

# ZWIĘKSZENIE EFEKTYWNOŚCI METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH Z WYKORZYSTANIEM WŁASNOŚCI GEOMETRII STRUKTUR

INCREASING THE EFFICIENCY OF THE FINITE ELEMENT METHOD USING THE PROPERTIES  
OF STRUCTURE GEOMETRY

Małgorzata Warecka<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Politechnika Gdańska, Gdańsk, malgorzata.warecka@pg.edu.pl

**Streszczenie:** Niniejsza praca jest omówieniem fragmentów rozprawy doktorskiej autorki. Przedstawia ideę połączenia opisu analitycznego z metodą elementów skończonych poprzez uogólnioną macierz impedancji. Przedstawione zostały analizy dwóch struktur z wykorzystaniem metody hybrydowej, które wraz z porównaniem względem innych metod stanowią potwierdzenie zasadności prezentowanego podejścia.

**Abstract:** This work is a discussion of fragments of the author's doctoral dissertation. It presents the idea of combining analytical description with the finite element method through a generalized impedance matrix. Analyses of two structures using a hybrid method are presented, which, together with a comparison to other methods, confirms the validity of the presented approach.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów skończonych, metody hybrydowe, struktury rezonansowe, uogólniona macierz impedancji

**Keywords:** finite element method, generalized impedance matrix, hybrid methods, resonant structures

## 1. WSTĘP

Współczesna elektronika i telekomunikacja w coraz większym stopniu polegają na efektywnych i dokładnych metodach symulacji komputerowych, które są niezbędne przy projektowaniu i optymalizacji urządzeń. Wzrost poziomu złożoności układów jest jednak na tyle szybki, że sam rozwój infrastruktury obliczeniowej okazuje się niewystarczający, aby sprostać aktualnym wymaganiom środowiska naukowego czy przemysłu. Z tego względu od dziesięcioleci równolegle rozwijane są algorytmy pozwalające zwiększyć efektywność symulacji tak, aby możliwe było osiągnięcie zadanej dokładności w akceptowalnym czasie.

Jednym z kluczowych problemów dzisiejszej elektroniki jest skuteczne modelowanie rozkładu pól elektromagnetycznych w różnego typu strukturach czy układach. W tym celu stosuje się metody elektrodynamiki obliczeniowej, które podzielić można na kilka podgrup. Metodą analityczną przypisuje się największą dokładność jak również krótki czas obliczeń. Ich zastosowanie wiąże się jednak z ograniczeniem do struktur o prostych geometriach takich jak cylindry czy sfery. Kolejną, bardziej

uniwersalną, grupą metod są metody równań całkowych. Ich większa uniwersalność związana jest jednak z całkowaniem osobliwości w obrębie funkcji Greena czy koniecznością odpowiedniego doboru funkcji bazowych. Za najbardziej uniwersalne metody uznaje się metody dyskretne, do których zaliczyć można metodę różnic skończonych czy metodę elementów skończonych. Cieszą się one dużą popularnością wśród komercyjnego oprogramowania ze względu na brak ograniczeń związanych z geometrią struktury. Należy zaznaczyć, że układy skomplikowane pod względem geometrii mogą wymagać zastosowania bardzo gęstej siatki co wydłuża czas obliczeń. Co więcej, problem stanowić może również symulacja przestrzeni otwartej. Do bardziej znanych rozwiązań należy zakończenie dziedziny warstwą PML (perfectly matched layer). Ma ona na celu zniwelowanie odbić od brzegu dziedziny. Niestety jej zastosowanie wymaga poszerzenia dziedziny obliczeniowej oraz doboru zestawu parametrów, które mogą mieć wpływ na dokładność symulacji.

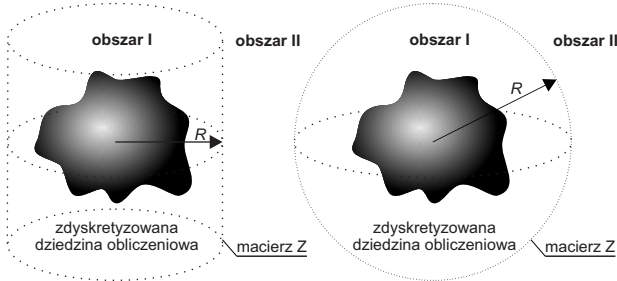
Odpowiedzią na powyższe problemy wydają się być metody hybrydowe. Pozwalają one między innymi na zachowanie elastyczności metod dyskretnych, zwiększenie ich dokładności przy jednoczesnej redukcji złożoności obliczeniowej. Większość tego typu podejść bazuje na dekompozycji dziedziny na mniejsze obszary w zależności od materiału czy geometrii, gdzie w różnych podobszarach stosowane są różne metody odpowiadające zadanym problemom.

Niniejsza praca stanowi omówienie fragmentów rozprawy doktorskiej pt. "Techniki zwiększania efektywności metody elementów skończonych poprzez redukcję dziedziny obliczeniowej z wykorzystaniem własności geometrii struktur" [1]. Zaproponowane rozwiązania hybrydowe są połączeniem metody elementów skończonych i podejścia analitycznego. Metoda elementów skończonych pozwala na dużą dowolność dotyczącą budowy analizowanej struktury, natomiast zastosowanie podejścia analitycznego redukuje rozmiar, zwiększa dokładność przy wykorzystaniu mniejszych zasobów pamięciowych i obliczeniowych.

## 2. ZARYS METODY

Redukcja dziedziny obliczeniowej z wykorzystaniem własności geometrii struktury może odbywać się poprzez dekompozycję dziedziny obliczeniowej. Wówczas dziedzinę

obliczeniową dzielimy na dwa lub więcej obszarów. Przy czym podobszary te w zależności od swoich własności mogą być opisywane w sposób analityczny lub też z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Następnie na granicy podobszarów wprowadzona zostaje uogólniona macierz impedancji - patrz Rys. 1. Wrota opisywane są na powierzchni prostej bryły, którą stanowią mogą cylinder [2] czy sfera [3].



Rysunek 1: Schemat podziału dziedziny obliczeniowej

## 2.1 Opis analityczny

Prezentowane w niniejszym artykule struktury lub też ich elementy charakteryzują symetrią osiową co pozwoliło na dalszą redukcję dziedziny obliczeniowej z przypadku 3D do 2.5D. W zależności od kształtu wrót oraz prezentowanego problemu opis analityczny może się różnić. W niniejszym opracowaniu ograniczę się do opisu zagadnienia w układzie współrzędnych cylindrycznych oraz sferycznych.

Dla współrzędnych cylindrycznych pole elektryczne oraz magnetyczne zapisać można następująco:

$$E(\rho, \varphi, z) = E(\rho, \varphi) e^{-\gamma z} \quad (1)$$

$$H(\rho, \varphi, z) = H(\rho, \varphi) e^{-\gamma z} \quad (2)$$

Pole w obszarze drugim w ogólnym przypadku przyjmuje formę:

$$\vec{E}_z^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{m=-M}^M (a_m^E J_m(\kappa\rho) + b_m^E H_m^{(2)}(\kappa\rho)) e^{jm\varphi} \vec{i}_z \quad (3)$$

$$\vec{H}_z^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{m=-M}^M (a_m^H J_m(\kappa\rho) + b_m^H H_m^{(2)}(\kappa\rho)) e^{jm\varphi} \vec{i}_z \quad (4)$$

gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą oznaczającą zmienną po  $\varphi$ ,  $\kappa = \sqrt{k_0^2 - \gamma^2}$ ,  $\gamma$  współczynnikiem propagacji a  $k_0$  liczbą falową. Dla współrzędnych sferycznych:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{II}(r, \theta, \varphi) = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n [A_{nm}^{(1,TE)} \vec{M}_{nm}^{(1)}(kr, \theta, \phi) + \\ & + A_{nm}^{(1,TM)} \vec{N}_{nm}^{(1)}(kr, \theta, \phi) + A_{nm}^{(2,TE)} \vec{M}_{nm}^{(2)}(kr, \theta, \phi) + \\ & + A_{nm}^{(2,TM)} \vec{N}_{nm}^{(2)}(kr, \theta, \phi)] \end{aligned} \quad (5)$$

oraz

$$\begin{aligned} \vec{H}^{II}(r, \theta, \varphi) = & -\frac{k}{j\omega\mu} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n [A_{nm}^{(1,TE)} \vec{N}_{nm}^{(1)}(kr, \theta, \phi) + \\ & + A_{nm}^{(1,TM)} \vec{M}_{nm}^{(1)}(kr, \theta, \phi) + A_{nm}^{(2,TE)} \vec{N}_{nm}^{(2)}(kr, \theta, \phi) + \\ & + A_{nm}^{(2,TM)} \vec{M}_{nm}^{(2)}(kr, \theta, \phi)] \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \vec{M}_{nm}^{(i)}(kr, \theta, \varphi) = & z_n^{(i)}(kr) e^{jm\varphi} \times \\ & \times \left[ \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\theta - \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\varphi \right] \\ \vec{N}_{nm}^{(i)}(kr, \theta, \varphi) = & \frac{1}{kr} (n(n+1)) z_n^{(i)}(kr) e^{jm\varphi} \times \\ & \times P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_r + \frac{1}{kr} \frac{\partial(rz_n^i(kr))}{\partial r} e^{jm\varphi} \times \\ & \times \left( \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\theta + \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$P_n^m(\cdot)$  są uogólnionymi wielomianami Legendre'a natomiast,  $z_n^{(1)}$ ,  $z_n^{(2)}$  to odpowiednio sferyczna funkcja Bessla oraz Hankela drugiego rodzaju.

## 2.2 Uogólniona macierz impedancji

Uogólniona macierz impedancji opisuje relację między składowymi stycznymi pola elektrycznego i magnetycznego, a ściślej między współczynnikami rozwinięcia odpowiednio pola elektrycznego oraz magnetycznego w ustalonej bazie. Funkcje te dla powierzchni sferycznej mogą przyjmować postać:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{nm}^{(TE)}(\theta, \varphi) = & \vec{h}_{nm}^{(TM)}(\theta, \varphi) = \\ = & e^{jm\varphi} \left( \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\theta - \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (8)$$

oraz

$$\begin{aligned} \vec{e}_{nm}^{(TM)}(\theta, \varphi) = & \vec{h}_{nm}^{(TE)}(\theta, \varphi) = \\ = & e^{jm\varphi} \left( \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \vec{i}_\theta + \frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{i}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (9)$$

natomiast dla powierzchni walcowej:

$$\begin{aligned} \vec{e}_m^{(TE)}(\varphi, z) = & \vec{h}_m^{(TM)}(\varphi, z) = \vec{e}_m^{(TM)}(\varphi, z) = \\ = & \vec{h}_m^{(TE)}(\varphi, z) = e^{-\gamma z} e^{jm\varphi} \end{aligned} \quad (10)$$

Zapis wspomnianych współczynników w postaci wektorów  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{I}$  (w pewnym sensie uogólnione napięcia i prądy) pozwala na zdefiniowanie macierzy impedancji  $\mathbf{Z}$  jako

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \mathbf{I} \quad (11)$$

W zależności od zagadnienia wektory  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{I}$  będą przyjmować różną postać oraz konfigurację [3, 4]. Macierz  $\mathbf{Z}$  dla prostych struktur może być wyznaczona analitycznie, jednak w bardziej skomplikowanych przypadkach niezbędne jest zastosowanie metod dyskretnych np. metody elementów skończonych, dla której

$$\mathbf{Z} = j\omega\mu_0 \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}. \quad (12)$$

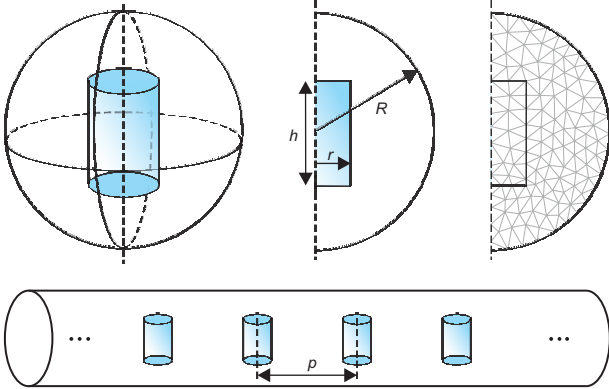
gdzie poszczególne macierze opisane zostały w artykułach [3, 4]. Jak można zauważyć powstała macierz jest niezależna od pobudzenia, co umożliwia jej wielokrotne wykorzystywanie.

## 3. WYNIKI NUMERYCZNE

W ramach wyników numerycznych przedstawione zostaną dwie struktury: filtrująca linia periodyczna oraz otwarty rezonator Fabry-Perot. W obu przypadkach zastosowane zostały dwa sposoby redukcji dziedziny obliczeniowej tj. dekompozycja oraz symetria osiowa.

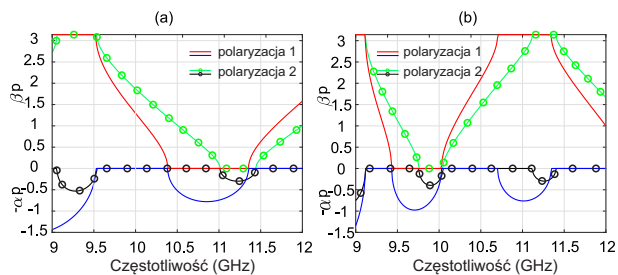
### 3.1 Struktura periodyczna

Struktura periodyczna zaprezentowana w [3] zbudowana jest z dielektrycznych cylindrów o promieniu  $r = 2.3$  mm, wysokości  $h = 10$  mm i względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r = 12$ , które umieszczone są w odległości  $p$  równej odpowiednio 40 mm i 60 mm - patrz Rys. 2.



Rysunek 2: Schemat analizowanej struktury periodycznej

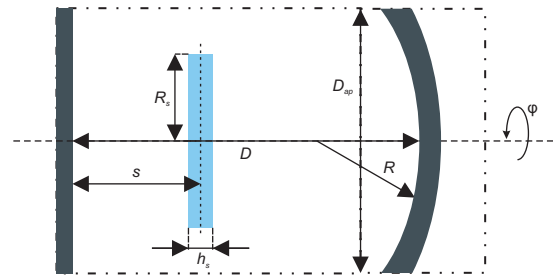
Wyniki zaprezentowane zostały na Rys. 3. Zgodnie z przewidywaniami pasmo zabronione ulega przemieszczeniu wraz ze zmianą okresu  $p$  (odległości między cylindrami).



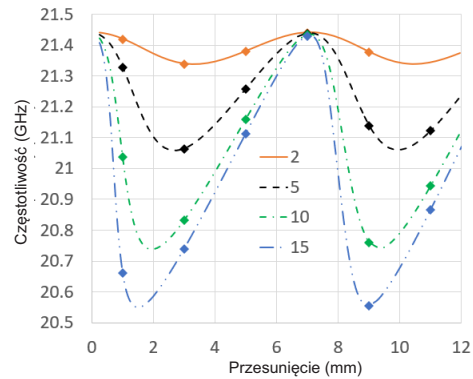
Rysunek 3: Znormalizowany współczynnik propagacji w funkcji częstotliwości dla cylindrów umieszczonych z okresem a)  $p = 40$  mm oraz b)  $p = 60$  mm

### 3.2 Otwarty rezonator Fabry-Perot

Drugim prezentowanym przykładem jest rezonator Fabry-Perot. Ze względu na swoje duże wymiary w stosunku do długości fali oraz szeroki zakres częstotliwości, w którym jest analizowany, jest on strukturą wymagającą w kontekście obliczeń numerycznych metodami dyskretnymi. Rezonator podzielony został na następujące części: obszar pomiędzy zwierciadłami wraz z próbką i zwierciadłem płaskim, który opisany został analitycznie, oraz zwierciadło, które zamodelowane zostało z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Wymiary analizowanego rezonatora są następujące:  $D = 100$  mm,  $R = 150$  mm i  $D_{ap} = 180$  mm - patrz Rys. 4. Wewnątrz umieszczona została próbka o grubości  $h_s = 0.5$  mm i promieniu  $R_s = D_{ap}/2$ . Wyniki zaprezentowane zostały w [5] i na Rys. 5 oraz porównane z wynikami otrzymanymi metodą SMM [6].



Rysunek 4: Schemat otwartego rezonatora Fabry-Perot obciążonego dyskiem dielektrycznym



Rysunek 5: Częstotliwość rezonansowa rezonatora Fabry-Perot obciążonego dielektrycznym dyskiem w funkcji przesunięcia próbki względem zwierciadła płaskiego

## 4. PODSUMOWANIE

W niniejszym artykule przedstawiona została idea połączenia opisu analitycznego i metody elementów skończonych poprzez uogólnioną macierz impedancji. Zaprezentowane zostały analizy dla dwóch typów struktur: filtrującej linii periodycznej oraz otwartego rezonatora Fabry-Perot. Wyniki porównane zostały z innymi metodami, a otrzymana zgodność potwierdza poprawność prezentowanego podejścia.

## LITERATURA

- [1] Warecka Małgorzata. „Techniki zwiększania efektywności metody elementów skończonych poprzez redukcję dziedziny obliczeniowej z wykorzystaniem własności geometrii struktur”. (rozprawa doktorska. Politechnika Gdańska. 2023)
- [2] Piotr Kowalczyk, Rafał Lech, Małgorzata Warecka, Adam Kusiek. 2019. „Electromagnetic plane wave scattering from a cylindrical object with an arbitrary cross section using a hybrid technique, Journal of Electromagnetic Waves and Applications”. 33(2) : 178-192
- [3] Warecka Małgorzata, Lech Rafał, Kowalczyk Piotr. 2020. „Hybrid Analysis of Structures Composed of Axially Symmetric Objects”. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 68(11) : 4528-4535.
- [4] Warecka Małgorzata, Lech Rafał, Kowalczyk Piotr. 2019. „Efficient Finite Element Analysis of Axially

Symmetrical Waveguides and Waveguide Discontinuities". IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 67(11) : 4291-4297.

- [5] Salski Bartłomiej, Karpisz Tomasz, Warecka Małgorzata, Kowalczyk Piotr, Czekala Piotr, Kopyt Paweł. 2022. „Microwave Characterization of Dielectric Sheets in a Plano-Concave Fabry-Perot Open Resonator”. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 70(5) : 2732-2742.
- [6] Salski Bartłomiej, Karpisz Tomasz, Kopyt Paweł, Krupka Jerzy. 2020. „Rigorous Scattering Matrix Analysis of a Fabry-Perot Open Resonator”. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 68(12) : 5093-5102