. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 46, 1651–1671.
- Lourenço, P. B. (2001). Analysis of Historical Constructions: From Thrust-Lines to Advanced Simulations. *3rd International Seminar in Historical Constructions, Guimarães, Portugal*, (April), 91–116.
- Lubowiecka, I., Arias, P., Riveiro, B. & Solla, M. (2011). Multidisciplinary Approach to the Assessment of Historic Structures Based on the Case of a Masonry Bridge in Galicia (Spain). *Computers & Structures*, 89(17–18), 1615–1627. Retrieved June 19, 2014, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045794911001301>
- Lubowiecka, I., Armesto, J., Arias, P. & Lorenzo, H. (2009). Historic Bridge Modelling Using Laser Scanning, Ground Penetrating Radar and Finite Element Methods in the Context of Structural Dynamics. *Engineering Structures*, 31(11), 2667–2676. Retrieved May 24, 2014, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S014102960900220X>
- Lyons, R. G. (2006). *Wprowadzenie Do Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów*. Warszawa: Wydawnictwa Komunikacji i Łączności.
- Maia Avelino, R., Iannuzzo, A., Van Mele, T. & Block, P. (2021). Assessing the Safety of Vaulted Masonry Structures Using Thrust Network Analysis. *Computers and Structures*, 257, 106647.
- Malyszko, L. (2004). In Plane Shear and Tensile Strength Tests of Small Brickwork Specimens, in: *4th international conference on structural analysis of historical constructions*, (pp. 291–8). Padova.
- Manteuffel, T. (2005). *Historia Powszechna: Średniowiecze*.
- Marmo, F. (2021). Archlab: A MATLAB Tool for the Thrust Line Analysis of Masonry Arches. *Curved and Layered Structures*, 8(1), 26–35.
- Masłowski, E. & Spiżewska, D. (2000). *Wzmacnianie Konstrukcji Budowlanych*.
- MathWorks. (2016). Matlab R2016a.
- Mattone, R., Pasero, G., Pavano, M., Pistone, G. & Roccati, R. (1982). Prove Sperimentali Su Campioni Di Varie Dimensioni Volte Alla Determinazione Delle Caratteristiche Meccaniche Delle Vecchie Murature, in: *6th international brick and block masonry conference*, (pp. 198–209). Rome.
- Matysek, P. & Witkowski, M. (2013). Badania Wytrzymałości i Odształcalności Xix-Wiecznych Murów Ceglanych, in: *XXVI Konferencja Naukowo-Techniczna Awarie Budowlane*, (pp. 183–190).
- Mayorca, P. & Meguro, K. (2004). Proposal of an Efficient Technique for Retrofitting Unreinforced Masonry Dwellings, in: *13th world conference on earthquake engineering*. Vancouver.
- Melbourne, C., Tomor, A. K. & Wang, J. (2004). Cyclic Load Capacity and Endurance Limit of Multi-Ring Masonry Arches, in: *ARCH'04 – 4th International Conference on Arch Bridges*, (pp. 1–10).

- Meli, R. (1972). Behaviour of Masonry Walls under Lateral Loads, in: *5th world conference on earthquake engineering*, (pp. 853–62). Rome.
- Milani, G. & Bucchini, A. (2010). Kinematic FE Homogenized Limit Analysis Model for Masonry Curved Structures Strengthened by near Surface Mounted FRP Bars. *Composite Structures*, 93(1), 239–258. Retrieved January 9, 2014, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822310001686>
- Milani, G., Rossi, M., Calderini, C. & Lagomarsino, S. (2016). Tilting Plane Tests on a Small-Scale Masonry Cross Vault: Experimental Results and Numerical Simulations through a Heterogeneous Approach. *Engineering Structures*, 123, 300–312. Retrieved from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029616302115>
- Milani, G. & Tralli, A. (2012). A Simple Meso-Macro Model Based on SQP for the Non-Linear Analysis of Masonry Double Curvature Structures. *International Journal of Solids and Structures*, 49(5), 808–834. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.12.001>
- Miller, B., Markiewicz, B. & Ziemiański, L. (2019). Numerical Analysis of Free Vibration of Laminated Thin-Walled Closed-Section Shell Structures, in: *Advanced Structured Materials*, (pp. 479–492).
- Modena, C., Valluzzi, M. R., Tongini Folli, R. & Binda, L. (2002). Design Choices and Intervention Techniques for Repairing and Strengthening of the Monza Cathedral Bell-Tower. *Construction and Building Materials*, 16(7), 385–95.
- Moholy-Nagy, L. (1929). *Von Material Zu Architektur*. Passau.
- Motro, R. (1992). Tensegrity Systems: The State of the Art. *International Journal of Space Structures*, 7(2), 75–83. Retrieved from <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/026635119200700201>
- Motro, R. (2003). *Tensegrity*. Butterworth-Heinemann.
- Murray, P. (1999). *Architektura Włoskiego Renesansu*.
- Nagase, K. & Skelton, R. E. (2014). Minimal Mass Design of Tensegrity Structures. *Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2014*, 9061(June), 90610W.
- Nenadović, A. (2010). Development, Characteristics and Comparative Structural Analysis of Tensegrity Type Cable Domes. *SPATIUM*, 22(22), 57–66.
- Nodargi, N. A. & Bisegna, P. (2020). Thrust Line Analysis Revisited and Applied to Optimization of Masonry Arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 179(January).
- Nowak, R. & Orłowicz, R. (2017). Wzmocnienia Sklepień Ceglanych - Wybrane Zagadnienia. *Inżynier budownictwa*, 1.
- Ochsendorf, J. A. (2002). Collapse of Masonry Structures.
- Page, A. (1978). Finite Element Model for Masonry. *Journal of the Structural Division*, 104(8), 1267–1285. Retrieved May 23, 2014, from <http://cedb.asce.org/cgi/WWWdisplay.cgi?5013957>
- Page, A. (1982). An Experimental Investigation of the Biaxial Strength of Brick Masonry, in: *6th international brick and block masonry conference*, (pp. 3–15). Rome.
- Pastor, M., Binda, M. & Harčarik, T. (2012). Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering*, 48, 543–548.
- Pieper, K. (1983). *Sicherung Historischer Bauten*. Berlin-Monachium.
- Del Piero, G. (1998). Limit Analysis and No-Tension Materials. *International Journal of Plasticity*, 14(1–3), 259–271.
- Pistone, G. & Roccati, R. (1991). Mechanical Characteristics of Masonry Rebuilt with Ancient Bricks and Fresh Mortars, in: *9th international brick and block masonry conference*, (pp. 1473–80). Berlin.
- PN-EN 1015-11:2001. (2001). *Metody Badań Zapraw Do Murów Cz.11: Określenie Wytrzymałości Na Zginanie i Ściskanie Stwardniałej Zaprawy*.
- PN-EN 13411-3. (2009). *Zakończenia Lin Stalowych -- Bezpieczeństwo -- Część 3: Tuleje i Ich Zaciskanie*.
- PN-EN 13782. (2015). *Temporary Structure. Tents. Safety*.

- PN-EN 1996-1-1. (2013). *Eurokod 6. Projektowanie Konstrukcji Murowych. Część 1-1: Reguły Ogólne Dla Zbrojonych i Niezbrojonych Konstrukcji Murowych*.
- PN-EN 772-1+A1. (2015). *Metody Badań Elementów Murowych -- Część 1: Określenie Wytrzymałości Na Ściskanie*.
- Powell, B. & Hodgkinson, H. R. (1976). The Determination of Stress/Strain Relationship of Brickwork, in: *4th international brick and block masonry conference*. Brugge.
- Pugh, A. (1976). *An Introduction to Tensegrity*. Berkeley: University of California Press.
- Quinonez, A., Zessin, J., Nutzel, A. & Ochsendorf, J. (2010). Small-Scale Models for Testing Masonry Structures. *Advanced Materials Research*, 133–134, 497–502. Retrieved from <http://www.scientific.net/AMR.133-134.497>
- Quinteros, R. D., Oller, S. & Nallim, L. G. (2012). Nonlinear Homogenization Techniques to Solve Masonry Structures Problems. *Composite Structures*, 94(2), 724–730. Retrieved January 13, 2014, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822311003503>
- Radzieński, M. (2011). Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów Wibracyjnych w Detekcji Uszkodzeń Elementów Konstrukcji. Retrieved from <http://files/104/Radzieński i in. - 2011 - Cyfrowe przetwarzanie sygnałów wibracyjnych w dete.pdf>
- Ramaglia, G., Lignola, G. P. & Prota, A. (2016). Collapse Analysis of Slender Masonry Barrel Vaults. *Engineering Structures*, 117, 86–100. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.03.016>
- Rastorfer, D. (1988). Structural Gymnastics for the Olympics. *Architectural Record*, (September), 1–5.
- Rawska-Skotniczny, A. & Marynowicz, A. (2016). O Projektowaniu Hal Namiotowych w Kontekście Norm Europejskich. *Inżynieria i Budownictwo*, (March).
- Rhode-Barbarigos, L., Jain, H., Kripakaran, P. & Smith, I. F. C. (2010). Design of Tensegrity Structures Using Parametric Analysis and Stochastic Search. *Engineering with Computers*, 26(2), 193–203.
- Ricci, E., Fraddosio, A., Piccioni, M. D. & Sacco, E. (2019). A New Numerical Approach for Determining Optimal Thrust Curves of Masonry Arches. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 75(January), 426–442. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.02.003>
- Riddington, J. R. & Jukes, P. (1994). A Comparison between Panel, Joint and Code Shear Strength, in: *10th international brick and block masonry conference*, (pp. 1481–90). Calgary.
- Romano, A. & Ochsendorf, J. A. (2010). The Mechanics of Gothic Masonry Arches. *International Journal of Architectural Heritage*, 4(1), 59–82.
- Ronca, P., Franchi, A. & Crespi, P. (2004). Structural Failure of Historic Buildings: Masonry Fatigue Tests for an Interpretation Model, in: *4th international conference on structural analysis of historical constructions*, (pp. 273–9). Padova.
- Rossi, M., Calvo Barentin, C., Van Mele, T. & Block, P. (2017). Experimental Study on the Behaviour of Masonry Pavilion Vaults on Spreading Supports. *Structures*, 11(March), 110–120. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352012417300279>
- Rucka, M., Lachowicz, J. & Zielińska, M. (2016). GPR Investigation of the Strengthening System of a Historic Masonry Tower. *Journal of Applied Geophysics*, 131, 94–102. Retrieved from <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0926985116301434>
- Russo, G., Bergamo, O., Damiani, L. & Lugato, D. (2010). Experimental Analysis of the ‘Saint Andrea’ Masonry Bell Tower in Venice. A New Method for the Determination of ‘Tower Global Young’s Modulus E’. *Engineering Structures*, 32(2), 353–360. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.08.002>
- Ryżyński, W. & Szlendak, J. K. (2011). Konstrukcje Ciężnowo-Prętowe w Lekkich Przekryciach Hal. *Nowoczesne Hale*, (1), 10–15.
- Saadatmanesh, H. (1997). Extending Service Life of Concrete and Masonry Structures with Fiber Composites. *Construction and Building Materials*, 11(5–6), 327–335. Retrieved from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0950061897000548>

- Samarasinghe, W. & Hendry, A. W. (1980). The Strength of Brickwork under Biaxial Tensile and Compressive Stress, in: *7th international symposium on load bearing brickwork*. London.
- Schwarz, B. J. & Richardson, M. H. (1999). Introduction to Operating Deflection Shapes. *CSI Reliability Week*, 121–126. Retrieved from <http://systemplus.co.jp/support/data/techpaper/mescope/tech/29.pdf>
- Senthivel, R. & Lourenço, P. B. (2009). Finite Element Modelling of Deformation Characteristics of Historical Stone Masonry Shear Walls. *Engineering Structures*, 31(9), 1930–1943. Retrieved July 2, 2015, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029609000753>
- Shea, K., Fest, E. & Smith, I. F. C. (2002). Developing Intelligent Tensegrity Structures with Stochastic Search. *Advanced Engineering Informatics*, 16(1), 21–40.
- Shieh-Beygi, B. & Pietruszczak, S. (2008). Numerical Analysis of Structural Masonry: Mesoscale Approach. *Computers & Structures*, 86(21–22), 1958–1973. Retrieved June 3, 2014, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S004579490800148X>
- Sieczkowski, J. & Szołomicki, J. (1999). *Metody Obliczeń Statyczno-Wytrzymałościowych Sklepień w Budowlach Gotyckich*.
- Sima, J. F., Roca, P. & Molins, C. (2011). Nonlinear Response of Masonry Wall Structures Subjected to Cyclic and Dynamic Loading. *Engineering Structures*, 33(6), 1955–1965. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.033>
- Skelton, R. E. & de Oliveira, M. C. (2009). *Tensegrity Systems*.
- Skelton, R. & Longman, A. (2014). *Growth Adapted Tensegrity Structures - A New Calculus for the Space Economy*. Retrieved from <https://www.nasa.gov/content/growth-adapted-tensegrity-structures-a-new-calculus-for-the-space-economy>
- Snelson, K. D. (1965). Continuous Tension, Discontinuous Compression Structure US3169611A Patent.
- SOFiSTiK. (2018). SOFiSTiK 2018.
- Sołtysik, M. J., Nyka, L., Szczepański, J. & Flis, S. (2006). Lekcja Gotyku w Gdańsku. , 22.
- Song, K., Scarpa, F. & Schenk, M. (2022). Form-Finding of Tessellated Tensegrity Structures. *Engineering Structures*, 252(July 2021), 113627. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113627>
- Stockdale, G. & Milani, G. (2019). Diagram Based Assessment Strategy for First-Order Analysis of Masonry Arches. *Journal of Building Engineering*, 22(August 2018), 122–129. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2018.12.002>
- Stratford, T., Pascale, G., Manfroni, O. & Bonfiglioli, B. (2004). Shear Strengthening Masonry Panels with Sheet Glass-Fiber Reinforced Polymer. *Journal Of Composites For Construction*, 8(5), 434–43.
- Szołomicki, J., Berkowski, P. & Barański, J. (2015). Computer Modelling of Masonry Cross Vaults Strengthened with Fiber Reinforced Polymer Strips. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 15(3), 751–766. Retrieved June 26, 2015, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1644966514000855>
- Szymczak, C., Jagiełło, J., Lubowiecka, I., Tomaszewska, A. & Walukiewicz, H. (2004). *Orzeczenie Techniczne Dotyczące Szkodliwości Drgań Wywołanych Ruchem Drogowym Na Konstrukcję Bramy Nizinnej w Gdańsku*. Gdańsk.
- Tarczewski, R. (2011). *Topologia Form Strukturalnych: Naturalne i Tworzone Przez Człowieka Prototypy Form Konstruktoryjnych w Architekturze*.
- Tarczewski, R. (2016). Structural Strengthening of the Adobe Ceremonial Building in North Sudan, in: *Structural Analysis of Historical Constructions: Anamnesis, Diagnosis, Therapy, Controls*, (pp. 1093–1098). CRC Press.
- Tempesta, G. & Galassi, S. (2019). Safety Evaluation of Masonry Arches. A Numerical Procedure Based on the Thrust Line Closest to the Geometrical Axis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 155(October 2018), 206–221. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.02.036>
- Theodossopoulos, D. & Sinha, B. (2013). A Review of Analytical Methods in the Current Design Processes and Assessment of Performance of Masonry Structures. *Construction and Building Materials*, 41, 990–

1001. Retrieved January 13, 2014, from <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0950061812005715>

- Tibert, A. G. & Pellegrino, S. (2003). Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures. *International Journal of Space Structures*, 18(4), 209–223.
- Tibert, G. (2002). Deployable Tensegrity Structures for Space Applications. *Computers and Structures*.
- Tkachuk, A. (2022). Robustness of Rank Minimization Heuristics for Form-Finding of Tensegrity Structures. *Computers & Structures*, 266, 106786. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2022.106786>
- Tkacz, P. (2015). Ocena Wytrzymałości Na Ściskanie Konstrukcji Murowych z Uwzględnieniem Badań in Situ.
- Tomaszewska, A. (2007). Diagnostyka Budowli i Identyfikacja Ich Modeli Jednowymiarowych Przy Wykorzystaniu Oddziaływań Środowiskowych.
- Turoń, B., Ziaja, D. & Miller, B. (2017). Rejestracja i Analiza Pól Przemieszczeń i Odształceń Za Pomocą Systemu Cyfrowej Korelacji Obrazu 3D. *Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, 64, 7–28.
- Tymiński, M. (2016). Nietypowa „ściaga” w Oliwskiej Katedrze. *Wojewódzki Urząd Ochrony Zabytków w Gdańsku*. Retrieved May 27, 2020, from <https://www.ochronazabytkow.gda.pl/uncategorized/nietypowa-sciaga-w-oliwskiej-katedrze/>
- Valluzzi, M. R., Tinazzi, D. & Modena, C. (2002). Shear Behavior of Masonry Panels Strengthened by FRP Laminates. *Construction and Building Materials*, 16, 409–19.
- Vermeltoort, A. T. T. (1992). Mechanical Properties under Compression of Masonry and Its Components, in: *6th Canadian masonry symposium*, (pp. 1433–1442). Saskatoon.
- Verstrynge, E., Schueremans, L., Smars, P. & Van Gemert, D. (2007). Design and Testing of Masonry Arches : A Project of Bachelor Students in Civil Engineering, in: *Proceedings of the 5th International Conference on Arch Bridges (ARCH'07)*, (pp. 351–358).
- Vsesoiuznyĭ nauchno-issledovatel'skiĭ institut tekhnicheskoiĭ estetiki. (1980). Second Spring Exhibition of the Society of Young Artists (ОБМОХУ - Общество Молодых Художников). *Tekhnicheskaiia estetika*, (23), 65.
- Wang, Y. & Senatore, G. (2021). Design of Adaptive Structures through Energy Minimization: Extension to Tensegrity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64(3), 1079–1110.
- Wang, Y., Xu, X. & Luo, Y. (2021). Minimal Mass Design of Active Tensegrity Structures. *Engineering Structures*, 234(December 2020), 111965. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.111965>
- Winkelmann, K., Kłos, F. & Rapca, M. (2018). Experimental Study and Numerical Optimization of Tensegrity Domes - A Case Study. *AIP Conference Proceedings*, 1922(January).
- Wu, L. & Dai, J. S. (2021). A Novel Ortho-Triplex Tensegrity Derived by the Linkage-Truss Transformation with Prestress-Stability Analysis Using Screw Theory. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 143(1), 1–6.
- Xu, X., Wang, Y., Luo, Y. & Hu, D. (2018). Topology Optimization of Tensegrity Structures Considering Buckling Constraints. *Journal of Structural Engineering*, 144(10), 04018173.
- Yi, T., Moon, F. L., Leon, R. T. & Kahn, L. F. (2006). Lateral Load Tests on a Two-Story Unreinforced Masonry Building. *Journal of Structural Engineering*, 132(5).
- Yi, W. H., Oh, S. H. & Lee, J. H. (2004). Shear Capacity Assessment of Unreinforced Masonry Wall, in: *13th world conference on earthquake engineering*. Vancouver.
- Zampieri, P., Amoroso, M. & Pellegrino, C. (2019). The Masonry Buttressed Arch on Spreading Support. *Structures*, 20(September 2018), 226–236. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2019.03.008>
- Zampieri, P., Cavalagli, N., Gusella, V. & Pellegrino, C. (2018). Collapse Displacements of Masonry Arch with Geometrical Uncertainties on Spreading Supports. *Computers and Structures*, 208, 118–129.

Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.07.001>

- Zampieri, Paolo, Faleschini, F., Zanini, M. A. & Simoncello, N. (2018). Collapse Mechanisms of Masonry Arches with Settled Springing. *Engineering Structures*, 156(December 2017), 363–374. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.11.048>
- Zampieri, P., Simoncello, N. & Pellegrino, C. (2018). Structural Behaviour of Masonry Arch with No-Horizontal Springing Settlement. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 12(43), 182–190.
- Zarri, F. (1994). Parametri Di Resistenza e Deformabilita Meccanica Di Murature Di Laterizio. *Costruire in laterizio*, 7(41), 452–5.
- Zhang, J. Y. & Ohsaki, M. (2006). Adaptive Force Density Method for Form-Finding Problem of Tensegrity Structures. *International Journal of Solids and Structures*, 43(18–19), 5658–5673.
- Zhang, J. Y. & Ohsaki, M. (2015). Force Density Method, in: *Tensegrity Structures*. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/978-4-431-54813-3>
- Zhang, L. Y., Zhu, S. X., Li, S. X. & Xu, G. K. (2018). Analytical Form-Finding of Tensegrities Using Determinant of Force-Density Matrix. *Composite Structures*.
- Zhang, Q., Wang, X., Cai, J., Zhang, J. & Feng, J. (2020). Closed-Form Solutions for the Form-Finding of Regular Tensegrity Structures by Group Elements. *Symmetry*, 12(3), 1–17.
- Zhuge, Y., Thambiratnam, D. & Corderoy, J. (1994). Experimental Testing of Masonry Walls under In-Plane Cyclic Loads, in: *10th international brick and block masonry conference*, (pp. 313–22). Calgary.
- Zielińska, M. & Rucka, M. (2018). Non-Destructive Assessment of Masonry Pillars Using Ultrasonic Tomography. *Materials*, 11(12), 1–16.
- Zuo, Z., Gong, J., Huang, Y., Zhan, Y., Gong, M. & Zhang, L. (2019). Experimental Research on Transition from Scale 3D Printing to Full-Size Printing in Construction. *Construction and Building Materials*, 208, 350–360. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.02.171>



## SPIS ILUSTRACJI

Rys. 1	Skarbiec Atreusza w Mykenach – rzut i przekrój .....	5
Rys. 2	Panteon w Rzymie .....	6
Rys. 3	Kościół Mądrości Bożej — przekrój podłużny .....	6
Rys. 4	Kopuła katedry Santa Maria del Fiore we Florencji – rzut, przekrój schematyczny widok .....	7
Rys. 5	Przekrój przez bazylikę św. Piotra na Watykanie (rekonstrukcja projektu Michała Anioła) .....	8
Rys. 6	Rzut kościoła San Carlo alle Quattro Fontane .....	9
Rys. 7	Trójwarstwowa kopuła Panteonu w Paryżu .....	10
Rys. 8	Sklepienie klasztorne (a) oraz sklepienie krzyżowe (b) .....	11
Rys. 9	Rzut katedry w Spirze .....	11
Rys. 10	Schemat łuków gotyckich .....	12
Rys. 11	Rzuty sklepień gotyckich – od lewej: krzyżowo-żebrowe, gwiazdźiste, kryształowe .....	12
Rys. 12	Rzut katedry w Reims .....	13
Rys. 13	Rzut katedry w Beauvais, zaznaczono zrealizowany fragment gmachu .....	13
Rys. 14	Konstrukcje przestrzenne Karla logansona (VNIITE 1980) .....	18
Rys. 15	Ilustracje „konstrukcji sieci samonapężających się” z patentu (Emmerich 1964) .....	19
Rys. 16	Ilustracja "konstrukcji o uciąglonym napięciu, nieciąglym ściskaniu z patentu (Snelson 1965) .....	20
Rys. 17	Kenneth Snelson, X-piece, 1948, drewno i nylon, 29 x 4,5 x 4,5cm (Heartney and Snelson 2013) .....	21
Rys. 18	Konstrukcja tensegrity przedstawiona w patencie (Buckminster Fuller 1962) .....	22
Rys. 19	Elementary equilibrium Davida Georgesa Emmericha .....	23
Rys. 20	Kenneth D. Snelson: a) Needle Tower; 1968; aluminium i stal nierdzewna; 18,2 x 6 x 6m; Hirshhorn Museum and Sculture Garden, Waszyngton USA; b) Needle Tower II; 1969; aluminium i stal nierdzewna; 30 x 6 x 6m; Kröller-Müller Museum Otterlo, Holandia .....	24
Rys. 21	Igła Snelsona zbudowana przez KN Forever Young na Bałtycki Festiwal Nauki .....	25
Rys. 22	Kładka Kurilpa w Brisbane (Australia) .....	25
Rys. 23	Rzut i kład kopuł tensegrity: a) kopuła Fullera; b) kopuła Geigera .....	26
Rys. 24	Widok aksonometryczny kopuły nad halą gimnastyki w Seulu .....	27
Rys. 25	Schemat wznoszenia kopuł tensegrity .....	28
Rys. 26	Rzut oraz kład schematu konstrukcji namiotów tensegrity w typoszeregu opracowanym przez autora. ....	29
Rys. 27	Rzut schematu konstrukcji prototypu. ....	31
Rys. 28	Schemat wypiętrzania i wnoszenia namiotu o powierzchni 160m <sup>2</sup> . ....	32
Rys. 29	Łuk kolisty pod ciężarem własnym – graniczne (maksymalna i minimalna) linie ciśnień. ....	35
Rys. 30	Modelowanie murów: a) mikro-, b) mezo- oraz c) makro-modelowanie .....	38
Rys. 31	Elementarna Komórka Muru – wymiary .....	40
Rys. 32	Elementarna Komórka Muru – równowaga naprężeń w poszczególnych stanach .....	41
Rys. 33	Panel ceglany badany przez (Page 1978), wymiary w [cm] .....	44
Rys. 34	Makromodele panelu ceglano, siatka i naprężenia maksymalne przy gęstości siatki a) 40, b) 20, c) 10 i d) 5 mm .....	45
Rys. 35	Wykresy naprężeń głównych wzdłuż linii środkowej tarczy murowej .....	45
Rys. 36	Szkic stanowiska badawczego [mm] .....	54
Rys. 37	Budowa sklepienia z przyporami .....	55
Rys. 38	Badane sklepienie .....	56
Rys. 39	Ściągi po dociągnięciu – przyspieszenia w czasie oraz widmo mocy drgań .....	57
Rys. 40	Próbka zaprawy poddana zginaniu w trakcie oraz po badaniu .....	58
Rys. 41	Próbka zaprawy poddana ściskaniu w trakcie oraz po badaniu .....	59
Rys. 42	Wykresy zależności naprężeń od odkształceń ( $\sigma(\epsilon)$ ) badanych próbek zaprawy .....	62
Rys. 43	Badanie cegieł pełnych .....	62
Rys. 44	Wykres zależności naprężeń od odkształceń ( $\sigma(\epsilon)$ ) badanych cegieł .....	63
Rys. 45	Schemat obciążenia sklepienia .....	64
Rys. 46	Schemat umiejscowienia akcelerometrów na sklepieniu oraz opis elementów sklepienia. ....	65
Rys. 47	Sklepienie przed i w trakcie badań .....	65
Rys. 48	Wzmacniacz i komputer rejestrujący przyspieszenia oraz akcelerometr. ....	66
Rys. 49	Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 1 i 13 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy. ....	67
Rys. 50	Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 3 i 14 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy. ....	67

Rys. 51	Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 5 i 15 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy. ....	68
Rys. 52	Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 5 i 15 (przyspieszenia w tym samym kierunku) – funkcja przyspieszeń nie poddana filtracji: przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy.....	68
Rys. 53	Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 7 i 16 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy. ....	69
Rys. 54	Odpowiedź dynamiczna sklepienia w zarejestrowana w punktach 10 i 12 (przyspieszenia w tym samym kierunku): przyspieszenia w czasie a) i b), gęstość widmowa mocy c) i d), funkcja koherencji e) oraz wzajemna gęstość widmowa mocy. ....	69
Rys. 55	Odpowiedź dynamiczna sklepienia (wzbudzenie sweep'em 1-10 Hz): a) koherencja i b) wzajemna gęstość widmowa mocy analizowanych par punktów.....	70
Rys. 56	Odpowiedź dynamiczna sklepienia (wzbudzenie sweep'em 5-15 Hz): a) koherencja i b) wzajemna gęstość widmowa mocy analizowanych par punktów.....	70
Rys. 57	Odpowiedź dynamiczna sklepienia (wzbudzenie białym szumem): a) koherencja i b) wzajemna gęstość widmowa mocy analizowanych par punktów.....	71
Rys. 58	Przybliżone postacie drgań własnych sklepienia estymowane na podstawie badań doświadczalnych. ....	72
Rys. 59	Model trójwymiarowy sklepienia w programie AutoCAD. ....	73
Rys. 60	Mikromodel sklepienia w programie Abaqus/CAE 6.14-2. ....	73
Rys. 61	Makromodel sklepienia w programie Abaqus/CAE 6.14-2. ....	75
Rys. 62	Rzut wykresu MAC badanego sklepienia kolebkowego.....	79
Rys. 63	Wykres MAC badanego sklepienia kolebkowego w widoku aksonometrycznym .....	79
Rys. 64	Wynik symulacji w Dassault Systemes SIMULIA Isight w postaci uzyskanych pierwszych częstotliwości drgań własnych sklepienia w zależności od siły w zawłoce i modułu Younga muru; a) w aksnonometrii, b) w rzucie na płaszczyznę (z zaniedbaniem siły w zawłoce). ....	80
Rys. 65	Wynik symulacji w Dassault Systemes SIMULIA Isight w postaci wykresu trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych sklepienia w funkcji modułu Younga zhomogenizowanego muru. Zaznaczono średnią wartość modułu Younga zhomogenizowanego muru. ....	81
Rys. 66	Punkty przyłożenia obciążenia i rejestrowania przemieszczeń w badaniu statycznym namiotu o powierzchni 160 m <sup>2</sup> . ....	82
Rys. 67	Wykresy przemieszczeń punktów kopuły w zależności od początkowego naciągu cięgna .....	83
Rys. 68	Punkty wzbudzenia oraz rejestrowania przyspieszeń w badaniu dynamicznym namiotu o powierzchni 160 m <sup>2</sup> . ....	84
Rys. 69	Przemieszczenia wybranych punktów konstrukcji tensegrity – porównanie wyników badania oraz analiz numerycznych. ....	84
Rys. 70	Pierwsza postać drgań własnych uzyskana w modelu numerycznym; $f_1=2,96$ Hz (naciąg zewnętrznego cięgna obwodowego 500 kg). ....	86
Rys. 71	Wynik wzbudzenia w punkcie <i>a</i> , zarejestrowany w punktach 3 i 4. Przyspieszenia w funkcji czasu, gęstość widmowa mocy w funkcji częstotliwości; funkcja koherencji oraz wzajemna gęstość widmowa mocy. ....	87
Rys. 72	Wynik wzbudzenia w punkcie <i>d</i> , zarejestrowany w punktach 3 i 5. Przyspieszenia w funkcji czasu, gęstość widmowa mocy w funkcji częstotliwości oraz funkcja koherencji i wzajemna gęstość widmowa mocy. ....	87
Rys. 73	Modal Assurance Criterion MAC dla wektorów drgań własnych uzyskanych w eksperymencie oraz w modelu numerycznym.....	88
Rys. 74	Propozycja wzmocnienia tensegrity na przykładzie sklepienia na skrzyżowaniu naw kościoła NMP w Gdańsku (czerwone – cięgna "radialne", zielone – cięgna "obwodowe", niebieskie – pręty pionowe).....	90
Rys. 75	Schemat węzła pręt tensegrity – zwornik, w aksonometrii i przekroju, z zaznaczonym proponowanym wzmocnieniem matą kompozytową (Bednarz 2003). ....	92
Rys. 76	Wzmocnienie sklepienia w skali technicznej; odcinki czerwone – cięgna, niebieskie – pręty .....	93
Rys. 77	Pręt wzmocnienia tensegrity z widoczną konstrukcją węzłów. ....	94
Rys. 78	Badane sklepienie w skali technicznej (zdjęcie oraz zdjęcie z uwidocznionym schematem kratownicy tensegrity).....	94
Rys. 79	Szkic przybliżonej postaci badanego sklepienia (wartości przemieszczeń zwiększono 3 krotnie): a) całe sklepienie, b) powiększenie klucza sklepienia. ....	95
Rys. 80	Schemat działania wzmocnienia tensegrity w sklepieniu. ....	96
Rys. 81	Badane sklepienie ze wzmocnieniem, obciążenie 2x400kg, widoczne pęknięcie. ....	97
Rys. 82	Szkic przybliżonej postaci badanego, uszkodzonego sklepienia (wartości przemieszczeń zwiększono 2 krotnie) .....	98

Rys. 83	Warunki brzegowe w modelu numerycznym wzmocnionego sklepienia (51750 bryłowych ES). .....	99
Rys. 84	Model numeryczny (51750 bryłowych ES) sklepienia wzmocnionego i sklepienia bez wzmocnienia: a) bez obciążenia, b) obciążonego za pośrednictwem trawersu. ....	100
Rys. 85	Przemieszczenia punktów sklepienia wzmocnionego i bez wzmocnienia pod wpływem ciężaru własnego [mm]. .....	100
Rys. 86	Wartości przemieszczeń węzłów sklepienia wzmocnionego zmodyfikowaną strukturą tensegrity oraz bez wzmocnienia [mm]. ....	101
Rys. 87	Porównanie przybliżonych wykresów przemieszczeń klucza badanego sklepienia otrzymanych w eksperymencie oraz z modeli numerycznych (wartości przemieszczeń zwiększono 3 krotnie): a) sklepienie bez wzmocnienia, b) sklepienie wzmocnione tensegrity. ....	101
Rys. 88	Widok aksonometryczny sklepienia krzyżowego wzmocnionego strukturą tensegrity. ....	103
Rys. 89	Widok, rzut oraz mapa przemieszczeń [mm] pod obciążeniem ciężarem własnym sklepień: a) krzyżowego; b) i c) krzyżowego ze wzmocnieniem tensegrity 5 prętami w dwóch konfiguracjach; d) krzyżowego ze wzmocnieniem tensegrity 9 prętami. ....	104
Rys. 90	Rusztowania wsporcze w kościele św. Mikołaja w Gdańsku. ....	106
Rys. 91	Wymiary sklepienia badanego w (Corradi et al. 2015) .....	113
Rys. 92	Pierwsza (a) i druga (b) postać drgań własnych wg opracowania autora. ....	114
Rys. 93	Pierwsza postać drgań własnych uzyskana w modelu sklepienia krzyżowego na podstawie badania (Atamturktur et al. 2011) .....	114

## PRAWA AUTORSKIE DO ILUSTRACJI

Tab. 30 Prawa autorskie do ilustracji.

Rys. 1	domena publiczna (1879): Penn State University Libraries; <a href="https://flic.kr/p/9TuMVS">https://flic.kr/p/9TuMVS</a>
Rys. 2	domena publiczna (1908): Wilhelm Lübke, Max Semrau: Grundriß der Kunstgeschichte. Paul Neff Verlag, Esslingen; <a href="https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Pantheon.drawing.jpg">https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Pantheon.drawing.jpg</a>
Rys. 3	domena publiczna
Rys. 4	domena publiczna: Santa Maria del Fiore Cupola, Schematic plan and view, Eugène Duchesne (Moyen Age et Renaissance, Vol.II, ed. D'Espouy, 1925)
Rys. 5	domena publiczna: rekonstrukcja projektu Michała Anioła wykonana przez Étienne du Pérac (Dupérac) (1535-1604)
Rys. 6	domena publiczna: grafika Sebastiano Giannini: San Carlo alle Quattro Fontane, ok. 1730
Rys. 7	domena publiczna: Pierre Chabat, Dictionnaire des termes employés dans la construction, Ve A. Morel et Cie, Paris, 1881
Rys. 8	opracowanie własne
Rys. 9	domena publiczna: Die kirchliche Baukunst des Abendlandes (Atlas 1): Tafel 1 – 116; tablica nr 48 Stuttgart, (1887) Georg Dehio, Gustav von Bezold; <a href="https://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/dehio1887atlas1/0056">https://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/dehio1887atlas1/0056</a>
Rys. 10	opracowanie własne
Rys. 11	opracowanie własne
Rys. 12	domena publiczna: <i>Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle</i> (Słownik francuskiej architektury od 11 do 16 wieku) (1856) Eugène Viollet-le-Duc (1814-1879)
Rys. 13	domena publiczna: <i>Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle</i> (Słownik francuskiej architektury od 11 do 16 wieku) (1856) Eugène Viollet-le-Duc (1814-1879)
Rys. 14	Dušan Barok <a href="http://www.monoskop.org/File:loganson_Karl_1921_Spatial_Constructions.jpg">www.monoskop.org/File:loganson_Karl_1921_Spatial_Constructions.jpg</a> dostęp:2019.07.30
Rys. 15	zgłoszenie patentowe (Emmerich, 1964)
Rys. 16	zgłoszenie patentowe (Snelson, 1965)
Rys. 17	(Heartney & Snelson, 2013)
Rys. 18	zgłoszenie patentowe (Buckminster Fuller, 1962)
Rys. 19	opracowanie własne
Rys. 20	(Heartney & Snelson, 2013)
Rys. 21	opracowanie własne
Rys. 22	Paul Guard - Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0)
Rys. 23	opracowanie własne
Rys. 24	(Rastorfer, 1988)
Rys. 25	opracowanie własne
Rys. 26	opracowanie własne
Rys. 27	opracowanie własne
Rys. 28	opracowanie własne
Rys. 29	opracowanie własne na podstawie (Heyman, 1966)
Rys. 30	opracowanie własne
Rys. 31	opracowanie własne
Rys. 32	opracowanie własne
Rys. 33	opracowanie własne na podstawie (Page, 1978)
Rys. 34	opracowanie własne
Rys. 35	opracowanie własne
Rys. 36	opracowanie własne
Rys. 37	opracowanie własne
Rys. 38	opracowanie własne
Rys. 39	opracowanie własne
Rys. 40	opracowanie własne
Rys. 41	opracowanie własne
Rys. 42	opracowanie własne
Rys. 43	opracowanie własne
Rys. 44	opracowanie własne
Rys. 45	opracowanie własne

Rys. 46	opracowanie własne
Rys. 47	opracowanie własne
Rys. 48	opracowanie własne
Rys. 49	opracowanie własne
Rys. 50	opracowanie własne
Rys. 51	opracowanie własne
Rys. 52	opracowanie własne
Rys. 53	opracowanie własne
Rys. 54	opracowanie własne
Rys. 55	opracowanie własne
Rys. 56	opracowanie własne
Rys. 57	opracowanie własne
Rys. 58	opracowanie własne
Rys. 59	opracowanie własne
Rys. 60	opracowanie własne
Rys. 61	opracowanie własne
Rys. 62	opracowanie własne
Rys. 63	opracowanie własne
Rys. 64	opracowanie własne
Rys. 65	opracowanie własne
Rys. 66	opracowanie własne
Rys. 67	opracowanie własne
Rys. 68	opracowanie własne
Rys. 69	opracowanie własne
Rys. 70	opracowanie własne
Rys. 71	opracowanie własne
Rys. 72	opracowanie własne
Rys. 73	opracowanie własne
Rys. 74	opracowanie własne
Rys. 75	opracowanie własne
Rys. 76	opracowanie własne
Rys. 77	opracowanie własne
Rys. 78	opracowanie własne
Rys. 79	opracowanie własne
Rys. 80	opracowanie własne
Rys. 81	opracowanie własne
Rys. 82	opracowanie własne
Rys. 83	opracowanie własne
Rys. 84	opracowanie własne
Rys. 85	opracowanie własne
Rys. 86	opracowanie własne
Rys. 87	opracowanie własne
Rys. 89	opracowanie własne
Rys. 90	zdjęcia udostępnione dzięki uprzejmości oo. Dominikanów w Gdańsku
Rys. 91	opracowanie własne na podstawie (Corradi et al., 2015)
Rys. 92	opracowanie własne
Rys. 93	opracowanie własne

## SPIS TABEL

Tab. 1	Wymiary cegieł gotyckich w Polsce wg (Sieczkowski and Szołomicki 1999) .....	4
Tab. 2	Zestawienie największych kopuł tensegrity .....	26
Tab. 3	Zestawienie podstawowych parametrów namiotów w typoszeregu opracowanym przez autora. ....	29
Tab. 4	Zestawienie charakterystycznych parametrów wagowych namiotów tensegrity. ....	33
Tab. 5	Obliczenia sił w ściągach.....	56
Tab. 6	Zestawienie wyników badania wytrzymałości na zginanie próbek zaprawy. ....	59
Tab. 7	Zestawienie wyników badania wytrzymałości na ściskanie próbek zaprawy .....	60
Tab. 8	Moduł sprężystości podłużnej zaprawy. ....	61
Tab. 9	Zestawienie wyników badania cegieł .....	63
Tab. 10	Częstotliwości własne sklepienia w skali technicznej estymowane na podstawie eksperymentu. ....	71
Tab. 11	Podstawowe parametry komponentów muru przyjęte w modelu numerycznym * – wartość normowa wytrzymałości na ściskanie cegły klasy 15. ....	74
Tab. 12	Podstawowe parametry zhomogenizowanego muru.....	74
Tab. 13	Zestawienie przemieszczeń sklepienia przy obciążeniu ciężarem własnym oraz postaci i częstotliwości drgań własnych mikro- i makromodelu. ....	76
Tab. 14	Porównanie częstotliwości własnych [Hz] badanego sklepienia wyznaczonych z makromodelu oraz uzyskanych w eksperymencieeksperymentalnie. ....	77
Tab. 15	Porównanie postaci drgań własnych wyznaczonych numerycznie i eksperymentalnie. ....	78
Tab. 16	Tabela MAC analizowanego sklepienia kolebkowego. ....	78
Tab. 17	Zestawienie wartości średniej, odchylenia standardowego oraz współczynnika zmienności analizowanych parametrów. ....	81
Tab. 18	Błąd względny numerycznie wyznaczonych przemieszczeń punktów R1, R2 oraz R3; obciążenie punktów po 50 kg. ....	85
Tab. 19	Modal Assurance Criterion wektorów drgań własnych uzyskanych w eksperymencie oraz w modelu numerycznym.....	88
Tab. 20	Wartości przemieszczeń punktów pomiarowych zarejestrowanych dla sklepienia bez wzmocnienia i wzmocnionego. ....	95
Tab. 21	Wartości przemieszczeń punktów pomiarowych zarejestrowanych w uszkodzonym sklepieniu ze wzmocnieniem. ....	96
Tab. 22	Maksymalne i minimalne przemieszczenia w modelach numerycznych sklepienia (obciążenie trawersem) o różnych liczbach bryłowych ES. ....	99
Tab. 23	Porównanie przemieszczeń punktów pomiarowych uzyskanych w eksperymencie z wartościami z symulacji zachowania modelu numerycznego dla 51750 bryłowych elementów skończonych. ....	102
Tab. 24	Parametry wytrzymałościowe cegieł historycznych, zestawienie na podstawie (Caporale et al. 2015) .....	110
Tab. 25	Parametry wytrzymałościowe zaprawy cementowej, zestawienie na podstawie (Caporale et al. 2015) ....	111
Tab. 26	Parametry wytrzymałościowe zaprawy cementowo-wapiennej, zestawienie na podstawie (Caporale et al. 2015) .....	111
Tab. 27	Parametry wytrzymałościowe zaprawy wapiennej, zestawienie na podstawie (Caporale et al. 2015).....	111
Tab. 28	Częstotliwości własne sklepienia (Corradi et al. 2015) porównane z obliczeniami Autora .....	113
Tab. 29	Porównanie częstotliwości drgań własnych.....	115
Tab. 30	Prawa autorskie do ilustracji. ....	130