

# Identification and non-integer order modelling of synchronous machines operating as generator

## Author

Szymon Racewicz

## Keywords

synchronous machine, non-integer order modelling, parameter identification, SSFR

## Abstract

This paper presents an original mathematical model of a synchronous generator using derivatives of fractional order. In contrast to classical models composed of a large number of R-L ladders, it comprises half-order impedances, which enable the accurate description of the electromagnetic induction phenomena in a wide frequency range, while minimizing the order and number of model parameters. The proposed model takes into account the skin effect in damper cage bars, the effects of eddy currents in rotor solid parts, and the saturation of the machine magnetic circuit. The half-order transfer functions used for modelling these phenomena were verified by simulation of ferromagnetic sheet impedance using the finite elements method. The analysed machine's parameters were identified on the basis of SSFR (StandStill Frequency Response) characteristics measured on a gradually magnetised synchronous machine.

## 1. Introduction

Modern power systems aim at significant diversification of electricity sources (fuel cells, solar panels, wind turbines / generators). Output energy is then processed by a large number of devices in the system (transformers, converters, etc.) so that it can be distributed to different receivers (motors, household appliances, etc.). The complexity of power grid devices is additionally affected by the presence of devices for energy collection and storage (batteries, rotating masses, etc.) that allow producers of energy from renewable energy sources to optimally manage its production and distribution.

Having accurate models of the electrical system's various components is therefore extremely valuable. This refers to models which, despite their reduced orders and small numbers of parameters, accurately describe the actual physical phenomena that occur in electrical devices. This makes predicting various interactions between various system components possible, and thus efficient engineering of modern and complex power grids is possible.

Fractional order modelling is today an approach that discovers new opportunities in many different fields of science, including electrical engineering. The fractional order derivatives theory, which enables significant improvement of mathematical models, is found in modelling batteries [4], supercapacitors, fuel cells [13], but also in models of classical electrical machines, such as induction machines [3], synchronous machines [12] and transformers. To build an accurate model of a synchronous machine, it is necessary to take into account many of the phenomena associated with increasing frequency, such as, for instance, the skin effect

occurring in some conductive parts of the machine. This paper presents an original mathematical model of a synchronous generator using the theory of derivatives of fractional order. This approach allows for the development of a reduced-order model, accurate over a wide frequency range, and also enables describing non-linear phenomena, such as magnetic saturation, for instance. This type of model is extremely useful in the engineering and simulation of operations of new machines, as well as electrical grid systems, in which they are integrated.

## 2. Introduction to fractional order modelling

Fractional order modelling consists in the description of physical phenomena occurring in a given object, that employs partial derivatives of fractional orders. Differential-integral calculus of fractional order fundamentals date back to the beginning of the seventeenth century. Although the differential-integral calculus of fractional order was not new, it experienced its true revival in the second half of the twentieth century, when the development of computers and information technology enabled, along with formal mathematical notation, the use of FOD (Fractional Order Differential) for modelling and analysis of actual systems. According to the Grünwald-Letnikov definition [5], the  $\alpha$ -order derivative ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) is expressed by the following formula:

$$D^{(\alpha)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k \cdot h) \right] \quad (1)$$

where:  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k+1)}$  and  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$

is Gamma function.

In the particular case when the function  $f(t)$  assumes the value of zero for  $t < 0$ , the sum from  $k = 0$  to  $k = \infty$  can be reduced to the sum from  $k = 0$  to  $k = m$ . So it can be written:

$$D^{(\alpha)} f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \left[ \sum_{k=0}^m (-1)^k \cdot \binom{\alpha}{k} \cdot f(t-k \cdot h) \right] \quad (2)$$

It should be noted that in order to calculate a derivative of fractional order it is necessary to take into account all values the function has assumed in the past. Due to this property the fractional order transfer functions allow describing physical phenomena with a minimum number of parameters.

In the frequency domain the following transfer functions are used for mathematical description of a physical object:

$$F_{\text{implicit}}^{1/2} = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

$$F_{\text{explicit}}^{1/2} = \frac{1}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

where:  $\omega_0$  is cut off pulsation of the object.

Fig. 1 presents the Bode diagram of transfer functions of half-order (implicit and explicit type), first and second.

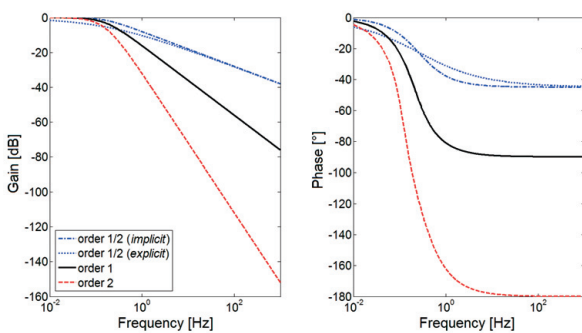


Fig. 1. Comparison of responses in the frequency domain of transfer functions of half-order, first and second

In the case of first order transfer function, the frequency response gain decreases by 20 dB per decade, and the phase tends to  $-90^\circ$ . In the Bode diagram for second order transfer function the gain decreases by 40 dB per decade, and the phase tends to  $-180^\circ$ . For half-order transfer function (of both implicit and explicit types) the frequency response gain decreases by 10 dB per decade, while the phase tends to  $-45^\circ$ .

### 3. Half-order model of saturated ferromagnetic sheet

The ferromagnetic sheet shown in the figure below is characterised by magnetic permeability  $\mu$ , electrical conductivity  $\sigma$  and resistivity  $\rho$ . It is wound with a winding of  $n$  turns (fig. 2).

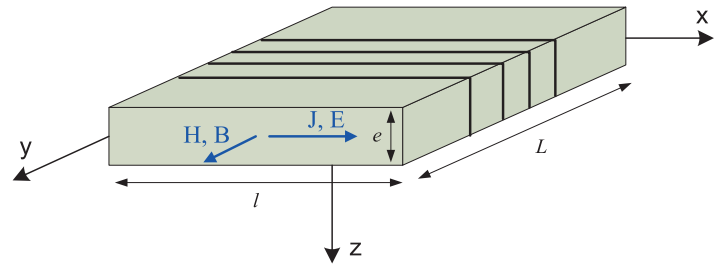


Fig. 2. Wound ferromagnetic sheet

Starting with equations of magnetic field diffusion  $H$  and boundary conditions, the classical analytical impedance of ferromagnetic sheet is given by formula (5) [1]:

$$\bar{Z}_{\text{analytical}} = j\omega \cdot L_0 \cdot \frac{\tanh(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \quad (5)$$

where:  $L_0$  is the sheet inductance at zero frequency.

$$L_0 = \frac{\mu \cdot n^2 \cdot e \cdot l}{L} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}^2 = j\omega \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \mu \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad (6)$$

Expansion of the hyperbolic tangent in formula (5), into a series produces an electrical circuit with an infinite number of (R-L) or (R-C) ladders [1]. In practice, this number is selected finite, and its upper limit is dependent on the desired accuracy of approximation [6]. However, by adding new ladders with new parameters, the physical meaning of given peripheral data is lost. In addition, in this way the model's order, and thus the simulation time, significantly increase.

The proposed approximation consists in the extension into the Taylor series of the hyperbolic tangent from (5), and in the extension's limitation to the second order (7). The  $\cosh(x)$  function's extension obtained this way is at the same time an extension into a second order series of formula  $\sqrt{1+x^2}$ .

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{x}{1 + \frac{x^2}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (7)$$

By inserting the resulting formula (7) to impedance expression (5) the following is obtained:

$$\bar{Z}_{\text{sheet}}^{1/2} = \frac{L_0 \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (8)$$

where:  $L_0$  is given by formula (6), and  $\omega_0$  is the cut-off pulsation expressed by (9).

$$\omega_0 = \frac{1}{\frac{1}{\rho} \cdot \mu \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2}$$

(9) element simulations (fig. 4), parameters  $L_0$  and  $\omega_0$  can be calculated as a function of magnetizing current  $i$  (fig. 5).

In this way half-order transfer function is derived from the impedance, which varies with the square root of frequency. Fig. 3 presents a comparison of two impedance models: analytical model (5) and half-order model (8).

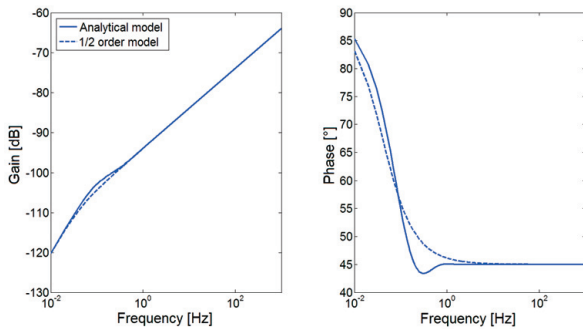


Fig. 3. Comparison of linear analytical model and linear fractional order model of ferromagnetic sheet impedance

It may be noted that the half-order model is very close to the analytical model. The gains and phases in the two models tend to the same values. The differences observed for medium frequencies result from the applied hyperbolic tangent approximation. However, the most important fact is that physical phenomena of diffusive nature, conventionally modelled by models with many passive elements, can be described with similar accuracy by one transfer function of fractional order with two parameters. This significantly reduces the number of parameters of the entire equivalent circuit compared to classical models of integer orders.

Considering the frequency model of the ferromagnetic sheet that takes into account its magnetization condition, it is proposed to maintain the existing structure of the half-order model described by formula (8), but with parameters  $L_0$  and  $\omega_0$ , which vary with magnetic saturation (10):

$$\bar{Z}_{sheet}^{1/2}(\omega, i) = \frac{L_0(i) \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0(i)}}} \quad (10)$$

In order to identify parameters of the proposed half-order model, a model of the present ferromagnetic sheet was built using the finite elements method. Many simulations of its impedance were conducted for different magnetizing currents in the winding. The calculations were made in the Flux3D® programme.

In order to estimate the variability of parameters  $L_0(i)$  and  $\omega_0(i)$  of non-linear half-order model (10) its asymptotic behaviour was examined for low and high frequencies [8]. Then, owing to finite

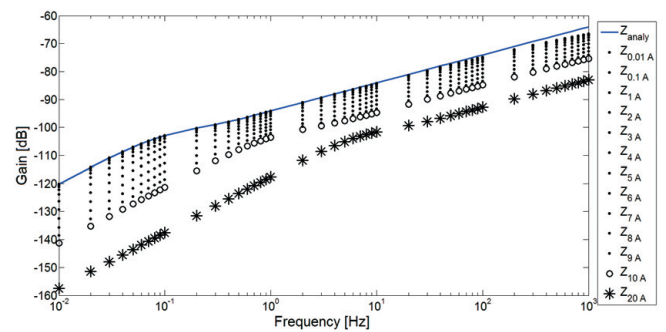


Fig. 4. Ferromagnetic sheet impedance for different saturation levels

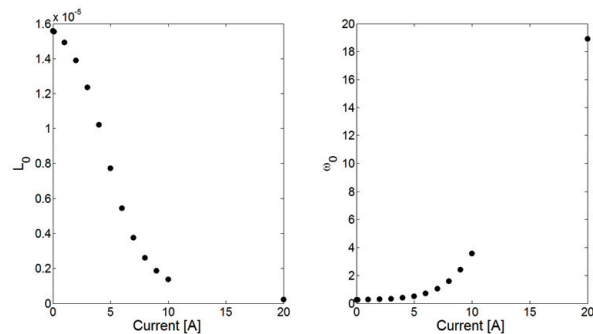


Fig. 5. Parameters  $L_0(i)$  and  $\omega_0(i)$  calculated on the basis of simulation by the finite elements method

Fig. 6 presents a comparison of the non-linear impedance model with results of the simulation by the finite elements method.

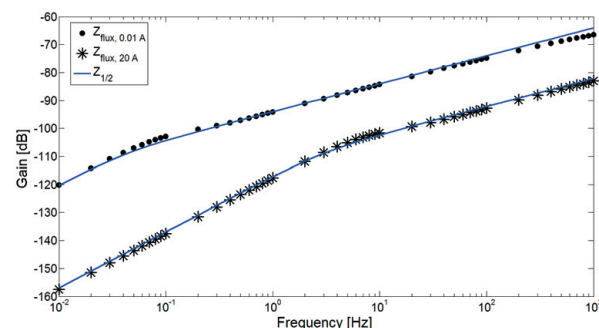


Fig. 6. Comparison of non-linear impedance model with results of simulation by the finite elements method

As seen in fig. 6, the proposed small-signal half-order model is suitable for describing the impedance at saturation, over a wide frequency range. It can therefore be included in a synchronous

machine's equivalent circuit in order to improve its frequency model, and also to take into account the phenomenon of saturation of its magnetic circuits [10].

#### 4. Identification of non-linear non-integer order model of synchronous machine

Fig. 7 presents a synchronous machine's equivalent circuit of fractional-order using half-order impedances [7].

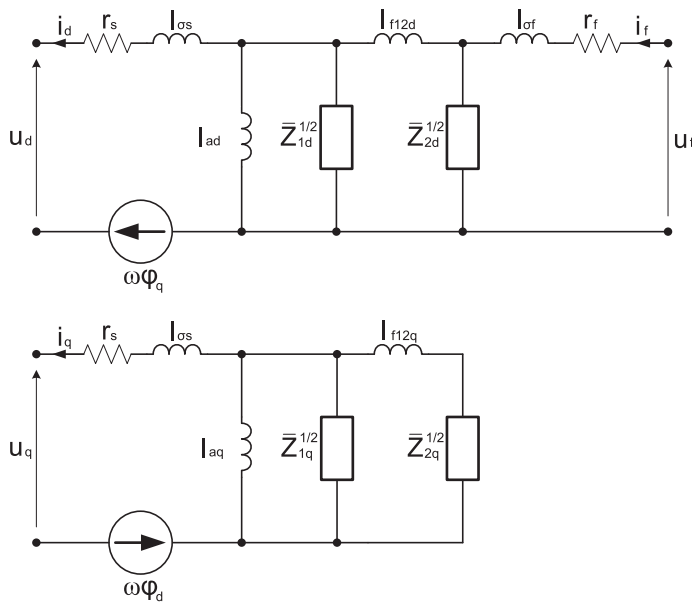


Fig. 7. Non-integer order equivalent circuit of synchronous generator (axis *d* and *q*)

“Inductive” type half-order impedances (11) and (12) have been integrated in axis *d* and *q* parallel to the inductances  $l_{ad}$  and  $l_{aq}$ , representing the magnetic energy stored in the air gap, assumed as constant.

$$\bar{Z}_{1d}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1d} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1d}}}} \quad (11)$$

$$\bar{Z}_{1q}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1q} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1q}}}} \quad (12)$$

Since currents are induced also in damper bars, “resistive” type half-order impedances given by relations (13) and (14) substitute in axis *d* and *q* series of R-L ladders [7].

$$\bar{Z}_{2d}^{1/2}(\omega) = R_{2d} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2d}}} \quad (13)$$

$$\bar{Z}_{2q}^{1/2}(\omega) = R_{2q} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2q}}} \quad (14)$$

It is assumed that in the considered frequency range the currents induced in the stator windings (modelled by resistance  $r_s$  and inductance  $l_{\sigma s}$ ) and in the excitation windings (modelled by resistance  $r_f$  and inductance  $l_{\sigma f}$ ) are negligibly small. Also mutual leakage inductances ( $l_{f12d}$  and  $l_{f12q}$ ), connecting the stator winding with the damping cage in axis *d* and *q*, are not influenced by induced currents [11].

In order to determine the variability of synchronous machine model parameters under the influence of saturation, the SSFR (StandStill Frequency Response) measurement procedure [2, 9] has been modified. To enable changing the machine's magnetic operating point (degree of saturation), stabilized voltage source (fig. 8) has been connected to the excitation winding.

The test machine was a 3 kVA synchronous machine with two pairs of salient poles. It was assumed that the magnetic saturation phenomenon is noticeable especially in longitudinal axis

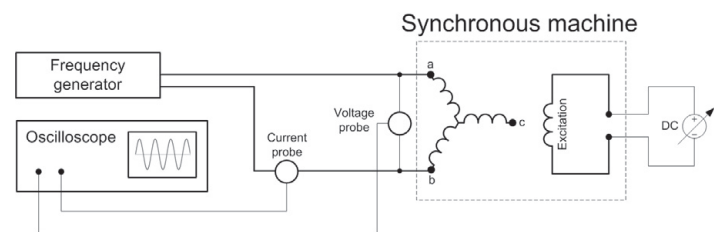


Fig. 8. Diagram of measurement system for the modified SSFR test

*d*, because in a machine with salient poles the air gap in transverse axis *q* is significantly larger. The machine magnetizing current was changed over the range of 0 to 9, A, in 1 A intervals. Operational impedance  $Z_d$ , measured over the frequency range of 0.1 Hz to 1 kHz, in 0.2 Hz intervals, was recorded for each value of the magnetizing current. The resulting operational inductance characteristics  $L_{dr}$  dependent on the machine's saturation, are shown in fig. 9.

Fig. 10 shows the characteristics of parameters  $L_{1dr}$ ,  $\omega_{1d}$  and  $l_{\sigma sr}$  as a function of the magnetizing current, identified on the basis of the SSFR measurements.

Fig. 11 presents a comparison of the half-order non-linear model of a synchronous machine with the results of measurements for various machine saturations. It should be noted that the model remains compliant for the tested saturations and over a wide frequency range. The observed errors, especially in the case of the phase for low frequencies and the largest excitation current, are related to the lack of sufficient measurement precision during heating of the machine, as well as to the identification method used, which takes into account only modules of operational functions.

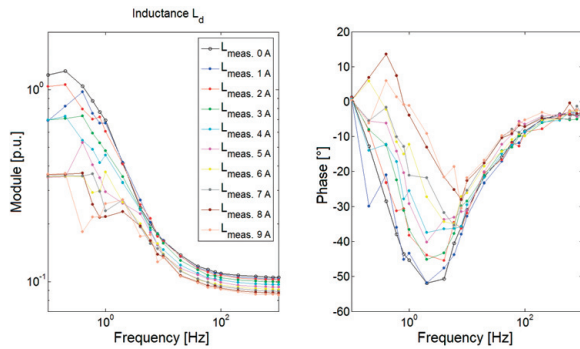


Fig. 9. Operational inductance  $L_d$  of synchronous machine for various saturation levels

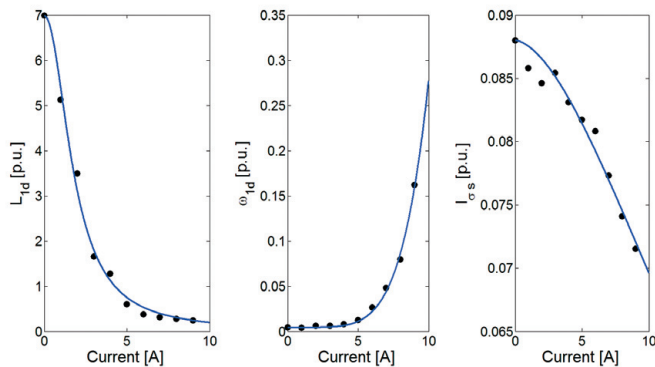


Fig. 10. Variability of parameters  $L_{1d}$ ,  $\omega_{1d}$  and  $l_{os}$  as a function of the machine's magnetic saturation

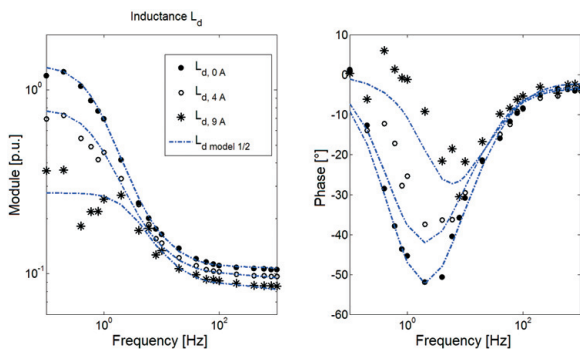


Fig. 11. Comparison of saturated synchronous machine's operational inductance  $L_d$  with SSFR measurements

## 5. Conclusion

This paper presents an original and compact nonlinear frequency model of a synchronous machine, based on the fractional order derivatives theory. In contrast to classical models composed of a large number of R-L ladders, it comprises half-order impedances, which enable accurate description of the electromagnetic induction phenomena, while minimizing the order and number of model parameters.

In order to verify the model's correctness, a test bench was set up for SSFR tests of a gradually magnetised synchronous machine. The measurement results enabled identification of the machine's equivalent circuit parameters for various levels of saturation. The similarity of the machine parameters' variability with the results obtained for the impedance of a saturated ferromagnetic sheet allowed accepting the proposed approach.

## REFERENCES

1. Alger P. L., Induction Machines, Gordon and Breach, New York, 1970.
2. IEEE Std, Standard procedure for obtaining synchronous machine parameters by StandStill Frequency Response testing, IEEE Std 115 A, 1995.
3. Jalloul A. et al., Fractional Modeling of Rotor Skin Effect in Induction Machines, Proc. 2010 The 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA), Badajoz, Spain, 18–20 October 2010.
4. Kuhn E., Forgez C., Friedrich G., Modelling diffusive phenomena using non-integer derivatives: application Ni-mH batteries, Eur. Phys. J. Appl. Phys., Vol. 25, Issue 3, March 2004, pp. 183–190.
5. Podlubny I., Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, London, Academic Press, 1999.
6. Racewicz S. et al., Identyfikacja parametrów maszyny synchronicznej z magnesami trwałymi metodą częstotliwościową, *Przegląd Elektrotechniczny*, Issue 11/2006, pp. 68–71.
7. Racewicz S., Modélisation d'ordre non entier des machines synchrones. Modèle fréquentiel non linéaire, identification des paramètres, calcul de la réponse temporelle, Éditions Universitaires Européennes, March 2011.
8. Racewicz S. et al., Half-order modelling of ferromagnetic sheet, ISIE 2011, 27–30 June 2011, Gdańsk, Poland.
9. Racewicz S. et al., Half-order modelling of turboalternators – An adapted method of parameter identification, ICEM 2006, Chania, Crete, September 2006.
10. Racewicz S. et al., Non linear half-order modeling of synchronous machine, IEMDC 2009, Miami, Florida, 3–6 May 2009, pp. 778–783.
11. Riu D., Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi, Thèse de doctorat de l'INPG, Décembre 2001.
12. Riu D., Retière N., Ivanes M., Induced currents modeling by half-order systems application to hydro- and turbo-alternators, *IEEE Trans. On Energy Conversion*, Vol. 18, Issue 1, March 2003, pp. 94–99.
13. Usman Ifthikar M. i in., Dynamic modelling of proton exchange membrane fuel cell using noninteger derivatives, *Journal of Power Sources*, Vol. 160, Issue 2, October 2006, pp. 1170–1182

---

## Publication of post-contest

This article was awarded first prize by the Chairman of the ENERGA SA Board in the competition for the best doctoral theses defended in the academic year 2010/2011.

---

### Szymon Racewicz

Gdańsk University of Technology

e-mail: [s.racewicz@ely.pg.gda.pl](mailto:s.racewicz@ely.pg.gda.pl)

He currently works as an assistant professor in the Department of Power Electronics and Electrical Machines at the Faculty of Electrical and Control Engineering of Gdańsk University of Technology. His research interests focus on mathematical modelling of electrical machines using the fractional order derivatives theory.

This is a supporting translation of the original text published in this issue of "Acta Energetica" on pages 75–80. When referring to the article please refer to the original text.

PL

## Identyfikacja i modelowanie rzędu niecałkowitego maszyn synchronicznych pracujących jako generator

### Autor

Szymon Racewicz

### Słowa kluczowe

maszyna synchroniczna, modelowanie rzędu niecałkowitego, identyfikacja parametrów, SSFR

### Streszczenie

W artykule przedstawiono oryginalny model matematyczny generatora synchronicznego wykorzystujący pochodne rzędów niecałkowitych. W przeciwieństwie do modeli klasycznych, zbudowanych z dużej liczby drabinek R-L, zawiera on impedancje rzędu połowkowego, które pozwalają w dokładny sposób opisać zjawiska indukcji elektromagnetycznej w szerokim zakresie częstotliwości, minimalizując jednocześnie rząd i liczbę parametrów modelu. Zaproponowany model uwzględnia efekt naskórkowości w prętach klatki tłumiącej, efekty działania prądów wirowych w częściach masywnych wirnika oraz nasycenie obwodu magnetycznego maszyny. Transmitancje rzędu połowkowego, mające na celu modelowanie powyższych zjawisk, zostały zweryfikowane na podstawie symulacji metodą elementów skończonych impedancji uzwojonej blachy ferromagnetycznej. Identyfikacja parametrów badanej maszyny została przeprowadzona na podstawie pomierzonych charakterystyk SSFR (ang. *StandStill Frequency Response*) wykonanych na stopniowo magnesowanej maszynie synchronicznej.

### 1. Wstęp

We współczesnych sieciach elektroenergetycznych dąży się do znacznego zdwersyfikowania źródeł energii elektrycznej (ogniwa paliwowe, baterie słoneczne, wiatraki/generatory). Wyprodukowana energia jest następnie przetwarzana przez dużą liczbę urządzeń systemu (transformatory, przekształtniki itp.), aby można było ją dystrybuować do różnych odbiorców (silniki, urządzenia AGD itp.). Na złożoność sieci elektroenergetycznej wpływa dodatkowo obecność urządzeń do gromadzenia i magazynowania energii (akumulatory, masy wirujące itp.), które pozwalają producentom energii ze źródeł odnawialnych zarządzać jej produkcją i dystrybucją w sposób optymalny.

Dysponowanie dokładnymi modelami różnych części składowych systemu elektrycznego jest zatem niezwykle cenne. Chodzi tu o modele, które mimo zredukowanego rzędu i małej liczby parametrów dokładnie opisują rzeczywiste zjawiska fizyczne zachodzące w urządzeniach elektrycznych. Dzięki temu możliwe jest przewidzenie różnorodnych interakcji między urządzeniami składowymi systemu, a co za tym idzie, możliwe jest efektywne projektowanie nowoczesnych, złożonych sieci elektroenergetycznych.

Modelowanie rzędu niecałkowitego jest dziś zagadnieniem odkrywającym nowe możliwości w wielu różnych dziedzinach nauki, w tym również w elektrotechnice. Teorię pochodnych niecałkowitych rzędów, pozwalającą na znaczne ulepszenie modeli matematycznych, spotyka się w modelowaniu baterii [4], superkondensatorów, ogniwa paliwowych [13], ale także w modelach klasycznych maszyn elektrycznych, takich jak maszyny indukcyjne [3], synchroniczne [12] czy transformatory.

Aby zbudować dokładny model maszyny synchronicznej, konieczne jest uwzględnienie wielu zjawisk związanych ze wzrostem częstotliwości, takich jak np. efekt

naskórkowości, występujący w pewnych częściach przewodzących maszyny. W niniejszym artykule został przedstawiony oryginalny model matematyczny generatora synchronicznego, wykorzystujący teorię pochodnych rzędów niecałkowitych. Podejście to pozwala na budowę modelu o zredukowanym rzędzie, dokładnego w szerokim zakresie częstotliwości, a ponadto umożliwiającemu opis zjawisk nieliniowych, takich jak np. nasycenie magnetyczne. Taki typ modeli jest niezwykle przydatny w procesie projektowania i symulacji działania nowych maszyn, jak również systemów sieci elektrycznych, w których są one zintegrowane.

### 2. Wprowadzenie do modelowania rzędu niecałkowitego

Modelowanie rzędu niecałkowitego polega na opisie zjawisk fizycznych występujących w danym obiekcie za pomocą pochodnych cząstkowych rzędów niecałkowitych. Podstawy rachunku różniczkowo-całkowego rzędu niecałkowitego datuje się na początek XVII wieku. Mimo że rachunek różniczkowo-całkowy rzędu niecałkowitego nie był nowy, prawdziwe odrodzenie przeżył w drugiej połowie XX wieku, kiedy to rozwój komputerów i technik informatycznych pozwoliły w połączeniu z formalnym zapisem matematycznym, na zastosowanie FOD (ang. *Fractional Order Differential*) do modelowania i analizy układów rzeczywistych.

Stosując definicję Grünwalda-Letnikova [5] pochodną rzędu  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) zapisuje się następującym wzorem:

$$D^{(\alpha)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k \cdot h) \right] \quad (1)$$

$$\text{gdzie: } \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \cdot \Gamma(\alpha - k + 1)}$$

$$\text{i } \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$$

jest funkcją Gamma.

W szczególnym przypadku, gdy funkcja  $f(t)$  przyjmuje wartości zerowe dla  $t < 0$ , suma od  $k = 0$  do  $k = \infty$  może być zredukowana do sumy od  $k = 0$  do  $k = m$ . Można więc napisać:

$$D^{(\alpha)} f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \left[ \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k \cdot h) \right] \quad (2)$$

Należy zauważyć, że w celu obliczenia pochodnej rzędu niecałkowitego konieczne jest uwzględnienie wszystkich dotychczasowych wartości danej funkcji z przeszłości. To właśnie dzięki tej własności transmitancje rzędów ułamkowych pozwalają na opis zjawisk fizycznych przy minimalnej liczbie parametrów.

W dziedzinie częstotliwości do opisu matematycznego obiektów fizycznych stosuje się następujące transmitancje:

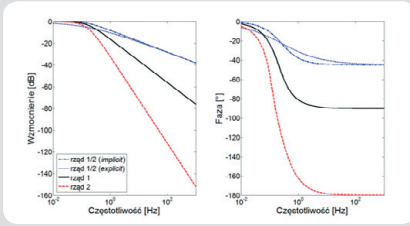
$$F_{\text{implicit}}^{1/2} = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

$$F_{\text{explicit}}^{1/2} = \frac{1}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

gdzie:  $\omega_0$  jest pulsacją odcięcia obiektu.

Rys. 1 prezentuje diagram Bodego transmitancji rzędu połowkowego (typu *implicit* i *explicit*), pierwszego oraz drugiego.

W przypadku transmitancji rzędu pierwszego wzmocnienie odpowiadzi częstotliwościowej opada o 20 dB na dekadę, a faza dąży do  $-90^\circ$ . Na diagramie Bodego dla

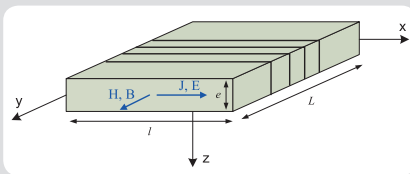


Rys. 1. Porównanie odpowiedzi w dziedzinie częstotliwości transmitancji rzędu połówkowego, pierwszego i drugiego

transmitancji rzędu drugiego wzmocnienie opada o 40 dB na dekadę, a faza dąży do  $-180^\circ$ . Natomiast dla transmitancji rzędu połówkowego (zarówno typu *implicit* jak i *explicit*) wzmocnienie odpowiedzi częstotliwościowej opada o 10 dB na dekadę, podczas gdy faza dąży do  $-45^\circ$ .

### 3. Model rzędu połówkowego blachy ferromagnetycznej w stanie nasycenia

Blacha ferromagnetyczna przedstawiona poniżej na rysunku charakteryzuje się przenikalnością magnetyczną  $\mu$ , przewodnością elektryczną  $\sigma$  oraz rezystywnością  $\rho$ . Jest ona owinięta uzwojeniem o  $n$  zwojach (rys. 2).



Rys. 2. Uzwojona blacha ferromagnetyczna

Wychodząc od równań dyfuzji pola magnetycznego  $H$  i warunków brzegowych, klasyczna impedancja analityczna blachy ferromagnetycznej wyraża się wzorem [1]:

$$\bar{Z}_{analytical} = j\omega \cdot L_0 \cdot \frac{\tanh(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \quad (5)$$

gdzie:  $L_0$  jest indukcyjnością blachy dla zerowej częstotliwości.

$$L_0 = \frac{\mu \cdot n^2 \cdot e \cdot l}{L} \quad \text{i} \quad \bar{\alpha}^2 = j\omega \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \mu \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad (6)$$

Rozwijając w szereg tangens hiperboliczny we wzorze (5), otrzymuje się obwód elektryczny rzędu całkowitego o nieskończonej liczbie drabinek (R-L) lub (R-C) [1]. W praktyce liczba ta jest wybierana jako skończona, a jej górna granica uzależniona jest od oczekiwanej dokładności przybliżenia [6]. Jednak dodając nowe drabinki z nowymi parametrami, tracą one znaczenie fizyczne danych parametrów obwodowych. Ponadto znacznie zwiększa się w ten sposób rząd modelu, a tym samym czas symulacji. Zaproponowana aproksymacja polega na rozwinięciu w szereg Taylora tangensa hiperbolicznego z równania (5) oraz

na ograniczeniu tego rozwinięcia do drugiego rzędu (7). Otrzymane przybliżenie funkcji  $\cosh(x)$  jest jednocześnie rozwinięciem w szereg drugiego rzędu wyrażenia  $\sqrt{1+x^2}$ .

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \approx \frac{x}{1 + \frac{x^2}{2}} \approx \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (7)$$

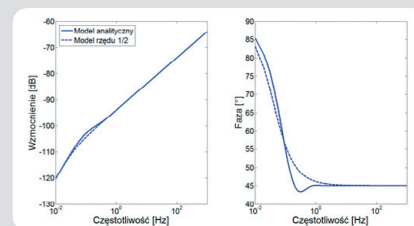
Wstawiając otrzymany wzór (7) do wyrażenia na impedancję (5), otrzymuje się:

$$\bar{Z}_{sheet}^{1/2} = \frac{L_0 \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (8)$$

gdzie:  $L_0$  jest dane wzorem (6), a  $\omega_0$  jest pulsacją odcięcia wyrażoną przez (9).

$$\omega_0 = \frac{1}{\rho \cdot \mu \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2} \quad (9)$$

W ten sposób wyprowadzona została transmitancja rzędu połówkowego impedancji, która zmienia się wraz z pierwiastkiem kwadratowym częstotliwości.



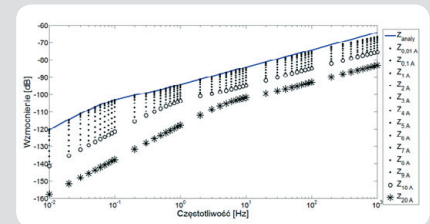
Rys. 3. Porównanie liniowego modelu analitycznego i liniowego modelu rzędu ułamkowego impedancji blachy ferromagnetycznej

Rys. 3 przedstawia porównanie dwóch modeli impedancji: modelu analitycznego (5) oraz modelu rzędu połówkowego (8). Można zauważyć, że model rzędu połówkowego jest bardzo bliski modelowi analitycznemu. Wzmocnienia i fazy obydwu modeli dążą do tych samych wartości. Różnice obserwowane dla średnich częstotliwości są wynikiem zastosowanego przybliżenia tangensa hiperbolicznego. Jednak najistotniejszym faktem jest to, że zjawiska fizyczne o charakterze dyfuzyjnym, modelowane klasycznie poprzez zastosowanie w modelu wielu elementów pasywnych, mogą być opisane jedną transmitancją rzędu niecałkowitego o dwóch parametrach, zachowując podobną dokładność. To wpływa na znaczne obniżenie liczby parametrów całego schematu zastępczego w stosunku do modeli klasycznych rzędów całkowitych.

Rozważając model częstotliwościowy blachy ferromagnetycznej biorący pod uwagę jej stan namagnesowania, proponuje się zachowanie dotychczasowej struktury modelu rzędu połówkowego opisanego wzorem (8), ale o parametrach  $L_0$  i  $\omega_0$ , które zmieniają się wraz z nasyceniem magnetycznym (10):

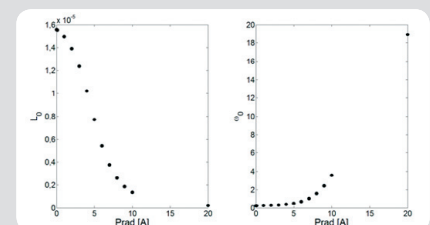
$$\bar{Z}_{sheet}^{1/2}(\omega, i) = \frac{L_0(i) \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0(i)}}} \quad (10)$$

W celu zidentyfikowania parametrów zaproponowanego modelu rzędu połówkowego zbudowany został model rozpatrywanej blachy ferromagnetycznej z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Przeprowadzono wiele symulacji jej impedancji dla różnych poziomów prądu magnesującego płynącego w uzwojeniu. Obliczenia wykonane zostały w programie Flux3D<sup>®</sup>.



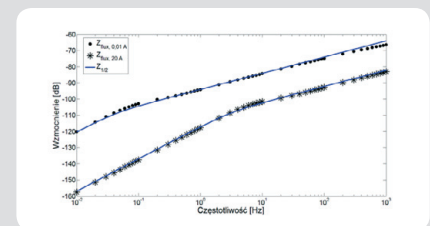
Rys. 4. Impedancja blachy ferromagnetycznej dla różnych poziomów nasycenia

W celu oszacowania zmienności parametrów  $L_0(i)$  i  $\omega_0(i)$  nieliniowego modelu rzędu połówkowego (10) zbadano jego zachowanie asymptotyczne dla niskich i wysokich częstotliwości [8]. Następnie, dzięki symulacjom metodą elementów skończonych (rys. 4), można obliczyć wartości parametrów  $L_0$  i  $\omega_0$  w funkcji prądu magnesującego  $i$  (rys. 5).



Rys. 5. Parametry  $L_0(i)$  i  $\omega_0(i)$  obliczone na podstawie symulacji metodą elementów skończonych

Rys. 6 przedstawia porównanie nieliniowego modelu impedancji z wynikami symulacji metodą elementów skończonych. Jak widać na rys. 6, zaproponowany małosygnałowy model rzędu połówkowego nadaje się do opisu impedancji w stanie nasycenia,

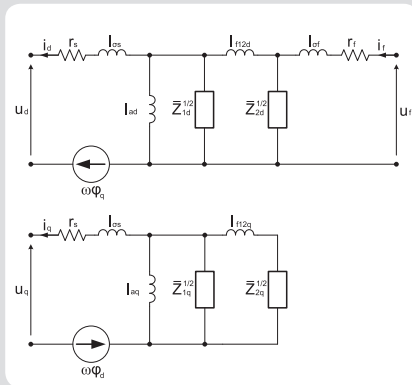


Rys. 6. Porównanie nieliniowego modelu impedancji z wynikami symulacji metodą elementów skończonych



w szerokim zakresie częstotliwości. Może on zatem zostać włączony do schematów zastępczych maszyny synchronicznej w celu ulepszenia jej modelu częstotliwościowego oraz dodatkowo uwzględnienia zjawiska nasycenia jej obwodów magnetycznych [10].

**4. Identyfikacja nieliniowego modelu rzędu niecałkowitego maszyny synchronicznej**  
Rys. 7 przedstawia schemat zastępczy rzędu niecałkowitego maszyny synchronicznej wykorzystujący impedancje rzędu połowkowego [7].



Rys. 7. Schemat zastępczy rzędu połowkowego generatora synchronicznego (os d i q)

Impedancje rzędu połowkowego typu „indukcyjnego” (11) i (12) zostały zintegrowane w osi d i q równoległe do indukcyjności \$L\_{ad}\$ i \$L\_{aq}\$, reprezentujących energię magnetyczną zgromadzoną w szczelinie powietrznej, przyjętych jako stałe.

$$\bar{Z}_{1d}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1d} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1d}}}} \quad (11)$$

$$\bar{Z}_{1q}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1q} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1q}}}} \quad (12)$$

Ponieważ prądy indukują się również w prętach klatki tłumiącej impedancje rzędu połowkowego typu „rezystancyjnego”, dane są zależnościami (13) i (14) oraz zastępują w osi d i q szeregi drabinek R-L [7].

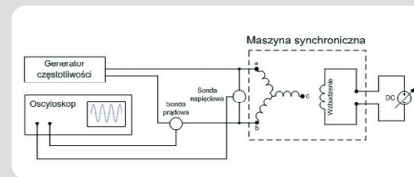
$$\bar{Z}_{2d}^{1/2}(\omega) = R_{2d} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2d}}} \quad (13)$$

$$\bar{Z}_{2q}^{1/2}(\omega) = R_{2q} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2q}}} \quad (14)$$

Przyjmuje się, że w zakresie rozważanych częstotliwości prądy indukujące się w uzwojeniach stojana (modelowanego rezystancją \$r\_s\$ i indukcyjnością \$L\_{\sigma s}\$) oraz w uzwojeniach wzbudzenia (modelowanego rezystancją \$r\_f\$ i indukcyjnością \$L\_{\sigma f}\$) mają pomijalnie małą

wartość. Również indukcyjności wzajemne rozproszenia (\$L\_{f12d}\$ i \$L\_{f12q}\$), łączące uzwojenia stojana z klatką tłumiącą w osi d i q, nie podlegają wpływowi indukowanych prądów [11].

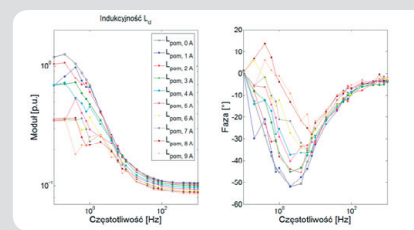
W celu wyznaczenia zmienności parametrów modelu maszyny synchronicznej pod wpływem nasycenia procedura pomiarowa SSFR (ang. *StandStill Frequency Response*) [2, 9] została zmodyfikowana. Aby móc zmieniać magnetyczny punkt pracy maszyny (stopień nasycenia), do uzwojeń wzbudzenia zostało podłączone stabilizowane źródło napięciowe (rys. 8).



Rys. 8. Schemat układu pomiarowego zmodyfikowanej metody SSFR

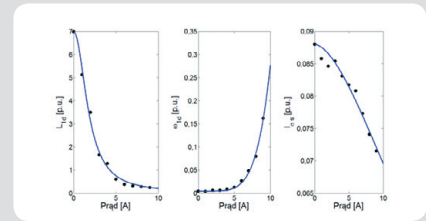
Badaną maszyną była maszyna synchroniczna o dwóch parach biegunów wydajnych i mocy 3 kVA. Założono, że zjawisko nasycenia magnetycznego jest zauważalne głównie w osi podłużnej d, gdyż w maszynach z biegunami wydajnymi szczelina powietrzna w osi poprzecznej q jest znacząco większa. Prąd magnesujący maszynę zmieniany był co 1 A w zakresie od 0 do 9 A. Impedancja operatorowa \$Z\_{d1}\$, mierzona w zakresie częstotliwości od 0,1 Hz do 1 kHz, co 0,2 Hz rejestrowana była dla każdej wartości prądu magnesującego. Wynikowe charakterystyki indukcyjności operatorowej \$L\_{d1}\$, uzależnione od stanu nasycenia badanej maszyny, pokazane są na rys. 9.

Na rys. 10 pokazane są charakterystyki parametrów \$L\_{1d}\$, \$\omega\_{1d}\$ i \$l\_{\sigma s}\$, w funkcji prądu magnesującego, zidentyfikowanych na podstawie pomiarów SSFR.

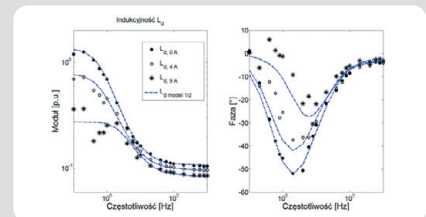


Rys. 9. Indukcyjność operatorowa \$L\_{d1}\$ maszyny synchronicznej dla różnych poziomów nasycenia

Rys. 11 prezentuje porównanie nieliniowego modelu rzędu połowkowego maszyny synchronicznej z wynikami pomiarów częstotliwościowych dla różnych stanów nasycenia maszyny. Należy zauważyć, że model pozostaje zgodny dla badanych stanów nasycenia oraz w szerokim zakresie częstotliwości. Obserwowane błędy, zwłaszcza w przypadku fazy dla niskich



Rys. 10. Zmienność parametrów \$L\_{1d}\$, \$\omega\_{1d}\$ i \$l\_{\sigma s}\$ w funkcji stanu nasycenia magnetycznego maszyny



Rys. 11. Porównanie charakterystyk indukcyjności operatorowej \$L\_{d1}\$ maszyny synchronicznej z wynikami pomiarów częstotliwościowych SSFR w warunkach nasycenia

częstotliwości i najwyższego prądu wzbudzenia, wiążą się z brakiem dostatecznej precyzji pomiarów podczas nagrzewania się maszyny, jak również użyte metody identyfikacji, która uwzględnia jedynie moduły wielkości operatorowych.

**5. Podsumowanie**

W artykule zaprezentowany został oryginalny i kompaktowy nieliniowy model częstotliwościowy maszyny synchronicznej, bazujący na teorii pochodnych rzędów niecałkowitych. W przeciwieństwie do modeli klasycznych, zbudowanych z dużej liczby drabinek R-L, zawiera on impedancje rzędu połowkowego, które pozwalają w dokładny sposób opisać zjawiska indukcji elektromagnetycznej, minimalizując jednocześnie rząd i liczbę parametrów modelu.

W celu sprawdzenia poprawności modelu zbudowane zostało stanowisko pomiarowe do badań SSFR stopniowo magnesowanej maszyny synchronicznej. Wyniki pomiarowe pozwoliły na identyfikację parametrów schematu zastępczego maszyny dla różnych warunków nasycenia. Podobieństwo zmienności parametrów maszyny do wyników otrzymanych dla impedancji nasycanej blachy ferromagnetycznej pozwoliło na zaakceptowanie proponowanego podejścia.

---

**Bibliografia**

1. Alger P. L., Induction Machines, Gordon and Breach, New York, 1970.
2. IEEE Std, Standard procedure for obtaining synchronous machine parameters by StandStill Frequency Response testing, IEEE Std 115 A, 1995.
3. Jalloul A. i in., Fractional Modeling of Rotor Skin Effect in Induction Machines, Proc. 2010 The 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA), Badajoz, Spain, 18–20 October 2010.
4. Kuhn E., Forgez C., Friedrich G., Modelling diffusive phenomena using non-integer derivatives: application Ni-mH batteries, Eur. Phys. J. Appl. Phys., Vol. 25, Issue 3, March 2004, s. 183–190.
5. Podlubny I., Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, London, Academic Press, 1999.
6. Racewicz S. i in., Identyfikacja parametrów maszyny synchronicznej z magnesy trwałymi metodą częstotliwościową, *Przegląd Elektrotechniczny* 2006, nr 11, s. 68–71.
7. Racewicz S., Modélisation d'ordre non entier des machines synchrones. Modèle fréquentiel non linéaire, identification des paramètres, calcul de la réponse temporelle, Éditions Universitaires Européennes, March 2011.
8. Racewicz S. i in., Half-order modelling of ferromagnetic sheet, ISIE 2011, 27–30 June 2011, Gdansk, Poland.
9. Racewicz S. i in., Half-order modelling of turboalternators – An adapted method of parameter identification, ICEM 2006, Chania, Crete Island, September 2006.
10. Racewicz S. i in., Non linear half-order modeling of synchronous machine, IEMDC 2009, Miami, Florida, 3–6 May 2009, s. 778–783.
11. Riu D., Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi, Thèse de doctorat de l'INPG, Décembre 2001.
12. Riu D., Retière N., Ivanès M., Induced currents modeling by half-order systems application to hydro- and turbo-alternators, IEEE Trans. On Energy Conversion, March 2003, Vol. 18, Issue 1, s. 94–99.
13. Usman Ifthikar M. i in., Dynamic modeling of proton exchange membrane fuel cell using noninteger derivatives, Journal of Power Sources, October 2006, Vol. 160, Issue 2, s. 1170–1182.

---

**Publikacja pokonkursowa**

Artykuł został nagrodzony pierwszą nagrodą Prezesa Zarządu spółki ENERGA SA w konkursie na najlepsze rozprawy doktorskie obronione w roku akademickim 2010/2011.

---

**Szymon Racewicz**

dr inż.

Politechnika Gdańska

e-mail: s.racewicz@ely.pg.gda.pl

Pracuje w Katedrze Energoelektroniki i Maszyn Elektrycznych Politechniki Gdańskiej. Jego zainteresowania naukowe skupione są wokół modelowania matematycznego maszyn elektrycznych z wykorzystaniem teorii pochodnych rzędów niecałkowitych.