

Parametryczna krzywa przejściowa dla dróg kolejowych

Władysław Koc

Zakres stosowania krzywych przejściowych o nieliniowej zmianie krzywizny na drogach kolejowych jest, jak dotąd, bardzo ograniczony. W pracy (przeprowadzając stosowną analizę) wskazano na główną przyczynę takiego stanu rzeczy – bardzo małe wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym, w praktyce często wręcz niemożliwe do realizacji. Postanowiono więc poszukać nowej postaci krzywej przejściowej, rezygnując z warunku zerowania się pochodnej krzywizny w punkcie początkowym i wprowadzając tam pewne zaburzenie (mniejsze jednak niż występujące w paraboli trzeciego stopnia). Wykorzystując metodę identyfikacji krzywizny za pomocą równań różniczkowych wyznaczono równanie odpowiedniej krzywej przejściowej, którą – z uwagi na występujący parametr C – określono mianem parametrycznej krzywej przejściowej. Krzywa ta charakteryzuje się łagodnym przebiegiem krzywizny w rejonie wejścia w łuk kołowy, a przyjęcie odpowiedniej wartości parametru $C \in (0,1)$ zależy od konkretnej sytuacji geometrycznej i następuje w wyniku analizy wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym krzywej przejściowej.



prof. dr hab. inż.
Władysław Koc
Politechnika Gdańska,
Katedra Transportu
Szynowego

Idea stosowania krzywych przejściowych o nieliniowej zmianie krzywizny – w drogach kołowych, jak też kolejowych – ma wieloletnią historię. Krzywe te tworzą pewną rodzinę, dla której wydaje się adekwatne zaproponowane przez R. J. Grabowskiego [3], określenie „ładkie krzywe przejściowe”, korespondujące z kluczowym znaczeniem klasy funkcji opisującej krzywiznę. Rozpowszechnienie wiedzy na temat takich krzywych w naszym kraju, w odniesieniu do dróg kolejowych, zawdzięczamy fundamentalnemu opracowaniu H. Bałucha [1]. Zostały w nim szczegółowo omówione cztery postacie gładkich krzywych przejściowych: parabola czwartego stopnia, cosinusoida, sinusoida oraz krzywa z rampą przechyłkową w postaci paraboli trzeciego stopnia (tzw. krzywa Blossa).

Żeby można było je ze sobą zestawić, należy dokonać pewnych założeń odnośnie do obowiązujących wartości dopuszczalnych parametrów kinematycznych – przyrostu przyspieszenia ψ_{dop} i prędkości podnoszenia koła taboru na rampie przechyłkowej f_{dop} . Panuje bowiem przeświadczenie, że dla gładkich krzywych przejściowych można przyjąć znacznie większe (nawet podwójne) wartości dopuszczalne niż dla paraboli trzeciego stopnia (gdyż maksimum wartości ψ i f występuje tylko w części środkowej tych krzywych, a w częściach skrajnych są one

znacznie mniejsze). Z poglądem tym można jednak polemizować.

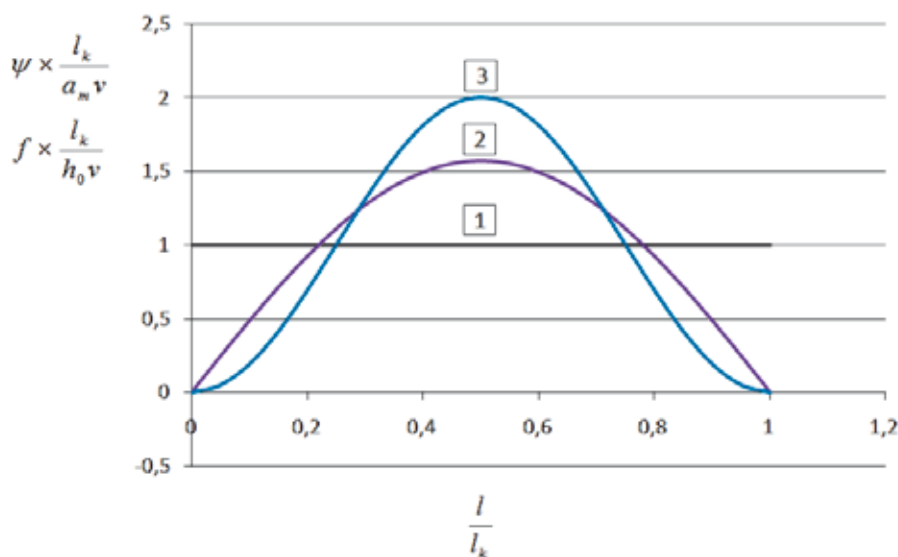
Na rysunku 1 pokazano kształtowanie się ψ i f na długości krzywych przejściowych w postaci paraboli trzeciego stopnia, cosinusoidy i sinusoidy. Jak widać, przekroczenie wartości ψ i f , występujących na paraboli trzeciego stopnia, obejmuje co najmniej połowę długości gładkiej krzywej przejściowej, a wartość tego przekroczenia jest znaczna. Dlatego też wydaje się właściwe utrzymanie dla wszystkich rodzajów krzywych takich samych zasad.

Założenie jednakowych wartości ψ_{dop} i f_{dop} prowadzi do konieczności wydłużenia poszczególnych gładkich krzywych przejściowych w stosunku do paraboli trzeciego stopnia (poprzez wprowadzenie odpowiedniego współczynnika A). Staje się wówczas możliwe wzajemne porównanie rzędnych

rampy przechyłkowej i rzędnych poziomych (rys. 2 i 3).

W danym przypadku odniesieniem jest krzywa w postaci paraboli trzeciego stopnia przyjęta dla następującego układu geometrycznego:

- maksymalna prędkość pociągów $v_p = 80$ km/h,
 - promień łuku kołowego $R = 500$ m,
 - wartość przechyłki na łuku $h_0 = 80$ mm,
 - długość krzywej przejściowej (z prostoliniową rampą przechyłkową) $l_k = 70$ m.
- Przy takich danych parametry kinematyczne przyjmują następujące wartości:
- przyspieszenie niezrównoważone na łuku kołowym $a_m = 0,464$ m/s²,
 - prędkość zmiany przyspieszenia na krzywej przejściowej $\psi = 0,147$ m/s³,
 - prędkość podnoszenia koła na rampie przechyłkowej $f = 25,4$ mm/s.



1. Wykresy kształtowania się ψ i f na długości wybranych krzywych przejściowych;
1 – parabola trzeciego stopnia, 2 – cosinusoida, 3 – sinusoida

Długości gładkich krzywych przejściowych na rysunkach 2 i 3 są następujące:

- sinusoida ($A = 2$) – $l_k = 140$ m,
- parabola czwartego stopnia ($A = 2$) – $l_k = 140$ m,
- cosinusoida ($A = \pi/2$) – $l_k = 109,956$ m,
- krzywa Blossa ($A = 1,5$) – $l_k = 105$ m.

Przeprowadzone analizy teoretyczne oraz badania eksperymentalne (m. in. [2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12]) jednoznacznie wskazują na mniejsze (a więc korzystniejsze) oddziaływanie dynamiczne podczas przejazdu po gładkich krzywych przejściowych. Decydującą rolę odgrywa tutaj klasa funkcji opisującej krzywiznę; dla parabol trzeciego stopnia jest to funkcja klasy C^0 , podczas gdy dla parabol czwartego stopnia, cosinusoidy i krzywej Blossa – funkcja klasy C^1 , zaś dla sinusoidy – funkcja klasy C^2 . Jednak pomimo swoich bezspornych zalet zakres stosowania gładkich krzywych przejściowych w eksploatowanych torach kolejowych jest bardzo ograniczony. Jak się wydaje, podstawową przyczyną sceptycyzmu panującego w tej kwestii są bardzo małe wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym omawianych krzywych; uniemożliwia to często ich poprawne wytyczenie w terenie i w praktyce prowadzi do skrócenia wykonanej krzywej przejściowej w stosunku do założeń projektowych.

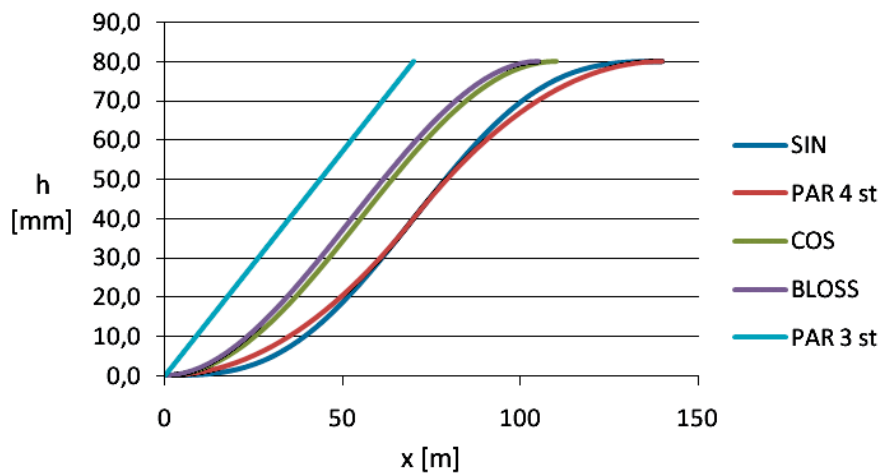
Rzędne poziome krzywych przejściowych w rejonie początkowym

Popatrzmy zatem, jak kształtują się rzędne poziome krzywych przejściowych z rysunku 3 na odcinku pierwszych 20 metrów. Pokazano to na rysunku 4. Odpowiednie wartości liczbowe zawiera tablica 1.

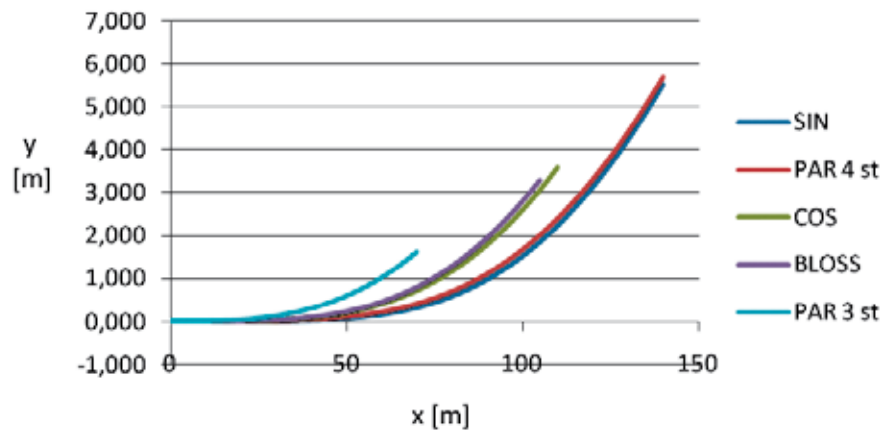
Patrząc na wartości w tablicy 1 trudno się dziwić, że celowość stosowania gładkich krzywych przejściowych budzi aż takie wątpliwości. Rzędne poziome w rejonie początkowym są dla tych krzywych bardzo małe, wielokrotnie mniejsze niż rzędne parabol trzeciego stopnia. Relatywnie najlepiej wypada krzywa Blossa, zresztą najkrótsza spośród rozpatrywanych gładkich krzywych. Najkorzystniejsza pod względem dynamicznym sinusoida wydaje się właściwie niemożliwa do realizacji – w danym przypadku jej rzędne na pierwszych 20 metrach długości nie osiągają nawet 1 milimetra.

Może więc należałoby rozpatrzyć możliwości zastosowania innych postaci krzywych przejściowych. Dla dróg kołowych R. J. Grabowski [3] opracował koncepcję tzw. gładkich wielomianowych krzywych przejściowych. Jest to rodzina krzywych parametrycznych opisanych równaniem

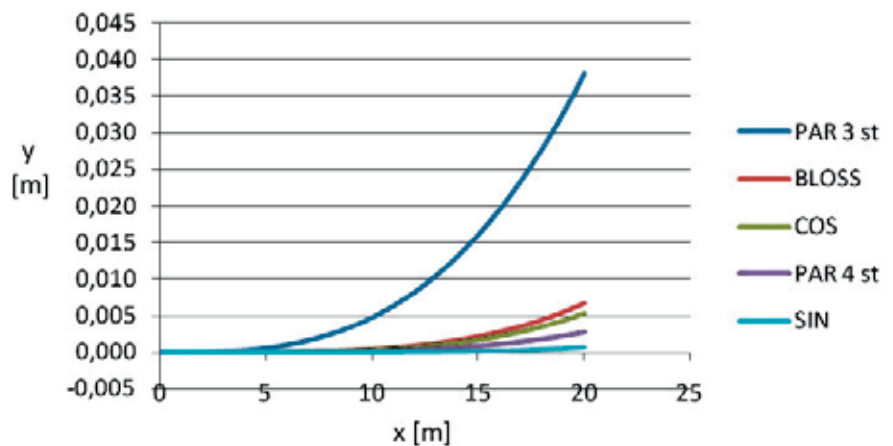
$$y(x) = \frac{1}{R} \left[Cx + \frac{2 - 5C}{2l^3} x^2 - \frac{7 - 15C}{5l^4} x^3 + \frac{1 - 2C}{2l^5} x^4 \right], \quad 0,4 \leq C \leq 0,6 \quad (1)$$



2. Kształtowanie się rzędnych rampy przechyłkowej na długości parabol trzeciego stopnia i gładkich krzywych przejściowych



3. Kształtowanie się rzędnych poziomych na długości parabol trzeciego stopnia i gładkich krzywych przejściowych



4. Kształtowanie się rzędnych poziomych w rejonie początkowym rozpatrywanych krzywych przejściowych

Tab.1. Wybrane wartości rzędnych poziomych y [mm]

Krzywa przejściowa	$x = 5$ m	$x = 10$ m	$x = 15$ m	$x = 20$ m
Parabola trzeciego stopnia	0,59524	4,76190	16,07143	38,09524
Parabola czwartego stopnia	0,01063	0,17007	0,86097	2,72109
Krzywa Blossa	0,02780	0,43624	2,16472	6,70338
Cosinusoida	0,02124	0,33921	1,71143	5,38329
Sinusoida	0,00075	0,02386	0,18013	0,75276

Jak się okazuje, z równania (1) dla $C = 0,5$ otrzymujemy równanie krzywej Blossa; inne wartości C zapewniają jeszcze łagodniejsze przejście z prostej na łuk kołowy [5]. Miejsce gładkich wielomianowych krzywych przejściowych staje się w ten sposób bardziej określone. Jest to rodzina jednoparametrowa; występujący parametr C decyduje o charakterze rozkładu krzywizny. Ogólnie mówiąc rozkład krzywizny jest tutaj niesymetryczny, z wyjątkiem przypadku $C = 0,5$ (tj. krzywej Blossa), a funkcja krzywizny jest klasy C^1 . Krzywe te, zastosowane w drogach kolejowych, nie poprawią sytuacji w zakresie wartości rzędnych poziomych rejonu początkowego.

Z przeprowadzonych rozważań nasuwa się wniosek, że podstawowa przyczyna stwierdzonych trudności tkwi w nadmiernym wyłagodzeniu krzywizny w rejonie początkowym gładkiej krzywej przejściowej. Aby temu zapobiec, należy zrezygnować z warunku zerowania się pochodnej krzywizny w punkcie początkowym i przyjęcie tam pewnej wartości liczbowej, mniejszej jednak niż ma to miejsce w przypadku paraboli trzeciego stopnia. Funkcja opisująca krzywiznę będzie funkcją klasy C^0 , jednak – z uwagi na łagodne przejście w rejonie łuku kołowego oraz łagodniejsze niż dla paraboli trzeciego stopnia w rejonie początkowym – uzyskana krzywa może być nadal zaliczana do gładkich krzywych przejściowych.

Parametryczna krzywa przejściowa

Identyfikacja problemu krzywych przejściowych na podstawie występujących przyspieszeń poprzecznych została przedstawiona w pracy [8]. Analogiczny tok postępowania może znaleźć zastosowanie przy wyznaczaniu rozkładu krzywizny. Rozkładu krzywizny na długości, tj. funkcji $k(l)$, należy poszukiwać wśród rozwiązań równania różniczkowego

$$k^{(m)}(l) = f[l, k, k', \dots, k^{(m-1)}] \quad (2)$$

z warunkami na początku (dla $l = 0$) i na końcu (dla $l = l_k$) krzywej przejściowej

$$\begin{cases} k^{(i)}(0^+) = 0 & \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, n_1 \\ k^{(j)}(l) = 0 & \text{dla } j = 1, 2, \dots, n_2 \end{cases} \quad (3)$$

Rząd równania różniczkowego (2) wynosi $m = n_1 + n_2 + 2$, a otrzymana funkcja $k(l)$ jest funkcją klasy C^n w przedziale $(0, l_k)$, gdzie $n = \min(n_1, n_2)$.

Przyjmujemy równanie różniczkowe

$$k^{(4)}(l) = 0 \quad (4)$$

z następującymi warunkami (przy założeniu, że stała liczbowa $C > 0$):

$$\begin{cases} k(0^+) = 0 & k(l_k) = \frac{1}{R} \\ k'(0^+) = \frac{C}{Rl_k} & k'(l_k) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Rozwiązanie problemu różniczkowego (4), (5) prowadzi do wyznaczenia równania krzywizny nowej krzywej przejściowej, którą – z uwagi na występujący parametr C – określimy mianem krzywej parametrycznej. Równanie to ma postać

$$k(l) = \frac{1}{R} \left[C \frac{l}{l_k} + (3 - 2C) \frac{l^2}{l_k^2} - (2 - C) \frac{l^3}{l_k^3} \right] \quad (6)$$

Równaniu (6) odpowiada równanie rampy przechyłkowej

$$h(l) = h_0 \left[C \frac{l}{l_k} + (3 - 2C) \frac{l^2}{l_k^2} - (2 - C) \frac{l^3}{l_k^3} \right] \quad (7)$$

Naszym celem jest teraz zapisanie równania krzywej przejściowej w układzie współrzędnych prostokątnych (x, y) , w którym oś odciętych jest styczna do krzywej przejściowej i pokrywa się z kierunkiem głównym trasy. Tak, jak się to powszechnie praktykuje, przyjmujemy, że zamodelowana krzywizna $k(l)$ odnosi się do swego rzutu na oś x , czyli że $l = x$ oraz $k(l) = k_0(x)$. Jednocześnie uznajemy $k_0(x)$ jako równanie drugiej pochodnej szukanej funkcji $y(x)$. Równanie to następnie dwukrotnie całkujemy, uzyskując $y'(x)$ i $y(x)$; uwzględniamy przy tym warunki:

$$y(0) = 0 \text{ i } y'(0) = 0.$$

Uzyskana w ten sposób krzywizna $k(x)$ krzywej przejściowej różni się, oczywiście, od krzywizny wyjściowej $k_0(x)$. Różnica ta zależy od wartości nachylenia stycznej $y'(x)$. W stosowanych w kolejnictwie krzywych przejściowych (gdy tak jak w rozpatrywanym przez nas przypadku przyjmujemy układ współrzędnych, w którym początek krzywej jest styczny do osi odciętych) wartość stycznej $y'(x)$ na długości jest niewielka, dlatego też różnica pomiędzy krzywiznami $k_0(x)$ i $k(x)$ jest praktycznie nieistotna. Taki sposób wyznaczania rzędnych krzywej przejściowej znalazł zastosowanie również w pracy H. Bałucha [1].

Po dwukrotnym scałkowaniu funkcji $k_0(x)$ otrzymujemy równanie parametrycznej krzywej przejściowej

$$y(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{6} \frac{C}{l_k} x^3 + \frac{1}{12} \frac{3-2C}{l_k^2} x^4 - \frac{1}{20} \frac{2-C}{l_k^3} x^5 \right) \quad (8)$$

Największe wartości parametrów kinematycznych występują w punkcie, w którym także największa jest pochodna krzywizny

$$\max k'(l) = k'(l_0) = \left[C + \frac{(3-2C)^2}{3(2-C)} \right] \frac{1}{Rl_k} \quad (9)$$

Wyrażenie $A = \left[C + \frac{(3-2C)^2}{3(2-C)} \right]$ określa relację długości parametrycznej krzywej przejściowej i paraboli trzeciego stopnia (dla której we wzorach obliczeniowych $A=1$). Współczynnik ten przyjmuje najmniejszą wartość dla $C=1$ i wynosi $A=4/3$.

Na rysunku 5 pokazano kształtowanie się rzędnych poziomych na długości parametrycznej krzywej przejściowej ($C=0,25$, $C=0,5$ i $C=1,0$) oraz paraboli trzeciego stopnia i krzywej Blossa. Jak widać, dla $C \in (0,1)$ rzędne $y(x)$ różnią się wyraźnie między sobą na całej długości krzywej przejściowej. Krzywa parametryczna $C=1$ ma rzędne poziome zbliżone do rzędnych paraboli trzeciego stopnia, rzędne pozostałych krzywych mieszczą się między rzędnymi paraboli trzeciego stopnia i krzywej Blossa (tj. krzywej $C=0$). Uwagi te dotyczą również rzędnych rampy przechyłkowej $h(x)$.

Dla $C \geq 1$ rzędne $y(x)$ są na całej długości zbliżone zarówno do siebie, jak też do rzędnych paraboli trzeciego stopnia (poszczególne krzywe różnią się tylko długością). Dotyczy to również rzędnych $h(x)$ na długości $x \in (0, l_k/2)$; różnicują się dopiero na drugiej połowie rampy przechyłkowej (rys. 6). Wszystko to sprawia, że zastosowanie parametrycznych krzywych przejściowych mających $C \geq 1$ nie byłoby korzystne; poprawiają one wejście na łuk kołowy, natomiast w rejonie

początkowym pozostaje nadal gwałtowne zaburzenie krzywizny, jakie cechuje parabolę trzeciego stopnia.

Przydatnych w praktyce rozwiązań powinniśmy zatem szukać wśród krzywych parametrycznych o $C \in (0,1)$. Kryterium wyboru powinny oczywiście stanowić wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym. Na rysunku 7 pokazano kształtowanie się rzędnych poziomych w rejonie początkowym wybranych krzywych parametrycznych.

Rampy przechyłkowe na krzywych przejściowych z rysunku 7 pokazano na rysunku 8. Jak widać, początek rampy na krzywych parametrycznych nie daje łagodnego przejścia z prostej na krzywą przejściową; należy jednak dążyć do tego, żeby występująca na nich sytuacja była korzystniejsza niż na początku rampy prostoliniowej.

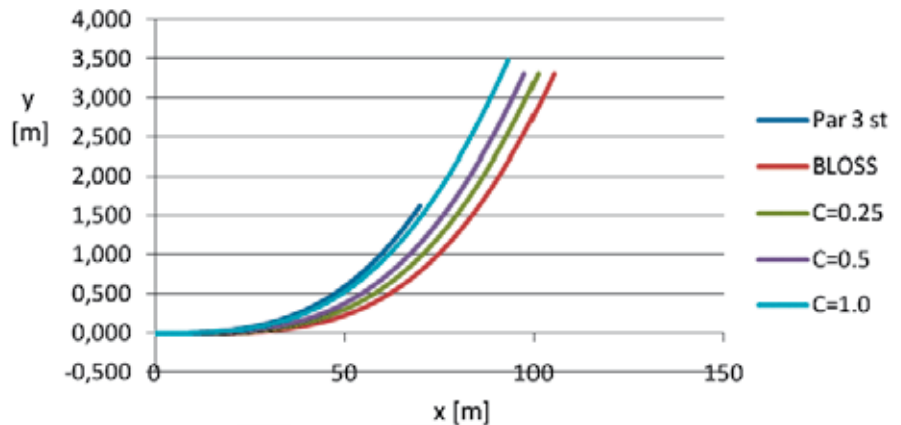
Wybór najkorzystniejszego rozwiązania

Wybór postaci krzywej parametrycznej (tj. przyjęcie odpowiedniej wartości parametru C) zależy będzie od konkretnej sytuacji geometrycznej. Sprawą podstawową stanie się analiza wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym. W tabelicy 2 podano wartości tych rzędnych na odcinku pierwszych 20 metrów przy różnych wartościach parametru C (dla danych liczbowych wykorzystywanych w niniejszej pracy). Rzędne te są znacznie większe od podanych w tabelicy 1 rzędnych gładkich krzywych przejściowych. Przydatne może się przy tym również okazać sporządzenie wykresów zależności $y(C)$ dla wybranych punktów rejonu początkowego.

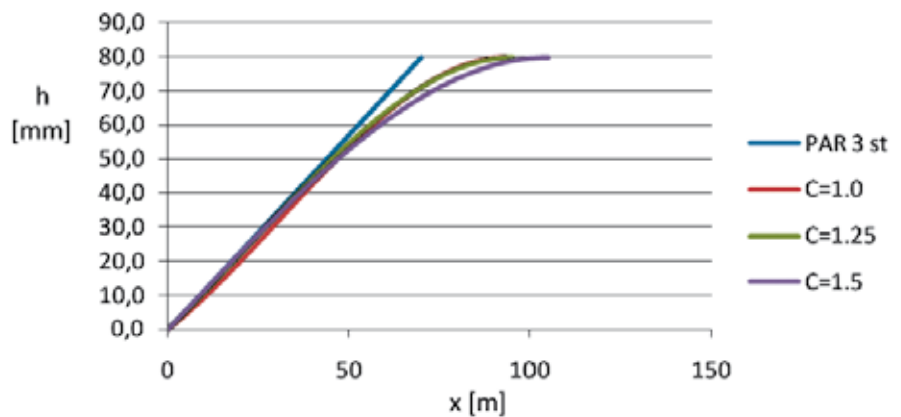
Jak się wydaje, w rozpatrywanym przypadku najbardziej właściwe mogłoby się okazać zastosowanie krzywej parametrycznej $C = 0,5$. Posiada ona już dość wyraźne (tylko dwa razy mniejsze niż parabola trzeciego stopnia) rzędne poziome w rejonie początkowym. Jednocześnie cechuje ją stosunkowo łagodne przejście z prostej na krzywą przejściową; pochodna krzywizny w punkcie początkowym stanowi jedynie 36 % wartości występującej na paraboli trzeciego stopnia.

Podsumowanie

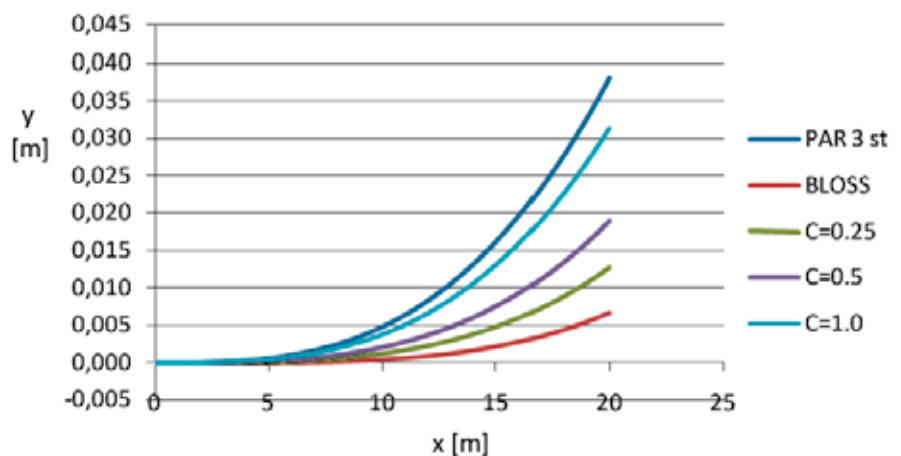
- Zakres stosowania gładkich krzywych przejściowych na drogach kolejowych jest, jak dotąd, bardzo ograniczony. Krzywe te znane są od dawna i posiadają szereg bezspornych zalet; przede wszystkim cechują je mniejsze wartości oddziaływań dynamicznych. Niestety krzywe te mają jedną, zasadniczą wadę – bardzo małe wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym, w praktyce często niemożliwe do realizacji i następnie utrzymania.



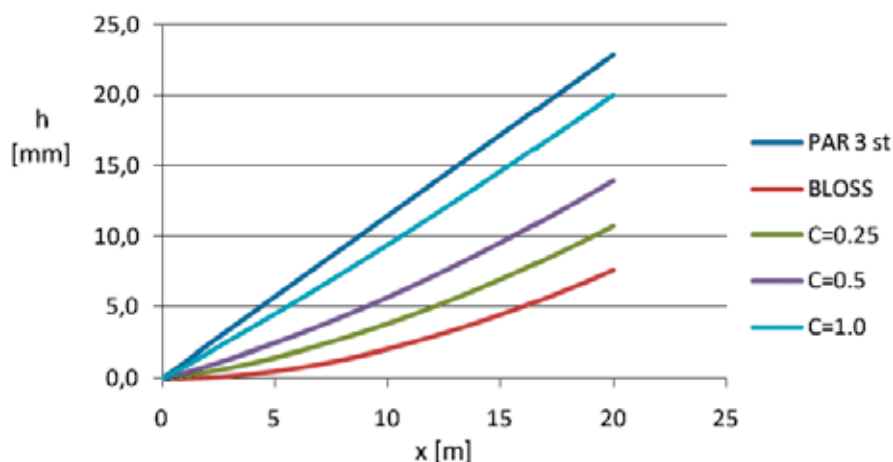
5. Kształtowanie się rzędnych poziomych na długości parametrycznej krzywej przejściowej ($C = 0,25$, $C = 0,5$ i $C = 1,0$) oraz paraboli trzeciego stopnia i krzywej Blossa



6. Kształtowanie się rzędnych rampy przechyłkowej na długości parametrycznej krzywej przejściowej ($C = 1,0$, $C = 1,25$ i $C = 1,5$) oraz paraboli trzeciego stopnia



7. Kształtowanie się rzędnych poziomych wybranych krzywych parametrycznych w rejonie początkowym



8. Kształtowanie się rzędnych rampy przechyłkowej na wybranych krzywych parametrycznych w rejonie początkowym

Tab.2. Wybrane wartości rzędnych poziomych y [mm] dla różnych postaci krzywej parametrycznej

Krzywa	A	lk [m]	x = 5 m	x = 10 m	x = 15 m	x = 20 m
C = 0,1	1,47544	103,281	0,06715	0,74299	3,17309	9,02992
C = 0,2	1,45185	101,630	0,10768	1,05838	4,20766	11,41184
C = 0,3	1,42941	100,059	0,14937	1,38197	5,26677	13,84473
C = 0,4	1,40833	98,583	0,19212	1,71307	6,34783	16,32205
C = 0,5	1,38889	97,222	0,23582	2,05062	7,44707	18,83441
C = 0,6	1,37143	96,000	0,28027	2,39303	8,55904	21,36863
C = 0,7	1,35641	94,949	0,32520	2,73807	9,67608	23,90646
C = 0,8	1,34444	94,111	0,37021	3,08258	10,78755	26,42272
C = 0,9	1,33636	93,545	0,41474	3,42211	11,87862	28,88280
C = 1,0	1,33333	93,333	0,45800	3,75046	12,92876	31,23907

- Podstawową przyczynę trudności występujących w znanych postaciach gładkich krzywych przejściowych stanowi nadmierne wyłagodzenie krzywizny w ich rejonie początkowym. Należy zatem znaleźć nową postać krzywej przejściowej, rezygnując z warunku zerowania się pochodnej krzywizny w punkcie początkowym. Do tego celu wykorzystano metodę identyfikacji krzywizny za pomocą równań różniczkowych, uzyskując rodzinę parametrycznych krzywych przejściowych.
- Parametryczna krzywa przejściowa charakteryzuje się łagodnym przebiegiem krzywizny w rejonie wejścia w łuk kołowy oraz jej pewnym zaburzeniem w punkcie początkowym (mniejszym jednak niż w przypadku paraboli trzeciego stopnia). Przyjęcie odpowiedniej wartości parametru zależy od konkretnej sytuacji geometrycznej i następuje w wyniku analizy wartości rzędnych poziomych w rejonie początkowym krzywej przejściowej. ◀

Materiały źródłowe:

- [1] Bałuch H.: Optymalizacja układów geometrycznych toru. WKŁ, Warszawa 1983.
- [2] Freimann E.: Übergangsbogen mit geschwungener Krümmungslinie bei Gegenbogen. Eisenbahningenieur 1973, nr 5.
- [3] Grabowski R. J.: Gładkie przejścia krzywoliniowe w drogach kołowych i kolejowych. Zeszyty Naukowe AGH, Kraków 1984, nr 82.
- [4] Klauder L. T.: Track transition curve geometry based on gegenbauer polynomials. The Sixth International Conference RAILWAY ENGINEERING - 2003 "Maintenance & Renewal of Permanent Way; Power & Signalling; Structures & Earthworks", London 2003.
- [5] Koc W.: Krzywe przejściowe z nieliniowymi rampami przechyłkowymi w warunkach eksploatacyjnych PKP. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej nr 462, seria Budownictwo Lądowe nr XLVII, Gdańsk 1990.
- [6] Koc W., Mieloszyk E.: Analiza porównawcza wybranych krzywych przejściowych z wykorzystaniem modelu dynamicznego. Archiwum Inżynierii Lądowej 1987, tom XXXIII, zeszyt 2.
- [7] Kufver B.: Realigning railway in track renewals – linear versus S-shaped super-elevation ramps. The Second International Conference RAILWAY ENGINEERING - 99 "Maintenance and Renewal of Permanent Way, Structures and Control", London 1999.
- [8] Mieloszyk E., Koc W.: General dynamic method for determining transition curve equations. Rail International - Schienen der Welt 1991, nr 10.
- [9] Rubčenko V. S.: O celesobraznosti zameny linejnych perechodnych krivykh nelinejnymi. Vestnik CNII 1958, nr 7.
- [10] Schramm G.: Verlägern von Übergangsbogen mit kleinsten Seitenverschleibungen. Eisenbahningenieur 1977, nr 7÷8.
- [11] Varga J. i in.: Analiza dopuszczalnych oddziaływań na pojazd kolejowy przejeżdżający po krzywych przejściowych o geometrii liniowej (klotoida) i cosinusoidalnej oraz po rozjazdach o dużych promieniach. Prace Nauk.-Bad. Instytutu Kolejnictwa w Budapeszcie 1980 (tłum. z węg.).
- [12] Weigend M.: Beitrag des Oberbaues zur Fahrzeitoptimierung. Eisenbahningenieur 1985, nr 6.