

Dariusz ŚWISULSKI  
Politechnika Gdańska  
Wydział Elektrotechniki i Automatyki

### **Pomiar on-line zmiennej częstotliwości metodą cyfrową**

W cyfrowym pomiarze częstotliwości on-line dysponujemy informacją o długościach przedziałów międzyimpulsowych poprzedzających chwilę próbkowania. W artykule porównano pomiar częstotliwości na podstawie ostatniego przedziału i metodę wykorzystującą ekstrapolację z dwóch ostatnich przedziałów. Wykonano analizę dla liniowej i sinusoidalnej zmiany częstotliwości. Zaproponowano metodę, w której sposób wyznaczenia częstotliwości zależy od zmiany jej wartości w czasie pomiaru.

#### **Digital method on-line measurement of variable frequency**

In digital method on-line measurement of frequency, only information about length of time intervals preceding sampling moment is approachable. In the paper comparison of two methods is presented: calculation of frequency from last interval and calculation with extrapolation from last two intervals. Analysis for linear and sinusoidal change of frequency is made. New measurement method is proposed. In this method procedure of frequency calculation depends on variable of frequency value in measurement time.

## **1. Wprowadzenie**

Ze względu na zalety sygnału impulsowego modulowanego częstotliwościowo, jest on często stosowany jako sygnał pośredni w systemach pomiarowych. Używane są przetworniki różnych wielkości fizycznych na sygnał impulsowy. Według *International Frequency Sensor Association* (IFSA) w 2001 roku wykorzystywano 35% czujników inteligentnych z częstotliwościowym sygnałem wyjściowym [1].

Sygnał impulsowy jako sygnał pośredni jest stosowany chętnie ze względu na prosty sposób przetworzenia na postać cyfrową i małą wrażliwość na zakłócenia np. przy przesyłaniu na większe odległości [2]. Dobierając odpowiedni czas bramkowania przy zastosowaniu licznika o dużej pojemności można w prosty sposób uzyskać przetwornik o rozdzielczości 16 bitów lub większej, co przy przetwarzaniu napięcia może być trudne. Do zalet przetwarzania  $f/C$  w porównaniu z  $A/C$  można również zaliczyć dostępność dokładnych wzorców.

Przedstawione w artykule rozważania dotyczą sytuacji, w której chwile próbkowania wyznaczone są przez sygnał taktujący, niezwiązany z mierzonym sygnałem impulsowym. Występuje to np. gdy pomiar odbywa się jednocześnie w kanałach z napięciowym i częstotliwościowym nośnikiem informacji [3].

Ważnym problemem przy pomiarze tego typu jest uwzględnienie błędów dynamicznych, związanych ze zmianą mierzonej wielkości w czasie pomiaru. Błąd wynikający z opóźnień jest różnicą między wartością wielkości wejściowej w chwili przekazania informacji pomiarowej i jej wartością w chwili pomiaru tej wielkości. Przy przetwarzaniu sygnałów z częstotliwościowym nośnikiem informacji wynik pomiaru jest wartością średnią w czasie pomiaru [4]. Dlatego analiza błędów jest w tym przypadku bardziej złożona niż dla przetwarzania analogowo-cyfrowego.

Wartość błędu dynamicznego zależy od tego, czy pomiary wykonywane są w czasie rzeczywistym (analiza on-line), tzn. dostępna jest jedynie informacja o wystąpieniu impulsów w chwilach poprzedzających moment, dla którego wyznaczany jest wynik pomiaru, czy też w czasie własnym (analiza off-line), tzn., gdy analiza odbywa się po zakończeniu rejestracji i dostępna jest informacja o wystąpieniu impulsów w chwilach poprzedzających oraz występujących po chwili, dla której wyznaczany jest wynik pomiaru [5].

Dla pomiarów on-line, jako wartość częstotliwości w danej chwili przyjmuje się wartość wyznaczoną na podstawie ostatniego przedziału międzyimpulsowego, zakończony przed rozpatrywaną chwilą lub na podstawie ekstrapolacji z większej liczby przedziałów, z wykorzystaniem odpowiedniego algorytmu obliczeń. Dla małej dynamiki zmian mierzonego sygnału w stosunku do częstotliwości próbkowania, wystarczające jest wyznaczenie częstotliwości na podstawie dwóch ostatnich przedziałów poprzedzających rozpatrywaną chwilę [6].

Długości poszczególnych przedziałów międzyimpulsowych mierzone są przez zliczanie impulsów sygnału z generatora wzorcowego o dużej i stabilnej częstotliwości. Do pomiarów można wykorzystać licznik pracujący w trybie pomiaru okresu z buforowaniem, udostępniający w trakcie pracy długości wszystkich dotychczasowych przedziałów międzyimpulsowych.

## 2. Symulacja pomiaru częstotliwości sygnału impulsowego w stanach dynamicznych

Sygnał wyjściowy przetwornika z wyjściem impulsowym zostanie zasymulowany dla liniowej i sinusoidalnej zmiany mierzonej wielkości.

Założmy, że w czasie pomiaru częstotliwość zmienia się w sposób liniowy w funkcji czasu, z szumem  $s$  ( $s$  symuluje zakłócenia mierzonego sygnału, ale również przypadkowe błędy przetwarzania, m.in. błąd kwantowania):

$$f = f_0 + a \cdot t + s, \quad (1)$$

gdzie:

$f_0$  – początkowa wartość częstotliwości (dla  $t = 0$ ),

$a$  – współczynnik zmiany częstotliwości [Hz/s].

Wyznaczając wartość częstotliwości  $f_i$  dla chwili  $t_i = \sum_{j=1}^{i-1} T_j + \frac{1}{2}T_i$  leżącej w środku  $i$ -tego przedziału międzyimpulsowego możemy napisać:

$$f_i = f_0 + a \left( \sum_{j=1}^{i-1} T_j + \frac{1}{2}T_i \right) + s_i. \quad (2)$$

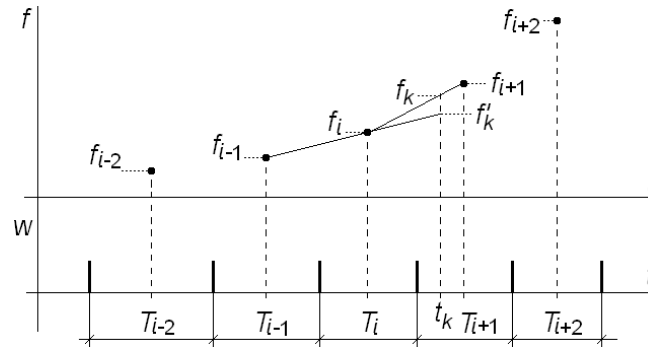
Po podstawieniu  $f_i = 1/T_i$  i przekształceniach, z zależności tej otrzymamy odległość między impulsami  $T_i$  odpowiadającą częstotliwości  $f_i$ :

$$T_i = \frac{\sqrt{\left( f_0 + a \cdot \sum_{j=1}^{i-1} T_j + s_i \right)^2 + 2 \cdot a - \left( f_0 + a \cdot \sum_{j=1}^{i-1} T_j + s_i \right)}}{a}. \quad (3)$$



Z zależności tej możemy otrzymać długości kolejnych przedziałów sygnału impulsowego  $T_1, T_2, \dots, T_n$  dla przyjętych wartości  $f_0, a$  i  $s_{\max}$ .

Jeżeli wyznaczamy wartość częstotliwości w dowolnej chwili  $t_k$ , przy pomiarze w czasie rzeczywistym, mamy jedynie informację o chwilach wystąpienia impulsów poprzedzających chwilę  $t_k$ . Najczęściej stosowaną metodą jest w tym wypadku przyjęcie dla tej chwili wartości częstotliwości dla przedziału poprzedzającego chwilę  $t_k$ , czyli wg rysunku 1 wartości  $f_i = 1/T_i$ .

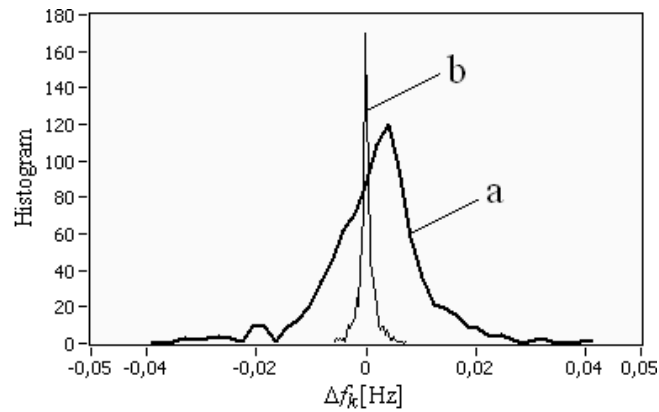


Rys. 1. Pomiar częstotliwości z dwóch ostatnich przedziałów międzyimpulsowych  
Fig. 1. Frequency measurement from two last time intervals

Ponieważ dla zmieniającej się częstotliwości w czasie pomiaru i dla dłuższego czasu między impulsem kończącym okres  $T_i$  oraz chwilą  $t_k$ , częstotliwość  $f_k$  w chwili  $t_k$  może znacznie odbiegać od częstotliwości  $f_i$ , znana jest metoda polegająca na wyznaczeniu częstotliwości  $f_k'$  dla chwili  $t_k$  na podstawie dwóch ostatnich przedziałów poprzedzających chwilę  $t_k$ , przy założeniu liniowej zmiany częstotliwości [5, 6]:

$$f_k' = f_{i-1} + \frac{(f_i - f_{i-1}) \left( t_k - \left( \sum_{j=1}^{i-2} T_j + \frac{1}{2} T_{i-1} \right) \right)}{\left( \sum_{j=1}^{i-1} T_j + \frac{1}{2} T_i \right) - \left( \sum_{j=1}^{i-2} T_j + \frac{1}{2} T_{i-1} \right)} = \frac{1}{T_{i-1}} + \frac{2 \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_{i-1}} \right) \left( t_k - \sum_{j=1}^{i-2} T_j - \frac{1}{2} T_{i-1} \right)}{T_{i-1} + T_i}. \quad (4)$$

Rozwiązanie takie może prowadzić jednak do zwiększenia błędów pomiaru w sytuacji, gdy częstotliwość nie zmienia się w sposób liniowy, ale przypadkowy. Wyznaczona częstotliwość na podstawie dwóch ostatnich przedziałów może znacznie odbiegać od jej bieżącej wartości. Na rys. 2 przedstawiono rozkład błędów pomiaru częstotliwości o odległościach między impulsami wyznaczonych ze wzoru (3) przy  $f_0 = 20$  Hz,  $a = 2$  Hz/s,  $s_{\max} = 0,001$  Hz i częstotliwości próbkowania  $f_{pr} = 10$  Hz.



Rys. 2. Rozkład błędów  $\Delta f_k$  dla  $f_0 = 20$  Hz,  $a = 2$  Hz/s,  $s_{\max} = 0,001$  Hz i  $f_{pr} = 10$  Hz; a – pomiar z ostatniego przedziału między impulsami, b – pomiar z dwóch ostatnich przedziałów

Wartości błędów zostały wyznaczone jako różnica między wartością częstotliwości  $f_k'$  uzyskaną z pomiaru i wartością  $f_k$  przyjętą jako prawdziwa w chwili  $t_k$ :  $\Delta f_k = f_k' - f_k$ . Jako wartość prawdziwa przyjmowana jest wartość wyznaczona z dwóch sąsiednich przedziałów, przy założeniu, że częstotliwość zmienia się w tym czasie liniowo (rys. 1). W zależności od położenia chwili  $t_k$  przedziałami tymi są  $T_i$  i  $T_{i+1}$  lub  $T_{i+1}$  i  $T_{i+2}$ . Dla

$\sum_{j=1}^i T_j \leq t_k \leq \sum_{j=1}^i T_j + \frac{1}{2} T_{i+1}$  obliczamy częstotliwość  $f_k$  z wzoru (5), natomiast dla

$\sum_{j=1}^i T_j + \frac{1}{2} T_{i+1} < t_k < \sum_{j=1}^{i+1} T_j$  z wzoru (6):

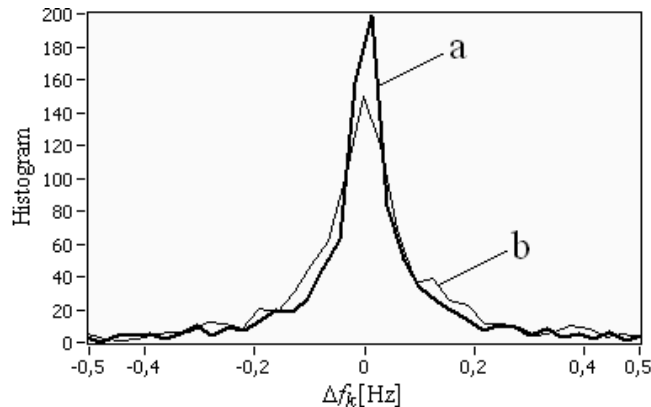
$$f_k = \frac{1}{T_i} + \frac{2 \left( \frac{1}{T_{i+1}} - \frac{1}{T_i} \right) \left( t_k - \sum_{j=1}^{i-1} T_j - \frac{1}{2} T_i \right)}{T_i + T_{i+1}}, \quad (5)$$

$$f_k = \frac{1}{T_{i+1}} + \frac{2 \left( \frac{1}{T_{i+2}} - \frac{1}{T_{i+1}} \right) \left( t_k - \sum_{j=1}^i T_j - \frac{1}{2} T_{i+1} \right)}{T_{i+1} + T_{i+2}}. \quad (6)$$

Dla liniowej zmiany częstotliwości, przy pomiarze na podstawie ostatniego przedziału błąd będzie zależał od czasu, jaki minął od impulsu do chwili, dla której wykonujemy pomiar. Błąd ten może osiągnąć znaczne wartości. Błąd pomiaru na podstawie dwóch przedziałów jest równy zero. Jeżeli do mierzonego sygnału dodany jest szum o małym poziomie, może on przyczynić się do niewielkich błędów (rys. 2).

W przypadku, gdy poziom szumów będzie większy, błędy przy pomiarze z ekstrapolacją na podstawie dwóch ostatnich przedziałów mogą być nawet większe niż z pojedynczego przedziału. Jako przykład na rys. 3 pokazane są rozkłady błędów uzyskane dla takich samych parametrów jak na rys. 2, ale dla  $s_{\max} = 0,1$  Hz.





Rys. 3. Rozkład błędów  $\Delta f_k$  dla  $f_0 = 20$  Hz,  $a = 2$  Hz/s,  $s_{\max} = 0,1$  Hz i  $f_{pr} = 10$  Hz; a – pomiar z ostatniego przedziału międzyimpulsowego, b – pomiar z dwóch ostatnich przedziałów  
 Fig. 3. Errors  $\Delta f_k$  distribution for  $f_0 = 20$  Hz,  $a = 2$  Hz/s,  $s_{\max} = 0,1$  Hz and  $f_{pr} = 10$  Hz; a – measurement from last time interval, b – measurement from two last intervals

Podobną analizę jak dla liniowej zmiany częstotliwości można wykonać dla zmiany sinusoidalnej. Załóżmy, że w czasie pomiaru mierzona wielkość zmienia się w funkcji czasu w sposób sinusoidalny z częstotliwością  $f_s$ , z nałożonym szumem  $s$ :

$$f = f_0 + f_m \cdot \sin(2\pi f_s t) + s, \quad (7)$$

gdzie:

$f_0$  – składowa stała częstotliwości sygnału impulsowego  $f$ ,

$f_m$  – amplituda zmian częstotliwości sygnału impulsowego  $f$ .

Wyznaczając wartość częstotliwości  $f_i$  dla chwili  $t_i = \sum_{j=1}^{i-1} T_j + \frac{1}{2}T_i$  możemy napisać:

$$f_i = f_0 + f_m \cdot \sin \left[ 2\pi f_s \left( \sum_{j=1}^{i-1} T_j + \frac{1}{2}T_i \right) \right] + s_i. \quad (8)$$

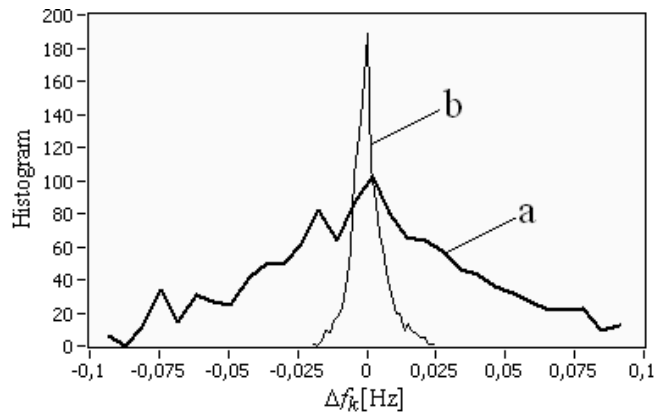
Po przekształceniu otrzymujemy równanie

$$f_0 + f_m \cdot \sin \left[ 2\pi f_s \left( \sum_{j=1}^{i-1} T_j + \frac{T_i}{2} \right) \right] + s_i - \frac{1}{T_i} = 0, \quad (9)$$

z którego można obliczyć wartości kolejnych przedziałów międzyimpulsowych  $T_i$  sygnału częstotliwościowego.

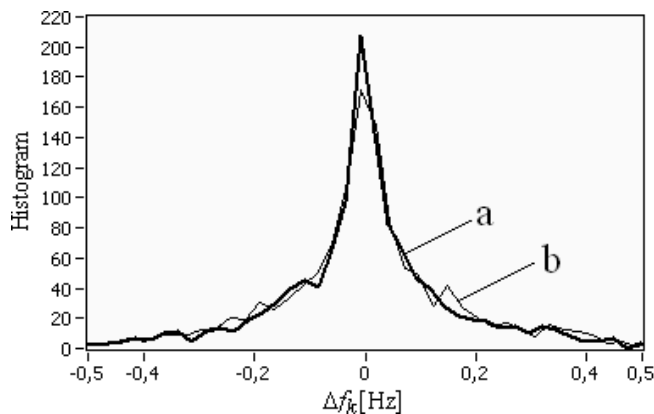
Na rys. 4 przedstawiony jest rozkład błędów przy sinusoidalnej zmianie częstotliwości sygnału impulsowego, dla  $f_0 = 20$  Hz,  $f_m = 2$  Hz,  $f_s = 0,3$  Hz,  $s_{\max} = 0,001$  Hz i częstotliwości próbkowania  $f_{pr} = 50$  Hz.





Rys. 4. Rozkład błędów  $\Delta f_k$  dla  $f_0 = 20$  Hz,  $f_m = 2$  Hz,  $f_s = 0,3$  Hz,  $s_{\max} = 0,001$  Hz i  $f_{pr} = 50$  Hz; a – pomiar z ostatniego przedziału międzyimpulsowego, b – pomiar z dwóch ostatnich przedziałów

Fig. 4. Errors  $\Delta f_k$  distribution for  $f_0 = 20$  Hz,  $f_m = 2$  Hz,  $f_s = 0,3$  Hz,  $s_{\max} = 0,001$  Hz and  $f_{pr} = 50$  Hz; a – measurement from last time interval, b – measurement from two last intervals



Rys. 5. Rozkład błędów  $\Delta f_k$  dla  $f_0 = 20$  Hz,  $f_m = 2$  Hz,  $f_s = 0,3$  Hz,  $s_{\max} = 0,1$  Hz i  $f_{pr} = 50$  Hz; a – pomiar z ostatniego przedziału międzyimpulsowego, b – pomiar z dwóch ostatnich przedziałów

Fig. 4. Errors  $\Delta f_k$  distribution for  $f_0 = 20$  Hz,  $f_m = 2$  Hz,  $f_s = 0,3$  Hz,  $s_{\max} = 0,1$  Hz and  $f_{pr} = 50$  Hz; a – measurement from last time interval, b – measurement from two last intervals

Na rys. 5 pokazany jest rozkład błędów uzyskany dla takich samych parametrów jak na rys. 4, ale dla  $s_{\max} = 0,1$  Hz.

Porównując rysunki można stwierdzić, że podobnie jak dla liniowej zmiany częstotliwości metoda polegająca na wyznaczeniu częstotliwości z dwóch ostatnich przedziałów międzyimpulsowych daje dobre wyniki przy małych zmianach mierzonej wielkości. Dla dużej zawartości szumów może nawet pogorszyć dokładność pomiarów.

### 3. Połączenie przedstawionych metod

Jak wynika z przedstawionych rozważań, mniejsze błędy pomiaru częstotliwości metodą cyfrową uzyskujemy przez pomiar dwóch ostatnich przedziałów międzyimpulsowych i wyznaczenie częstotliwości dla danej chwili z ekstrapolacji. Czasami jednak, przy dużej zawartości szumów, z pomiaru tą metodą można uzyskać nieco większe błędy, niż przy

wyznaczeniu częstotliwości z ostatniego przedziału, poprzedzającego chwilę, dla której chcemy uzyskać wartość częstotliwości. Jeżeli częstotliwość zmienia się w sposób przypadkowy, częstotliwość wyznaczona na podstawie dwóch ostatnich przedziałów może znacznie odbiegać od jej bieżącej wartości.

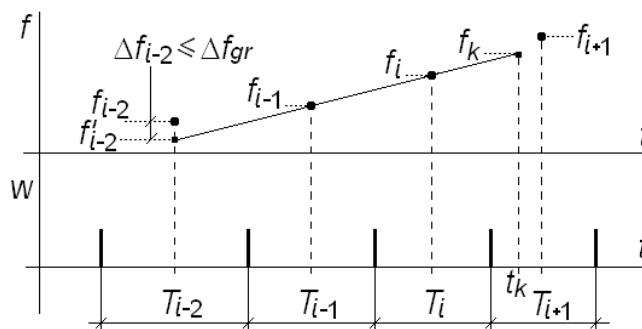
Rozwiązaniem w tej sytuacji może być wykorzystanie jeszcze jednego wcześniejszego przedziału  $T_{i-2}$ . Dla przypadkowej zmiany częstotliwości nie ma jednak sensu wyznaczanie charakteru zmiany częstotliwości w funkcji czasu przy wykorzystaniu trzech wartości częstotliwości poprzedzających chwilę  $t_k$ , ponieważ nie przyniesie to zadawalających wyników. Dodatkowa wartość częstotliwości służy do wyznaczenia różnicy (patrz rys. 6 i 7):

$$\Delta f_{i-2} = |f_{i-2} - f_{i-2}'|, \quad (10)$$

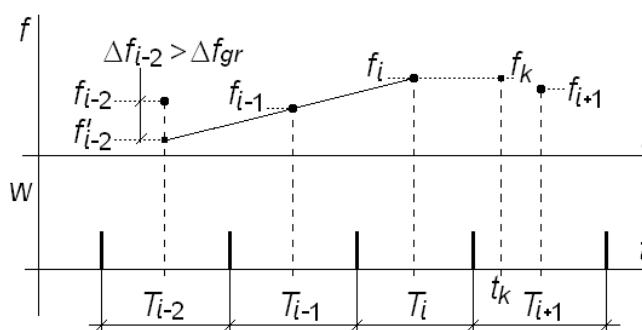
gdzie:

$f_{i-2}$  – wartość częstotliwości wyznaczona z przedziału  $T_{i-2}$ ,

$f_{i-2}'$  – wartość częstotliwości w połowie przedziału  $T_{i-2}$  wyznaczona przez ekstrapolację z przedziałów  $T_{i-1}$  i  $T_i$ .



Rys. 6. Pomiar częstotliwości z trzech ostatnich przedziałów dla  $\Delta f_{i-2} \leq \Delta f_{gr}$   
Fig. 6. Frequency measurement from three last time intervals for  $\Delta f_{i-2} \leq \Delta f_{gr}$



Rys. 7. Pomiar częstotliwości z trzech ostatnich przedziałów dla  $\Delta f_{i-2} > \Delta f_{gr}$   
Fig. 7. Frequency measurement from three last time intervals for  $\Delta f_{i-2} > \Delta f_{gr}$

Uzyskana z wzoru (10) wartość porównywana jest z przyjętą wartością graniczną  $\Delta f_{gr}$ . Dla  $\Delta f_{i-2} \leq \Delta f_{gr}$  jako wynik pomiaru przyjmowana jest wartość częstotliwości  $f_k$  wyznaczona przez ekstrapolację z przedziałów  $T_{i-1}$  i  $T_i$  (rys. 6). Jeżeli  $\Delta f_{i-2} > \Delta f_{gr}$  jako wynik pomiaru przyjmowana jest wartość częstotliwości  $f_i$  wyznaczona z przedziału  $T_i$  (rys. 7).

Dla warunków przedstawionych w pkt. 2 zostały powtórzone symulacje pomiarów. Dla zaproponowanej metody otrzymano rozkład błędów pokrywający się z rozkładem b na rys. 2 i

4 oraz rozkład zbliżony do a na rys. 3 i 5. Potwierdza to słuszność przyjętych rozważań. Dla mierzonego sygnału o małej dynamice zmian i małej zawartości szumów wartość częstotliwości wyznaczana jest z ekstrapolacji na podstawie dwóch ostatnich przedziałów międzyimpulsowych. Przy dużej zawartości szumów wartość częstotliwości wyznaczana jest z ostatniego przedziału.

W przeprowadzonych symulacjach przyjęto wyznaczoną doświadczalnie wartość graniczną równą  $\Delta f_{gr}/f_{i-2} = 0,2\%$ . Uzyskano ją przez wyznaczenie wartości błędów w funkcji wartości granicznej. Wartość graniczna zależy od charakteru zmian mierzonej wielkości, dlatego jej wyznaczenie może być celem dalszych rozważań.

#### 4. Podsumowanie

Ograniczeniem cyfrowego pomiaru częstotliwości on-line jest to, że dysponujemy informacją o długościach przedziałów międzyimpulsowych zakończonych przed chwilą próbkowania, dla której wyznaczamy częstotliwość. Przedstawione w artykule porównanie pomiaru częstotliwości na podstawie ostatniego zmierzonego przedziału i dwóch ostatnich przedziałów wykazało, że wyznaczenie częstotliwości z dwóch ostatnich przedziałów na podstawie ekstrapolacji pozwala znacznie ograniczyć błędy pomiaru. Metoda ta nie jest jednak korzystna, gdy w mierzonym sygnale występują duże szумы. W takiej sytuacji wyznaczenie częstotliwości na podstawie ostatniego przedziału może dać lepsze efekty, choć różnice nie są duże.

Zaproponowana metoda polegająca na wyznaczeniu częstotliwości z dodatkowego przedziału i porównaniu jej z częstotliwością wyznaczoną z ekstrapolacji pozwala na uzależnienie sposobu wyznaczenia wyniku od charakteru zmian mierzonej wielkości i zawartości szumów. Uzyskane błędy zbliżone są do błędów, które w danych warunkach pomiaru są mniejsze.

Wskazane są dalsze prace, pozwalające na określenie wpływającej na wybór metody wartości granicznej w zależności od warunków pomiaru.

#### 5. Literatura

- [1] N. V. Kirianaki, S. Y. Yurish, N. O. Shpak, V. P. Denega: Data acquisition and signal processing for smart sensors. John Wiley & Sons, Ltd, Baffins Lane 2001.
- [2] J. R. Jasik: Przetwarzanie sygnałów pomiarowych w systemach z częstotliwościowym nośnikiem informacji. Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 2003.
- [3] D. Świsulski: Wielokanałowa akwizycja z torami pomiarowymi z napięciowym i częstotliwościowym nośnikiem informacji. Pomiary Automatyka Kontrola, nr 6/2006, s. 27-29.
- [4] D. Świsulski: Błąd dynamiczny w torze pomiarowym z częstotliwościowym nośnikiem informacji. Pomiary Automatyka Kontrola, nr 2/2000, s. 2-6.
- [5] D. Świsulski: Cyfrowa rejestracja sygnałów impulsowych z częstotliwościowym nośnikiem informacji. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2006.
- [6] D. Świsulski: Wielokanałowa rejestracja częstotliwości licznikami NI-TIO. Materiały VII Szkoły - Konferencji Metrologia Wspomagana Komputerowo MWK-2005, Waplewo, 17-20 maja 2005, t. 2, s. 63-70.

