

Wojciech TOCZEK

POLITECHNIKA GDAŃSKA, KATEDRA METROLOGII I OPTOELEKTRONIKI,
ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk

Ryzyko ponoszone przez producenta i konsumenta z powodu niepewności pomiarów

Dr hab. inż. Wojciech TOCZEK

Ukończył studia i uzyskał stopień doktora habilitowanego na Wydziale Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej. Zainteresowania naukowe: metrologia, diagnostyka elektroniczna, modelowanie i symulacja systemów elektronicznych. Współautor 9 systemów pomiarowo-diagnostycznych zastosowanych w przemyśle. Autor około 80 publikacji w czasopiśmie i materiałach konferencyjnych, 1 monografii i 3 patentów.



e-mail: toczek@eti.pg.gda.pl

Streszczenie

Przeprowadzono krytyczną dyskusję stosowanych w literaturze definicji ryzyka błędnych decyzji wynikających z niepewności pomiarów. Dla znanych rozkładów prawdopodobieństwa charakteryzujących produkcję i aparaturę pomiarową dokonano analizy ryzyka na przykładzie testowania amplitudy napięcia. Pokazano, że tradycyjne definicje ryzyka producenta i ryzyka konsumenta są przypisywane prawdopodobieństwom zaniżonym. Porównano je z definicjami lepiej dostosowanymi do praktyki produkcyjnej.

Słowa kluczowe: ocena zgodności wyrobów, niepewność pomiarów, ryzyko konsumenta, ryzyko producenta.

Consumer's and producer's risk associated with measurement uncertainty

Abstract

In the paper a critical discussion of the definitions of producer's and consumer's risks associated with measurement uncertainty is presented. The considerations are illustrated by an example of amplitude testing, for which risks are evaluated using known from literature and proposed formulae. It is shown that when the consumer's risk is discussed in literature it is by definition lower than probability referenced to the consumer's perspective. The reason for this is that the appropriate action, usually taken in the case of parameter being outside the acceptance interval, is not considered. The similar remark refers to the definition of the producer's risk because production yield is usually not 100 %. The proposed definitions of risk are better adjusted to the industrial practice. The paper concludes that suitable precautions must be taken using the definitions of consumer's and producer's risk which are published in journals. This discussion deals also with draft of the important document "Evaluation of measurement data - The role of measurement uncertainty in conformity assessment", JCGM 106, which is under preparation by Joint Committee for Guides in Metrology.

Keywords: conformity assessment, measurement uncertainty, consumer's risk, producer's risk.

1. Wprowadzenie

Niepewność pomiarów niesie ryzyko podejmowania błędnych decyzji. Ich skutkiem mogą być straty materialne i moralne, niepowodzenie misji, a nawet utrata życia. Dotyczy to wszystkich obszarów technologii, badań medycznych, monitorowania środowiska, zapewnienia bezpieczeństwa.

W artykule ryzyko rozważane jest w kontekście procesów produkcyjnych, w których wyniki pomiarów służą do podejmowania decyzji akceptującej lub odrzucającej wyrób. W praktyce produkcyjnej mamy często do czynienia z sekwencyjnym testowaniem nominalnie jednakowych wyrobów, których parametry różnią się z powodu niedoskonałości procesu technologicznego. Niepewność pomiarów może spowodować podjęcie błędnych decyzji - akceptację wyrobu nie spełniającego specyfikacji lub odrzucenie wyro-

bu zdatnego. Obie sytuacje są charakteryzowane za pomocą prawdopodobieństwa nazywanego tradycyjnie „ryzykiem konsumenta” (*RK*) i „ryzykiem producenta” (*RP*), ponieważ skutki wprowadzenia na rynek niezdatnego wyrobu są odczuwalne bezpośrednio przez konsumenta, a w drugim przypadku stratę ponosi producent, który nie sprzedaje zdatnego wyrobu, lecz odrzuca go lub łoży na koszty niepotrzebnej korekcji, naprawy i ponownego testowania. Zauważmy, że nie tylko klient, ale również producent ponosi konsekwencje akceptacji wyrobu nie spełniającego specyfikacji. Są nimi reklamacje, utrata reputacji, a nawet sprawy sądowe.

Problemowi oceny ryzyka konsumenta i producenta poświęcony jest rozdział 10 projektu dokumentu opracowywanego przez Joint Committee for Guides in Metrology noszącego tytuł "Evaluation of measurement data - The role of measurement uncertainty in conformity assessment", JCGM 106 [1], który ma być kolejnym suplementem do przewodnika „Guide to the expression of uncertainty in measurement” (GUM) [2]. W dokumencie tym, a także w wielu innych pracach z dziedziny badania zgodności [3-5], pod pojęciem ryzyka rozumie się prawdopodobieństwo obliczone dla wyrobu losowo wybranego z procesu produkcyjnego, nazywane również globalnym ryzykiem konsumenta lub producenta. Do zdefiniowania ryzyka w takim ujęciu potrzebne są trzy wielkości: x , x_m , g , gdzie: x jest testowanym parametrem wyrobu (atrybutem wyrobu decydującym o jego jakości), x_m jest wynikiem pomiaru tego parametru, g jest wyspecyfikowaną graniczną (dopuszczalną) wartością parametru x . Problem ryzyka błędnych decyzji powstaje stąd, że z powodu niepewności pomiarów wynik pomiaru x_m różni się od menzurandu x .

Ryzyko konsumenta jest definiowane jako prawdopodobieństwo jednoczesnego spełnienia dwóch nierówności

$$RK = Pr(x > g, x_m \leq g), \quad (1)$$

natomiast ryzyko producenta, to prawdopodobieństwo

$$RP = Pr(x \leq g, x_m > g). \quad (2)$$

Gdy istnieją dwie granice tolerancji parametru; dolna i górna, w wyrażeniach (1) i (2) operuje się przedziałami.

Wyznaczone w ten sposób poziomy ryzyka nie uwzględniają działań podejmowanych w zakładach produkcyjnych po przeprowadzeniu testu. Zauważmy, że z perspektywy konsumenta, poziom ryzyka wyznaczony za pomocą definicji (1) jest zaniżony, ponieważ nie uwzględniono, że wyroby, które nie spełniły testu są odrzucane i nie trafiają na rynek. Podobne zastrzeżenie dotyczy wzoru (2) ze względu na fakt, że uzysk produkcyjny nie jest równy 100%. Zatem definicje (1) i (2) prowadzą do zbyt optymistycznej oceny ryzyka przeznaczonej dla celów produkcyjnych.

W [6] zaproponowano lepiej dostosowane do praktyki produkcyjnej definicje ryzyka konsumenta i producenta:

$$RK^* = \frac{Pr(x > g, x_m \leq g)}{Pr(x_m \leq g)}, \quad (3)$$

$$RP^* = \frac{Pr(x \leq g, x_m > g)}{Pr(x \leq g)}, \quad (4)$$

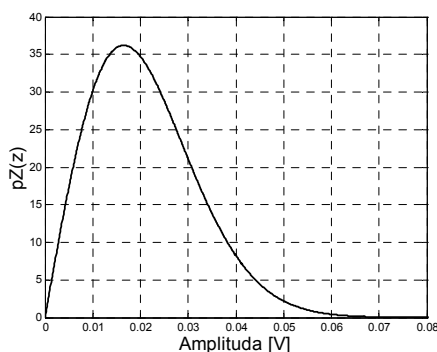
gdzie: $Pr(x_m \leq g)$ jest prawdopodobieństwem, że wyrób spełni test, $Pr(x \leq g)$ jest prawdopodobieństwem, że wyrób jest poprawnie wyprodukowany (zdatny).

Dla porównania stosowanych w projekcie dokumentu JCGM 106 i proponowanych definicji ryzyka, w dalszej części przedstawiono studium procesu testowania produkcyjnego, w którym mierzonym parametrem jest amplituda napięcia.

2. Ocena ryzyka w testowaniu amplitudy napięcia

Niech z oznacza mierzoną amplitudę napięcia (menzurand), z_m wynik pomiaru amplitudy, a U_g wyspecyfikowaną graniczną wartość parametru z . Dla danego procesu produkcyjnego i zastosowanego systemu pomiarowego wiedza o możliwych rezultatach sprawdzenia zgodności wyrobu wybranego losowo z populacji jest zawarta w łącznym rozkładzie prawdopodobieństwa menzurandu i wyniku pomiaru $p(z, z_m)$ [1]. Wyprowadzenie tego rozkładu wymaga znajomości rozkładów prawdopodobieństwa charakteryzujących wielkość badaną i proces pomiarowy.

Jako przykładową charakterystykę wielkości badanej zastosujemy rozkład prawdopodobieństwa modułu napięcia [7].



Rys. 1. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa modułu napięcia na wyjściu układu testowanego

Fig. 1. Probability density function of the voltage magnitude at the tested circuit output

$$p_Z(z) = \frac{z}{\sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{z^2}{2(1-r^2)a}} I_0\left(\frac{z^2}{2(1-r^2)} \sqrt{b^2 + c^2}\right), \quad (5)$$

gdzie:

$$a = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2},$$

$$b = \frac{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2},$$

$$c = \frac{r}{\sigma_X \sigma_Y},$$

σ_X , σ_Y – odchylenia standardowe części rzeczywistej i urojonej napięcia, r – współczynnik korelacji między częścią rzeczywistą i urojoną, I_0 – zmodyfikowana funkcja Bessela zerowego rzędu.

Jest to uogólniony rozkład Rayleigha (ze względu na liczbę parametrów funkcji zwiększoną z jednego do trzech), adekwatny dla napięcia, którego części rzeczywista i urojona charakteryzowane są normalnymi rozkładami prawdopodobieństwa z zerowymi wartościami oczekiwanymi i różnymi odchyleniami standardowymi. Na rys. 1 przedstawiono wykres funkcji rozkładu (5) dla danych odchylen standardowych: $\sigma_X = 14,8$ mV, $\sigma_Y = 18,6$ mV, oraz współczynnika korelacji $r = 0$.

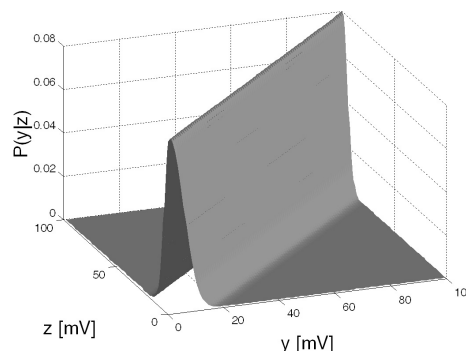
Mierzony parametr jest destymulantą jakości i jego zbyt wysokie wartości przemawiają na niekorzyść produktu. Dychotomiczna klasyfikacja jednostek produktu, z wyróżnieniem jednostek wykonanych poprawnie (zdatnych) oraz jednostek, które przekraczają wyspecyfikowany poziom amplitudy napięcia (niezdatnych), wykonywana jest metodą bezpośredniego porównania z napięciem wzorcowym za pomocą komparatora analogowego, dla którego znamy niepewność standardową pomiaru. Do analizy tego procesu pomiarowego, realizowanego na seryjnie produkowanych wyrobach, zastosujemy podejście probabilistyczne. Według [8] w procesie pomiarowym można wyróżnić dwa etapy: obserwację i restytucję (odtworzenie menzurandu). Obserwacja y menzurandu z jest zakłócona przez składnik losowy W wynikający z niepewności prognozy komparatora

$$Y = Z - W. \quad (6)$$

Etap obserwacji opisuje funkcja rozkładu prawdopodobieństwa warunkowego $p(y|z)$, która jest rozkładem Y dla Z przyjmującego ustaloną wartość z . Gdy podstawimy $Z = z$ do modelu (6), to widoczne jest, że zmienna losowa Y różni się od W tylko stałym składnikiem z . Stąd rozkład Y , dla ustalonego Z , jest rozkładem W , który oznaczmy $p_w(\cdot)$. Mamy więc

$$p(y|z) = p_w(z - y). \quad (7)$$

Jeżeli dla scharakteryzowania niepewności prognozy komparatora przyjmujemy rozkład normalny, to rozkład prawdopodobieństwa warunkowego opisujący etap obserwacji będzie posiadał kształt przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Rozkład prawdopodobieństwa warunkowego opisujący proces obserwacji

Fig. 2. Probability density function governing the observation process

Etap restytucji to inwersja funkcji prawdopodobieństwa warunkowego (7) realizowana za pomocą twierdzenia Bayesa

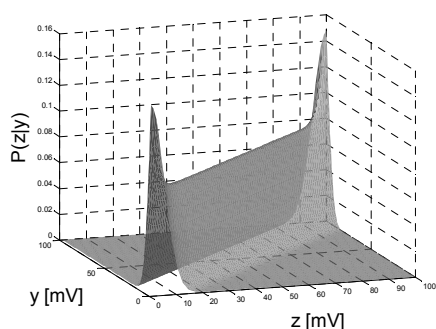
$$p(z|y) = \frac{p(y|z)p(z)}{\int_z p(y|z)p(z)dz}. \quad (8)$$

Zgodnie z paradygmatem zaproponowanym w [9], w formule (8) przyjmujemy równomierny rozkład prawdopodobieństwa $p(z)$, co prowadzi do wzoru o uproszczonej postaci

$$p(z|y) = \frac{p(y|z)}{\int_z p(y|z)p(z)dz} = \frac{p_w(z - y)}{\int_z p_w(z - y)dz}. \quad (9)$$

Należy podkreślić, że wzór (9) nie służy do realizacji tzw. Bayesowskiej metody analizy ryzyka, lecz jest jedynie narzędziem do inwersji funkcji prawdopodobieństwa warunkowego. Rozkład

prawdopodobieństwa otrzymany w wyniku inwersji rozkładu (7) przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Rozkład prawdopodobieństwa otrzymany w wyniku inwersji
Fig. 3. Probability density function as a result of probabilistic inversion

Jako wynik pomiaru z_m przyjmujemy najlepszą estymatę mierzand Z . Zgodnie z przewodnikiem GUM [2] jest to wartość oczekiwana rozkładu

$$z_m = E_z(Z|y), \quad (10)$$

gdzie $E_z(\cdot)$ jest wartością oczekiwaną względem zmiennej z . Probabilistyczny model procesu pomiarowego otrzymamy łącząc etap obserwacji z etapem restytucji. Realizuje to funkcja warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa, łącząca każdą możliwą wartość mierzand, z możliwymi wynikami pomiaru, które mogą być przypisane mierzandowi

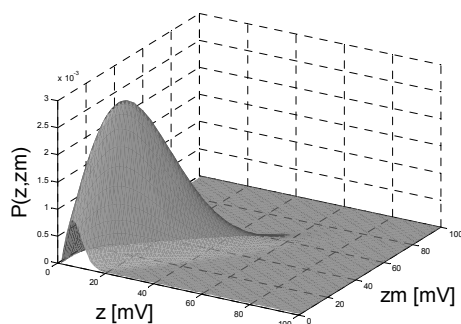
$$p(z_m|z) = \int_y \delta[z_m - E_z(Z|y)] p(y|z) dy, \quad (11)$$

gdzie: $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$ jest deltą Kronekera.

Synteza łącznego rozkładu prawdopodobieństwa mierzand, z i wartości zmierzonej, z_m wymaga złożenia rozkładu (11) oraz rozkładu charakteryzującego proces produkcyjny $p_Z(z)$. Ponieważ wymienione rozkłady są statystycznie niezależne, ich iloczyn formuje łączny rozkład prawdopodobieństwa mierzand i wyników pomiarów

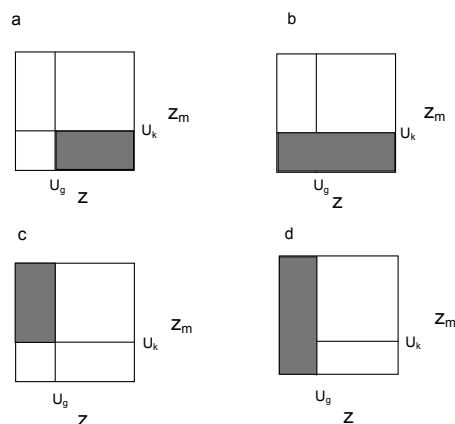
$$p(z, z_m) = p(z_m|z) p_Z(z). \quad (12)$$

Dla analizowanego przykładu łączny rozkład prawdopodobieństwa mierzand i wyników pomiaru przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Łączny rozkład prawdopodobieństwa mierzand z i wyników pomiaru z_m
Fig. 4. Joint probability density function of measurand z and measurement values z_m

Poziomy ryzyka konsumenta i producenta można obliczyć na bazie rozkładu (12) po ustaleniu odpowiednich obszarów całkowania. Zadanie to ułatwia rys. 5, na którym przedstawiono pole kwadratu wyznaczonego przez zakres zmian mierzand i wyników pomiarów (0 – 100) mV. Linia pionowa odpowiada wyspecyfikowanemu limitowi testowanego napięcia U_g . Linia pozioma odpowiada progowemu napięciu komparatora U_k . Wartości U_k i U_g , nie muszą być sobie równe, często stosuje się między nimi margines w celu zarządzania ryzykiem. Rysunek 5a przedstawia obszar całkowania służący do obliczenia prawdopodobieństwa spełnienia testu przez niezdatny wyrób. Proponowana definicja RK^* (3) wymaga również znajomości prawdopodobieństwa spełnienia testu przez dowolny wyrób, obliczonego z zastosowaniem obszaru całkowania z rys. 5b.



Rys. 5. Obszary całkowania wyznaczone przez wyspecyfikowany limit napięcia U_g oraz próg komparatora U_k , służące do obliczenia prawdopodobieństw dla następujących przypadków: a) wyrób spełnia test a jest niezdatny, b) wyrób spełnia test, c) wyrób jest zdatny, a nie spełnia testu, d) wyrób jest zdatny

Fig. 5. Specification limit U_g and comparator threshold U_k defining integration regions for probability calculation: a) for item that passes the test when, in fact, item is actually out-of-order, b) item passes the test, c) item is truly functional but fails the test, d) item is truly functional

Definicja RP^* (4) wykorzystuje prawdopodobieństwo, że zdatny wyrób nie spełni testu, obliczone z zastosowaniem obszaru całkowania z rysunku 5c, oraz prawdopodobieństwo, że wyrób jest zdatny, wyznaczone z zastosowaniem obszaru całkowania z rys. 5d.

Posiłkując się rys. 5 można łatwo sformułować robocze wzory do wyznaczania ryzyka konsumenta i producenta według znanych z literatury (RK , RP) i proponowanych (RK^* , RP^*) definicji:

$$RK = \int_{z_m \leq U_k} \int_{z > U_g} p(z, z_m) dz dz_m \times 100\%, \quad (13)$$

$$RP = \int_{z_m > U_k} \int_{z \leq U_g} p(z, z_m) dz dz_m \times 100\%, \quad (14)$$

$$RK^* = \frac{\int_{z_m \leq U_k} \int_{z > U_g} p(z, z_m) dz dz_m}{\int_{z_m \leq U_k} \int_z p(z, z_m) dz dz_m} \times 100\%, \quad (15)$$

$$RP^* = \frac{\int_{z_m > U_k} \int_{z \leq U_g} p(z, z_m) dz dz_m}{\int_{z \leq U_g} \int_{z_m} p(z, z_m) dz dz_m} \times 100\%. \quad (16)$$

W tab. 1 zestawiono przykładowe wyniki obliczeń poziomów ryzyka, wykonanych dla kilku granicznych wartości amplitudy testowanego napięcia (U_g), przy $U_k = U_g$ oraz niepewności standardowej prognozy komparatora równej $u = 2$ mV. Jak wynika z tab. 1, poziomy ryzyka obliczone z definicji (1) i (2) są zaniżone w stosunku do obliczonych z (3) i (4). Wyniki różnią się, tym bardziej, im wyższe ryzyka dotyczą.

Tab. 1. Porównanie poziomów ryzyka producenta i konsumenta obliczonych według definicji (1), (2) z poziomami ryzyka obliczonymi według definicji (3), (4)

Tab. 1. Comparison of consumer's and producer's risk calculated according to definitions (1), (2) with risks calculated according to definitions (3), (4)

$U_g = U_k$ (mV)	RK (%)	RK^* (%)	RP (%)	RP^* (%)
20	2,6760	5,2918	2,8295	5,5783
30	1,5385	1,9468	1,8474	2,3287
40	0,5745	0,6154	0,7622	0,8149
50	0,1502	0,1529	0,2170	0,2208
60	0,0287	0,0289	0,0448	0,0451

3. Przykład z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Dla zilustrowania oraz porównania właściwości tradycyjnych i proponowanych definicji ryzyka zastosujemy klasyczną definicję prawdopodobieństwa (Laplace'a), która bazuje na stosunku liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających analizowanemu zdarzeniu do liczby wszystkich możliwych przypadków. Rozważmy skrajny, ale przez to wyrazisty, przykład procesu produkcyjnego charakteryzującego się małym uzyskiem, około 50%. Dla produkcji charakteryzowanej rozkładem prawdopodobieństwa z rys. 1 taki uzysk produkcyjny dostajemy dla limitu napięcia równego 20 mV. Stosując obszar całkowania z rys. 5d obliczamy, że prawdopodobieństwo wyprodukowania wyrobu zdatnego wynosi 50,722%. W partii liczącej milion egzemplarzy 507220 wyrobów spełni specyfikację (będzie stanowiło uzysk produkcyjny), a 492780 będzie niezdatnych. W celu wykrycia i wyeliminowania wyrobów niezdatnych testujemy amplitudę napięcia stosując dychotomiczną regułę decyzyjną. Dla limitu napięcia U_g równego 20 mV i tej samej wartości prognozy komparatora U_k w pierwszym wierszu tab. 1 odczytujemy wartość $RP = 2,8295\%$, co oznacza, że z powodu niepewności pomiarów 28295 zdatnych wyrobów zostanie błędnie zakwalifikowanych jako niezdatne. Stąd $507220 - 28295 = 478925$ wyroby będą zakwalifikowane jako zdatne. Wartość $RK = 2,6760\%$ wskazuje, że z powodu niepewności pomiarów dodatkowo 26760 wyrobów niezdatnych zostanie błędnie zakwalifikowanych jako zdatne. W sumie na rynek trafi $478925 + 26760 = 505685$ wyrobów, z których $26760/505685 \approx 5,2918\%$ będzie niezdatnych. Wartość ta dokładnie odpowiada poziomowi ryzyka konsumenta wyznaczonemu zgodnie z proponowaną definicją RK^* . Stosunek liczby błędnie odrzuconych wyrobów do liczby wyrobów stanowiących uzysk produkcyjny wynosi $28295/507220 \approx 5,5784\%$, co odpowiada poziomowi ryzyka producenta wyznaczonemu za pomocą proponowanej definicji RP^* .

Przykład ten potwierdza wzajemną zgodność wyników obliczeń przedstawionych w pierwszym wierszu tab. 1.

W celu zredukowania prawdopodobieństwa wprowadzenia na rynek niezdatnych wyrobów można zawęzić przedział akceptacji poprzez zastosowanie progowego napięcia komparatora U_k mniejszego od specyfikowanego limitu U_g .

4. Zastosowania analizy ryzyka

Analiza ryzyka wynikającego z niepewności pomiarów ma między innymi zastosowanie w projektowaniu testów sprawdzających zgodność wyrobów ze specyfikacją. Umożliwia ustalenie wymaganej dokładności dla aparatury pomiarowej oraz dobór przedziału akceptacji dla testowanego atrybutu wyrobu (zarządzanie ryzykiem). Pozwala także ocenić wpływ niepewności pomiaru na bezpośrednie koszty produkcji i na koszty konsekwencji błędnych decyzji.

5. Podsumowanie

Wynikom pomiarów towarzyszy ich niepewność, która niesie ryzyko podejmowania błędnych decyzji akceptujących lub odrzucających wyrobów. Ocena tego ryzyka na podstawie znanego rozkładu prawdopodobieństwa mierzonego parametru i charakterystyki użytego systemu pomiarowego, z zastosowaniem definicji (1), (2) nie daje poprawnych wyników, ani z perspektywy rynku, ani z perspektywy produkcji. Otrzymywane wyniki wymagają dalszego przetwarzania, jak pokazano na przykładzie w punkcie 3. Nazwy stosowane tradycyjnie dla definicji (1), (2) „ryzyko konsumenta” i „ryzyko producenta” mogą wprowadzić niedoświadczonego analytika w błąd, spowodować zaniechanie dalszych obliczeń i skutkować zaniżoną oceną ryzyka. Natomiast proponowane definicje (3), (4) prowadzą wprost do prawidłowej, uwzględniającej realia praktyki produkcyjnej, oceny ryzyka konsumenta i producenta.

6. Literatura

- [1] Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM) Evaluation of measurement data - The role of measurement uncertainty in conformity assessment, JCGM 106, May 12, 2009, (draft).
- [2] Joint Committee for Guides in Metrology: JCGM 100:2008. Guide to the expression of uncertainty in measurement.
- [3] Lira I.: A Bayesian approach to the consumer's and producer's risk in measurement, Metrologia, 36, 397-402, 1999.
- [4] Dobbert M.: Understanding Measurement Risk, NCSL International Workshop and Symposium, 1-16, 2007.
- [5] Carbone P., Macii D., Petri D.: Measurement uncertainty and metrological confirmation in quality-oriented organizations, Measurement 34, 263-271, 2003.
- [6] Toczek W.: Ocena ryzyka ponoszonego przez producenta/konsumenta z powodu niepewności pomiarów, Podstawowe Problemy Metrologii, Prace Komisji Metrologii Oddziału PAN w Katowicach Seria: Konferencje nr 16, Krynica-Zdrój, 03-06 czerwca 2012, str. 26-29.
- [7] Toczek W.: Strategie testowania i diagnostyki analogowych układów elektronicznych, Politechnika Gdańska, 2009.
- [8] Cox M.G., Rossi G.B., Harris P.M., Forbes A.: A probabilistic approach to the analysis of measurement processes, Metrologia 45, 403-502, 2008.
- [9] Rossi G.B., Crenna F.: A probabilistic approach to measurement-based decisions, Measurement 39, 101-119, 2006.

otrzymano / received: 25.09.2012

przyjęto do druku / accepted: 01.11.2012

artykuł recenzowany / revised paper