

Dr inż. MAREK WESOŁOWSKI (ORCID: 0000-0002-8273-2066)
 Mgr inż. MACIEJ TOMASZ SOLARCZYK (ORCID: 0000-0001-6070-0736)
 Politechnika Gdańska
 Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Schemat powstawania rys na przykładzie osiowo rozciąganej pręta żelbetowego

Scheme of crack formation on the example of an axially tension reinforced concrete bar

STRESZCZENIE: W artykule przedstawiono w sposób schematyczny ideę powstawania kolejnych rys w konstrukcjach żelbetowych na przykładzie osiowo rozciąganej pręta. Opisano początkowy oraz końcowy stan zarysowania. Wyprowadzono wzór na szerokość rysy. Przedstawiono interpretację geometryczną rys dla fazy początkowego zarysowania oraz efekt „tension stiffening” na przykładzie elementu osiowo rozciąganej. Zamieszczono przykładowe obliczenia miary efektu „tension stiffening”, szerokości rys oraz średnich naprężeń przyczepności dla fazy początkowych rys.

Słowa kluczowe: rysy, konstrukcje żelbetowe, efekt „tension stiffening”, pręt osiowo rozciągany.

ABSTRACT: The paper presents in a schematic way the idea of the formation of cracks in reinforced concrete structures on the example of an axially tension bar. The initial and final state of the cracks was described. A formula for the width of the crack was derived. The geometric interpretation of cracks for the initial cracking phase and the tension stiffening effect were presented on the example of an axially tension element. Examples of calculations of the tension stiffening effect, crack width and average adhesion stresses for the initial crack phase were presented.

Keywords: cracks, reinforced concrete structures, tension stiffening, axially tension bar.

Problematyka wyjaśnienia procesu zarysowania w konstrukcjach żelbetowych ma swoją długą historię, czego wyrazem były także próby znalezienia adekwatnych modeli obliczeniowych, prezentowane niejednokrotnie w literaturze specjalistycznej. Na gruncie polskim można tu przykładowo podać klasyczne już dziś prace [1-4], oparte w dużej mierze na wynikach badań wielu ośrodków światowych. W zakresie analiz teoretycznych, pozwalających na wiele praktycznych zastosowań, podstawowe do dziś jest dzieło P. Noakowskiego i H.G. Schäfera [5], podsumowujące rezultaty wielu lat badań w ośrodkach niemieckich. Mimo to powyższa tematyka ciągle jest przedmiotem analiz, czego przykładem mogą być prace [6] oraz [7] lub [8], w której autorzy opisali kwestię rozstawu rys w konstrukcjach żelbetowych w ujęciu normowym według PN-EN 1992-1-1:2008 oraz PN-B 03264:2002.

W niniejszej publikacji autorzy opisali kwestię określania rozstawu i szerokości rys w konstrukcjach żelbetowych w ujęciu teorii sztywnościowej, zaprezentowanej w pracy [5], wskazując na praktyczne konsekwencje przyjęcia określonych związków przyczepnościowych na styku stali z betonem, przyjmując do analiz podstawowy problem rozciąganej osiowo pręta żelbetowego.

Wprowadzenie

W elemencie rozciągany osiowo siłą N , na skutek działania na jego końcach naprężeń przyczepności τ_b , w miarę oddalania się od jego czoła następuje stopniowy wzrost naprężeń rozciągających w betonie (σ_c), czemu towarzyszy adekwatny spadek naprężeń w stali (σ_s). W pewnej odległości od czoła elementu naprężenia σ_c oraz σ_s się stabilizują. Tę odległość (a_b), w obrębie której występują naprężenia przyczepności – co skutkuje zmianami się naprężeń w betonie i stali – nazywamy odcinkiem przyczepności (długością zakotwienia). Odcinek a_b bywa także nazywany długością strefy odprężenia, na tej bowiem długości naprężenia w betonie maleją do zera.

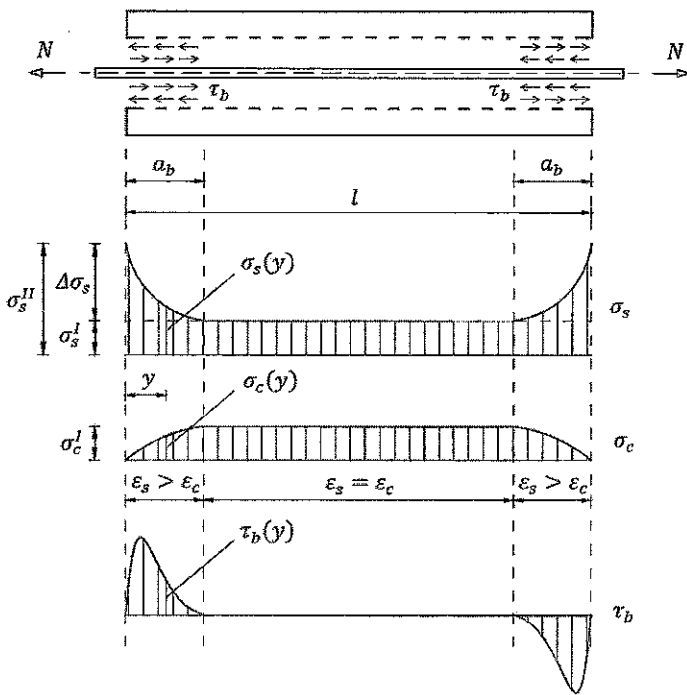
Dla $N < N_{cr}$ (N_{cr} – siła rysująca) – faza I – rys. 1.

Dla $N = N_{cr}$ w najszerszym przekroju powstaje pierwsza rysa (na przykład w miejscu pokazanym na rys. 2).

Kiedy proces powstawania nowych rys się zakończy? Możliwe są dwa przypadki graniczne:

- przypadek 1. (rys. 3);
- przypadek 2. (rys. 4).

Podany schemat przypadku 2. (rys. 4) dotyczy sytuacji idealnie jednorodnego betonu, dla którego dodatkowa rysa powstaje dokładnie w połowie długości, między rysami



Rys. 1. Schemat osiowo rozciąganej pręta żelbetowego

istniejącymi. Z uwagi na nieuchronną losowość wytrzymałości betonu na rozciąganie, w rzeczywistości można często zaobserwować powstawanie dodatkowej rysy poza środkowym obszarem między istniejącymi rysami. W wyniku tego ostateczna minimalna odległość między rysami ($s_{r,min}$) może być mniejsza niż połowa odcinka między rysami istniejącymi ([1], str. 30), jednakże towarzyszy temu sąsiadująca odległość między rysami odpowiednio większa. W tym kontekście można uznać, że średnio minimalna odległość między rysami wynosi a_b .

Tak więc do celów praktycznych można ostatecznie przyjąć ([5], str. 38):

a) maksymalny możliwy rozstaw rys: $s_{r,max} = 2a_b$;

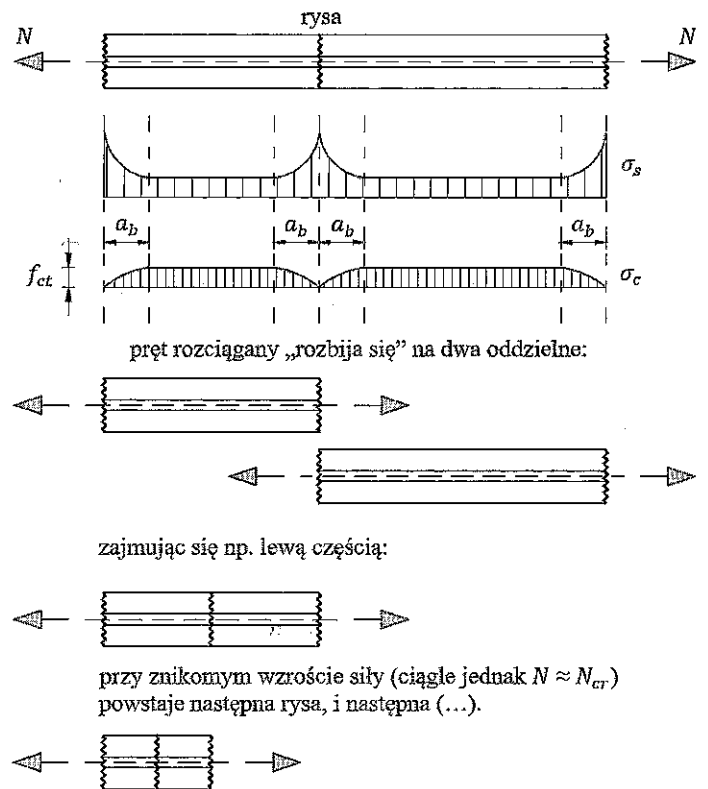
b) minimalny możliwy rozstaw rys: $s_{r,min} = a_b$;

c) średni rozstaw rys: $s_{r,m} = 0,5(s_{r,max} + s_{r,min}) = 0,5(2a_b + a_b) = 1,5a_b$.

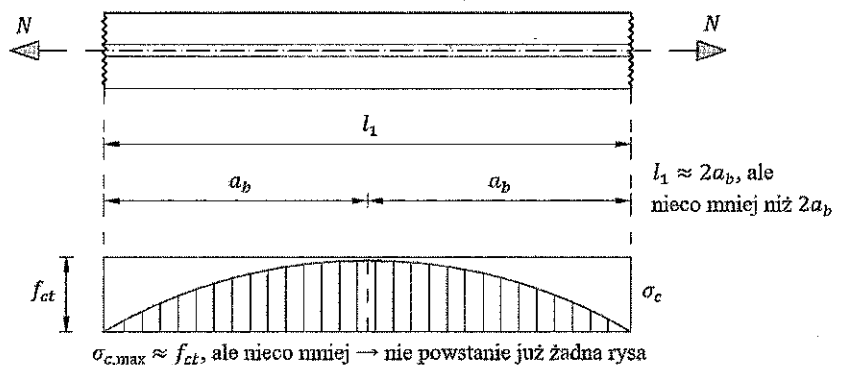
Dla $N > N_{cr}$ jest to faza ustabilizowanego zarysowania, dla której przyrosty odkształceń pręta żelbetowego realizują się głównie w rysach (powodując ich sukcesywne poszerzanie się). Dlatego też tempo narastania tych odkształceń można praktycznie przyjąć jak dla czystej fazy II, czyli nagiego, odsłoniętego pręta zbrojeniowego. Należy także zauważyć, że na całym odcinku między rysami nie jest zachowana zasada Bernoulliego (płaskich przekrojów).

Z uwagi na podaną wyżej specyfikę powstawania rys, wyodrębnia się dwa etapy:

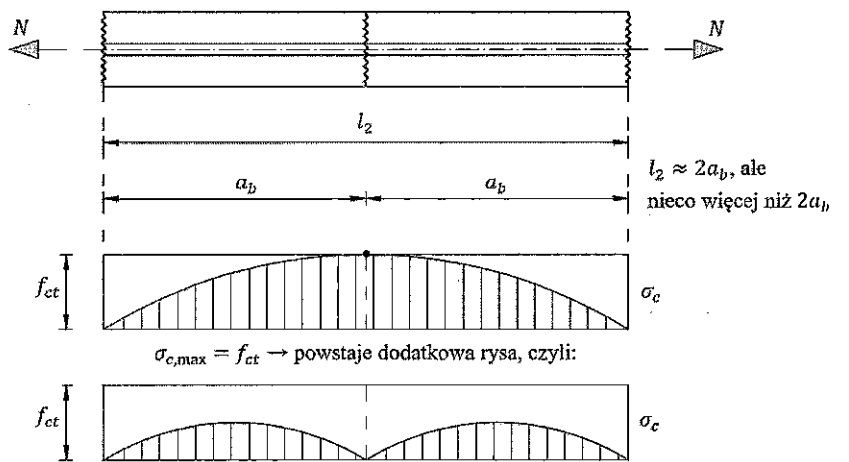
1) etap 1. – początkowy stan zarysowania (niem. Erstrisszustand), gdy powstające rysy



Rys. 2. Schemat powstawania kolejnych rys w osiowo rozciąganej pręcie żelbetowym



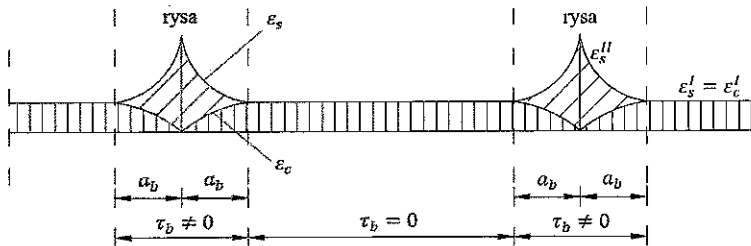
Rys. 3. Przypadek 1. zakończenia procesu powstawania nowych rys w osiowo rozciąganej pręcie żelbetowym



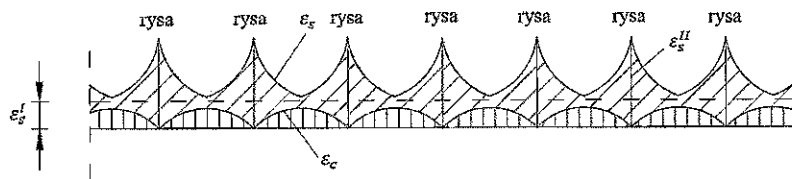
Rys. 4. Przypadek 2. zakończenia procesu powstawania nowych rys w osiowo rozciąganej pręcie żelbetowym

są tak odległe od siebie, że odcinki przyczepności a_b nie zachodzą na siebie (rys. 5);

2) etap 2. – końcowy stan zarysowania (niem. Endriszustand), który jest stanem rozwiniętych rys (nowe już nie mogą powstać), odcinki przyczepności a_b zachodzą na siebie (rys. 6), a na całej długości elementu $\tau_b \neq 0$ oraz $\varepsilon_s \neq \varepsilon_c$.



Rys. 5. Etap 1. powstawania rys (początkowy stan zarysowania)



Rys. 6. Etap 2. powstawania rys (końcowy stan zarysowania)

Poślizg zbrojenia względem betonu

Jak wiadomo, całkowity poślizg zbrojenia względem otaczającego go betonu w odległości y od początku odcinka przyczepności, podany w funkcji odkształceń jednostkowych stali i betonu może być wyrażony wzorem ([5], str. 35)

$$\delta(y) = \int_0^y [\varepsilon_s(y) - \varepsilon_c(y)] dy. \quad (1)$$

Zdefiniowanie poślizgu w powyższym ujęciu jest dlatego tak istotne, że poślizg jest miarą zróżnicowania odkształceń stali (ε_s) i betonu (ε_c) na długości dowolnego odcinka, a właśnie owo zróżnicowanie determinuje szerokość powstałej rysy (w_r). Opisując sprawę jeszcze inaczej, można powiedzieć, że szerokość rysy jest sumą cząstkowych wartości poślizgu zbrojenia względem betonu, zebranych z odpowiedniego odcinka przyczepności ([5], str. 107).

W tym kontekście, przypatrując się otrzymanej zależności opisującej poślizg $\delta(y)$, można uznać, że w interpretacji geometrycznej miarą szerokości rysy będzie różnica pól pod krzywymi $\varepsilon_s(y)$ oraz $\varepsilon_c(y)$, co pokazano na rys. 7, dla sytuacji tuż po powstaniu pierwszej rysy ([1], str. 29).

Tak więc w tym przypadku szerokość pierwszej rysy wynika z sumarycznego poślizgu na odcinkach przyczepności z obu stron rysy (bo poza tym obszarem odkształcenia stali i betonu są z definicji równe, gdyż jest tam faza I, niewpływająca na szerokość rysy). Mamy więc

$$w_r = 2\delta_{\max} = 2 \int_0^{a_b} [\varepsilon_s(y) - \varepsilon_c(y)] dy = 2 \left[\int_0^{a_b} \varepsilon_s(y) dy - \int_0^{a_b} \varepsilon_c(y) dy \right] = 2(A_s - A_c) = A, \quad (2)$$

gdzie:

$A_s - A_c$ – różnica pól pod krzywymi $\varepsilon_s(y)$ i $\varepsilon_c(y)$,

A – zakreskowane pole na rys. 7 – uzasadnienie interpretacji geometrycznej.

Można jeszcze inaczej powiedzieć, że ponieważ dla początkowego stadium zarysowania powstaje jedna rysa, potem następne – ale w znacznej odległości od siebie – w związku z tym miary szerokości rys nie mogą stanowić odległości między rysami (tym bardziej dla pierwszej, jedynej rysy), ale odcinki przyczepności a_b . Ponieważ w tej sytuacji odcinki przyczepności a_b z obu stron rysy decydują o szerokości rysy, więc od strony obliczeniowej jest to taka sama sytuacja, jak przyjęcie odległości między rysami równej $2a_b$.

Podstawowe zależności na odcinku przyczepności

Rozważając równowagę pręta zbrojonego na różniczkowym odcinku przyczepności d_y , można wyznaczyć relację między $\sigma_s(y)$ oraz $\tau_b(y)$ z rys. 8:

$$[\sigma_s(y) + d\sigma_s(y)] A_s - \tau_b(y) u_s d_y - \sigma_s(y) A_s = 0,$$

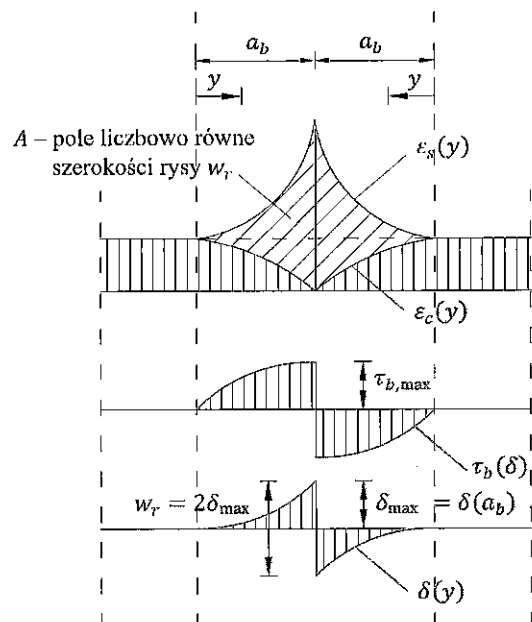
$$d\sigma_s(y) A_s = \tau_b(y) u_s d_y,$$

$$\tau_b(y) = \frac{A_s d\sigma_s(y)}{u_s dy}, \quad (3)$$

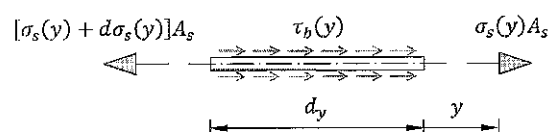
gdzie:

A_s – pole przekroju zbrojenia,

u_s – obwód zbrojenia,



Rys. 7. Interpretacja geometryczna miary szerokości rysy dla sytuacji po powstaniu pierwszej rysy



Rys. 8. Równowaga pręta zbrojonego na różniczkowym odcinku przyczepności d_y

lub

$$\tau_b(y) = \frac{E_s A_s}{u_s} \frac{1}{E_s} \frac{d\sigma_s(y)}{dy} = \frac{E_s A_s}{u_s} \frac{d}{dy} \left[\frac{\sigma_s(y)}{E_s} \right],$$

$$\tau_b(y) = \frac{E_s A_s}{u_s} \frac{d\varepsilon_s(y)}{dy}, \quad (4)$$

gdzie E_s – moduł sprężystości zbrojenia.

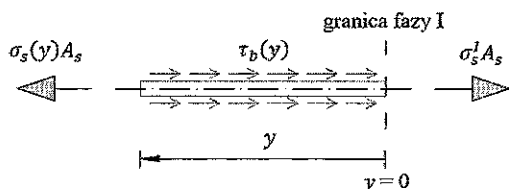
Z kolei rozważając równowagę pręta zbrojeniowego na skończonym odcinku przyczepności y (od granicy fazy I) (rys. 9), mamy

$$\sigma_s(y) A_s - \int_0^y \tau_b(y) u_s dy - \sigma_s^I A_s = 0,$$

$$\sigma_s(y) = \sigma_s^I + \frac{u_s}{A_s} \int_0^y \tau_b(y) dy \quad (5)$$

lub

$$\varepsilon_s(y) = \varepsilon_s^I + \frac{u_s}{E_s A_s} \int_0^y \tau_b(y) dy. \quad (6)$$



Rys. 9. Równowaga pręta zbrojeniowego na skończonym odcinku przyczepności y

Z kolei dla betonu mamy schemat podany na rys. 10:

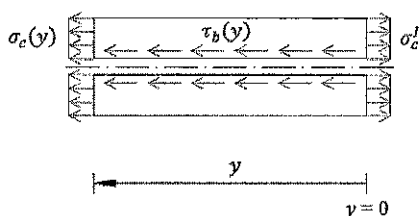
$$\sigma_c(y) A_c + \int_0^y \tau_b(y) u_s dy - \sigma_c^I A_c = 0,$$

$$\sigma_c(y) = \sigma_c^I - \frac{u_s}{A_c} \int_0^y \tau_b(y) dy \quad (7)$$

lub

$$\varepsilon_c(y) = \varepsilon_c^I - \frac{u_s}{E_c A_c} \int_0^y \tau_b(y) dy, \quad (8)$$

gdzie E_c – moduł sprężystości betonu.



Rys. 10. Równowaga w betonie na skończonym odcinku przyczepności y

Na podstawie podanej wcześniej definicji poślizgu w odległości y przy wykorzystaniu relacji (7) oraz (8) otrzymujemy:

$$\delta(y) = (\varepsilon_s^I - \varepsilon_c^I) y + \left(\frac{u_s}{E_s A_s} + \frac{u_s}{E_c A_c} \right) \int_0^y \tau_b(y) dy dy. \quad (9)$$

Uwzględniając fakt, że w fazie I $\varepsilon_s^I = \varepsilon_c^I$, oraz przyjmując

$$\frac{u_s}{E_s A_s} + \frac{u_s}{E_c A_c} = \frac{u_s}{E_s A_s} (1 + \alpha_e \rho_s), \quad (10)$$

mamy ostatecznie podstawowe równanie dla poślizgu:

$$\delta(y) = \frac{u_s}{E_s A_s} (1 + \alpha_e \rho_s) \int_0^y \tau_b(y) dy dy. \quad (11)$$

Rzeczywisty rozkład naprężeń przyczepności na długości odcinka a_b może być wyznaczony jedynie na drodze badań eksperymentalnych, poprzez bezpośredni pomiar poślizgu zbrojenia względem betonu, co następnie pozwala na dobranie odpowiedniej zależności analitycznej $\tau_b(\delta)$. Ponieważ poślizg (δ) jest z kolei funkcją położenia rozpatrywanego przekroju (y), ostatecznie można to opisać wzorem

$$\tau_b = \tau_b(\delta) = \tau_b[\delta(y)]. \quad (12)$$

Najczęściej zakłada się rozkład naprężeń przyczepności w formie zależności potęgowej, przyjmując przykładowo

$$\tau_b(\delta) = A \delta^N f_{cm}^{\frac{2}{3}}, \quad (13)$$

natomiast przebieg naprężeń τ_b w funkcji bezpośredniego położenia rozpatrywanego przekroju (y) opisuje się równaniem

$$\tau_b(y) = k y^p. \quad (14)$$

Pomiędzy parametrami obydwu ww. funkcji zachodzą następujące relacje ([5], str. 36):

$$p = \frac{2N}{1-N}, \quad (15)$$

$$k = \left[\frac{u_s}{E_s A_s} (1 + \alpha_e \rho_s) \frac{(1-N)^2}{2(1+N)} \left(A f_{cm}^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{N}} \right]^{\frac{1}{1-N}}. \quad (16)$$

Z badań doświadczalnych wynika ([5], str. 20):

1) dla prętów żebrowanych przy górnej powierzchni:

$$A = 0,80, \quad N = 0,20;$$

2) dla prętów żebrowanych przy dolnej powierzchni (dobra przyczepność):

$$A = 0,95, \quad N = 0,12;$$

czyli dla:

$$1) N = 0,20 \rightarrow p = \frac{2 \cdot 0,20}{1 - 0,20} = \frac{0,40}{0,80} = 0,5;$$

$$2) N = 0,12 \rightarrow p = \frac{2 \cdot 0,12}{1 - 0,12} = \frac{0,24}{0,88} = 0,273.$$

Na tej podstawie, wykorzystując właściwości funkcji potęgowej, opisane wcześniej odkształcenia stali i betonu przyjmują postać:

$$\varepsilon_s(y) = \varepsilon_s^I + \frac{u_s}{E_s A_s} \int_0^y \tau_b(y) dy = \varepsilon_s^I + \frac{u_s}{E_s A_s} \frac{k}{\rho + 1} y^{\rho+1}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_c(y) = \varepsilon_c^I - \frac{u_s}{E_c A_c} \int_0^y \tau_b(y) dy = \varepsilon_c^I - \frac{u_s}{E_c A_c} \frac{k}{p+1} y^{p+1}. \quad (18)$$

Jak więc widać, odkształcenia jednostkowe stali i betonu przebiegają także według funkcji potęgowej, ale o wykładniku $n = p + 1$.

Korzystając z podstawowego równania opisującego poślizg i wiedząc, że

$$\int_0^y \tau_b(y) dy = \frac{k}{p+1} y^{p+1}, \quad (19)$$

otrzymujemy:

$$\delta(y) = \frac{u_s}{E_s A_s} (1 + \alpha_e \rho_s) \frac{k}{(p+1)(p+2)} y^{p+2}. \quad (20)$$

Jeżeli teraz rozważymy przekrój $y = a_b$ (czyli w miejscu powstałej rysy), to mamy dla stali:

$$\varepsilon_s(a_b) = \varepsilon_s^I + \frac{u_s}{E_s A_s} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1} = \varepsilon_s^{II}, \quad (21)$$

skąd można wyznaczyć długość odcinka przyczepności:

$$\begin{aligned} \frac{u_s}{E_s A_s} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1} &= \varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I, \\ a_b^{p+1} &= \frac{E_s A_s}{u_s} \frac{p+1}{k} (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I), \\ a_b &= \left[\frac{E_s A_s}{u_s} \frac{p+1}{k} (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I) \right]^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Alternatywnie, z zależności dla betonu:

$$\varepsilon_c(a_b) = \varepsilon_c^I - \frac{u_s}{E_c A_c} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1} = 0 \quad (23)$$

uzyskujemy długość odcinka przyczepności w formie:

$$\begin{aligned} \frac{u_s}{E_c A_c} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1} &= \varepsilon_c^I, \\ a_b^{p+1} &= \frac{E_c A_c}{u_s} \frac{p+1}{k} \varepsilon_c^I, \\ a_b &= \left[\frac{E_c A_c}{u_s} \frac{p+1}{k} \varepsilon_c^I \right]^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Dla przekroju $y = a_b$ mamy z kolei dla poślizgu:

$$\delta(a_b) = \frac{u_s}{E_s A_s} (1 + \alpha_e \rho_s) \frac{k}{(p+1)(p+2)} a_b^{p+2} = \delta_{\max}. \quad (25)$$

Jak opisano wcześniej, szerokość rysy w fazie początkowego zarysowania:

$$w_r = 2\delta_{\max}, \quad (26)$$

stąd otrzymujemy:

$$w_r = 2 \frac{u_s}{E_s A_s} (1 + \alpha_e \rho_s) \frac{k}{(p+1)(p+2)} a_b^{p+2}. \quad (27)$$

Tak więc, znając długość odcinka przyczepności a_b , można obliczyć naprężenia maksymalne:

$$\tau_{b,\max} = \tau_b(a_b) = k a_b^p = k \left[\frac{E_s A_s}{u_s} \frac{p+1}{k} (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I) \right]^{\frac{p}{p+1}} \quad (28)$$

oraz naprężenia średnie na długości ww. odcinka:

$$\begin{aligned} \tau_{bm} = \tau_{bm}(a_b) &= \frac{k}{p+1} a_b^p = \frac{\tau_{b,\max}}{p+1} = \\ &= \frac{k}{p+1} \left[\frac{E_s A_s}{u_s} \frac{p+1}{k} (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I) \right]^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Definiując dla całego odcinka przyczepności a_b średnie odkształcenia stali i betonu, mamy:

$$\varepsilon_{sm}(a_b) = \varepsilon_s^I + \frac{u_s}{E_s A_s} \frac{k}{(p+1)(p+2)} a_b^{p+1}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{cm}(a_b) = \varepsilon_c^I - \frac{u_s}{E_c A_c} \frac{k}{(p+1)(p+2)} a_b^{p+1}. \quad (31)$$

Średnie odkształcenie stali i betonu oraz relacje między nimi można wyrazić alternatywnymi wzorami, wykorzystując związki zachodzące w rysie:

$$\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I = \frac{u_s}{E_s A_s} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_c^I = \frac{u_s}{E_c A_c} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1}. \quad (33)$$

Na tej podstawie możemy obliczyć:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sm}(a_b) &= \varepsilon_s^I + \frac{u_s}{E_s A_s} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1} \frac{1}{p+2} = \varepsilon_s^I + \frac{\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I}{p+2} = \\ &= \frac{p\varepsilon_s^I + 2\varepsilon_s^I + \varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I}{p+2} = \frac{(p+1)\varepsilon_s^I + \varepsilon_s^{II}}{p+2}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cm}(a_b) &= \varepsilon_c^I - \frac{u_s}{E_c A_c} \frac{k}{p+1} a_b^{p+1} \frac{1}{p+2} = \\ &= \varepsilon_c^I - \frac{\varepsilon_c^I}{p+2} = \frac{p\varepsilon_c^I + 2\varepsilon_c^I - \varepsilon_c^I}{p+2} = \frac{(p+1)\varepsilon_c^I}{p+2}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\varepsilon_{sm}(a_b) - \varepsilon_{cm}(a_b) = \frac{(p+1)\varepsilon_s^I + \varepsilon_s^{II} - (p+1)\varepsilon_c^I}{p+2} = \frac{\varepsilon_s^{II}}{p+2}, \quad (36)$$

$$\delta(a_b) = [\varepsilon_{sm}(a_b) - \varepsilon_{cm}(a_b)] a_b = \frac{\varepsilon_s^{II}}{p+2} a_b = \delta_{\max}. \quad (37)$$

Alternatywne równanie szerokości rysy:

$$w_r = 2\delta_{\max} = \frac{2}{p+2} \varepsilon_s^{II} a_b. \quad (38)$$

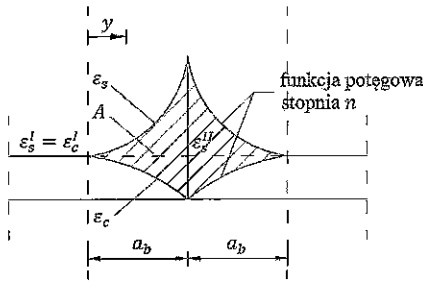
Interpretacja geometryczna dla fazy początkowych rys

Przyjęto przebieg $\varepsilon_s(y)$ i $\varepsilon_c(y)$ według funkcji potęgowej (rys. 11).

Wykorzystując właściwość funkcji potęgowej, mamy:

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[a_b (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I) \frac{1}{n+1} + a_b \varepsilon_c^I \frac{1}{n+1} \right] = \\ &= \frac{2}{n+1} (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I + \varepsilon_s^I) a_b = \frac{2}{n+1} \varepsilon_s^{II} a_b = w_r. \end{aligned} \quad (39)$$

Rys. 11. Interpretacja geometryczna dla fazy początkowych rys



Ponieważ zachodzi relacja $n = p + 1$, to otrzymujemy ostatecznie:

$$w_r = \frac{2}{p+2} \varepsilon_s^{II} a_b,$$

co potwierdza otrzymane wcześniej alternatywne wyrażenie na szerokość rysy (wzór (38)).

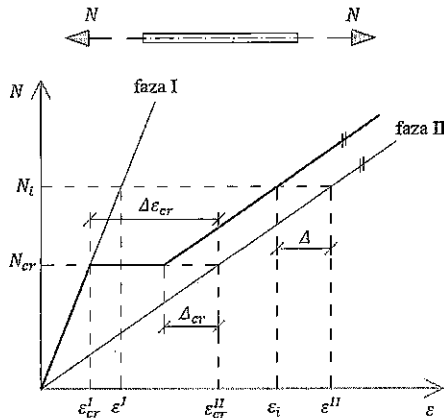
Efekt „tension stiffening” na przykładzie elementu osiowo rozciąganego

Założenie wynikające z badań: $\Delta = \text{const} = \Delta_{cr}$

$$\Delta \varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr}^{II} - \varepsilon_{cr}^I. \quad (40)$$

Miara efektu „tension stiffening” (patrz rys. 12):

$$k_t = \frac{\Delta_{cr}}{\Delta \varepsilon_{cr}}. \quad (41)$$



Rys. 12. Efekt „tension stiffening” na przykładzie elementu osiowo rozciąganego

Średnie odkształcenia elementu dla dowolnej siły N_i (które mogą być utożsamione ze średnimi odkształceniami stali na długości całego elementu) wynoszą:

$$\varepsilon_i = \varepsilon^{II} - \Delta = \varepsilon^{II} - \Delta_{cr} = \varepsilon_s^{II} - k_t \Delta \varepsilon_{cr}. \quad (42)$$

Wykorzystując wcześniej wyprowadzoną zależność, opisującą średnie odkształcenia stali na odcinku przyczepności w fazie początkowych rys (wzór (34)), można obliczyć:

$$\begin{aligned} \Delta_{cr} &= \varepsilon_s^{II} - \varepsilon_{sm}(a_b) = \varepsilon_s^{II} - \frac{(p+1)\varepsilon_s^I + \varepsilon_s^{II}}{p+2} \\ &= \frac{p\varepsilon_s^{II} + 2\varepsilon_s^{II} - (p+1)\varepsilon_s^I - \varepsilon_s^{II}}{p+2} = \frac{(p+1)\varepsilon_s^{II} - (p+1)\varepsilon_s^I}{p+2} \\ &= \frac{(p+1)(\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_s^I)}{p+2}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{cr} = \frac{p+1}{p+2} \Delta \varepsilon_{cr}. \quad (43)$$

W takim ujęciu efekt „tension stiffening” dla fazy początkowych rys opisuje relacja

$$k_t = \frac{\Delta_{cr}}{\Delta \varepsilon_{cr}} = \frac{p+1}{p+2}. \quad (44)$$

W tym ujęciu efekt „tension stiffening” na tle wyników badań doświadczalnych wynosi:

1) dla prętów żebrowanych przy górnej powierzchni:

$$p = 0,500,$$

$$k_t = k_1 = \frac{p+1}{p+2} = \frac{0,500+1}{0,500+2} = \frac{3}{5} = 0,600;$$

2) dla prętów żebrowanych przy dolnej powierzchni (dobra przyczepność):

$$p = 0,273,$$

$$k_t = k_1 = \frac{p+1}{p+2} = \frac{0,273+1}{0,273+2} = \frac{1,273}{2,273} = 0,560.$$

Dla fazy ustabilizowanych rys następuje redukcja efektu „tension stiffening”. Według [5] współczynnik redukcyjny może być przyjęty na podstawie przyjmowanego do obliczeń rozstawu rys. Ponieważ w fazie początkowych rys wynosi on $a_1 = 2a_b$, natomiast w fazie ustabilizowanych rys wynosi z kolei $a_2 = 1,5a_b$ – postulowany współczynnik redukcyjny przyjmuje wartość:

$$\eta_{red} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1,5a_b}{2a_b} = 0,75. \quad (45)$$

Przykładowe obliczenia dla fazy początkowych rys

Przyjmując $p = 0$, czyli $\tau_b(y) = k = \text{const}$:

$n = p + 1 = 0 + 1 = 1$ – przebieg $\varepsilon_s(y)$ i $\varepsilon_c(y)$ liniowy:

– efekt „tension stiffening”:

$$k_t = \frac{p+1}{p+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} = 0,5 < k_{t,exp} = 0,56,$$

– szerokość rysy:

$$w_r = \frac{2}{p+2} \varepsilon_s^{II} a_b = \frac{2}{0+2} \varepsilon_s^{II} a_b = \varepsilon_s^{II} a_b,$$

– średnie naprężenia przyczepności:

$$\tau_{bm} = \frac{k}{p+1} a_b^p = \frac{k}{0+1} a_b^0 = k.$$

Przyjmując $p = 0,273$ (wg wyników badań eksperymentalnych):

$$n = p + 1 = 0,273 + 1 = 1,273,$$

– efekt „tension stiffening”:

$$k_t = \frac{p+1}{p+2} = \frac{0,273+1}{0,273+2} = \frac{1,273}{2,273} = 0,56,$$

– szerokość rysy:

$$w_r = \frac{2}{p+2} \varepsilon_s^{II} a_b = \frac{2}{0,273+2} \varepsilon_s^{II} a_b = 0,88 \cdot \varepsilon_s^{II} a_b,$$

– średnie naprężenia przyczepności:

$$\tau_{bm} = \frac{k}{p+1} a_b^p = \frac{k}{0,273+1} a_b^{0,273} = 0,79 \cdot k a_b^{0,273}.$$

Przyjmując $p = 1$:

$$n = p + 1 = 1 + 1 = 2,$$

– efekt „tension stiffening”:

$$k_t = \frac{p+1}{p+2} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} = 0,67 > k_{t,exp} = 0,56,$$

– szerokość rysy:

$$w_r = \frac{2}{p+2} \varepsilon_s'' a_b = \frac{2}{1+2} \varepsilon_s'' a_b = 0,67 \cdot \varepsilon_s'' a_b,$$

– średnie naprężenia przyczepności:

$$\tau_{bm} = \frac{k}{p+1} a_b^p = \frac{k}{1+1} a_b^1 = 0,5 \cdot k a_b.$$

Przyjmując $p = 2$:

$$n = p + 1 = 2 + 1 = 3,$$

– efekt „tension stiffening”:

$$k_t = \frac{p+1}{p+2} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4} = 0,75 > k_{t,exp} = 0,56,$$

– szerokość rysy:

$$w_r = \frac{2}{p+2} \varepsilon_s'' a_b = \frac{2}{2+2} \varepsilon_s'' a_b = 0,5 \cdot \varepsilon_s'' a_b,$$

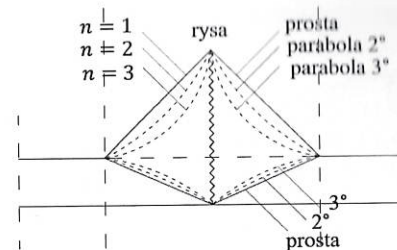
– średnie naprężenia przyczepności:

$$\tau_{bm} = \frac{k}{p+1} a_b^p = \frac{k}{2+1} a_b^2 = 0,33 \cdot k a_b^2.$$

Podsumowanie oszacowań efektu „tension stiffening” w fazie początkowych rys

Biorąc za punkt wyjścia założoną z góry postać funkcji odkształceń dla stali i betonu w sąsiedztwie powstałej rysy (wyrażoną potęgą n), można przedstawić efekt „tension stiffening” graficznie, jak na rys. 13.

Rys. 13. Graficzna interpretacja efektu „tension stiffening”



Dla prostej:

– niedoszacowanie efektu „tension stiffening”

$$k_t = 0,50 < k_{t,exp} = 0,56.$$

Dla paraboli drugiego stopnia:

– przeszacowanie efektu „tension stiffening”

$$k_t = 0,67 > k_{t,exp} = 0,56.$$

Dla paraboli trzeciego stopnia:

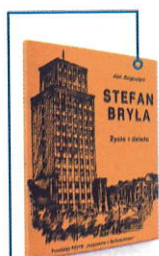
– jeszcze większe przeszacowanie efektu „tension stiffening”

$$k_t = 0,75 > k_{t,exp} = 0,56.$$

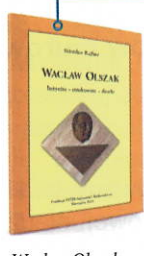
PIŚMIENNICTWO

- [1] Godycki-Ćwirko T.: Morfologia rys w konstrukcjach z betonu, Politechnika Białostocka, Rozprawy Naukowe, nr 13, Białystok, 1992.
- [2] Ciężak T.: Rozwarcie rys w świetle teorii poślizgu zbrojenia, Inżynieria i Budownictwo, 2/1990, s. 63-66.
- [3] Ciężak T.: Szerokość rozwarcia rys przy liniowej zależności między naprężeniem przyczepności i poślizgiem, Inżynieria i Budownictwo, 3/1990, s. 88-90.
- [4] Tue N.V., Pierson R.: Ermittlung der Rissbreite und Nachweiskonzept nach DIN 1045-1, Beton- und Stahlbetonbau, 5/2001, s. 365-372.
- [5] Noakowski P., Schäfer H.G.: Steifigkeitsorientierte Statik im Stahlbetonbau, Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 2003.
- [6] Debernardi P.G., Taliano M.: An improvement to Eurocode 2 and fib Model Code 2010 methods for calculating crack width in RC structures, Structural Concrete, 3/2016, s. 365-376, online: <https://doi.org/10.1002/suco.201500033>.
- [7] Noakowski P.: Rysy w żelbecie jako język konstrukcji – różne formy zarysowania i ich interpretacje, Inżynieria i Budownictwo, 9-10/2022, s. 444-451.
- [8] Wesolowski M., Solarczyk M.T.: Rozstaw rys według PN-EN 1992-1:2008 oraz PN-B 03264:2002, Przegląd Budowlany, 3/2019, s. 14-18.

Serdecznie zapraszamy do zakupu naszych wydawnictw.



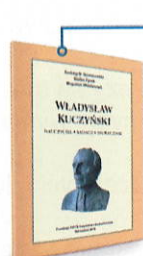
Stefan Bryła
Życie i dzieło



Wacław Olszak
Inżynier - naukowiec - dzieło



Zbigniew Wasutyński
Życie i dzieło



Władysław Kuczyński
Nauczyciel - badacz - społecznik

Absolwenci Politechniki Gdańskiej
i ich osiągnięcia w dziedzinie



architektury i budownictwa



mechaniki i okrętownictwa



GDANSKIE
INWESTYCJE
KOMUNALNE

Gdańskie Inwestycje
Komunalne
Historia i dokonania

Zamówienie prosimy kierować na adres e-mail: apoteranska@zgpzibt.org.pl