

## NIEWSPÓLMIERNOŚĆ MODALNA WYWOŁANA DODANIEM ELEMENTU INERCYJNO/SPRĘŻYSTEGO ZASTOSOWANA DO ELIMINACJI DRGAŃ NISKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

KRZYSZTOF LIPIŃSKI

*Katedra Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów, Politechnika Gdańska  
e-mail: klipinsk@pg.gda.pl*

Streszczenie. W pracy skoncentrowano się na zjawisku niewspółmierności modalnej drgań. Zjawisko to wykorzystano do przyspieszenia eliminacji drgań niskiej częstotliwości. Niewspółmierność uzyskano przez cykliczne dołączanie i odłączanie dodatkowego elementu inercyjno - sprężystego. W celu zweryfikowania skuteczności metody zbudowano i przetestowano model numeryczny zjawiska. Testowanym układem jest model przęsła mostu z pojedynczym odciałem. Charakterystyka przęsła jest modyfikowana przez dołączanie i odłączanie dodatkowej przeciwmasy zaczepionej na przeciwnym końcu odciału.

### 1. WSTĘP

W pracy omówiono wybrany aspekt dynamiki układów ciągłych. Uwagę skupiono na problemie eliminacji drgań słabo tłumionych. Zaproponowano działania mogące przyspieszyć eliminację drgań. Zrezygnowano z montowania dodatkowych elementów tłumiących. Wykorzystano efekty wynikające z cyklicznych zmian sztywności. Zmiany takie można przeprowadzić poprzez dołączanie i odłączanie elementu sprężysto - inercyjnego. Częstotliwości i postaci drgań układu przed zmianą są odmienne od częstotliwości i postaci drgań układu po zmianie. Mówimy, że wspomniane drgania są modalnie niewspółmierne (odmienne). Stosowano nagłą (skokową) modyfikację właściwości modalnych. Podczas zmiany sztywności, przemieszczenia i prędkości punktów układu nie zmieniają się. Ponieważ przemieszczenia i prędkości punktów materialnych (odpowiadające pojedynczej współrzędnej modalnej układu przed modyfikacją) nie są zgodne z którąkolwiek z postaci drgań układu zmodyfikowanego, pojedynczej współrzędnej modalnej układu przed modyfikacją odpowiada kombinacja liniowa współrzędnych modalnych układu po zmianie sztywności. Wzbudzone są drgania kilku (a najczęściej wszystkich) postaci drgań, także tych postaci, których drgania zanikają szybko. Przyspiesza to rozproszenie energii. Niestety, w układzie o zmienionej sztywności pojawiają się także postaci, których drgania są słabo tłumione. Te drgania zmniejszają się tylko w niewielkim stopniu. Aby przyspieszyć ich zanikanie, potrzebna jest ponowna zmiana charakterystyki modalnej układu (np. do początkowej). Także teraz powinny pojawić się postaci, których drgania szybko zanikają. Można przypuszczać, że cykliczne zmienianie sztywności przyspieszy rozpraszanie energii i przyspieszy zanikanie drań.

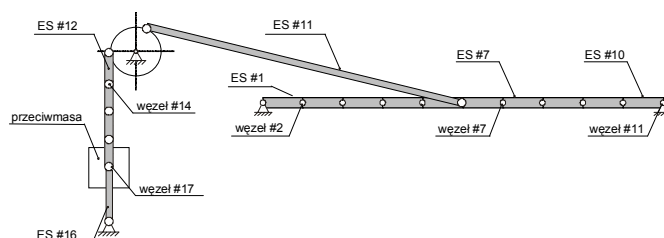
Idea wykorzystania zjawiska niewspółmierności modalnej nie jest pomysłem całkowicie nowym. Została zaproponowana przez Diaza i Mukherjee'a [1, 2]. Analizowali oni kratownicę, w której umieszczono dziewięć dodatkowych odciągów. Obserwowali pierwszych sześć postaci drgań kratownicy. Tylko trzy z tych postaci udostępniały możliwość kontrolowania (tłumienia) drgań. Pozostałe drgania wyeliminowano dzięki cyklicznym zmianom sztywności układu (napinanie i luzowanie odciągów). W kolejnym teście weryfikowano efekty dodawania mas w wybranych, strategicznych miejscach kratownicy. Efekty niewspółmierności modalnej prezentowano także w pracy [3]. Do przęsła z odciągami dołączano i odłączano dodatkowy, drugi odciąg. Wykazano skuteczność metody. Wskazano zagrożenia wynikające z małej masy elementu odłączanego.

W obecnej pracy zmodyfikowano element dołączany. Zamodelowano przęsło mostu z odciągami. Sztywność i tłumienie są niskie. Występują słabo tłumione drgania niskiej częstotliwości. Odciąg przeciągnięto przez krążek umieszczony na szczycie pylonu (rys. 1). Po przeciwnej stronie krążka połączono odciąg z masą na sprężynie. Niewspółmierność wymuszana jest przez blokowanie obrotu krążka. Modyfikuje to właściwości modalne układu. W celu efektywności zanikania drgań przeprowadzono test na modelu numerycznym.

Prezentowaną pracę podzielono na cztery rozdziały. W rozdziale drugim przedstawiono układ poddany analizie. Zaproponowano także sposób modelowania jego dynamiki. Do modelowania wykorzystano metodę elementów skończonych. Podano najważniejsze wzory opisujące dynamikę układu zbudowanego z elementów belkowych i prętowych. Rozdział trzeci prezentuje wyniki obliczeń numerycznych. Osobno przebadano układy bez przeciwmasy i z przeciwmasą. Przedstawiono wyniki analizy modalnej oraz przebiegi czasowe uzyskane drogą całkowania numerycznego. Przeanalizowano efekty wynikające z niewspółmierności modalnej. Zaproponowano sekwencje przełączeń pomiędzy konfiguracjami układu. Wyznaczono i zaprezentowano odpowiednie przebiegi czasowe. Rozdział czwarty przeznaczono na prezentację podsumowania i wniosków.

## 2. UKŁAD PODDANY ANALIZIE

Przyjęto, że sztywność i tłumienie występujące w układzie są niskie. Oznacza to obecność słabo tłumionych drgań niskiej częstotliwości. Wykorzystując metodę elementów skończonych, zbudowano model hipotetycznego układu. Ponieważ skoncentrowano się na obserwacji zjawiska, odniesienia do potencjalnego obiektu rzeczywistego zminimalizowano. Przyjęto niski poziom dyskretyzacji modelu. Do zamodelowania przęsła wykorzystano 10 płaskich elementów belkowych (rys. 1). Do opisu odkształcenia przęsła wykorzystano przemieszczenia w węzłach. Węzły mogą przemieszczać się w pionie i obracać się. Przemieszczenia wzdłużne zablokowano. Odciąg i ciężna przeciwmasy zamodelowano jako elementy prętowe.



Rys. 1. Schemat układu poddany analizie

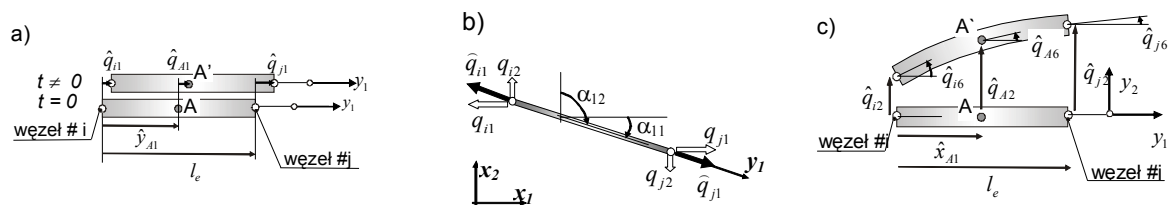
Współrzędne  $q_1 \div q_{22}$  opisują deformacje przęsła,  $q_{11}, q_{23} \div q_{30}$  opisują deformacje odciągów i położenie przeciwmasy. Na liście tej dwukrotnie występuje współrzędna  $q_{11}$ . Dzieje się tak,

ponieważ współrzędna  $q_{11}$  opisuje przemieszczenie pionowe punktu łączącego belkę z odciągiem. Zmiennymi są współrzędne:  $q_2 \div q_{20}$ ,  $q_{22}$ ,  $q_{24} \div q_{29}$ . Pozostałe współrzędne zablokowano. Nadano im stałe, zerowe wartości. Czasowo blokowana jest także współrzędna  $q_{26}$ , opisująca obrót krążka.

W celu opisu dynamiki przyjęto: globalny układ odniesienia (połączony z ciałem odniesienia) oraz lokalne układy elementów belkowych. W układzie lokalnym elementu belkowego kierunek przemieszczenia jest równoległy do osi  $y_2$ , oś obrotu równoległa do osi  $y_3$ . Każdy element opisują dwa węzły. Dla elementu prętowego kierunek odkształcenia jest równoległy do osi  $y_1$ . Nadając węzłom elementu numery  $i$  oraz  $j$ , współrzędnymi elementu są [4-6]:

$$\hat{\mathbf{q}}_{pe} = \text{col}(\hat{q}_{i1}, \hat{q}_{j1}), \quad \hat{\mathbf{q}}_{be} = \text{col}(\hat{q}_{i2}, \hat{q}_{i6}, \hat{q}_{j2}, \hat{q}_{j6}), \quad (1)$$

gdzie:  $\hat{q}_{i1}, \hat{q}_{j1}$  - przemieszczenia węzłów elementu prętowego (rys. 2a);  $\hat{q}_{i2}, \hat{q}_{j2}$  - przemieszczenia węzłów elementu belkowego (rys. 2c);  $\hat{q}_{i6}, \hat{q}_{j6}$  - obroty węzłów elementu belkowego, (rys. 2c); symbol  $\hat{\phantom{x}}$  oznacza, że przemieszczenia mierzono w układzie lokalnym.



Rys. 2. Szczegóły modelu elementu skończonego: przemieszczenia elementu prętowego (a); transformację lokalnego i globalnego układu współrzędnych (b); przemieszczenia elementu belkowego (c)

Obciążenie przyłożono jedynie w węzłach. Odpowiednimi siłami uogólnionymi są:

$$\hat{\mathbf{P}}_{pe} = \text{col}(\hat{P}_{i1}, \hat{P}_{j1}) \quad \hat{\mathbf{P}}_{be} = \text{col}(\hat{P}_{i2}, \hat{P}_{i6}, \hat{P}_{j2}, \hat{P}_{j6}), \quad (2)$$

gdzie:  $\hat{P}_{i1}, \hat{P}_{j1}$  - obciążenie węzłów elementu prętowego (współliniowe do osi  $y_1$ );  $\hat{P}_{i2}, \hat{P}_{j2}$  - obciążenie (siły) węzłów elementu belkowego (współliniowe do osi  $y_2$ );  $\hat{P}_{i6}, \hat{P}_{j6}$  - obciążenie (momenty sił) węzłów elementu belkowego (współliniowe do osi  $y_3$ ).

Dla każdego punktu materialnego (wycinka o długości elementarnej) elementu (punkt  $A$ ) przemieszczenia uzależniono od przemieszczeń w węzłach. Otrzymano

$$\text{col}(\hat{q}_{A2}, \hat{q}_{A6}) = \hat{\mathbf{N}}_{be}(\zeta) \cdot \hat{\mathbf{q}}_{be}, \quad (3)$$

gdzie:  $\hat{\mathbf{N}}_{be}$  - funkcja kształtu.

Dla elementu prętowego funkcję kształtu zaprosymowano funkcjami liniowymi, natomiast w elemencie belkowym wykorzystano wielomiany 3 stopnia [4-6]:

$$\hat{\mathbf{N}}_{pe}(\zeta) = \begin{bmatrix} 1-\zeta & \zeta \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{N}}_{be}(\zeta) = \begin{bmatrix} 2\zeta^3 - 3\zeta^2 + 1 & l_e(\zeta^3 - 2\zeta^2 + \zeta) & -2\zeta^3 + 3\zeta^2 & l_e(\zeta^3 - \zeta^2) \\ \frac{6(\zeta^2 - \zeta)}{l_e} & 3\zeta^2 - 4\zeta + 1 & \frac{6(-\zeta^2 + \zeta)}{l_e} & 3\zeta^2 - 2\zeta \end{bmatrix}. \quad (4)$$

gdzie:  $\zeta = \bar{x}_1/l_e$  - współrzędna względnego położenia punktu na elemencie.

Także prędkości punktu  $A$  wyrażono za pomocą funkcji kształtu i otrzymano

$$\text{col}(\dot{\hat{q}}_{A2}, \dot{\hat{q}}_{A6}) = \hat{\mathbf{N}}_{be}(\zeta) \cdot \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{be} \quad (5)$$

Do opisu dynamiki wybranych elementów potrzebne są macierze mas i sztywności. Mają one postać [4-6]:

$$\hat{\mathbf{A}}_{be} = \frac{\rho_e F_e l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ \text{sym.} & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{be} = \frac{E_e J_e}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ \text{sym.} & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}, \quad (6a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{pe} = \frac{\rho_e F_e l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \text{sym.} & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{pe} = \frac{E_e J_e}{l_e^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \text{sym.} & 1 \end{bmatrix}, \quad (6b)$$

gdzie:  $\hat{\mathbf{A}}_{be}; \hat{\mathbf{C}}_{be}$  - macierze elementu belkowego;  $\hat{\mathbf{A}}_{pe}; \hat{\mathbf{C}}_{pe}$  - macierze elementu prętowego.

Macierze tłumienia przyjęto jako proporcjonalne do macierzy mas i sztywności [4-6]:

$$\hat{\mathbf{B}}_e = \alpha \hat{\mathbf{A}}_e + \beta \hat{\mathbf{C}}_e. \quad (7)$$

Równania (1÷7) opisują zachowanie elementu w lokalnym układzie współrzędnych, związanym z analizowanym elementem. Dalsze kroki wymagają ich transformacji do układu globalnego. W elemencie belkowym współrzędne i macierze nie ulegają zmianie (brak względnego obrotu układów). Otrzymujemy:

$$\mathbf{q}_{be} = \hat{\mathbf{q}}_{be}; \quad \mathbf{P}_{be} = \hat{\mathbf{P}}_{be}; \quad \mathbf{A}_{be} = \hat{\mathbf{A}}_{be}; \quad \mathbf{C}_{be} = \hat{\mathbf{C}}_{be}; \quad \mathbf{B}_{be} = \hat{\mathbf{B}}_{be}. \quad (8)$$

W wypadku elementu prętowego (rys. 2.b) macierzą transformacji jest [4-6]:

$$\boldsymbol{\Theta}_{pe} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{11}) & \cos(\alpha_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_{11}) & \cos(\alpha_{12}) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

a związki pomiędzy współrzędnymi i macierzami opisują relacje [4-6]:

$$\hat{\mathbf{q}}_{pe} = \boldsymbol{\Theta}_{pe} \cdot \mathbf{q}_{pe}; \quad \hat{\mathbf{P}}_{pe} = \boldsymbol{\Theta}_{pe} \cdot \mathbf{P}_{pe}; \quad \hat{\mathbf{A}}_{pe} = \boldsymbol{\Theta}_{pe}^T \cdot \hat{\mathbf{A}}_{pe} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{pe}; \quad \hat{\mathbf{C}}_{pe} = \boldsymbol{\Theta}_{pe}^T \cdot \hat{\mathbf{C}}_{pe} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{pe}; \quad \hat{\mathbf{B}}_{pe} = \boldsymbol{\Theta}_{pe}^T \cdot \hat{\mathbf{B}}_{pe} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{pe}. \quad (10)$$

Równania elementów są łączone. Tworzony jest wektor przemieszczeń  $\mathbf{q}_c^*$ , zawierający przemieszczenia wszystkich węzłów układu. Podczas jego budowy łączone są bloki zawierające współrzędne opisujące przemieszczania kolejnych węzłów. W podobny sposób budowany jest wektor sił uogólnionych  $\mathbf{P}_c^*$ . Po połączeniu, przyjmują one postać:

$$\mathbf{q}_c^* = \text{col}(\mathbf{q}_i) \quad ; \quad \mathbf{P}_c^* = \text{col}(\mathbf{P}_i) \quad : \quad i=1, 2, \dots, w, \quad (11)$$

gdzie:  $\mathbf{q}_i$  - wektor przemieszczeń w węźle  $i$ ;  $\mathbf{P}_i$  - wektor sił uogólnionych w węźle  $i$ .

Podobnie jak przemieszczenia, łączone są macierze równań dynamiki. Macierze elementu  $A_e, C_e, B_e$  dzielone są na bloki odpowiadające przemieszczeniom w poszczególnych węzłach. Bloki te umieszczane są w macierzach  $A_e^*, C_e^*, B_e^*$ , opisujących dynamikę elementu we współrzędnych układu [4-6]. Umieszczane są na przecięciach pasm o numerach odpowiadających numerom węzłów elementu skończonego:

$$A_e = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} ; \quad A_e^* = \begin{bmatrix} & & & & \\ & A & & B & \\ & & & & \\ & C & & D & \\ & & & & \\ \dots & i & \dots & j & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{matrix} \quad (12)$$

Macierze te są sumowane w celu uzyskania macierzy dynamiki układu. Otrzymujemy [4-6]:

$$A_c^* = \sum_{e=1}^{n_e} A_e^* , \quad C_c^* = \sum_{e=1}^{n_e} C_e^* , \quad B_c^* = \sum_{e=1}^{n_e} B_e^* , \quad (13)$$

gdzie:  $n_e$  – liczba elementów rozważanego układu.

Na zakończenie usuwane są wiersze i kolumny odpowiadające blokowanym przemieszczeniom. Zmniejsza to rozmiar macierzy. Alternatywnie pozostawia się blokowane wiersze i kolumny, zerując znajdujące się w nich wartości i wstawiając „1” na głównej przekątnej. Kończącą postać równań dynamiki układu można zapisać [4-6]:

$$A_c \cdot \ddot{q}_c + B_c \cdot \dot{q}_c + C_c \cdot q_c = P_c . \quad (14)$$

### 3. WYNIKI TESTU NUMERYCZNEGO

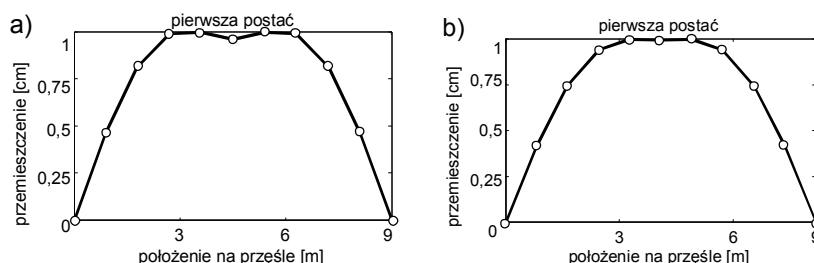
Równania (1÷14) wykorzystano do utworzenia modelu numerycznego. Obliczenia wykonano w MATLABie [7]. Zamodelowano przęsło o długości 9 metrów wykonane z bardzo wiotkiej stalowej belki. Przekrój belki ma wysokość  $h = 0,05 \text{ m}$  i szerokość  $a = 0,2 \text{ m}$ . Przęsło podzielono na 10 elementów skończonych. W węzle środkowym zamocowano odciąg. Jego drugi koniec umieszczono na wysokości 4 metrów. Zamocowano go do krążka umieszczonego na pylonie stojącym ponad pierwszym węzłem przęsła. Odciąg zamodelowano jako pojedynczy stalowy element prętowy. Pole powierzchni odciagu przyjęto  $A_{el} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Dla modelu z zablokowanym odciągami przeprowadzono analizę modalną, której wyniki przedstawiono w tabeli 1. Wyniki uzyskano dla bardzo niskiego tłumienia wewnętrznego. Do dalszej analizy wybrano pierwszą postać drgań (rys. 3a).

Tabela 1. Wyniki analizy modalnej – blokowany odciąg

postać	część rzeczywista	część urojona	częstotliwość (Hz)	ksi(%)
1	-0,0038	-12,36	1,97	0,03
2	-0,0061	-15,60	2,48	0,04
3	-0,0398	-39,91	6,35	0,10
4	-0,1258	-70,92	11,29	0,18
5	-0,2935	-71,26	11,34	0,41
6	-0,3510	-119,98	19,10	0,30

Wyniki potwierdzają, że drgania zgodne z pierwszą postacią są drganiami słabo tłumionymi. Współczynnik tłumienia postaci wynosi jedynie 0,03%. Wynik ten zweryfikowano. Wygenerowano wychylenie początkowe zgodne z pierwszą postacią drgań. Następnie przeprowadzono całkowanie numeryczne przebiegu czasowego wychylonego układu.

Zasymulowano 20 sekund ruchu układu. Ruch wybranego węzła przedstawiono na rys. 4a. Uzyskany przebieg potwierdza niską skuteczność tłumienia.



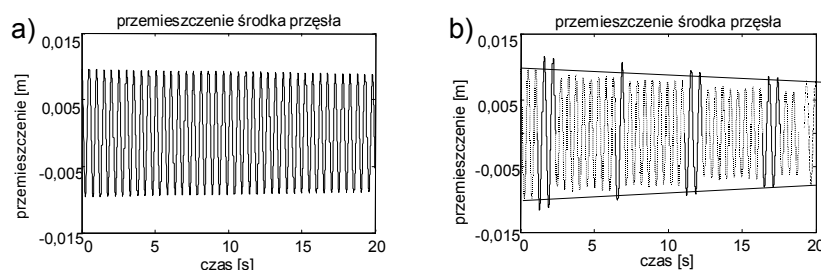
Rys. 3: Przemieszczenia pionowe w węzłach przęsła: układ z zablokowanym odciałem (a); układ z dodaną przeciwmasą (b)

Uzyskane wyniki potwierdziły konieczność zwiększenia tłumienia w układzie. Uzyskano to, przedłużając odciał i umieszczając na jego końcu przeciwmasę ( $m_p = 300 \text{ kg}$ ) z tłumikiem ( $c_p = 20 \text{ Ns/m}$ ) umieszczonym pomiędzy masą a otoczeniem. Do połączenia odciału z przeciwmasą wykorzystano 4 elementy prętowe o długości  $l_{e2} = 1 \text{ m}$  każdy i o przekroju poprzecznym  $A_{e2} = 0,64 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Dodatkowo masę połączono z otoczeniem. Użyto wiotkiego elementu prętowego o długości  $l_{e3} = 1 \text{ m}$  i polu przekroju  $A_{e3} = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Przeprowadzono analizę modalną zachowania układu z przeciwmasą (tabela 2).

Tabela 2. Wyniki analizy modalnej – układ z przeciwmasą

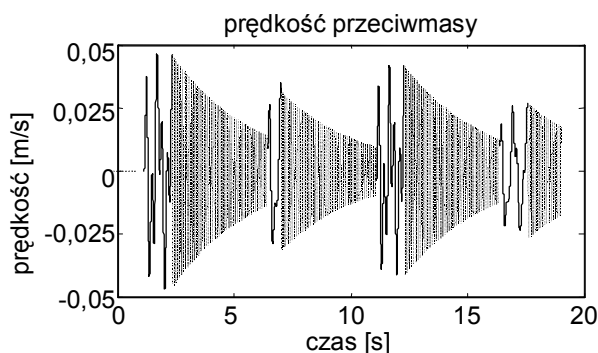
postać	część rzeczywista	część urojona	częstotliwość (Hz)	ksi(%)
1	-0,0114	-10,38	1,65	0,11
2	-0,0061	-15,60	2,48	0,04
3	-0,1647	-28,48	4,53	0,58
4	-0,0540	-40,58	6,46	0,13
5	-0,1258	-70,92	11,29	0,18
6	-0,3598	-119,94	19,09	0,30

Profil pierwszej postaci drgań przedstawiono na rys. 3b. Dodanie przeciwmasy tylko nieznacznie zmieniło profil postaci. Poprawiło współczynnik tłumienia (rys. 4b- obwiednia). Wzrósł on kilkukrotnie. Mimo to przyjmuje nadal bardzo niską wartość równą 0,11 %.



Rys. 4. Przemieszczenia pionowe w wybranym węzle przęsła: układ z zablokowanym odciałem (a); porównanie układu z dołączoną przeciwmasą (zarys obwiedni i końcowy fragment wykresu) i układ z przełączaną przeciwmasą (b)

W kolejnym etapie przeprowadzono test efektywności zjawiska niewspółmierności modalnej. Podczas testu czterokrotnie dołączano i trzykrotnie odłączano przeciwmasę. Momenty dołączenia i odłączenia przeciwmasy dobierano tak, aby odpowiadały one odpowiednio: brakowi napięcia odciągu w momencie odłączania i lokalnego maksimum prędkości przeciwmasy w momencie dołączania. Czekanie na odpowiedni moment przełączania rozpoczynano kolejno w: 2; 4; 7; 9; 12; 15; 18; 20 sekundzie. Uzyskane przebiegi prędkości przeciwmasy przedstawiono na rys. 5. Przemieszczenia środka przęsła przedstawiono na rysunku rys. 4b. Porównano je z przemieszczeniami uzyskanymi dla układu z przeciwmasą podłączoną na stałe (obwiednia i końcowy fragment wykresu). Uzyskany przebieg potwierdza pozytywny wpływ dołączania/odłączania przeciwmasy na możliwość wytłumienia drgań analizowanej postaci.



Rys. 5: Prędkość przeciwmasy

Dodatkowym kryterium oceny jest zmiana energii kinetycznej drgania. Obliczono wartość energii na kolejnych etapach przełączania konfiguracji układu. Jej stan początkowy wynosił  $2,0683 J$ . Na kolejnych etapach przełączania malał i osiągnął wartości:  $1,9761$ ;  $1,5983$ ;  $1,5363$ ;  $1,3949$ ;  $1,3243$ ;  $1,0417$ ;  $1,0157 J$ . W tym czasie energia kinetyczna przeciwmasy przyjmowała wartości:  $0,3187$ ;  $0,0144$ ;  $0,1462$ ;  $0,0016$ ;  $0,2604$ ;  $0,0175$ ;  $0,1083 J$ . Dla porównania, końcowa energia kinetyczna układu zablokowanego (masa dodatkowa permanentnie odłączona) przy identycznym czasie trwania ruchu (36 okresów oscylacji) wyniosła  $1,7899 J$ .

#### 4. WNIOSKI

Zjawisko niewspółmierności modalnej można wykorzystać do przyspieszenia procesu eliminacji drgań. Jest szczególnie korzystne w tych sytuacjach, gdy nie ma możliwości instalacji elementów o wysokich współczynnikach tłumienia. Wprowadza możliwość przesunięcia energii drgania do innej postaci, w tym do postaci lepiej tłumionej.

Dla efektywnego działania istotny jest dobór wielu parametrów. Istotny jest dobór parametrów sprężysto-masowych przeciwwagi. Należy dążyć do tego, aby ruchowi przęsła odpowiadał duży ruch przeciwwagi. Istotny jest wybór momentu odłączenia przeciwwagi tak, aby w momencie odłączenia miała ona dużą energię kinetyczną. Nie jest to zadanie trywialne, gdyż ruch przeciwwagi jest złożeniem kilku ruchów harmonicznym. Istotny jest także moment dołączenia przeciwwagi. Powinno to nastąpić przed całkowitym wytłumieniem drgań przeciwwagi. Całkowite wytłumienie jej ruchu nie jest korzystne. Czas potrzebny na wytłumienie pozostającej niewielkiej energii drgań można wykorzystać do ponownego





rozruszania przeciwwagi. Istotny jest taki dobór miejsca przyłożenia odciążu, aby powiększyć amplitudy drgań tych postaci, dla których drgania zanikają najszybciej.

#### LITERATURA

1. Issa J., Mukherjee R., Diaz A.R., Shaw S.W.: Modal disparity and its experimental verification. "Journal of Sound and Vibration" 2008, 311 p. 1465–1475.
2. Diaz A.R. and Mukherjee R.: Methods for control enhancement of flexible structures based on modal disparity. W: 6<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference ESMC 2006, Budapest, 2006, p. 1-2.
3. Lipiński K.: Span's low damped vibrations and vibration's damping by modal disparity inducted by cable stays temporal addition. W.: "Vibrations in Physical Systems" 2008, 23, p. 235-240.
4. Hein R., Lipiński K., Olszewski H., Wittbrodt E.: Optymalizacja ustawienia odciążów belki wspornikowej z ruchomym pojazdem. W.: TECHNICON`05. Politechnika Gdańska, 2005, s.1-10.
5. Gawroński W., Kruszewski J., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E.: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Warszawa : Arkady, 1984.
6. Kruszewski J., Wittbrodt E., Walczyk Z.: Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym. T.2. Warszawa : WNT, 1993.
7. <http://www.mathworks.com>.

### **MODAL DISPARITY INDUCED BY AN INERTIA-ELASTIC ELEMENT USED FOR VIBRATIONS ELIMINATION FOR LOW FREQUENCIES OF VIBRATIONS**

Summary. The paper presents effects of the modal disparity. The phenomenon is used to accelerate eliminations of low damped, low frequency vibrations present in a mechanical system. The disparity is indicated by an inertia-elastic element present in the system. The element is periodically connected/disconnected from the rest of the system. To verify efficiency of this method, a numerical model of a system is proposed in the paper. It refers to a single span of a bridge supported by a single cable stay. The span modal characteristic is modified by periodic connections/disconnections between a stay and a pylon. To increase inertia of the disconnected stay, some additional counter mass is attached to the released end of the stay.

