

## **Numeryczne modelowanie betonu niezbrojonego dla mieszanego rodzaju zniszczenia przy zastosowaniu podejścia ciągłego i nieciągłego**

**Dr inż. Jerzy Bobiński, prof. dr hab. inż. Jacek Tejchman**  
**Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska**

Beton jest materiałem kruchym silnie niejednorodnym i nieliniowym ze względu na proces jego pęknięcia w trakcie obciążenia. Opis jego zachowania z uwzględnieniem tego procesu jest szczególnie trudny w warunkach mieszanego rodzaju zniszczenia, gdzie ma miejsce ciągły obrót kierunków głównych naprężeń, a rysy mogą być silnie zakrzywione.

Celem artykułu jest analiza numeryczna quasi-statycznego laboratoryjnego badania Nooru-Mohameda [11] w warunkach mieszanego rodzaju zniszczenia (ściananie-rozciąganie), stosując

dwa różne podejścia w ramach mechaniki ośrodków ciągłych: ciągłe i nieciągłe [14]. Doświadczalne badanie jest wzorcowe i stosowane najczęściej do weryfikacji praw konstytutywnych opisujących zachowanie się betonu [1, 2, 5, 6]. Do opisu betonu zastosowano dwa ciągłe modele konstytutywne: sprężysto-plastyczny oraz z degradacją sztywności, rozszerzone o długość charakterystyczną mikrostruktury w ramach teorii nielokalnej do opisu lokalizacji odkształceń oraz podejście nieciągłe XFEM do opisu rys dyskretnych.

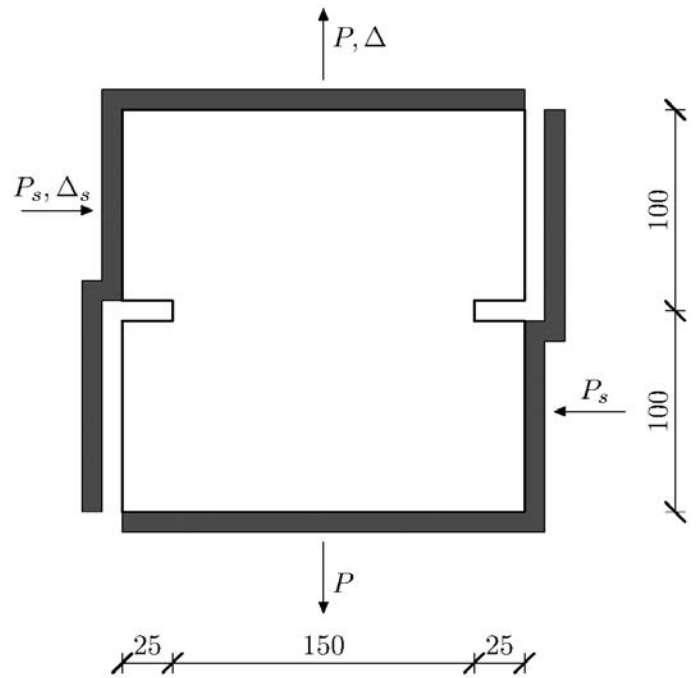
## MODELE NUMERYCZNE NIEZBROJONEGO BETONU

W sprężysto-plastycznym modelu konstytutywnym przyjęto niestowarzyszone kryterium wytrzymałościowe Druckera-Pragera w ściskaniu z izotropowym wzmocnieniem i osłabieniem oraz stowarzyszone kryterium Rankine'a w rozciąganiu z izotropowym osłabieniem opisanym funkcją eksponentialną [14]. Model wymaga dwóch stałych sprężystych: modułu sprężystości  $E$  i liczby Poissona  $\nu$ , dwóch stałych plastycznych: kąta tarcia wewnętrznego i kąta dyatacji oraz funkcji ewolucji granicy plastyczności (wzmocnienie i osłabienie) w ściskaniu i funkcji ewolucji granicy plastyczności (osłabienie) w rozciąganiu.

Do modelu konstytutywnego z degradacją sztywności opisanego jednym parametrem skalarnym [14] zastosowano trzy różne definicje miary odkształcenia: Rankine'a [9], von Misesa [4] oraz Hübnera-Combe i Pröchtela [7]. Model z miarą odkształcenia Rankine'a [9] wymaga pięciu stałych materiałowych:  $E$ ,  $\nu$ ,  $\kappa_0$  (początkowa wartość progu zniszczenia),  $\alpha$  oraz  $\beta$  (parametry opisujące osłabienie materiału). Model z miarą odkształcenia von Misesa [4] wymaga sześciu stałych materiałowych:  $E$ ,  $\nu$ ,  $k$  (stosunek między wytrzymałością betonu w jednoosiowym ściskaniu a wytrzymałością w jednoosiowym rozciąganiu),  $\kappa_0$ ,  $\alpha$  i  $\beta$ . Z kolei model z miarą odkształcenia Hübnera-Combe i Pröchtela [7] wymaga dziewięciu stałych:  $E$ ,  $\nu$ ,  $\kappa_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  i  $\gamma$  do zdefiniowania miary odkształcenia według kryterium wytrzymałościowego Hsieh-Ting-Chena [8] dla betonu.

Wszystkie modele konstytutywne rozszerzono o długość charakterystyczną mikrostruktury w ramach teorii nielokalnej [12] w celu poprawnego odwzorowania szerokości stref lokalizacji i ich rozstawu oraz uzyskania wyników niezależnych od siatki MES [14]. Długość charakterystyczną wyznaczono na podstawie doświadczeń na elementach betonowych pod obciążeniem z użyciem metody cyfrowej korelacji obrazu [13].

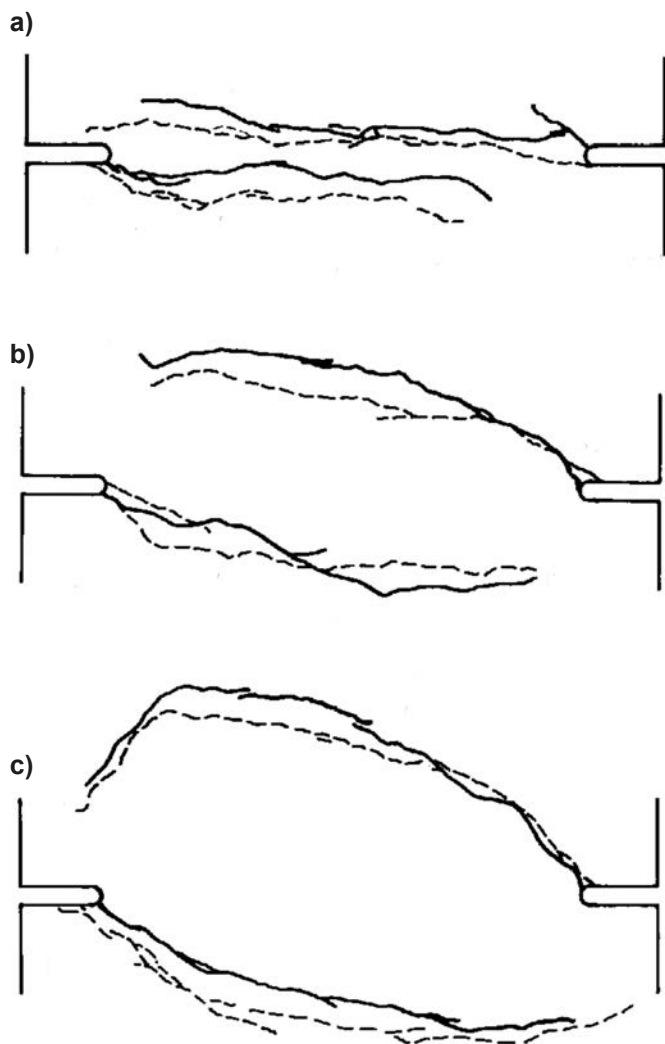
W metodzie XFEM zakłada się, że pole przemieszczeń jest nieciągłe w rysie. Metoda jest oparta na tzw. koncepcie PUM według Melenka i Babuški [10], który umożliwia dodanie dodatkowych składników opisujących skok przemieszczeń wzdłuż nieciągłości do standardowej interpolacji pola przemieszczeń w MES. W metodzie XFEM rysy mogą propagować przez elementy [16]. Do opisu rys dyskretnych zastosowano podejście zaproponowane przez Wellsa i Sluysa [15]. W obszarze bez rys przyjęto liniowo-sprężystą zależność betonu. Wzdłuż nieciągłości przyjęto nieliniową eksponentialną funkcję osłabienia dla normalnego składnika siły brzegowej i liniową zależność między skokiem przemieszczeń a stycznym składnikiem siły brzegowej. Model wymaga zdefiniowania stałych sprężystych:  $E$  i  $\nu$  oraz wytrzymałości na rozciąganie  $f_t$ , energii pęknięcia  $G_f$ , współczynnika osłabienia  $d_f$  i sztywności stycznej  $T_s$  [3]. Do aktywacji rys przyjęto warunek Rankine'a; kierunek rys zdefiniowano prostopadłe do kierunku maksymalnego naprężenia głównego w wierzchołku rysy (obliczonego na podstawie uśrednionych naprężeń z obszaru określonego przez długość uśrednienia  $l_{av}$ ).



Rys. 1. Laboratoryjne wzorcowe badanie Nooru-Mohameda [11]  
geometria i warunki brzegowe

## DOŚWIADCZENIA NOORU-MOHAMEDA

Wzorcowe doświadczenia Nooru-Mohameda [11] wykonano do elementu betonowego z dwoma nacięciami, stosując różne kombinacje obciążenia/przemieszczenia stycznego i rozciągającego. Długość i wysokość największego elementu wynosiła 200 mm (grubość 50 mm) (rys. 1). Dwa nacięcia o wymiarach  $25 \times 5 \text{ mm}^2$  znajdowały się w środku krawędzi pionowych. W doświadczeniach analizowano wiele różnych sposobów obciążenia. W obliczeniach przedstawionych w artykule symulowano tzw. ścieżkę obciążenia ,4', gdzie przyłożono najpierw poziomą siłę ścinającą  $P_s$  (pionowa siła  $P = 0$ ). Następnie siła  $P_s$  była stała, a przyłożono pionowe przemieszczenie rozciągające  $\Delta$ . Zastosowano trzy różne maksymalne poziome siły ścinające:  $P_s = 5 \text{ kN}$  (ścieżka ,4a'),  $P_s = 10 \text{ kN}$  (ścieżka ,4b') i  $P_s = 27,5 \text{ kN}$  (ścieżka ,4c'). W doświadczeniach otrzymano dwie zakrzywione rysy w zależności od siły  $P_s$  (rys. 2). Pionowa odległość pomiędzy poziomą linią łączącą nacięcia a najbardziej odległym punktem w linii rys (nazwana wysokością rysy  $h_c$ ) była równa dla każdej siły (wartość średnia z 4 rys): 1,5 cm (zakres 1,1 ÷ 2,0 cm), 3,5 cm (zakres 2,7 ÷ 4,3 cm) i 5,3 cm (zakres 4,3 ÷ 6,5 cm) dla siły ścinającej  $P_s$  równej odpowiednio 5 kN, 10 kN i 27,5 kN. We wszystkich obliczeniach numerycznych przyjęto płaski stan naprężenia ze stałymi sprężystymi:  $E = 32,8 \text{ GPa}$  i  $\nu = 0,2$ . Pozostałe stałe materiałowe przyjęto w taki sposób, aby otrzymać jak najlepszą zgodność wykresu siła – przemieszczenie z doświadczeniami. Zastosowano dwie siatki elementów skończonych: z 33832 elementami trójkątnymi trzywęzłowymi oraz z 16825 elementami czworokątnymi. Maksymalny wymiar elementów nie był większy niż 1,5 mm. Długość charakterystyczna była równa  $l_c = 2 \text{ mm}$  [13], a parametr nielokalności  $m = 2$  [14].



Rys. 2. Laboratoryjne badanie Nooru-Mohameda [11], zakrzywione rysy przy różnych ścieżkach obciążenia w zależności od poziomej siły ścinającej: a) ,4a', b) ,4b' i c) ,4c'

## WYNIKI NUMERYCZNE BETONU

### Model sprężysto-plastyczny

Wstępne wyniki wykazały, że warunek wytrzymałościowy Druckera-Pragera nie miał wpływu na wyniki. Przy kryterium wytrzymałościowym Rankine'a, wytrzymałość betonu na rozciąganie była równa  $f_t = 2,3$  MPa, a graniczna wartość parametru odkształcenia w osłabieniu  $k_u = 0,004$ . Otrzymane wyniki pokazano na rys. 3 (rysy pokazano na podstawie nielokalnego parametru osłabienia). W przebiegu pionowej siły w funkcji pionowego przemieszczenia  $P = f(\delta)$  ( $\delta$  – pionowe przemieszczenie pomierzone wewnątrz elementu betonowego w obszarze rys [11]) uzyskano bardzo dobrą zgodność z doświadczeniami przy poziomych siłach ścinających  $P_s = 5$  kN i  $P_s = 10$  kN. Różnice wystąpiły przy maksymalnej sile ścinającej  $P_s = 23,5$  kN (mniejszej niż w doświadczeniu  $P_s = 27,5$  kN), choć poprawnie odwzorowano ściskający charakter siły pionowej pod obciążeniem rozciągającym. Kształt lokalizacji odkształceń (rys) także odwzorowano prawidłowo. Ich wysokość  $h_c$  była równa 2,2 cm,

3,3 cm i 5,2 cm przy małej, średniej i dużej poziomej sile ścinającej  $P_s$  (wartość zbliżona jak w doświadczeniach przy średniej (3,5 cm) i dużej (5,3 cm) sile ścinającej i zbyt duża (1,5 cm) przy małej sile ścinającej  $P_s$ ).

### Model z degradacją sztywności

Przyjęto następujące wartości stałych materiałowych w obliczeniach z miarą odkształceń von Misesa [4]:  $\kappa_0 = 7 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha = 0,92$ ,  $\beta = 250$  i  $k = 10$ . Uzyskano bardzo dobrą zgodność stycznej siły 5 kN i 10 kN (rys. 4). Przy maksymalnej sile ścinającej równej 29 kN (wyższej niż w doświadczeniu) wystąpiły pewne różnice. Minimalna siła pionowa była równa -4,66 kN, podczas gdy w doświadczeniu wynosiła -1,51 kN, jednak uchwycono ściskający charakter siły pionowej. Rysy były ogólnie zbyt wygięte:  $h_c = 2,4$  cm,  $h_c = 3,8$  cm i  $h_c = 6,1$  cm (rys. 4).

Z rys. 5 wynika, że w obliczeniach MES z miarą odkształcenia Rankine'a [9] ( $\kappa_0 = 6,5 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha = 0,92$ ,  $\beta = 200$ ) powstaje tylko jedna strefa lokalizacji odkształceń dla małej i średniej siły ścinającej oraz ma miejsce nagły spadek siły pionowej po osiągnięciu maksymalnej wartości. Jedynie przy dużej sile ścinającej powstały dwie strefy lokalizacji odkształceń.

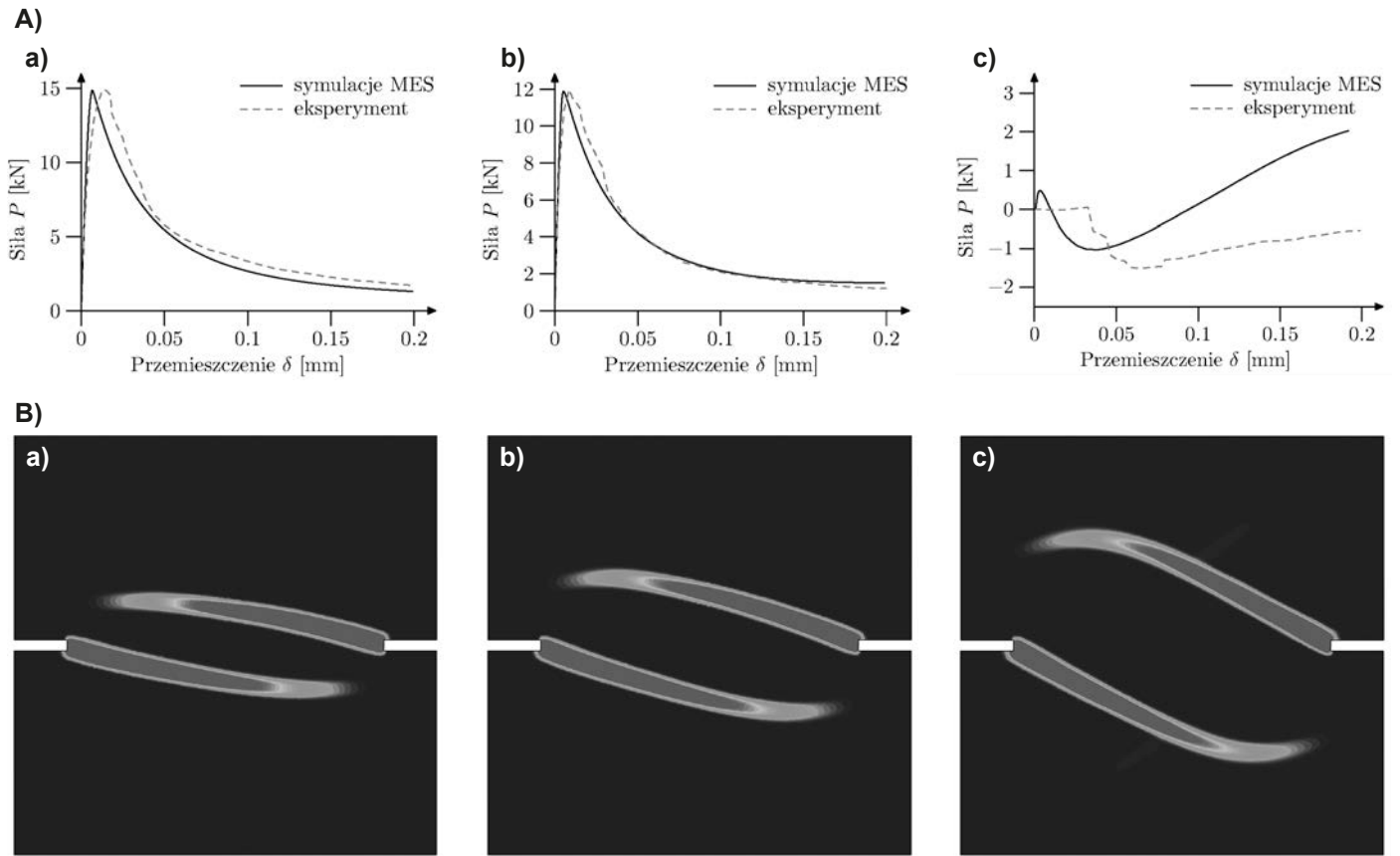
W obliczeniach MES z miarą odkształcenia Häußlera-Combe-Pröchtela [7] przyjęto następujące parametry:  $\alpha_1 = 0,08$ ,  $\alpha_2 = 1,16$ ,  $\alpha_3 = 2,0$  and  $\gamma = 0,2$ ,  $\kappa_0 = 6,0 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha = 0,92$  i  $\beta = 200$  (rys. 6). Otrzymano podobne wyniki jak przy mierze odkształcenia według Rankine'a (rys. 5). Przy  $P_s = 5$  kN otrzymano tylko jedną strefę lokalizacji odkształceń, a krótko po osiągnięciu maksymalnej wartości wystąpiły problemy z uzyskaniem zbieżności. Przy większych poziomych siłach ścinających powstały już dwie strefy lokalizacji. Wysokość rys  $h_c$  była równa 2,2 cm oraz 3,6 cm przy średniej i dużej sile ścinającej  $P_s$ .

### Metoda XFEM

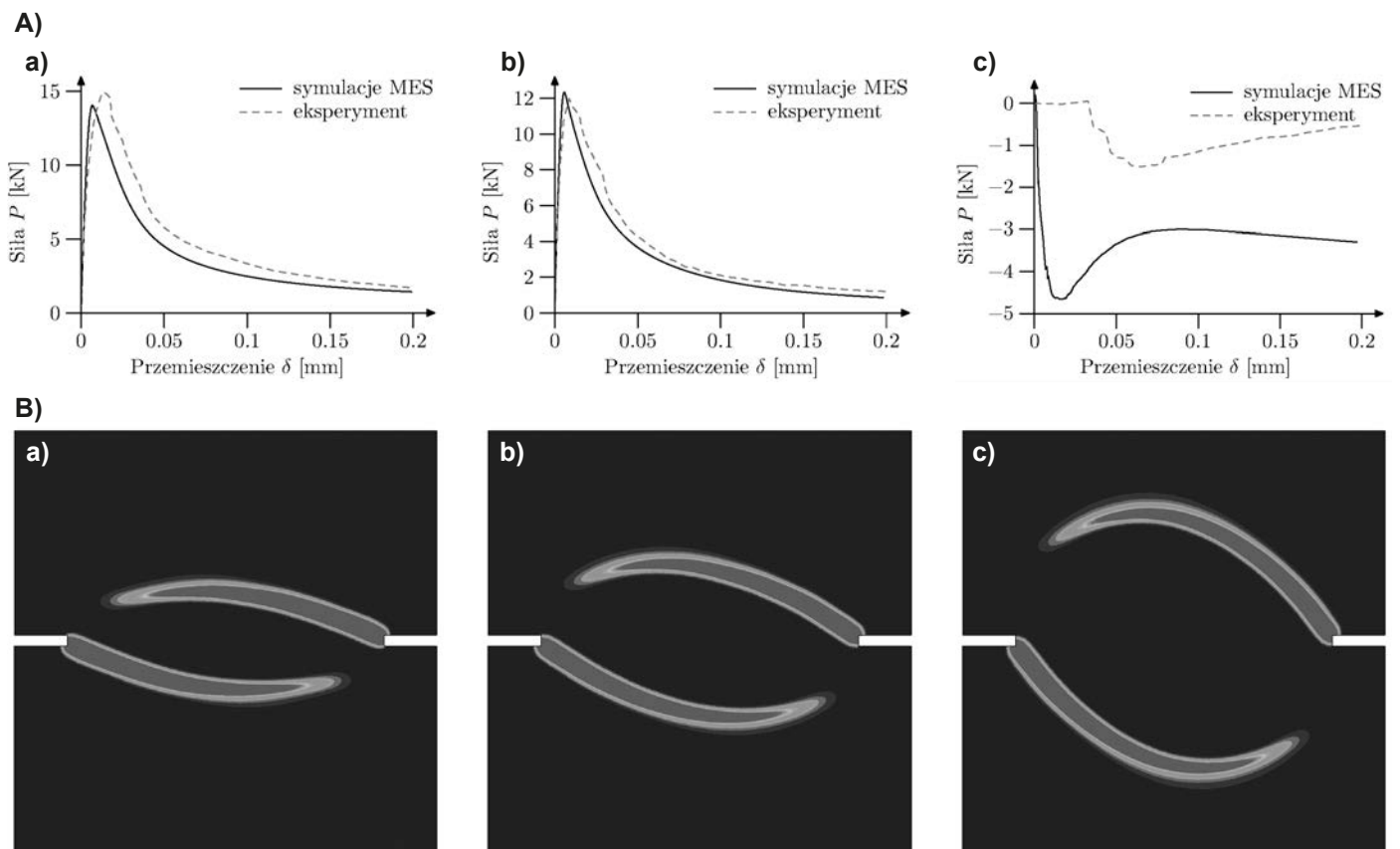
Przyjęto następujące parametry:  $f_t = 2,3$  MPa (wytrzymałość na rozciąganie),  $G_f = 75$  N/m (energia pęknięcia),  $l_{av} = 5$  mm (długość uśrednienia) i  $T_s = 0$ . Uzyskano bardzo dobrą zgodność przebiegu siły w funkcji przemieszczenia przy siłach ścinających  $P_s = 5$  kN i  $P_s = 10$  kN (rys. 7a). Przy maksymalnej sile  $P_s = 25,5$  kN (mniejszej niż w doświadczeniu) wystąpiły już jednak duże różnice: minimalna siła wynosiła -0,92 kN (wartość doświadczalna -1,51 kN), otrzymano dwa lokalne minima oraz ponowne wzmocnienie na wykresie siła – przemieszczenie. We wszystkich przypadkach otrzymano dwie rysy o wysokości  $h_c$ : 3,1 cm, 4,6 cm i 7,4 cm przy sile ścinającej 5 kN, 10 kN i 25,5 kN (rys. 7b). Wszystkie rysy były za bardzo zakrzywione (ich wysokość była nawet wyższa niż maksymalne wartości doświadczone). Zmiana energii pęknięcia wpłynęła tylko w niewielkim stopniu na wartości  $h_c$ .

### WNIOSKI

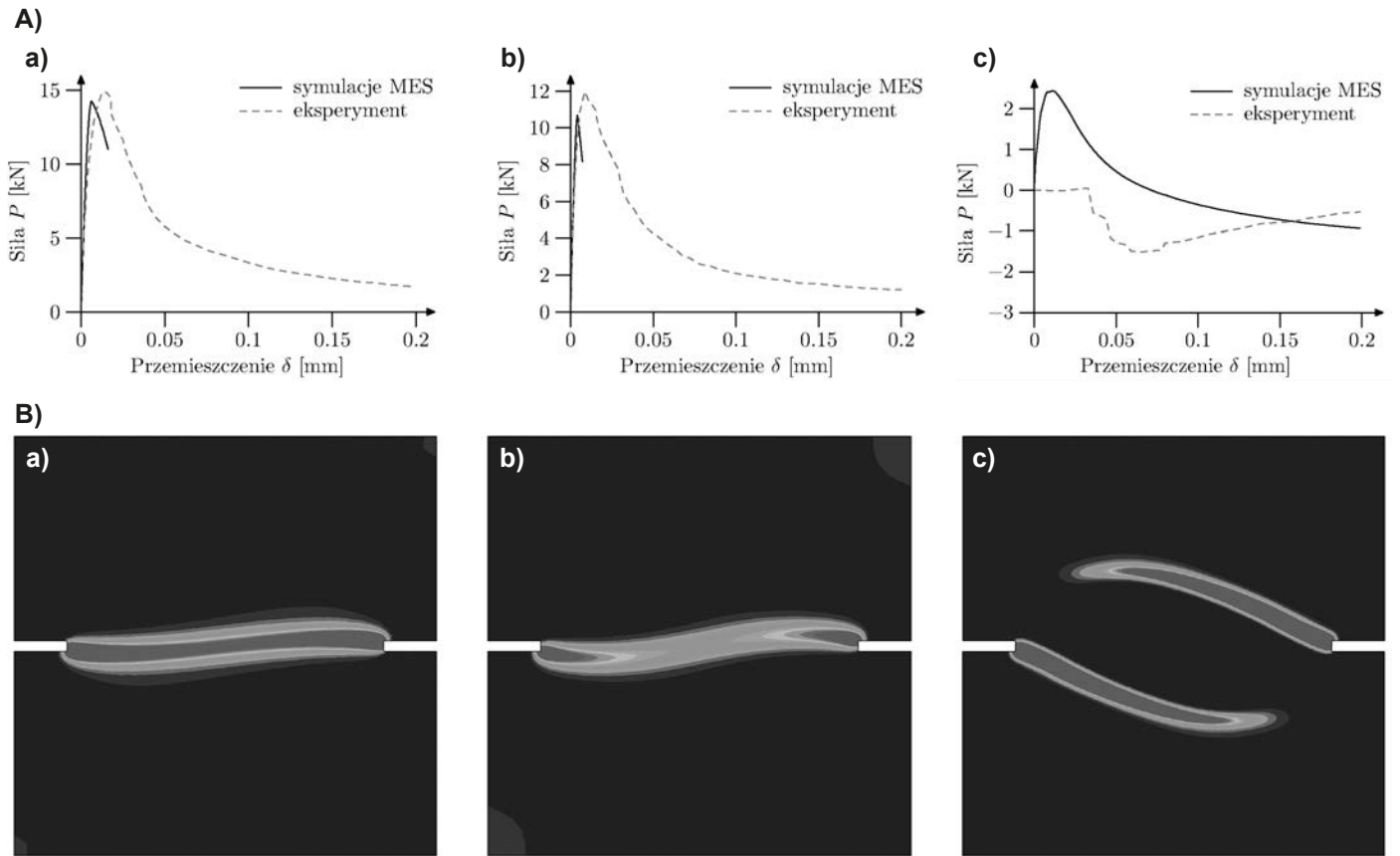
Sprężysto-plastyczny model konstytutywny betonu z kryterium wytrzymałościowym Rankine'a rozszerzony o długość charakterystyczną mikrostruktury okazał się najbardziej odpowiedni



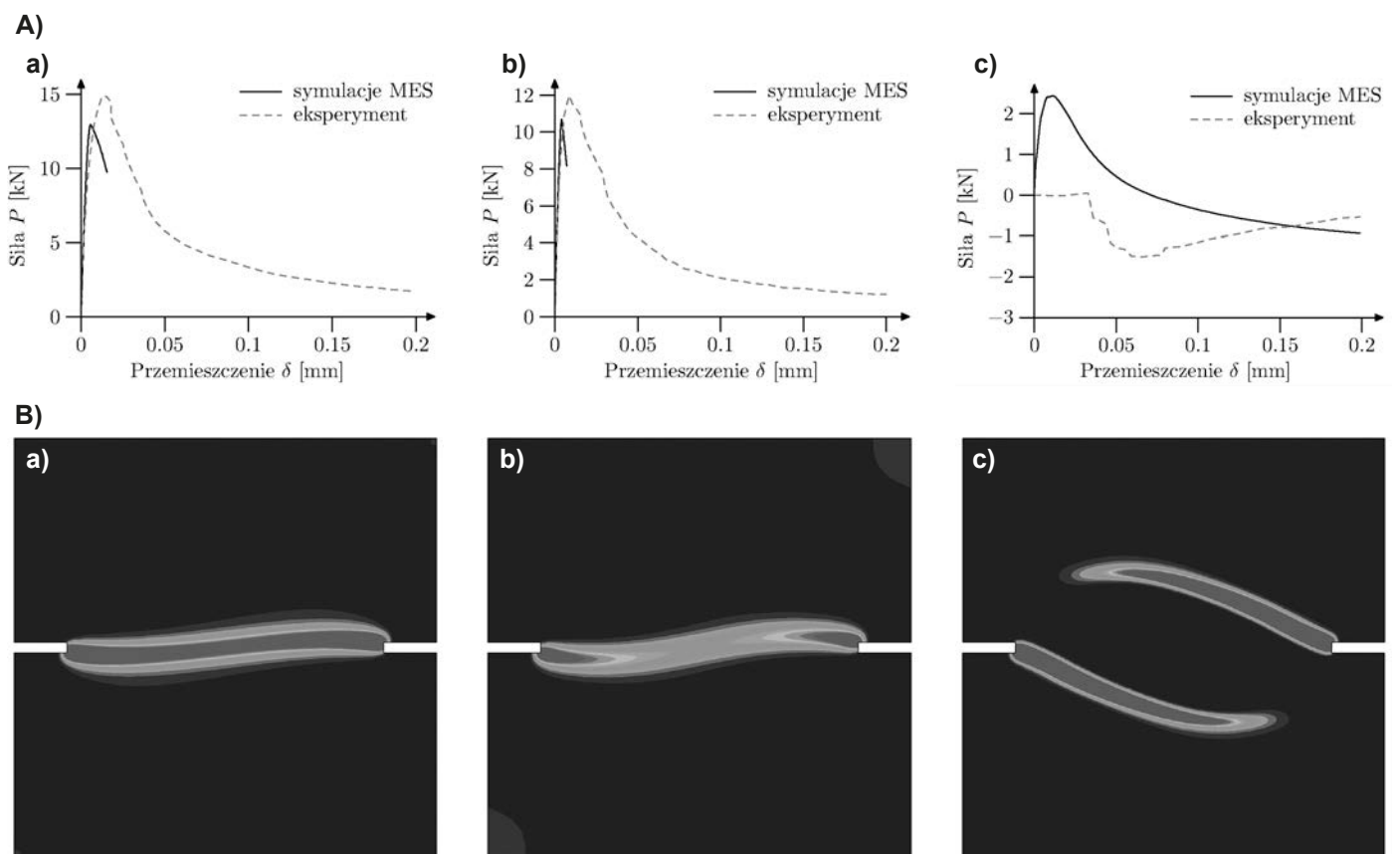
Rys. 3. Wyniki numeryczne MES do rozszerzonego sprężysto-plastycznego modelu konstytutywnego z kryterium wytrzymałościowym Rankine'a: A) obliczone i doświadczalne krzywe siła – przemieszczenie  $P = f(\delta)$  oraz B) obliczona geometria lokalizacji odkształceń przy sile ścinającej  $P_s$ : (a) 5 kN, (b) 10 kN i (c) 23,5 kN



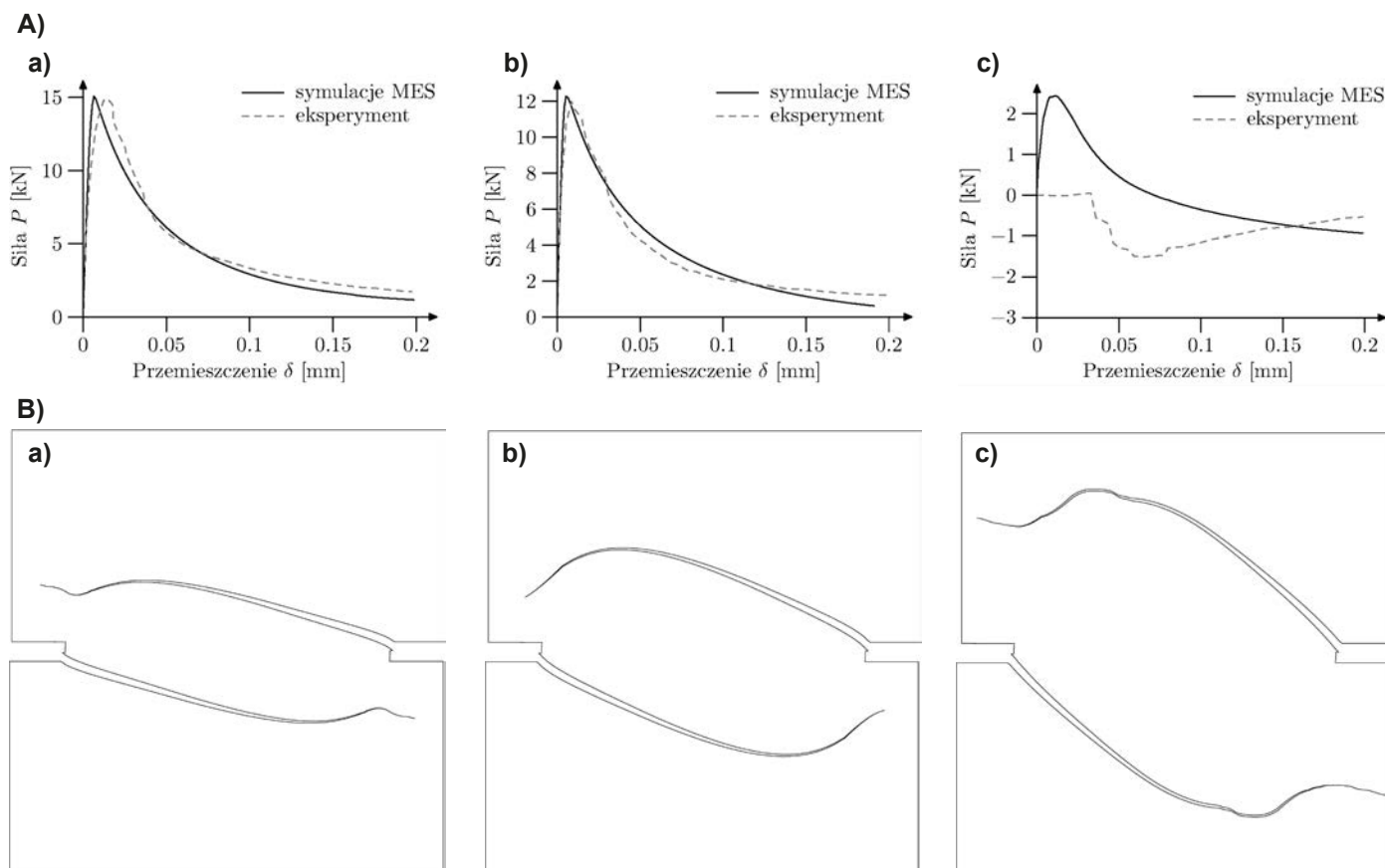
Rys. 4. Wyniki MES modelu z degradacją sztywności i miarą odkształcenia von Misesa [4]: A) obliczone i doświadczalne krzywe siła-przemieszczenie  $P = f(\delta)$  oraz B) obliczona geometria lokalizacji odkształceń przy poziomej sile ścinającej  $P_s$ : (a) 5 kN, (b) 10 kN i (c) 29 kN



Rys. 5. Wyniki MES modelu z degradacją sztywności i miarą odkształcenia Rankine'a [9]: A) obliczone i doświadczalne krzywe siła-przemieszczenie  $P = f(\delta)$  oraz B) obliczona geometria lokalizacji odkształceń przy poziomej sile ścinającej  $P_x$ ; (a) 5 kN, (b) 10 kN i (c) 20,5 kN



Rys. 6. Wyniki MES modelu z degradacją sztywności i miarą odkształcenia Häublera-Combe-Pröchtela [7]: A) obliczone i doświadczalne krzywe siła – przemieszczenie  $P = f(\delta)$  oraz B) obliczona geometria lokalizacji odkształceń przy sile ścinającej  $P_x$ ; (a) 5 kN, b) 10 kN i c) 19 kN



Rys. 7. Numeryczne wyniki przy zastosowaniu XFEM: A) obliczone i doświadczalne krzywe siła – przemieszczenie  $P = f(\delta)$  oraz B) obliczona geometria rys przy poziomej sile ścinającej  $P_s$ : a) 5 kN, b) 10 kN i c) 25,5 kN

do opisu doświadczalnej geometrii rys. Wyniki otrzymane z przyjęcia rozszerzonego modelu konstytutywnego z degradacją sztywności zależały w dużym stopniu od przyjętej miary odkształcenia. Realistyczne trajektorie rys doświadczalnych obliczono, stosując jedynie miarę odkształcenia von Misesa.

Wszystkie modele ciągłe betonu zdolne odwzorować geometrię rys w doświadczeniach właściwie opisały także ewolucję siły pionowej w funkcji pionowego przemieszczenia. Zgodność wyników MES była bardzo dobra przy małej i średniej poziomej sile ścinającej oraz umiarkowana przy dużej sile ścinającej (gdzie odwzorowano także ściskającą charakterystykę siły pionowej).

Kształt obliczonych dyskretnych rys w betonie na podstawie metody XFEM był zgodny z wynikami doświadczalnymi. Obliczone rysy były jednak zbyt zakrzywione. Dobrą zgodność przebiegu siły pionowej w funkcji pionowego przemieszczenia uzyskano przy małej i średniej poziomej sile ścinającej. Przy dużej poziomej sile ścinającej właściwie odwzorowano jedynie ściskający charakter siły pionowej.

#### LITERATURA

1. Abu Al-Rub R. K., Kim S. M.: Computational applications of a coupled plasticity-damage constitutive model for simulating plain concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics* 2010, 77(10).
2. Ananiev S., Ožbolt J.: Plastic-damage model for concrete in principal directions, *Proceedings of 5th International Conference on Fracture Mechanics in Concrete and Concrete Structures FraMCoS-5*, 2004.

3. Bobiński J., Tejchman J.: A constitutive model for concrete based on continuum theory with non-local softening coupled and extended Finite Element Method. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of the Euro-C 2014 Conference*, St. Anton am Arlberg, Austria, 2014.
4. de Vree J. H. P., Brekelmans W. A. M., van Gils M. A. J.: Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures* 1995, 55(4).
5. Dumstorff P., Meschke G.: Crack propagation criteria in the framework of X-FEM-based structural analyses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 2007; 31(2).
6. Gasser T. C., Holzpfel G.A.: 3D crack propagation in unreinforced concrete. A two-step algorithm for tracking 3D crack paths. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2006, 195(37-40).
7. Häubler-Combe U., Pröchtel P.: Ein dreiaxiales Stoffgesetz für Betone mit normaler und hoher Festigkeit. *Beton- und Stahlbetonbau* 2005, 100(1).
8. Hsieh S. S., Ting E. C., Chen W. F.: A plasticity-fracture model for concrete. *International Journal of Solids and Structures* 1982, 18(3).
9. Jirásek M.: Non-local damage mechanics with application to concrete. *Revue française de génie civil* 2004, 8(5-6).
10. Melenk J. M., Babuška I.: The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1996, 139(1-4).
11. Nooru-Mohamed M. B.: Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach. PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1992.
12. Pijaudier-Cabot G., Bazant Z. P.: Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 1987, 113(10).

13. Skarżyński Ł., Tejchman J. Experimental investigations of fracture process using DIC in plain and reinforced concrete beams under bending. *Strain* 2013, 49(6): 521-543.

14. Tejchman J., Bobiński J.: Continuous and discontinuous modelling of fracture in concrete using FEM. Springer, Berlin-Heidelberg, 2013.

15. Wells G. N., Sluys L. J.: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001, 50(12).

16. Zi G., Belytschko T.: New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2003, 57(15).

**PODZIĘKOWANIE:** Obliczenia wykonano w ramach projektu: „Innowacyjne środki i efektywne metody poprawy bezpieczeństwa i trwałości obiektów budowlanych i infrastruktury transportowej w strategii zrównoważonego rozwoju” (POIG.01.01.02-10-106/09-01). Obliczenia wykonano na komputerach Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej.