

# Obliczanie współczynnika filtracji piasków i żwirów na podstawie krzywej uziarnienia: przegląd wzorów empirycznych

Dr inż. Adam Szymkiewicz, dr inż. Arkadiusz Kryczka  
Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

Podstawowym parametrem określającym zdolność ośrodka gruntowego do przewodzenia wody jest współczynnik filtracji  $k$ , wyrażany w jednostkach prędkości (najczęściej m/s, cm/s lub m/db). Jego wartość jest zdeterminowana przez fizyczne właściwości filtrującej wody oraz geometrię porów, która z kolei w przypadku skał okruchowych zależy od wielkości, kształtu i ułożenia ziaren. Zależność współczynnika filtracji od parametrów uziarnienia ma charakter złożony. Do celów praktycznych podjęto szereg prób przybliżonego opisu tej zależności za pomocą wzorów o charakterze empirycznym lub półempirycznym. Pierwsze takie wzory zostały sformułowane przez Seelheima i Hazena u schyłku XIX stulecia [40, 46]. Od tamtego czasu przedstawiono wiele innych propozycji, jednakże opublikowane wyniki badań nie pozwalają w sposób jednoznaczny ocenić przydatności poszczególnych formuł [1, 6, 13, 14, 16, 18, 34, 36, 38]. Powszechnie uważa się, że wzory empiryczne dają wyniki stosunkowo mało dokładne w porównaniu z laboratoryjnymi i terenowymi metodami wyznaczania współczynnika filtracji. Mimo to pozostają one ważnym narzędziem dla geotechników

i hydrogeologów, z powodu względnej łatwości pozyskiwania danych o uziarnieniu ośrodka.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wybranych wzorów pozwalających obliczyć współczynnik filtracji piasków i żwirów na podstawie krzywej uziarnienia. Obok klasycznych formuł, pojawiających się w podstawowych podręcznikach z dziedziny hydrogeologii [26, 35, 40], omówiono również wzory mniej znane w literaturze krajowej, niekiedy opracowane stosunkowo niedawno. Wzory zestawiono w formie ujednoliconej, ułatwiającej ich porównanie. Przedstawiono też wyniki obliczeń dla dwu modelowych krzywych uziarnienia.

## PODSTAWY TEORETYCZNE

W większości praktycznych przypadków rozpatrywanych w geotechnice i hydrogeologii przepływ wody w gruncie można opisać prawem Darcy'ego o postaci:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla h \quad (1)$$

gdzie:

$\mathbf{q}$  – wektor prędkości filtracji,  
 $\mathbf{k}$  – współczynnik filtracji (w ogólnym przypadku tensor),  
 $h$  – wysokość hydrauliczna.

Prawo Darcy'ego zostało sformułowane na podstawie empirycznej i obowiązuje dla przepływu w skali przestrzennej znacznie większej od skali pojedynczych ziaren i porów gruntu. Późniejsze badania wykazały, że możliwe jest wyprowadzenie równania Darcy'ego z równań Naviera-Stokesa, opisujących przepływ cieczy w porach gruntu, np. przy użyciu metody średniej objętościowej lub metody homogenizacji asymptotycznej [23, 39]. Metody te prowadzą do definicji współczynnika filtracji w postaci uwikłanej, wymagającej rozwiązania równań Stokesa dla objętości reprezentatywnej ośrodka porowatego, z odpowiednimi warunkami brzegowymi [37]. Teoretycznie możliwe jest zatem obliczenie wartości współczynnika  $k$  poprzez numeryczne rozwiązanie wspomnianych równań dla znanej geometrii porów, aczkolwiek sposób taki trudno uznać za możliwy do wykorzystania w praktyce inżynierskiej.

Dla niektórych prostych geometrii porów wartość współczynnika filtracji można otrzymać poprzez analityczne rozwiązanie równań Stokesa. Przykładowo często przytaczane w literaturze wzory na współczynnik filtracji dla ośrodków zawierających równolegle zorientowane jednorodnie pory o kształcie kapilar cylindrycznych lub szczelin mają odpowiednio postać [3]:

$$k = \frac{\gamma}{\mu} \cdot n \cdot \frac{d_k^2}{32} \quad \text{oraz} \quad k = \frac{\gamma}{\mu} \cdot n \cdot \frac{d_s^2}{12} \quad (2)$$

gdzie:

$k$  – współczynnik filtracji w kierunku równoległym do kapilar bądź szczelin,  
 $\gamma$  – ciężar właściwy cieczy,  
 $\mu$  – dynamiczny współczynnik lepkości cieczy,  
 $n$  – współczynnik porowatości ośrodka,  
 $d_k$  – średnica kapilary,  
 $d_s$  – szerokość szczeliny.

W przypadku ośrodków o bardziej skomplikowanej geometrii porów, jakimi są na przykład grunty, analityczne rozwiązanie równań Stokesa jest niemożliwe. Przedstawiono jednak szereg propozycji o charakterze półempirycznym, umożliwiających rozszerzenie wzorów (2) na bardziej realistyczne struktury porów. Najbardziej znana z nich została przedstawiona przez Kozeny'ego, a następnie rozwinięta przez Carmana [3, 19, 20]. Oznaczając objętość rozpatrywanego ośrodka porowatego przez  $V$ , objętość porów przez  $V_p$ , objętość szkieletu przez  $V_s$ , zaś powierzchnię graniczną między szkieletem i porami przez  $A_s$ , możemy zdefiniować promień hydrauliczny  $R_h$  jako:

$$R_h = \frac{V_p}{A_s} = \frac{n}{(1-n)} \cdot \frac{1}{S} \quad (3)$$

gdzie:

$S$  – powierzchnia właściwa przypadająca na jednostkę objętości szkieletu,  
 $S = A_s/V_s$ .

Przy założeniu izotropowej struktury ośrodka, jego współczynnik filtracji można wyrazić wzorem Kozeny'ego-Carmana [3, 19]:

$$k = \frac{\gamma}{\mu} \cdot n \cdot \frac{R_h^2}{\kappa \cdot \tau} = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{1}{\kappa \cdot \tau} \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2} \cdot \frac{1}{S^2} \quad (4)$$

gdzie:

$\kappa$  – empiryczny parametr zależny od geometrii porów,  
 $\tau$  – współczynnik krętości porów, zdefiniowany jako kwadrat stosunku rzeczywistej drogi filtrującego płynu do odległości między punktami końcowymi w linii prostej.

Najczęściej w literaturze przyjmuje się wartości  $\kappa = 2,5$  i  $\tau = 2$ , a ich iloczyn traktuje się jako stałą (stała Kozeny'ego-Carmana,  $c_{KC} = 5$ ). W rzeczywistości wartość tego parametru jest zależna od rodzaju ośrodka porowatego [21, 41].

Z drugiej strony, dla ośrodka zbudowanego z ziaren jednorodnych powierzchnię właściwą  $S$  można przedstawić jako iloraz bezwymiarowego współczynnika kształtu  $\alpha$  i charakterystycznego wymiaru ziarna  $d$  [19, 47]:

$$S = \frac{\alpha}{d} \quad (5)$$

Wartości współczynnika kształtu zależą od tego, w jaki sposób zdefiniowano charakterystyczny wymiar ziarna. Jeżeli za wymiar charakterystyczny przyjmujemy średnicę kuli, w którą można wpisać dane ziarno, współczynnik kształtu przyjmie wartość 6 dla ziarna kulistego, 10,4 – dla sześciangu i 18 dla czworoscianu foremego [19]. Ziarna frakcji żwirowej na ogół charakteryzują się wartościami  $\alpha = 7 \div 11$ , a piaskowej  $\alpha = 8 \div 12$ . Wyjątkiem są łuskowate ziarna miki, dla których  $\alpha = 20 \div 50$ . W przypadku ziaren o kształcie mocno wydłużonych elipsoid lub cylindrów za wymiar charakterystyczny przyjmuje się średnicę przekroju poprzecznego. Współczynnik kształtu będzie wówczas przyjmował wartości mniejsze od 6. Dla ośrodka o zróżnicowanym uziarnieniu wzór Kozeny'ego-Carmana przybiera zatem postać:

$$k = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{1}{\kappa \cdot \tau} \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2} \cdot \left( \frac{d_m}{\alpha_s} \right)^2 \quad (6)$$

gdzie:

$\alpha_s$  – uśredniony współczynnik kształtu,  
 $d_m$  – średnica miarodajna, czyli średnica ziaren ośrodka równoziarnistego, który charakteryzuje się taką samą powierzchnią właściwą  $S$  jak rozpatrywany ośrodek różnoziarnisty.

Sposób obliczania  $d_m$  na podstawie krzywej uziarnienia omówiono szerzej w dalszej części artykułu. Wzór Kozeny'ego-Carmana można określić jako półempiryczny, gdyż rozszerza on otrzymane drogą teoretyczną wzory (2) poprzez wprowadzenie empirycznych parametrów  $\kappa$  i  $\tau$ .

Warto zauważyć, że zależność współczynnika filtracji od kwadratu pewnego charakterystycznego wymiaru ziaren w próbce  $d_c$  została już wcześniej stwierdzona na drodze empirycznej przez Seelheima i Hazena. Jako wymiar charakterystyczny często przyjmuje się średnicę odpowiadającą określonej procentowej zawartości ziaren mniejszych, odczytywaną z kumulacyjnej krzywej uziarnienia (najczęściej za Hazenem  $d_{10}$ ). Niektórzy badacze zwrócili uwagę na fakt, że lepszą zgodność z wynikami pomiarów laboratoryjnych i terenowych można uzyskać przyjmując zależność  $k$  od  $d_c$  w potęgde innej niż 2 (generalnie w zakresie od 1,5 do 2,36) [7, 11, 31]. Zaproponowano także inne niż we wzorze Kozeny'ego-Carmana zależności między współczynnikiem filtracji a porowatością. Ogólna postać wzorów wiążących współczynnik filtracji z parametrami uziarnienia przedstawia się zatem następująco:

$$k = k_f \cdot k_p \quad \text{gdzie} \quad k_f = \frac{\gamma}{\mu} \quad \text{i} \quad k_p = \xi \cdot \phi(n) \cdot d_c^B \quad (7)$$

W powyższych wzorach  $k_f$  jest współczynnikiem związanym z fizycznymi właściwościami filtrującego płynu,  $k_p$  – współczynnikiem przepuszczalności właściwej, charakteryzującym ośrodek porowaty,  $\xi$  – współczynnikiem geometrycznym związanym z kształtem porów,  $\phi(n)$  – funkcją porowatości,  $d_c$  – charakterystycznym wymiarem ziaren, zaś  $B$  – wykładnikiem, traktowanym w ogólnym przypadku jako parametr dopasowania. Ciężar właściwy i lepkość płynu, a zatem i współczynnik  $k_f$  zależą od temperatury, ciśnienia i obecności substancji rozpuszczonych. W praktyce największe znaczenie ma zależność lepkości wody od temperatury. W niniejszym zestawieniu za punkt odniesienia przyjęto temperaturę 10°C, zapisując poszczególne wzory w formie następującej:

$$k_{10} = C \cdot \phi(n) \cdot d_c^B \quad (8)$$

gdzie:

$k_{10}$  – współczynnik filtracji w temperaturze 10°C.

Wartości współczynnika  $C = k_f \cdot \xi$  dobrano w poszczególnych wzorach tak, aby przy  $d_m$  wyrażonym w [mm] otrzymać  $k_{10}$  w [m/db]. Pozwala to uniknąć operowania bardzo dużymi wartościami  $k_f$  i bardzo małymi wartościami  $\xi$ . Dla dowolnej temperatury  $t$  wyrażonej w °C współczynnik filtracji  $k_t$  można wyznaczyć według wzoru:

$$k_t = k_{10} \cdot (0,73 + 0,025 \cdot t + 0,00016 \cdot t^2) \quad (9)$$

Wzór (9) jest dokładniejszy od poprawki zaproponowanej przez Hazena, o postaci  $k_t = k_{10} \cdot (0,7 + 0,03 \cdot t)$ . Nie wszystkie wzory uwzględniają w wersji oryginalnej zależność  $k$  od temperatury. W przypadku braku danych przyjęto, że podane wartości współczynników odnoszą się do temperatury 10°C. Wzory podzielono na trzy grupy ze względu na przyjętą wielkość wykładnika  $B$  oraz sposób określania średnicy charakterystycznej  $d_c$ .

### Grupa I:

#### Wzór Kozeny'ego-Carmana i wzory pokrewne

Do grupy tej, oprócz przedstawionego już wzoru Kozeny'ego-Carmana, można zaliczyć wzory Krügera, Zunkera, Zamarina i Zuber. Zestawiono je w tabl. 1. Ich wspólną cechą jest wykorzystanie średnicy miarodajnej, obliczonej na podstawie powierzchni właściwej ośrodka gruntowego. W przy-

padku ośrodków o uziarnieniu niejednorodnym całkowita powierzchnia właściwa jest obliczana z krzywej uziarnienia, jako suma powierzchni właściwych przypadających na poszczególne frakcje uziarnienia zawarte w jednostkowej objętości ośrodka. Zakładając, że poszczególne frakcje charakteryzują się tą samą gęstością właściwą ziaren, możemy powierzchnię właściwą obliczyć następująco:

$$S = \sum_{i=1}^N S^{(i)} = \frac{1}{100\%} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^{(i)} \cdot \Delta G^{(i)}}{d_m^{(i)}} = \frac{\alpha_s}{d_m} \quad (10)$$

gdzie:

$N$  – liczba frakcji,

$S^{(i)}$  – powierzchnia właściwa przypadająca na ziarna  $i$ -tej frakcji,

$\Delta G^{(i)}$  – zawartość wagowa  $i$ -tej frakcji w całości próbki (wyrażona w procentach),

$\alpha^{(i)}$  i  $d_m^{(i)}$  – odpowiednio współczynnik kształtu i średnica reprezentatywna  $i$ -tej frakcji,

W przypadku gdy poszczególne frakcje charakteryzują się tym samym współczynnikiem kształtu,  $d_m$  obliczamy z wzoru:

$$\frac{1}{d_m} = \frac{1}{100\%} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\Delta G^{(i)}}{d_m^{(i)}} \quad (11)$$

Średnica reprezentatywna  $d_m^{(i)}$  dla  $i$ -tej frakcji jest obliczana na podstawie wartości średnic  $d_g^{(i)}$  i  $d_d^{(i)}$  stanowiących odpowiednio górne i dolne ograniczenie frakcji. Poszczególne autorzy wzorów proponują różne formuły aproksymujące. We wzorze Krügera występuje średnia arytmetyczna:

$$\frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{2}{d_d^{(i)} + d_g^{(i)}} \quad (12)$$

We wzorze Kozeny'ego-Carmana stosuje się oryginalną formułę Kozeny'ego [19]:

$$\frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{d_d^{(i)}} + \frac{2}{d_d^{(i)} + d_g^{(i)}} + \frac{1}{d_g^{(i)}} \right) \quad (13)$$

Dla tego samego wzoru Carrier [10] proponuje ważoną średnią geometryczną:

$$\frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{1}{(d_d^{(i)})^{0,595} \cdot (d_g^{(i)})^{0,405}} \quad (14)$$

Tabl. 1. Wzór Kozeny'ego-Carmana i wzory pokrewne

Wzór [źródło]	$k = C \cdot f(n) \cdot d_m^2$		Zakres stosowalności
	$C$	$\phi(n)$ lub $\phi(e)$	
Kozeny'ego-Carmana [3, 10, 12, 19, 20]	1200* ÷ 4800**	$\frac{n^3}{(1-n)^2}$	b.d.
Krügera [9, 38, 40]	324	$\frac{n}{(1-n)^2}$	0.32 < $n$ < 0.47, 0.06 mm < $d_{10}$ < 0.28 mm
Zunkera [38, 40, 46]	450 ÷ 1550 (według tabl. 2)	$\left(\frac{n}{1-n}\right)^2$	piaski drobno i średnioziarniste
Zamarina [38, 40]	4100	$\frac{n^3 \cdot (1,275 - 1,5 \cdot n)^2}{(1-n)^2}$	piaski gruboziarniste
Zuber [44, 45]	1960	według (19)	b.d.

\* dla ziaren ostrokrawędzistych ( $\alpha = 12$ ); \*\* dla ziaren kulistych ( $\alpha = 6$ )

zaś Chapuis i Aubertin [12] dolną granicę frakcji:

$$\frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{1}{d_d^{(i)}} \quad (15)$$

We wzorze Zamarina użyto formuły [38, 40]:

$$\frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{\ln d_g^{(i)} - \ln d_d^{(i)}}{d_g^{(i)} - d_d^{(i)}} \quad (16)$$

które wynikają z przyjęcia założenia, że  $S_i = \alpha / d_m^{(i)}$  powinno być równe średniej wartości  $S$  obliczonej dla przedziału średnic  $\langle d_d^{(i)}, d_g^{(i)} \rangle$ , przy czym kumulacyjna krzywa uziarnienia  $G(d)$  jest w tym przedziale liniową funkcją  $d$ . Z kolei we wzorze Zunkera przyjęto [38, 40]:

$$\frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{d_g^{(i)} - d_d^{(i)}}{d_g^{(i)} \cdot d_d^{(i)} \cdot (\ln d_g^{(i)} - \ln d_d^{(i)})} \quad (17)$$

Wyrażenie to otrzymano w podobny sposób jak wzór (16), z tym że założono, że krzywa uziarnienia  $G$  jest w rozpatrywanym przedziale liniowo zależna od  $\ln(d)$ . Założenie to odpowiada sytuacji, w której krzywą uziarnienia aproksymujemy linią łamaną na wykresie w skali półlogarytmicznej.

Wzorów (13) – (17) nie można zastosować do najdrobniejszej frakcji, jeżeli jej dolne ograniczenie  $d_d^{(i)} \rightarrow 0$ . W takim przypadku zaleca się przyjmować [12, 38, 40]:

$$\frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{3}{2 \cdot d_g^{(i)}} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{d_m^{(i)}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot d_g^{(i)}} \quad (18)$$

Warto zauważyć, że w każdym z wzorów tej grupy przyjęto inną postać zależności współczynnika filtracji od porowatości. Na uwagę zasługuje wzór zaproponowany przez Zuberę [44, 45], przedstawiony w formie nomogramu opisującego zależność  $k_{10} / d_m^2$  od  $n$ . Autorzy niniejszego artykułu uzyskali bardzo dobrą aproksymację nomogramu Zuberę za pomocą ogólnego wzoru (8), zakładając  $C = 1960$  oraz:

$$\phi(n) = \frac{1}{758,28 \cdot n^3 - 837,69 \cdot n^2 + 261,14 \cdot n - 15,263} \quad (19)$$

W pracy Zuberę nie podano informacji, w jaki sposób określano średnice miarodajne poszczególnych frakcji  $d_m^{(i)}$ .

We wzorach Kozeny'ego-Carmana i Zunkera wartości współczynnika  $C$  są uzależnione od charakterystyki ziaren. Zakres wartości  $C$  we wzorze Kozeny'ego-Carmana wynika z przyjęcia  $\kappa = 5$  i  $\alpha = 6$  lub 12. Wartości  $C$  dla wzoru Zunkera, zestawione w tabl. 2 przytoczono za pracami [35, 38]. W pracy Zunkera [46] podano jeszcze większy zakres wartości – od 260 do 1700.

## Grupa II: Wzór Hazena i wzory pokrewne

Zaliczono tu wzory o ogólnej strukturze takiej jak wzór (8), w których średnica charakterystyczna odpowiada określonej zawartości ziaren na krzywej uziarnienia – najczęściej jest to średnica  $d_{10}$ . Wzory zestawiono w tabl. 3.

Najczęściej przytaczanym w literaturze wzorem z tej grupy jest niewątpliwie wzór Hazena, charakteryzujący się bardzo prostą formą. Podane w tabl. 3 wartości współczynnika  $C$  i zakres stosowności przytoczono za literaturą polską [26, 40].

Tabl. 2. Wartości współczynnika  $C$  we wzorze Zunkera

Uziarnienie	Kształt ziaren	$C$
jednorodne	zaokrąglone	1550
jednorodne	ostrokrawędziste	910
niejednorodne	zaokrąglone	780
niejednorodne	ostrokrawędziste	450

W literaturze zagranicznej przytaczany zakres wartości wynosi  $C = 1 \div 10000$  [10], niekiedy zaś podaje się pojedynczą wartość  $C = 1000$ . Kilku badaczy podjęło próby uściślenia zasad doboru wartości współczynnika  $C$  we wzorze Hazena. Zieschang [42] w swoim pierwszym wzorze, opierając się na badaniach Skabałanowicza, uzależnił  $C$  od  $U$  oraz zawartości frakcji drobnych (poniżej 0,05 mm), wprowadzając dodatkowy współczynnik korekcyjny w przypadku większej zawartości miki, której ziarna mają kształt znacznie odbiegający od kulistego. W drugim wzorze Zieschanga [43] wartość współczynnika jest zależna od  $U$  i od  $d_{60}$ . Oryginalną zależność podano w postaci nomogramu, natomiast autorzy artykułu [8] dopasowali do niej formułę analityczną następującej postaci:

$$C = (-0,030073 \cdot \ln d_{60} + 0,981765) \cdot [0,013346 \cdot U^{-0,130096} + 0,00024 \cdot \sin(1,179982 \cdot \sqrt{U} - 0,499419)] \quad (20)$$

Z kolei propozycje Langego i Chapuisa pozwalają uzależnić  $C$  od porowatości gruntu. W pierwszym przypadku jest to prosta zależność liniowa, w drugim przypadku przyjęto, że podany przez Hazena współczynnik  $C = 1000$  odnosi się do gruntu niezagęszczonego, o maksymalnej wartości wskaźnika porowatości  $e_{max}$ , co pozwoliło na wprowadzenie poprawki uwzględniającej rzeczywiste zagęszczenie gruntu.

Według Beyera [4] współczynnik filtracji można określić wzorem zbliżonym do wzoru Hazena, w którym  $C$  jest funkcją współczynnika  $U$ , przy czym zależność ta zmienia się wraz ze stopniem zagęszczenia gruntu. Przytoczona w normie [9] tabela Beyera odpowiada średniemu (naturalnemu) zagęszczeniu. Autorzy niniejszego artykułu dopasowali do nomogramów Beyera wzory analityczne, których parametry zestawiono w tabl. 5. Należy zauważyć, że wzrost wartości  $U$  przy stałej średnicy  $d_{10}$  powoduje dwa przeciwstawne efekty. Po pierwsze zmniejsza się powierzchnia właściwa i wzrasta średnica miarodajna. Po drugie zmniejsza się porowatość, gdyż przestrzenie między większymi ziarnami są wypełniane przez ziarna mniejsze. W praktyce większe znaczenie ma ten drugi efekt, co prowadzi do obserwowanego zmniejszenia wartości  $k$  przy wzroście  $U$  i stałej średnicy  $d_{10}$ . W swoim wzorze Beyer uwzględnił w sposób niejawni łączny wpływ obu czynników [4, 5]. Podobną formę mają dwa wzory Seilera, w których jako średnice charakterystyczne przyjęto  $d_{10}$  i  $d_{25}$ . Występujące w tych wzorach zależności  $C(U)$  autor podał w postaci tabelarycznej. Można je aproksymować następującymi formułami analitycznymi, ważnymi dla  $5 \leq U \leq 100$ :

$$C(U) = 2,865 \cdot 10^{-7} \cdot U^6 - 9,276 \cdot 10^{-5} \cdot U^5 + 0,01255 \cdot U^4 - 0,8487 \cdot U^3 + 31,17 \cdot U^2 - 543,9 \cdot U + 4014 \quad (21)$$



dla średnicy  $d_{25}$ :

$$C(U) = \exp(-0,0286 \cdot U^6 + 0,5833 \cdot U^5 - 4,7895 \cdot U^4 + 20,181 \cdot U^3 - 44,965 \cdot U^2 + 47,823 \cdot U - 12,236) \quad (22)$$

W obydwu wzorach Seilera wartości  $C(U)$  osiągają minimum dla wartości  $U$  około 17, a następnie rosną. Seiler zaleca stosowanie wzoru (21) i średnicy  $d_{10}$  przy  $U < 17$ , zaś wzoru (22) i średnicy  $d_{25}$  dla  $U > 17$ .

Do omawianej grupy należy też zaliczyć chronologicznie najstarszy wzór empiryczny Seelheima, o postaci równie prostej jak wzór Hazena, w którym występuje średnica  $d_{50}$  (w oryginalnej pracy Seelheima mowa jest o średniej arytmetycznej średnicy ziaren [6]). Doświadczenia Seelheima były przeprowadzone na ośrodkach o stosunkowo jednorodnym uziarnieniu – wzorem tym otrzymuje się wyniki zbliżone do wzoru Hazena przy  $U < 2$ . Stosowanie wzoru w przypadku gruntów o większej wartości  $U$  prowadzi do znacznego przeszacowania wartości  $k$ . Innym stosunkowo prostym wzorem wykorzystującym średnicę  $d_{50}$  jest mało znany w literaturze krajowej wzór Krumbeina i Monka [24]. Współczynnik  $C$  jest tu uzależniony od parametru charakteryzującego niejednorodność uziarnienia:

$$C = 657 \cdot \exp(-1,31 \cdot \sigma_{KM}) \quad (23)$$

gdzie:

$$\sigma_{KM} = \frac{\log_2(d_{84}) - \log_2(d_{16})}{4} + \frac{\log_2(d_{95}) - \log_2(d_5)}{6,6} \quad (24)$$

Jak łatwo zauważyć, wraz ze wzrostem różnoziarnistości gruntu współczynnik  $\sigma_{KM}$  wzrasta, zaś współczynnik  $C$  maleje.

Bardziej rozbudowaną postać mają wzory Slichtera i Terzagiego. Wzór Slichtera umieszczono w tej grupie, gdyż większość opracowań przedstawia go w formie zawierającej średnicę  $d_{10}$ . W rzeczywistości został on wyprowadzony dla ośrodka zbudowanego z jednorodnych ziaren kulistych, zaś w przypadku gruntu różnoziarnistego powinien być stosowany wraz ze średnicą miarodajną  $d_m$  [18]. Podana przez Slichtera funkcja porowatości, zazwyczaj przedstawiana w formie tabelarycznej, może być aproksymowana z dobrą dokładnością wzorem analitycznym  $\phi(n) = n^{2,347}$  [38].

We wzorze Sauerbreia jako średnicę charakterystyczną przyjęto  $d_{17}$ . Funkcja porowatości ma tu taką samą postać jak we wzorze Kozeny'ego-Carmana, a dodatkowo wartość współ-

Tabl. 3. Wzór Hazena i wzory pokrewne

Wzór [źródło]	$k = C \cdot f(n) \cdot d_c^2$			Zakres stosowalności
	$C$	$\phi(n)$ lub $\phi(e)$	$d_c$	
Hazena [10, 40]	400 ÷ 1200*	1	$d_{10}$	$U \leq 5$ ; $0,1 \leq d_{10} \leq 3$
Zieschanga (I) [42]	$C_1 \cdot C_2$ (tabl. 4)	1	$d_{10}$	$d_{10}$ według tabl. 4; $U < 25$ ; $1,4 < k < 430$
Zieschanga (II) [8, 43]	według (20)	1	$d_{10}$	$0,06 \leq d_{10} \leq 0,6$
Hazena – Langege [40]	4000	$n - 0,16$	$d_{10}$	jak wzór Hazena
Hazena – Chapuisa [11]	1000	$\frac{e^3 \cdot (1 + e_{\max})}{e_{\max}^3 \cdot (1 + e)}$	$d_{10}$	$8,6 \leq k \leq 86$
Beyera [4, 5]	$a \cdot U^b$ (tabl. 5)	1	$d_{10}$	$0,06 \leq d_{10} \leq 0,6$ ; $U \leq 20$
Seilera [30]	według (21)	1	$d_{10}$	$5 \leq U \leq 17$
	według (22)	1	$d_{25}$	$17 < U \leq 100$
Seelheima [6]	308	1	$d_{50}$	$U < 2$
Krumbeina i Monka [24]	według (21) i (22)	1	$d_{50}$	b.d.
Slichtera [38, 46]	6740	$n^{3,287}$	$d_{10}$	$0,01 \leq d_{10} \leq 5,00$
Terzagiego [38, 46]	4000** ÷ 6900***	$\left(\frac{n - 0,13}{\sqrt[3]{1 - n}}\right)^2$	$d_{10}$	b.d.
Sauerbreia [32, 35]	1150 ÷ 3000 (tabl. 6)	$\frac{n^3}{(1 - n)^2}$	$d_{17}$	piaski drobnoziarniste
Pavchicha [15]	$2850 \cdot U^{1/3}$	$\frac{n^3}{(1 - n)^2}$	$d_{17}$	b.d.
Mbonimpy i in. [22]	$6480 \cdot U^{1/3}$	$\frac{e^5}{1 + e}$	$d_{10}$	$0,35 \leq e \leq 1,27$ ; $1 \leq U \leq 227$ ; $4 \cdot 10^{-5} \leq d_{10} \leq 15$
Palagina [25]	według (25a,b)	$n$	$d_{50}$	$1 \leq U \leq 19$
Alaymaniego i Sena [2]	1300	1	według (23)	b.d.

\* 400 dla  $4 < U \leq 5$ , 800 dla  $2 < U \leq 4$ , 1200 dla  $U \leq 2$ ; \*\* dla ziaren ostrokrawędzistych; \*\*\* dla ziaren zaokrąglonych

czynnika  $C$  uzależniona jest od zawartości frakcji drobnoziarnistych. Podobną formę ma wzór Pavchicha, w którym jako przybliżenie wartości średnicy miarodajnej przyjęto  $d_{17} \cdot \sqrt[6]{U}$ . We wzorze Mbomimpy i in., opracowanym na bazie wzoru Pavchicha, średnicę  $d_{17}$  zastąpiono średnicą  $d_{10}$  oraz wprowadzono inną funkcję porowatości. Natomiast we wzorze Palagina jako średnica miarodajna występuje  $d_{50}$ , uwzględniono w nim również porowatość, a także wprowadzono poprawkę na niejednorodność uziarnienia, która zmniejsza wartości  $C$  przy wzroście współczynnika  $U$ :

$$C = \frac{114}{0,0243 \cdot U^{2,18} + 0,26} \quad \text{dla } U \leq 3 \quad (25a)$$

$$C = \frac{114}{0,109 \cdot U^{1,77} + 0,396} \quad \text{dla } U > 3 \quad (25b)$$

Poprawkę związaną z wpływem niejednorodności uziarnienia na wartość średnicy charakterystycznej uwzględniono również we wzorze Alaymaniego i Sena [2], gdzie średnica charakterystyczna określona jest następująco:

$$d_m = I_0 + 0,025 \cdot (d_{50} - d_{10}) \quad (26)$$

Wartość  $I_0$  wyznacza się metodą graficzną. W tym celu należy narysować początkowe punkty krzywej uziarnienia (odpowiadające sumarycznej zawartości ziaren poniżej 50%), przyjmując liniową skalę poziomą (zamiast zwykle stosowanej logarytmicznej). Zależność  $G(d)$  aproksymujemy linią prostą w zakresie zawartości od 10% do 50%.  $I_0$  jest wartością średnicy odczytaną w punkcie przecięcia dopasowanej linii prostej z osią poziomą.

### Grupa III: Wzór „amerykański” i wzory pokrewne

Wzory tej grupy zestawiono w tabl. 6. Ich cechą wspólną jest zależność współczynnika filtracji od charakterystycznej średnicy ziaren podniesionej do potęgi wymiernej o wartości innej niż 2. Do tej grupy zaliczyć należy przede wszystkim dobrze znany w literaturze polskiej tzw. wzór amerykański, którego dość zawiła historia jest szczegółowo przedstawiona w artykule Białasa i współautorów [7]. Wzór ten oparty jest na zestawieniach tabelarycznych zaczerpniętych z pracy Creagera, Justina i Hindsa, jednak sugestia zawarta w artykule [7], aby określać go nazwiskami trzech wspomnianych autorów, nie przyjęła się. W literaturze występuje on pod nazwami wzoru USBSC, USBR, Malleta – Pacquanta, lub Białasa.

Tabl. 4. Wartości współczynników  $C_1$  i  $C_2$  we wzorze Zieschanga (I)

Rodzaj gruntu	$U$	$d_{10}$ [mm]	$C_1$
Piasek / pospółka	1 ÷ 3	0,1 ÷ 0,6	1200
Piasek / pospółka	3 ÷ 5	0,1 ÷ 0,6	1000
Piasek pylasty/gliniasty $d_1 < 0,01$ mm	1 ÷ 5	0,1 ÷ 0,6	800
Piasek pylasty/gliniasty $d_3 < 0,01$ mm	1 ÷ 5	0,08 ÷ 0,6	600
Piasek pylasty/gliniasty $d_4 < 0,01$ mm	1 ÷ 5	0,06 ÷ 0,6	400
Zawartość miki	$C_2$		
– brak lub śladowa	1,0		
– niewielka	0,8		
– duża	0,5		

Tabl. 5. Współczynniki dopasowania dla zależności  $C(U)$  i  $n(U)$  według Beyera i Schweigera

Ułożenie ziaren	$C(U) = a \cdot U^b$		$n(U) = a \cdot U^b + c$		
	$a$	$b$	$a$	$b$	$c$
Luźne	1485	-0,1488	0,1502	-0,6375	0,2989
Naturalne	1191	-0,2006	0,1544	-0,6756	0,2605
Zagęszczone	1007	-0,2312	0,1537	-0,6608	0,2305

Tabl. 6. Wartości współczynnika  $C$  we wzorze Sauerbreia

Zawartość ziaren $d < 0,05$ mm	$C$
< 2%	3000
2 ÷ 3%	2500
3 ÷ 4%	2000
> 4%	1150

Tabl. 7. Wzór „amerykański” i wzory pokrewne

Wzór [źródło]	$k = C \cdot f(n) \cdot d_c^2$				Zakres
	$C$	$\phi(n)$ lub $\phi(e)$	$d_c$	$B$	
„Amerykański” [7]	311	1	$d_{20}$	2,3	$0,01 < d_{20} < 2$
NAVFAC [11]	1	$10^{1,291e + 2,293}$	$d_{10}$	$10^{0,5504 - 0,2937e}$	$0,3 < e < 0,7$ ; $0,1 < d_{10} < 2$ ; $2 < U < 12$ ; $d_{10}/d_5 < 1,4$
Chapuisa [11]	2127	$\left(\frac{e^3}{1+e}\right)^{0,7825}$	$d_{10}$	1,565	$U < 12$ ; $0,85 < k < 85$
Shepherd [31]	tabl. 7	1	$d_{50}$	tabl. 7	b.d.

Tabl. 8. Wartości parametrów  $C$  i  $B$  we wzorze Shepherd'a

Typ ośrodka	$C$	$B$
Kulki szklane	9390	2,00
Piaski wydymowe	1252	1,85
Piaski plażowe	376	1,75
Piaski rzeczne	110	1,65
Ziarna słabo obtoczone	25	1,50

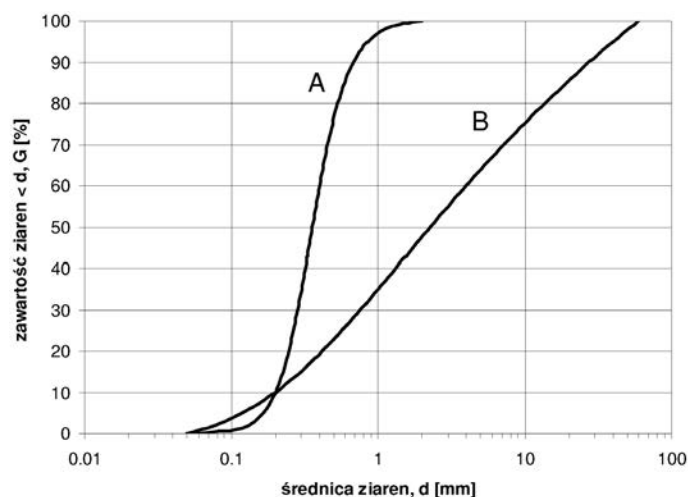
Tabl. 9. Parametry modelowych krzywych uziarnienia

Parametr	Jednostka	Krzywa A	Krzywa B
$d_0$	mm	0,05	0,05
$d_{10}$	mm	0,2	0,2
$d_{17}$	mm	0,234	0,343
$d_{20}$	mm	0,246	0,418
$d_{50}$	mm	0,357	2,279
$d_{100}$	mm	2,0	60,0
$d_m$	mm	0,322	0,554
$U$	–	2	20
$G^0$	%	0,046	3,612
$G^\infty$	%	100,44	180,04
$d^*$	mm	0,322	0,241
$p$	–	3,974	1,146

W artykule Chapuisa [11] przedstawiono wzór analityczny opracowany przez autora na podstawie nomogramów NAVFAC (Naval Facilities Engineering Command, USA), w którym zarówno współczynnik  $C$  jak i wykładnik  $B$  zostały uzależnione od wskaźnika porowatości. W tej samej pracy Chapuis przedstawił inną propozycję wzoru, w której  $d_{10}$  podniesione jest do potęgi 1,565. Z kolei Shepherd [31], na podstawie wcześniejszych wyników zaczerpniętych z literatury, zaproponował użycie średnicy charakterystycznej  $d_{50}$  oraz uzależnienie wartości współczynników  $C$  i  $B$  od stopnia obtoczenia i kulistości ziaren (tabl. 7). Obydwa współczynniki przyjmują największe wielkości dla kulek szklanych, a najmniejsze dla młodych skał okruchowych o słabo obtoczonych ziarnach. Biorąc pod uwagę szeroki zakres zmienności współczynników i orientacyjny sposób ich przyjmowania, wzór ten ma charakter bardziej poglądowy niż praktyczny.

### Modelowe krzywe uziarnienia

W prezentowanych poniżej przykładowych obliczeniach posłużono się modelowymi krzywymi uziarnienia, opisanymi następującym wzorem:



Rys. 1. Modelowe krzywe uziarnienia

$$G(d) = G^\infty - (G^\infty - G^0) \left( 1 + \left( \frac{d}{d^*} \right)^p \right)^{-q} \quad (27)$$

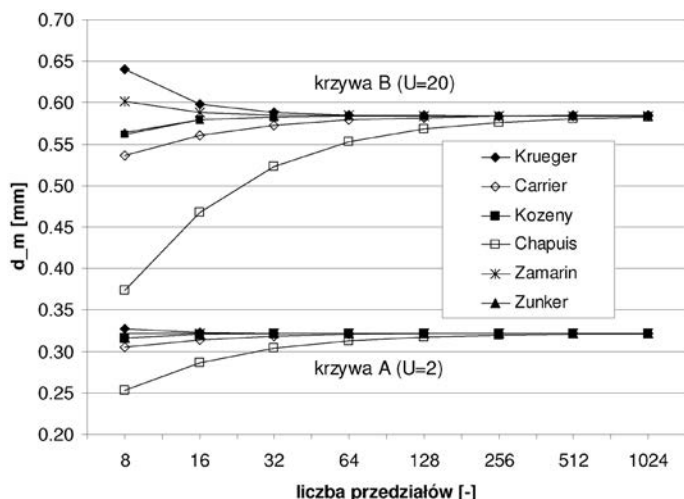
gdzie:

$G^0$  [%],  $G^\infty$  [%],  $d^*$  [mm],  $p$  [-] i  $q$  [-] – parametry dopasowania, przy czym  $G^0 \leq 0\%$ ,  $G^\infty \geq 100\%$  i  $q = 1-1/p$ .

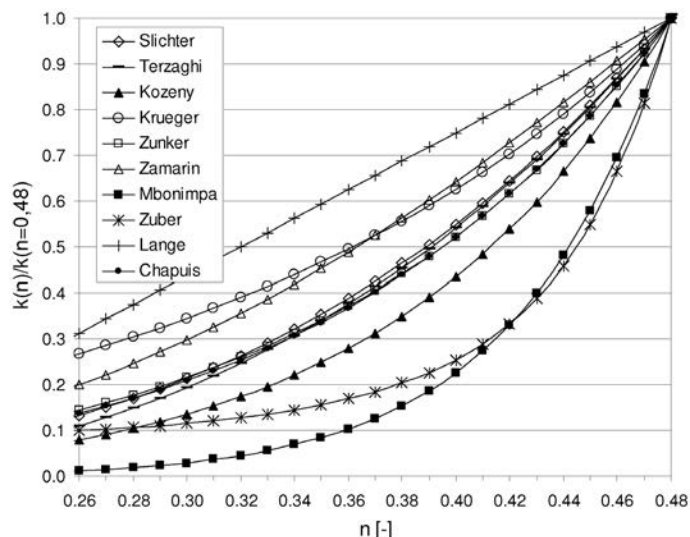
Jest to adaptacja wzoru van Genuchtena opisującego krzywą retencji gruntu, która na ogół ma kształt podobny do kumulacyjnej krzywej uziarnienia [17]. Parametry funkcji (27) można dopasować do wyników analizy sitowej, bądź też do zadanych z góry wartości  $d_{10}$  i  $U$  oraz  $d_0$  i  $d_{100}$ . Obliczenia wykonano dla dwóch krzywych uziarnienia, oznaczonych jako A i B. Ich parametry zestawiono w tabl. 9, a przebieg przedstawiono na rys. 1. Zgodnie z normą [27], krzywa A reprezentuje piasek średni, zaś krzywa B – żwir (na pograniczu pospółki). Z kolei według normy europejskiej [28, 29] krzywa A reprezentuje piasek średni (MSa), zaś krzywa B – żwir drobny piaszczysty (saFGr).

### Obliczanie średnicy miarodajnej

Średnica miarodajna występująca we wzorach grupy I jest obliczana na podstawie pełnej krzywej uziarnienia. Propozycje poszczególnych autorów różnią się sposobem określania średnicy miarodajnej poszczególnych frakcji  $d_m^{(i)}$ . W celu określenia wpływu tych różnic na wartość  $d_m$  przeprowadzono obliczenia dla krzywych modelowych, dzieląc zakres zmienności średnic każdej krzywej na wzrastającą liczbę przedziałów (od 8 do 1024). Założono, że wszystkie ziarna charakteryzują się tym samym współczynnikiem kształtu. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 2. Jak widać, w miarę zwiększania liczby przedziałów wyniki zmierzają do tej samej wartości, którą można uznać za dokładną wartość średnicy miarodajnej (tabl. 9). Rozbieżności między poszczególnymi metodami są większe w przypadku gruntu różnoziarnistego. Z praktycznego punktu widzenia najbardziej interesująca jest dokładność poszczególnych metod dla 8 i 16 przedziałów. Dla obu krzywych najlepsze wyniki dają metody Zamarina, Zunkera i Kozeny'ego. Natomiast przyjmowanie jako  $d_m^{(i)}$  dolnej granicy dla każdego przedziału, proponowane przez Chapuisa, prowadzi do znaczącego zaniżenia wartości  $d_m$ .



Rys. 2. Zależność wartości  $d_m$  od liczby przedziałów dla różnych metod



Rys. 3. Zależność znormalizowanego współczynnika filtracji od porowatości

Alternatywnym sposobem obliczenia średnicy miarodajnej jest wykorzystanie korelacji  $d_m$  z parametrami uziarnienia, takimi jak  $d_{10}$  i  $U$ . W pracy Kovacsa [11] przedstawiono w formie tabelarycznej zależność  $d_m/d_{10}$  od  $U$ , do której można dopasować następującą formułę analityczną, ważną dla  $U \leq 25$ :

$$d_m = d_{10} \frac{U}{0,05098 \cdot [\ln(U + 6,712)]^{4,167}} \quad (28)$$

Wzór (28) jest również dobrym przybliżeniem zależności podanej w formie tabelarycznej przez Beyera [4]. Z kolei według Vukovica i Soro [38] średnica miarodajna  $d_m$  odpowiada określonej zawartości procentowej ziaren mniejszych  $P$  odczytanej z krzywej uziarnienia, przy czym  $P$  wyrażone jest w funkcji współczynnika  $U^* = d_{30}/d_5$ . Do przedstawionego w pracy [38] nomogramu można dopasować następujący wzór analityczny, ważny w zakresie  $1 \leq U^* \leq 20$ :

$$P = 50 \cdot (U^*)^{-0,36} \quad (29)$$

Dla większych wartości  $U^*$  przyjmuje się  $P = 17$  (uzasadnia to wybór  $d_{17}$  jako średnicy charakterystycznej we wzorach Sauerbreia i Pavchicha). W przypadku rozpatrywanych krzywych powyższe wzory dają wartości bliskie wartościom otrzymanym z pełnej krzywej uziarnienia. Dla krzywej A z wzoru (28) otrzymujemy  $d_m = 1,59 \cdot d_{10} = 0,318$  mm, zaś z wzoru (29), przy  $U^* = 1,71$ ,  $d_m = d_{41} = 0,323$  mm. Dla krzywej B z wzoru (28) otrzymujemy  $d_m = 2,77 \cdot d_{10} = 0,554$  mm, zaś z wzoru (29), przy  $U^* = 6,38$ ,  $d_m = d_{26} = 0,603$  mm.

### Wpływ porowatości

Ponad połowa z przedstawionych wzorów uwzględnia zależność współczynnika filtracji od współczynnika (lub wskaźnika) porowatości. Opublikowane wyniki badań [np. 19, 44, 46] wskazują jednoznacznie na istnienie takiej zależności, chociaż różni autorzy proponują różne postaci funkcji  $\phi(n)$ . Ich porównanie przedstawiono na rys. 3. Przyjęto przedział zmienności współczynnika porowatości od 0,26 do 0,48, co odpowiada teoretycznym granicznym wartościom dla ośrodka zbudowanego

z jednorodnych ziaren kulistych. Na wykresie porównano znormalizowane wartości współczynnika filtracji  $k(n) / k(n = 0,48)$ .

Jak można zauważyć, między propozycjami poszczególnych autorów występują dosyć znaczne rozbieżności. I tak według Langego współczynnik  $k$  dla minimalnej porowatości jest trzykrotnie mniejszy niż dla porowatości maksymalnej, natomiast według Mbonimpy i in. – niemal stukrotnie mniejszy. Z drugiej strony w większości wzorów przewiduje się (w tych samych warunkach) zmniejszenie wartości  $k$  od 5 do 12 razy, czyli mniej więcej o jeden rząd wielkości. Zależności podane przez Slichtera, Zunkera, Terzagiego i Chapuisa są praktycznie tożsame ze sobą, chociaż opisane różnymi wzorami analitycznymi. Wzór Zuber pokrywa się z wzorem Mbonimpy i in. dla  $n > 0,41$ , natomiast w przedziale porowatości  $0,26 \div 0,36$  przewiduje najmniejszą ze wszystkich wzorów zmienność współczynnika filtracji.

W przypadku gdy porowatość gruntu nie jest znana, można ją oszacować na podstawie współczynnika różnoziarnistości  $U$ . Próbkę złożoną z ziaren o zróżnicowanej średnicy będzie miała mniejszą porowatość niż próbka zawierająca ziarna jednorodne, gdyż mniejsze ziarna wypełnią przestrzeń między dużymi ziarnami. W literaturze można znaleźć kilka propozycji oszacowania wartości  $n$  na podstawie  $U$ . Według Kovacsa [19] dla ośrodka o jednorodnych ziarnach kulistych można przyjąć następujący zakres porowatości:  $n_{0\min} = 0,38$  i  $n_{0\max} = 0,43$ . Dla ośrodka zbudowanego z ziaren jednorodnych o kształcie odbiegającym od kulistego wartości graniczne należy obliczać następująco:

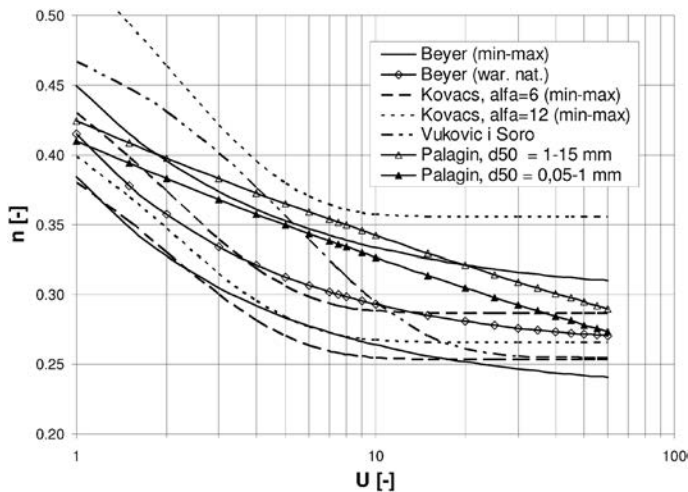
$$n_{1\min(\max)} = n_{0\min(\max)} \cdot \left[ 1 + 10 \cdot n_{0\min(\max)}^3 \cdot \left( \log \frac{\alpha}{6} \right)^2 \right] \quad (30)$$

Natomiast zakres porowatości dla ośrodka o uziarnieniu niejednorodnym wyraża się wzorem:

$$n_{\min(\max)} = \frac{2}{3} \cdot n_{1\min(\max)} + \frac{1}{3} \cdot n_{1\min(\max)} \cdot \exp\left(-\frac{U-1}{2}\right) \quad (31)$$

Powyższe wzory opierają się na wynikach badań dla ziaren o średnicy większej od 0,2 mm. Z kolei Beyer i Schweiger [5] przedstawili w postaci trzech nomogramów zależność  $n$  od  $U$





Rys. 4. Zależności między porowatością gruntu a jednorodnością uziarnienia

odpowiednio dla luźnego, zagęszczonego i naturalnego ułożenia ziaren. Do nomogramów tych można dopasować wzory analityczne w postaci:

$$n(U) = a \cdot U^b + c \quad (32)$$

Wartości parametrów  $a$ ,  $b$  i  $c$  dla poszczególnych przypadków zestawiono w tabl. 5. Natomiast w pracy [38] zaproponowano na podstawie wyników zaczerpniętych z kilku wcześniejszych publikacji następującą postać funkcji  $n(U)$ :

$$n = 0,255 \cdot (1 + 0,83^U) \quad (33)$$

Z kolei Palagin [25] podaje dwa różne wzory odpowiadające różnym zakresom średnicy  $d_{50}$ :

dla  $0,05 \text{ mm} \leq d_{50} \leq 1 \text{ mm}$

$$n = 0,410 \cdot U^{-0,099} \quad (34)$$

dla  $1 \text{ mm} < d_{50} \leq 15 \text{ mm}$

$$n = 0,424 \cdot U^{-0,093} \quad (35)$$

Powyższe zależności zilustrowano na rys. 4. W przypadku wzorów Kovacsza podano zakres porowatości odpowiadający dwu wartościom współczynnika  $\alpha$ . Jak widać, poszczególne wzory dają zbliżone wyniki, co umożliwia orientacyjne wyznaczenie spodziewanego zakresu porowatości dla danej wartości  $U$ .

### Porównanie wartości $k$ według różnych wzorów

Wartości współczynnika filtracji obliczone różnymi wzorami dla krzywych modelowych zestawiono w tabl. 10. We wszystkich wzorach grupy I przyjęto taką samą wartość średnicy  $d_m$ , odpowiadającą wartości granicznej otrzymanej z obliczeń (tabl. 9). Wzorami uwzględniającymi wpływ porowatości obliczono wartości  $k$  odpowiadające maksymalnemu, naturalnemu i minimalnemu zagęszczeniu według Beyera (rys. 4). Dla krzywej A są to wartości 0,33, 0,36 i 0,43, zaś dla krzywej B – 0,25, 0,28 i 0,32. W przypadku wzorów Kozeny'ego-Carmana, Zunkera i Terzagiego podano osobno zakres zmienności  $k$  dla ziaren gładkich i ostrokrawędzistych (dla wzoru Kozeny'ego-Carmana

przyjęto odpowiednio  $\alpha = 6$  i 9). We wzorze Shepherd'a przyjęto w przypadku krzywej A parametry odpowiadające piaskom wydmowym, zaś w przypadku krzywej B – utworom o ziarnach słabo obtoczonych.

W przypadku krzywej A średnia wartości  $k$  dla „naturalnej” porowatości otrzymanych poszczególnymi wzorami wynosi  $k_s = 32,0 \text{ m/d}$ , zaś odchylenie standardowe  $\sigma = 16,6 \text{ m/d}$ . Większością wzorów otrzymuje się wartości mieszczące się w zakresie  $k_s \pm \sigma$ . Większe wartości wynikają z wzorów Shepherd'a, Zunkera i Kozeny'ego-Carmana (dla ziaren kulistych). Mniejsze wartości otrzymano wzorami Slichtera, Mbonimpy i in., Terzagiego i Kozeny'ego-Carmana (dla ziaren ostrokrawędzistych), a także „amerykańskim”. Oczywiście, trudno jest ocenić wiarygodność poszczególnych wzorów, nie dysponując wynikami pomiarów współczynnika filtracji dla gruntu charakteryzującego się rozpatrywaną krzywą uziarnienia. Pewnych wskazówek mogą jednak dostarczyć wyniki badań laboratoryjnych zamieszczone w artykule [18]. Autorzy uzyskali wartości  $k$  bliskie wartościom zmierzonym, stosując wzory Krügera, Zamarina (ze współczynnikiem  $C \approx 4500$ ), Zunkera (ze współczynnikiem  $C \approx 850$ ) oraz Kozeny'ego-Carmana (ze współczynnikiem  $C \approx 2200$ , co odpowiada  $\alpha = 7,8$ ). Analizowano sztucznie spreparowane mieszanki gruntowe o parametrach  $d_{10} = 0,26 \div 0,93 \text{ mm}$ ,  $U = 1,3 \div 4,8$  oraz  $n = 0,36 \div 0,42$ . Wymienionymi wyżej wzorami otrzymuje się zbliżone do siebie wyniki również w przypadku krzywej A. Można zatem przypuszczać, że otrzymane za ich pomocą wartości  $k$  są wiarygodne.

W przypadku krzywej B, reprezentującej ośrodek o niejednorodnym uziarnieniu, rozrzut prognozowanych wartości współczynnika filtracji jest znacznie większy. Obliczenia przeprowadzono wszystkimi wzorami, chociaż w przypadku wzorów Krügera, Hazena, NAVFAC, Chapuisa oraz Seelheima przekroczony został zakres stosowalności podawany dla nich w literaturze. Pominięto jedynie wzór Alaymaniego i Sena, w przypadku którego ułożenie punktów na wykresie nie pozwalało na wyznaczenie  $I_0$  poprzez ekstrapolację (z artykułu [2] wynika, że wzór ten opracowano na podstawie badań piasków o bardzo jednorodnym uziarnieniu, stąd też jego stosowalność wydaje się być ograniczona warunkiem  $U < 5$ ). Po odrzuceniu nierealistycznej wartości 1599 m/d według wzoru Seelheima, otrzymujemy średnią 30,8 m/d, przy odchyleniu standardowym 25,0 m/d. Podobnie jak w przypadku krzywej A, najmniejsze wartości otrzymano z wzorów Slichtera, Mbonimpy i in., Terzagiego i NAVFAC. Natomiast największe wartości  $k$  wynikają z wzorów Krumbaina i Monka, Shepherd'a, Zuber'a, Krugera, Zamarina i Kozeny'ego-Carmana (dla  $\alpha = 6$ ). Mimo że wartość średnia jest bardzo bliska wartości otrzymanej dla krzywej A, poszczególnymi wzorami przewiduje się znaczący wzrost lub spadek wartości  $k$ .

Prawie wszystkimi wzorami grupy pierwszej otrzymuje się wartości wyższe niż dla krzywej A, gdyż wzrost średnicy miarodajnej ma większy wpływ na wartość  $k$  niż zmniejszenie porowatości. Wyjątkiem jest tu wzór Zunkera, w którym dla gruntów niejednorodnych stosuje się współczynniki zmniejszone o około 50%. W innych grupach wzrost wartości  $k$  obserwujemy dla wzorów Seelheima, „amerykańskiego”, Shepherd'a oraz Krumbaina i Monka. W pozostałych wzorach przewiduje się zmniejszenie wartości współczynnika filtracji. Taka rozbieżność tendencji między poszczególnymi wzorami wydaje się być

Tabl. 10. Wartości współczynnika filtracji według różnych wzorów

Wzór	Krzywa A			Krzywa B		
	$n = 0,33$	$n = 36$	$n = 40$	$n = 0,25$	$n = 0,28$	$n = 0,32$
Kozeny'ego-Carmana	10,0*	14,2*	22,1*	10,2*	15,6*	26,1*
	39,8**	56,7**	88,5**	40,9**	62,4**	104,4**
Kruger	24,7	29,5	37,3	44,2	53,7	68,8
Zunkera	22,9*	29,9*	42,0*	15,6*	21,2*	31,0*
	39,1**	51,0**	71,7**	26,5**	36,1**	52,8**
Zamarina	27,8	35,1	46,2	38,0	52,3	75,6
Zubera	29,3	36,5	55,0	63,2	68,1	81,6
Hazena	48,0	48,0	48,0	16,0	16,0	16,0
Zieschanga (I)	48,0	48,0	48,0	40,0	40,0	40,0
Zieschanga (II)	43,3	43,3	43,3	28,6	28,6	28,6
Hazena-Langeego	27,2	32,0	38,4	14,4	19,2	25,6
Hazena-Chapuisa	18,0	25,6	40,0	15,7	23,9	40,0
Beyera	29,4	35,6	46,0	17,3	22,5	32,5
Seilera	74,3	74,3	74,3	25,2	25,2	25,2
Seelheima	39,3	39,3	39,3	1600	1600	1600
Krumbeina i Monka	32,8	32,8	32,8	92,9	92,9	92,9
Slichtera	7,0	9,4	13,3	2,8	4,1	6,4
Terzagiego	8,4*	11,4*	16,4*	2,8*	4,5*	7,5*
	14,4**	19,7**	28,3**	4,8**	7,7**	12,9**
Sauerbreia	13,2	18,7	29,2	9,8	14,9	25,0
Pavchicha	12,5	17,8	27,7	20,0	30,6	51,1
Mbonimpy i in.	6,3	11,8	25,8	2,2	4,5	11,0
Palagin	13,0	14,1	15,7	6,6	7,4	8,5
Alaymaniego i Sena	35,2	35,2	35,2	–	–	–
„Amerykański”	12,4	12,4	12,4	41,8	41,8	41,8
NAVFAC	14,1	21,0	37,3	5,5	7,7	12,4
Chapuisa	23,8	31,3	44,4	10,4	14,4	21,6
Shepherda	62,0	62,0	62,0	86,0	86,0	86,0

\* dla ziaren ostrokrawędzistych, \*\* dla ziaren zaokrąglonych

dość istotnym problemem. Przyjmując za punkt odniesienia wyniki badań laboratoryjnych przytaczane przez Zunkera [46], Beyera [4], Seilera [30] i Zieschanga [43], należałoby oczekiwać zmniejszenia wartości  $k$  przy wzroście  $U$  z 2 do 20 i stałej wartości średnicy  $d_{10}$ . Efekt taki można uzyskać również stosując wzór Kozeny'ego-Carmana, jeżeli przyjmujemy zmienny współczynnik krętości, który będzie wzrastał wraz z wzrostem różnoziarnistości i zmniejszaniem się porowatości ośrodka.

## PODSUMOWANIE

Przedstawiona analiza ma charakter fragmentaryczny, pozwala jednak na sformułowanie pewnych wniosków dotyczących stosowalności wzorów empirycznych.

1. W przypadku obliczania średnicy miarodajnej na podstawie pełnej krzywej uziarnienia należy stosować metody Kozeny'ego, Zamarina lub Zunkera. Jest to szczególnie istotne w przypadku gruntów niejednorodnych przy małej liczbie przedziałów.
2. Część wymienionych wyżej wzorów należy uznać za mało przydatne ze względu na wąski zakres stosowalności bądź też orientacyjny sposób przyjmowania wartości współczynników (wzory Seelheima, Hazena, Alaymaniego i Sena oraz Shepherda).
3. Spośród przedstawionych wzorów za najbardziej uniwersalny można uznać wzór Kozeny'ego-Carmana, w którym uwzględnia się właściwości filtrującego płynu, porowatość, krętość porów oraz kształt i wielkość ziaren.

Otwartą kwestią pozostaje określenie wpływu niejednorodności uziarnienia na wartość poszczególnych parametrów występujących w tym wzorze.

4. Oceny przydatności poszczególnych wzorów można dokonać na podstawie wiarygodnych wyników badań laboratoryjnych. Zamiarem autorów jest przeprowadzenie takiej analizy dla gruntów z terenu Trójmiasta (Gdańsk, Sopot, Gdynia).

## LITERATURA

1. Agus S. S., Leong E-C., Rahardjo H.: Estimating permeability functions of Singapore residual soils. *Engineering Geology* 78, 2005.
2. Alaymani M.S., Sen Z.: Determination of hydraulic conductivity from complete grain-size distribution curves. *Ground Water* 31(4), 1993.
3. Bear J.: Dynamics of fluids in porous media. Dover Publications, New York 1988.
4. Beyer W.: Zur Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von Kiesen und Sanden aus der Kornverteilungskurve. *Wasserwirtschaft - Wassertechnik* 14(6), 1964.
5. Beyer W., Schweiger K. H.: Zur Bestimmung des entwässerbaren Porenanteils der Grundwasserleiter. *Wasserwirtschaft - Wassertechnik* 19(2), 1969.
6. Białas Z., Kleczkowski A. S.: O przydatności niektórych wzorów empirycznych dla określania współczynnika filtracji. *Archiwum Hydrotechniki* 17(3), 1970.
7. Białas Z., Czyżewski Z., Zwierzewicz T.: Obliczanie współczynnika filtracji za pomocą wzoru. *Technika Poszukiwań* 37, 1971.
8. Bischoff P., Fliegner H., Richter L., Wehner H.: Die Ermittlung des Durchlässigkeitsbeiwert "k<sub>f</sub>" mittels elektronischer Datenverarbeitungsanlagen aus den Ergebnissen von Siebanalysen. *Zeitschrift für Angewandte Geologie* Vol. 14 (2), 1968.
9. BN-76 8950-03. Budownictwo hydrotechniczne. Obliczanie współczynnika filtracji gruntów niespoistych na podstawie uziarnienia i porowatości.
10. Carrier W. D.: Goodbye, Hazen; Hello Kozeny-Carman. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1054, 2003.
11. Chapuis R. P.: Predicting the saturated hydraulic conductivity of sand and gravel using effective diameter and void ratio. *Canadian Geotechnical Journal* 41, 2004.
12. Chapuis R. P., Aubertin M.: On the use of the Kozeny-Carman equation to predict the hydraulic conductivity of soils. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 40, 2003.
13. Cheng C., Chen X.: Evaluation of methods for determination of hydraulic properties in an aquifer-aquitard system hydrologically connected to a river. *Hydrogeology Journal* 15, 2007.
14. Cheong J.-Y., Hamm S.-Y., Kim H.-S., Ko E.-J., Yang K., Lee J.-H.: Estimating hydraulic conductivity using grain-size analyses, aquifer tests, and numerical modeling in a riverside alluvial system in South Korea. *Hydrogeology Journal* 16, 2008.
15. Gol'din A. L i Rasskazov L. N.: Proektirovanie gruntovych plotin. *Energoatomizdat, Moskwa* 1987.
16. Górski J., Kozerski B., Kwaterkiewicz A.: Przegląd własności hydrogeologicznych wybranych serii wodonośnych Pojezierza Suwalskiego. *Biuletyn Instytutu Geologicznego* Vol. 277, 1973 (seria: Z badań hydrogeologicznych w Polsce, tom III).
17. Haverkamp R., Reggiani P., Nimmo J. R.: Property-Transfer Models. [W:] JH Dane i CG Topp (red.) *Methods of soil analysis Part 4 SSSA Book Series No 5 SSSA, Madison, WI, USA, 2002.*
18. Kordas B., Kamiński B.: Empiryczne wzory na określenie współczynnika filtracji w świetle badań laboratoryjnych. *Gospodarka Wodna*, nr 10/1968.
19. Kovacs G.: *Seepage hydraulics*, Elsevier 1981.
20. Liszkowska E.: Wzór Carmana-Kozeny uniwersalnym wzorem na obliczanie współczynnika filtracji. *Geologos* 1, 1996.
21. Marshall T. J.: A relation between permeability and size distribution of pores. *Journal of Soil Science* 9(1), 1958.
22. Mbonimpa M., Aubertin M., Chapuis R. P., Bussièrè B.: Practical pedo-transfer functions for estimating the saturated hydraulic conductivity. *Geotechnical and Geological Engineering* 20, 2002.
23. Mei C. C., Aurialt J.-L., Ng C.-O.: Some applications of the homogenization theory. *Advances in Applied Mechanics* 32, 1996.
24. Okagbue C. O. (1995) Permeability of stratified sands. *Geotechnical and Geological Engineering* 13, 157-168.
25. Palagin I. A.: Opredelenie vodopronicaemosti zernistych materialov i niesviazlych gruntov. *Gidrotechnicheskoe Stroitelstvo*, 3/1964.
26. Pazdro Z., Kozerski B.: *Hydrogeologia ogólna*. Wydawnictwa Geologiczne, Warszawa 1990.
27. PN-86/B-02480: Grunty budowlane. Określenia, symbole, podział i opis gruntów.
28. PN-EN ISO 14688-1 Badania geotechniczne. Oznaczenie i klasyfikowanie gruntów. Część 1: Oznaczenie i opis. Projekt do ankiety (2005-05-31).
29. PN-EN ISO 14688-2 Badania geotechniczne. Oznaczenie i klasyfikowanie gruntów. Część 2: Zasady klasyfikowania. Projekt do ankiety (2005-06-01).
30. Seiler K.-P.: Durchlässigkeit. Porosität und Kornverteilung quartärer Kies-Sand-Ablagerungen des bayerischen Alpenvorlandes. *GWF Wasser-Abwasser* 114(8), 1973.
31. Shepherd R. G.: Correlations of permeability and grain size. *Ground Water* 27(5), 1989.
32. Skaballanowicz I. A.: *Gidrogeologicheskije rasczety po dinamike podzemnyh wod*. Moskwa 1960.
33. Sperry J. M., Peirce J. J.: A model for estimating the hydraulic conductivity of granular material based on grain shape, grain size, and porosity. *Ground Water* 33(6), 1995.
34. Tillmann A., Englert A., Nyari Z., Fejes I., Vanderborght J., Vereecken H.: Characterization of subsoil heterogeneity, estimation of grain size distribution and hydraulic conductivity at the Krauthausen test site using Cone Penetration Test. *Journal of Contaminant Hydrology* 95, 2008.
35. Turek S. (red.): *Poradnik hydrogeologa*, Wydawnictwa Geologiczne, Warszawa 1971.
36. Uma K. O., Loehnert E. P.: Hydraulic conductivity of shallow sandy aquifers: Effects of sedimentologic and diagenetic differences. *Environmental Geology* 23, 1994.
37. Valdes-Parada F. J., Ochoa-Tapia J. A., Alvarez-Ramirez J.: Validity of the permeability Carman-Kozeny equation: A volume averaging approach. *Physica A* 388, 2009.
38. Vuković M., Soro A.: Determination of Hydraulic Conductivity of Porous Media from Grain-Size Composition. *Water Resources Publications*, Littleton, Colorado, USA 1992.
39. Whitaker S.: *The method of volume averaging*, Springer 1999.
40. Wiczysty A.: *Hydrogeologia inżynierska*. PWN, Warszawa 1982.

41. Wyllie M. R. J., Gregory A. R.: Fluid flow through unconsolidated porous aggregates: Effect of porosity and particle shape on Kozeny-Carman constants. *Industrial and Engineering Chemistry* 47, 1955.

42. Zieschang J.: Zur zulässigen Höchstbelastung eines Brunnens. *Zeitschrift für Angewandte Geologie* Vol. 7 (11), 1961.

43. Zieschang, J.: Die Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von Lockergesteinsgrundwasserleitern. *Zeitschrift für Angewandte Geologie* Vol. 10 (7), 3, 1964.

44. Zuber A.: Obliczanie współczynnika filtracji skał sypkich z krzywej uziarnienia. *Mat. VI Konferencji Współczesne Problemy Hydrogeologii w Polonicy Zdroju*, Ofic. Wyd. „Sudety”, Wrocław, 1993.

45. Zuber A.: Wzór Carmana-Kozeny uniwersalnym wzorem na obliczanie współczynnika filtracji – komentarz. *Geologos* Vol. 2, 1997.

46. Zunker F.: *Das Verhalten des Bodens zum Wasser [W:] Handbuch der Bodenlehre* t.6, Springer, Berlin 1930.

47. Żak S.: Właściwości hydrogeologiczne skał – wzajemne relacje. Materiały konferencji „Współczesne problemy hydrogeologii”, Tom XI, cz. 1, Gdańsk 2003.

**PODZIĘKOWANIE:** Autorzy serdecznie dziękują pp. prof. Bohdanowi Kozerskiemu, dr Małgorzacie Pruszkowskiej-Caceres, dr Monice Okońskiej i mgr Bożenie Kray za pomoc w zbieraniu materiałów do niniejszego artykułu.