

## ZASTOSOWANIE SYMULACJI METODĄ RÓŻNIC SKOŃCZONYCH W DZIEDZINIE CZASU (FDTD) W KSZTAŁCENIU INŻYNIERÓW W ZAKRESIE OPTYKI I ELEKTRODYNAMIKI

Maciej KRASZEWSKI<sup>1</sup>

1. Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Katedra Metrologii i Optoelektroniki  
tel: +48 58 347 1361 fax: +48 58 347 1484 e-mail: mackrasz@pg.gda.pl

**Streszczenie:** Zrozumienie zjawisk związanych z propagacją fal elektromagnetycznych stanowi kluczowy etap kształcenia inżynierów w dziedzinach związanych z optyką, elektroniką oraz telekomunikacją. Oprócz opanowania aparatu matematycznego oraz metod projektowych istotne jest intuicyjne zrozumienie treści przekazywanych podczas kursów optyki i elektrodynamiki. W realizacji tego celu praktyczną pomocą dydaktyczną stanowią wizualizacje i symulacje zjawisk falowych. W poniższym referacie przedstawiono sposób rozwiązywania równań Maxwella metodą różnic skończonych w dziedzinie czasu (FDTD - Finite Difference Time Domain). O jej atrakcyjności w zastosowaniach dydaktycznych stanowi prostota implementacji oraz możliwość wizualizacji zjawisk propagacji fal elektromagnetycznych. W tekście przedstawiono podstawowe algorytmy stosowane w opisywanej metodzie oraz propozycje opartych na niej form kształcenia.

**Słowa kluczowe:** FDTD, metody numeryczne, elektrodynamika

### 1. WSTĘP

W praktyce inżynierów specjalizujących się w dziedzinach elektroniki, elektrotechniki, telekomunikacji czy optyki ważną rolę odgrywa znajomość zjawisk związanych z propagacją fal elektromagnetycznych. Istotne jest zarówno opanowanie aparatu matematycznego umożliwiającego rozwiązywanie zadań projektowych, jak również intuicyjne zrozumienie zjawisk elektrodynamicznych oraz działania opierających się na nich urządzeń. Dla osiągnięcia tego celu, oprócz opisu teoretycznego, pomocna może być wizualizacja propagacji fal elektromagnetycznych w różnych warunkach.

Bezpośrednia obserwacja wielu zjawisk falowych często wymaga kosztownych stanowisk laboratoryjnych, a w niektórych przypadkach może być wręcz niemożliwa. Uzupełnieniem rzeczywistych doświadczeń mogą być jednak odpowiednio przygotowane symulacje. Szczególnie interesująca jest metoda rozwiązywania równań Maxwella w dziedzinie czasu za pomocą różnic skończonych - FDTD (Finite Difference Time Domain). Umożliwia ona wizualizację przebiegu propagacji fal elektromagnetycznych w czasie, co stanowi o jej atrakcyjności jako pomocy dydaktycznej dla studentów.

### 2. ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW ELEKTRODYNAMIKI METODĄ FDTD

#### 2.1. Dyskretyzacja równań Maxwella

Metoda FDTD opiera się na równaniach Maxwella zawierających rotację pola elektrycznego i magnetycznego [1-3]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\sigma_m \vec{H} - \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma_e \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

W przypadku jednowymiarowym, dla fali spolaryzowanej wzdłuż osi x i propagującej się w kierunku osi z, równania zawierające rotację pola elektrycznego i magnetycznego upraszczają się do postaci:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\sigma_m H_y - \mu_0 \mu_r \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\sigma_e E_x - \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4)$$

Powyższe równania można rozwiązać numerycznie, metodą różnic skończonych dokonując dyskretyzacji wartości z i t z krokami odpowiednio  $\Delta z$  i  $\Delta t$ . Ze względu na zbieżność oraz dokładność obliczeń, dyskretyzację pól E i H przeprowadza się w przeplatających się punktach przestrzeni i czasu, zgodnie z metodą zaproponowaną po raz pierwszy przez Yee [1-4]. W dalszej części tekstu przyjęto oznaczenia:

$$E_m^n = E_x(m\Delta z, n\Delta t) \quad (5)$$

$$H_{m+1/2}^{n+1/2} = H_y((m+1/2)\Delta z, (n+1/2)\Delta t) \quad (6)$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1, \quad (7)$$

gdzie N jest liczbą punktów w przestrzeni, dla których przeprowadzana jest symulacja.

Dyskretyzacja równań różniczkowych (3) i (4), przy założeniu zerowych wartości przewodności elektrycznej i magnetycznej, prowadzi do dwóch równań różnicowych opisujących ewolucję pól E i H w czasie:

$$H_{m+1/2}^{n+1/2} = H_{m+1/2}^{n-1/2} - S \frac{1}{\mu_r \eta_0} (E_{m+1}^n - E_m^n) \quad (8)$$

$$E_m^{n+1} = E_m^n - S \frac{\eta_0}{\epsilon_r} (H_{m+1/2}^{n+1/2} - H_{m-1/2}^{n+1/2}) \quad (9)$$

gdzie  $\eta_0$  jest impedancją falową próżni, a  $S$  to tzw. parametr Couranta [3]:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (10)$$

Postać równań (8) i (9) gwarantuje spełnienie warunków zerowej dywergencji pól  $E$  i  $H$ , przy założeniu, że warunki te spełnione są również dla pól początkowych [2].

## 2.2. Stabilność rozwiązania

O stabilności rozwiązania układu równań (8) i (9) decyduje wartość parametru  $S$ . W przypadku jednowymiarowym nie może być ona większa od jedności. Jest to równoważne warunkowi, że stosunek kroku dyskretyzacji przestrzennej do kroku dyskretyzacji czasowej musi być mniejszy od prędkości światła w próżni.

## 2.3. Warunki brzegowe

W punktach  $m=0$  oraz  $m=M-1$ , równania (8) oraz (9) wymagają przyjęcia dodatkowych warunków brzegowych. Do najpopularniejszych należą:

- I. stałe wartości pól poza granicami przestrzeni symulacji, równe 0;
- II. periodyczne warunki brzegowe;
- III. zastosowanie absorbującej warstwy idealnie dopasowanej pod względem impedancji falowej do otoczenia (PML - Perfectly Matched Layer) w połączeniu z warunkiem I.

Warunek I jest równoważny ograniczeniu przestrzeni symulacyjnej przez idealne ekrany elektryczne bądź magnetyczne. Nadaje się on więc do symulowania rozkładu pola wewnątrz wnęk rezonansowych. Pozostałe sytuacje wymagałyby użycia przestrzeni symulacyjnej powiększonej tak, aby fale odbite od granic przestrzeni nie dotarły do analizowanego jej obszaru przez cały czas trwania symulacji.

Warunek II znajduje zastosowanie w badaniu struktur periodycznych np. w zagadnieniach rozpraszania fal elektromagnetycznych [5].

Warunek III umożliwia rozwiązywanie wielu problemów elektrodynamiki. W przypadku jednowymiarowym wymaga on przyjęcia niezerowych wartości przewodności magnetycznej i elektrycznej w pobliżu granic przestrzeni symulacyjnej. W przypadkach wielowymiarowych, wymagane są zmiany algorytmu obliczania pól  $E$  i  $H$  poprzez wprowadzenie dodatkowych zmiennych lub нефизyczną separację tych pól na kilka części [2-3].

## 2.4. Wprowadzanie źródeł

Rozwiązanie badanego problemu wymaga wprowadzenia dodatkowo źródeł pól  $E$  i  $H$ . Możliwe do zastosowania są następujące warianty [2-3]:

- I. narzucenie źródłowej wartości pola  $E$  i/lub  $H$  w określonych punktach przestrzeni i czasu;
- II. dodanie określonej wartości do pól  $E$  i/lub  $H$  w określonych punktach przestrzeni i czasu do wartości wynikających z równań (8) i (9);
- III. podział przestrzeni symulacyjnej na obszar, w którym obecna jest zarówno fala źródłowa jak i fala

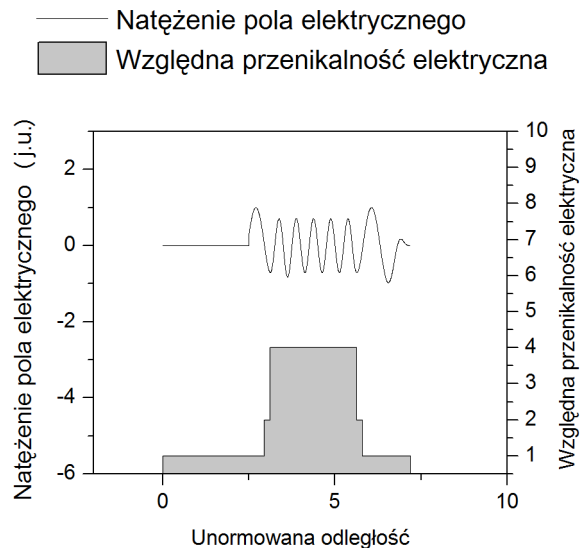
rozproszona oraz obszar, w którym obecna jest tylko fala rozproszona wraz z modyfikacją równań (8) oraz (9) na granicach między oboma obszarami (TFSF - Total Field/Scattered Field).

Warianty I i II nadają się do zastosowania w badaniu fal generowanych przez anteny bądź prowadzonych w falowodach i liniach transmisyjnych. Wariant III stosowany jest do badania interakcji wypromieniowanych już fal ze znajdującymi się w przestrzeni obiektami rozpraszającymi [6-7].

## 3. PROPOZYCJE ZASTOSOWAŃ METODY FDTD W DYDAKTYCE

### 3.1. Zrozumienie podstawowych zjawisk dotyczących propagacji fal elektromagnetycznych

Jednym z zastosowań symulacji metodą FDTD w dydaktyce może być prezentacja podstawowych zjawisk związanych z propagacją fal elektromagnetycznych takich jak zjawiska załamania i odbicia. Interesującym zastosowaniem może być ilustracja zjawiska interferencji w cienkich warstwach i związanych z nimi urządzeń takich jak warstwy antyrefleksyjne czy transformatory ćwierćfalowe. Przykład jednowymiarowej symulacji działania warstwy antyrefleksyjnej przedstawiony jest na rys. 1.



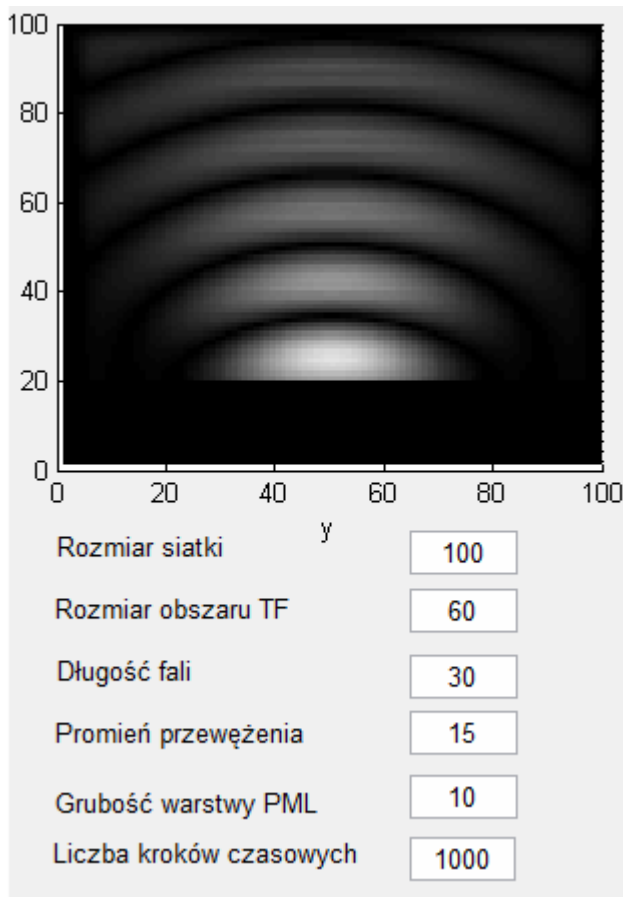
Rys. 1. Przykład modelowania jednowymiarowej warstwy antyrefleksyjnej. Fala padająca jest w całości transmitowana przez układ warstw o prezentowanym profilu przenikalności elektrycznej.

### 3.2. Kształcenie w zakresie optyki

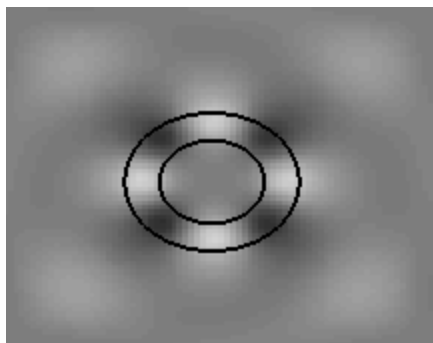
Symulacje metodą FDTD znalazły zastosowanie dydaktyczne w omawianiu takich zagadnień jak rozpraszanie światła [8], interferencja oraz dyfrakcja [9]. Możliwe jest jednak wiele innych zastosowań tej metody.

Rys. 2 przedstawia zaproponowany przez autora interfejs do modelowania propagacji wiązki gaussowskiej w wolnej przestrzeni. Może on służyć do ilustrowania związku pomiędzy takimi parametrami wiązki jak: długość fali, średnica przewężenia, zakres Rayleigha oraz kąt rozbieżności.

Rys. 3 i 4 przedstawiają symulacje rezonatora światłowodowego oraz światłowodowej siatki Bragga. Mogą one służyć lepszemu zrozumieniu przez studentów zjawiska rezonansu optycznego i jego zastosowań w konstrukcji urządzeń fotonicznych.



Rys. 2. Interfejs aplikacji do symulacji propagacji wiązki gaussowskiej.

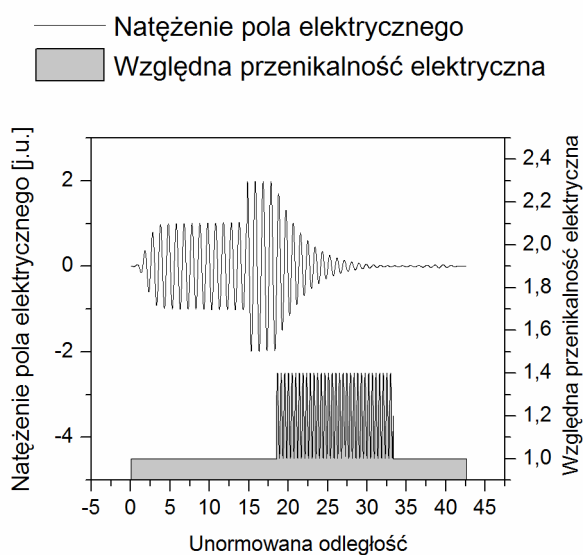
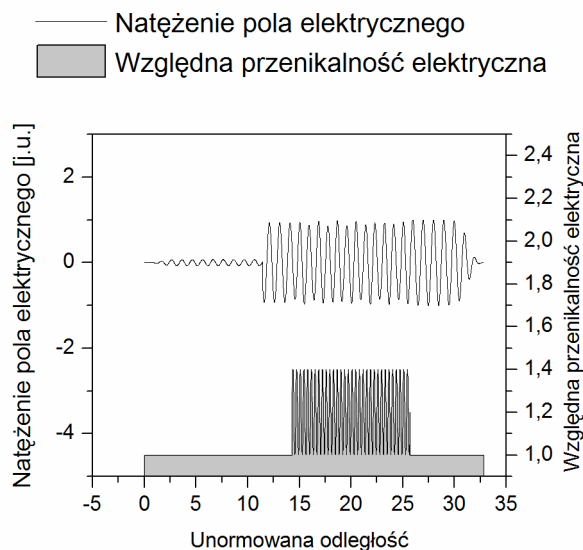


Rys. 3. Rozkład pola elektrycznego w rezonatorze pierścieniowym obliczony za pomocą metody FDTD.

### 3.3. Aktywizujące formy kształcenia

Oprócz form pasywnych, polegających przede wszystkim na prezentowaniu treści przez nauczyciela, metoda FDTD może posłużyć do opracowania "wirtualnych laboratoriów", w których studenci mieliby możliwość realizacji doświadczeń trudnych, kosztownych bądź w ogóle niemożliwych do zrealizowania w rzeczywistości.

Przykładową formą, proponowaną przez autora, może być analiza zjawiska rozpraszania światła na cząstkach o rozmiarach nano- i mikrometrowych. Rys. 5 przedstawia interfejs wirtualnego laboratorium umożliwiającego badanie wpływu rozmiaru i parametrów materiałowych cząstki na rozkład rozproszonego światła.

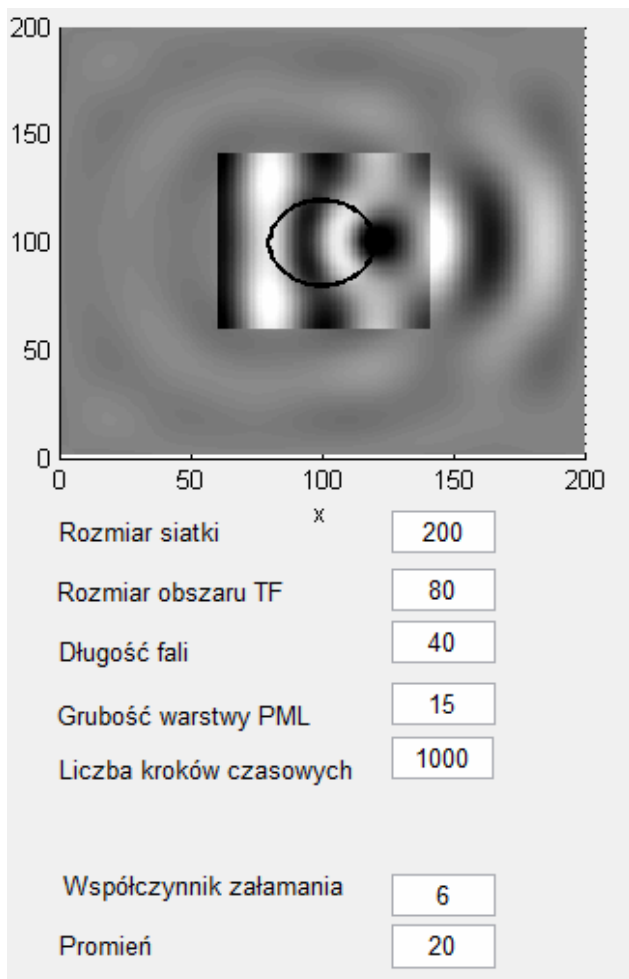


Rys. 4. Symulacja propagacji światła w siatce Bragga dla długości fali dalekiej (u góry) i bliskiej (u dołu) częstotliwości rezonansowej. Odległość unormowano do długości fali światła padającego. Na rysunkach widoczny jest szybki skok amplitudy pola elektrycznego w miejscu wprowadzania fali padającej.

## 4. WNIOSKI KOŃCOWE

W powyższej pracy zaprezentowano podstawy symulacji propagacji fal elektromagnetycznych metodą FDTD. Ze względu na możliwość wizualizacji przebiegu wielu zjawisk fizycznych w czasie oraz prostotę implementacji, metoda ta może być potencjalnie zastosowana w kształceniu inżynierów w zakresie elektrodynamiki oraz optyki.

W szczególności, autor proponuje wykorzystanie opisywanej metody do wizualizacji zjawisk propagacji światła w wolnej przestrzeni oraz cienkich warstwach, prezentacji właściwości wiązek gaussowskich, przyrządów fotonicznych (siatek Bragga oraz rezonatorów optycznych) oraz zjawiska rozpraszania światła na nano- i mikrocząstkach.



Rys. 5. Wirtualne laboratorium do badania rozpraszania światła na małych cząstkach. W oknie symulacji widoczny jest rozdział na obszar TF zawierający sumę fali padającej i rozproszonej od cylindrycznej cząstki oraz obszar SF zawierający tylko falę rozproszoną.

## 5. BIBLIOGRAFIA

1. Morawski T., Gwarek W.: Pola i fale elektromagnetyczne, Warszawa WNT 2004, ISBN 9788320436419.
2. Inan U.S., Marshall R.A.: Numerical Electromagnetics: The FDTD Method, New York Cambridge University Press 2011, ISBN 978-0-521-19069-5
3. Taflove A., Hagness S.C.: Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Artech House 1995, ISBN 9781580538329
4. Yee K.: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 14 (3), 1996, s. 302-307, ISSN 0018-926X
5. Yang F., Chen J., Qiang R., Elsherbeni A.: FDTD Analysis of Periodic Structures at Arbitrary Incidence Angles: A Simple and Efficient Implementation of the Periodic Boundary Conditions, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2006, s. 2715-2718, 2006, ISBN 1-4244-0123-2
6. Dunn A., Richards-kortum R.: Three-Dimensional Computation of Light Scattering From Cells, IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2 (4), 1996, ISSN 1077-260X
7. Yang P., Liou K.N.: Finite-difference time domain method for light scattering by small ice crystals in three-dimensional space, Journal of Optical Society of America A, 13 (10), 1996, ISSN 1084-7529
8. Luebbers J., Kunz K.S., Chamberlin K.A.: And Interactive Demonstration of Electromagnetic Wave Propagation Using Time-Domain Finite Differences, IEEE Transactions on Education, 1 (33), 1990, ISSN 0018-9359
9. Frances J., Perez-Molina M., Bleda S., Fernandez E., Neipp C, Belendez A.: Educational Software for Interference and Optical Diffraction Analysis in Fresnel and Fraunhofer Regions Based on MATLAB GUIs and the FDTD Method, IEEE Transactions on Education, 55 (1), 2012, ISSN 0018-9359

## APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE TIME DOMAIN (FDTD) SIMULATIONS IN ENGINEERING EDUCATION IN OPTICS AND ELECTRODYNAMICS

**Key-words:** FDTD, numerical methods, electrodynamics

Understanding physical phenomena of electromagnetic waves propagation is a key issue in training engineers specialized in optics, electronics and telecommunications. In addition to mastering necessary mathematical tools, it is important to understand knowledge from optics and electrodynamics courses intuitively. Visualizations and simulations of wave propagation phenomena can be helpful in achieving this goal. In this paper, author has presented the method of solving Maxwell equations using Finite Difference Time Domain (FDTD) algorithm. It is a numerical method, which is simple in implementation, that allows preparing visualizations of electromagnetic waves propagation. Author has presented basic algorithms used in the described method and examples of education form, which are based on it.