

**Władysław Koc**

Politechnika Gdańska

**Cezary Specht, Maciej Mindowicz**

Akademia Morska w Gdyni

## **APROKSYMACJA PRZEBIEGU TRASY KOLEJOWEJ NA PRZYKŁADZIE KRZYWOLINIOWEGO ODCINKA POŁĄCZENIA SOMONINO – GDAŃSK OSOWA**

*W artykule zaprezentowano wyniki wyznaczenia współrzędnych przebiegu trasy kolejowej metodami aproksymacji wielomianowej i interpolacji krzywą kubiczną na podstawie pomiarów czasu rzeczywistego GPS, zrealizowanych z wykorzystaniem polskiej aktywnej sieci geodezyjnej ASG-EUPOS. Rozważania teoretyczne poparte zostały praktycznym przykładem aplikacyjnym opartym na zrealizowanych pomiarach inwentaryzacyjnych zmodernizowanego odcinka toru kolejowego relacji Somonino – Gdańsk.*

**Słowa kluczowe:** drogi szynowe, trasa kolejowa, ASG-EUPOS, aproksymacja wielomianowa, interpolacja krzywą kubiczną.

### **WSTĘP**

W kwietniu 2008 roku Główny Urząd Geodezji i Kartografii zakończył realizację największej inwestycji związanej z wykorzystaniem globalnych satelitarnych technik pomiarowych GNSS w geodezji i nawigacji w Polsce [1]. Inwestycja ta, kontynuowana później w formie testów oferowanych usług (serwisów) i infrastruktury teleinformatycznej, jest wynikiem światowego trendu uruchamiania przez organy do spraw geodezji poszczególnych państw narodowych sieci stacji referencyjnych [2, 4, 5]. Precyzyjne techniki GNSS, oparte na pomiarach fazowych dla inwentaryzacji dróg szynowych, ograniczone są przez szereg czynników, wśród których wymienić należy przede wszystkim częściową niedostępność sygnału satelitarnego, wywołaną przesłonięciem horyzontu przez tzw. przeszkody terenowe, utratę sygnału podczas pokonywania tuneli czy znaczące wahania wartości współczynników geometrycznych decydujących o dokładności [12, 13, 14].

Wykorzystanie satelitarnych badań inwentaryzacyjnych dróg szynowych oraz dostosowanie metod projektowania ich układów geometrycznych na potrzeby nowej techniki pomiarowej są głównym przedmiotem działalności zespołu powołanego w 2009 roku (PG, AMW, AMG). Pierwsze badania eksperymentalne zrealizowano podczas inwentaryzacji odcinka linii kolejowej Kościerzyna –

Kartuzy (linie 201 i 214). Następnego roku przeprowadzono kampanie pomiarowe na odcinku Gdańsk Główny – Gdańsk Zaspą Towarową (linia 249) i na trasie Gdańsk Osowa – Somonino (linia 201) w 2010 roku.

Niniejszy artykuł prezentuje zagadnienie wyrównawcze pomiarów GNSS z wykorzystaniem aproksymacji wielomianowej i interpolacji krzywą kubiczną.

## 1. PRZEBIEG POMIARÓW

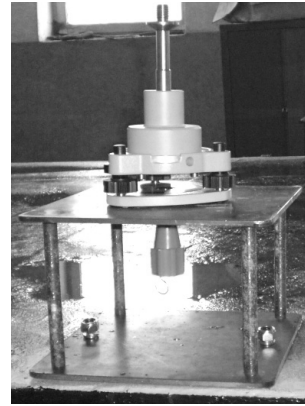
W dniu 6 listopada 2010 roku dokonano pomiaru inwentaryzacyjnego odcinka trasy kolejowej łączącej stacje Somonino oraz Gdańsk Osowa. Przejazd testowy po odcinku trasy o długości około 26 km wykonano wózkiem motorowym WM15A. Na holowanej platformie zamontowano trzy odbiorniki GNSS: jedno urządzenie Leica VIVA GS-15 oraz dwa urządzenia typu Leica-System-1200 (rys. 1). Odbiorniki wykorzystywały serwis NAWGEO aktywnej sieci geodezyjnej ASG-EUPOS, zapewniający fazowe rozwiązanie GNSS z dokładnościami centymetrowymi. Pomiary realizowano w czasie rzeczywistym z częstotliwością 5 Hz. Rozwiązanie pozycji uzyskiwano z wykorzystaniem wirtualnej stacji referencyjnej (ang. *Virtual Reference Station*), umożliwiającej uzyskiwanie najwyższych dokładności wyznaczeń z pominięciem wpływu odległości pomiędzy stacją referencyjną a odbiornikiem ruchomym. Pierwszą sesję pomiarową zrealizowano w godzinach 10:26–12:22, natomiast drugą – w godzinach: 12:31–14:12.



**Rys 1.** Platforma pomiarowa z zamontowanymi odbiornikami GNSS w trakcie objazdu trasy  
**Fig. 1.** Measurement platform with GNSS receivers during the round on surveyed section

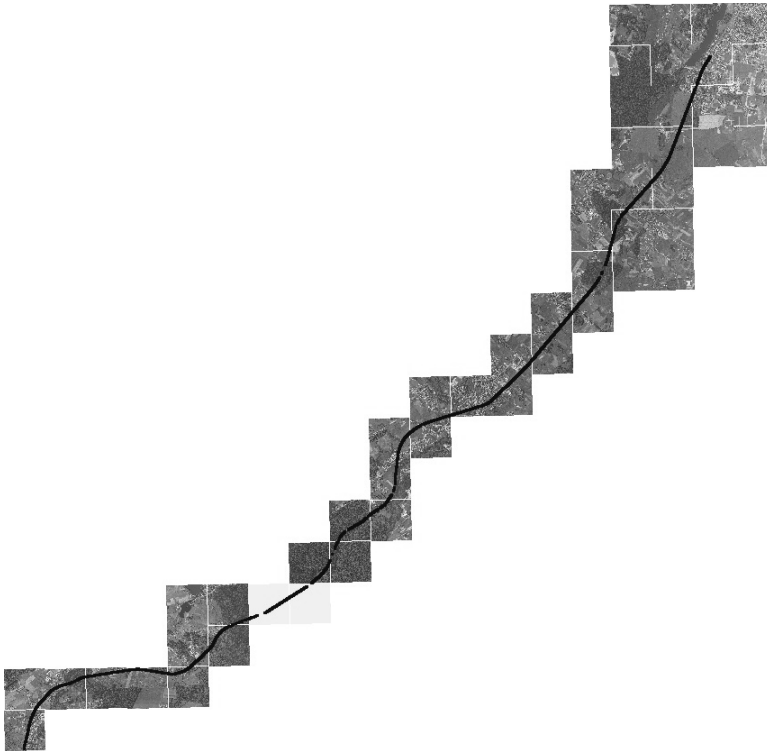
Aby zapewnić możliwość precyzyjnego umiejscowienia odbiorników w osi platformy, wykorzystano specjalnie przygotowane podstawy (rys. 2), posiadające możliwość regulowania położenia anteny GNSS. Wytyczono je z wykorzystaniem tachimetru model – Leica System 1200 z minimalną dokładnością 1 mm.

W trybie fazowego pomiaru kinematycznego odbiorniki umożliwiały osiąganie dokładności rzędu: 10 mm + 1 ppm (rms) horyzontalnie oraz 20 mm + 1 ppm (rms) wertykalnie. Poniżej zaprezentowano projekcję wyników pomiarów w państwowym układzie współrzędnych 2000 na ortofotomapę.



**Rys. 2.** Mocowanie spodarki odbiornika podstawą do platformy [8]

**Fig. 2.** Mounting of the receiver tribrach's base to the platform [8]



**Rys. 3.** Przebieg odcinka trasy Somonino – Gdańsk Osowa, będącego przedmiotem zrealizowanego badania

**Fig. 3.** Course of the Somonino – Gdańsk Osowa route section, which was the object of the realised study

## 2. ANALIZA DANYCH

Współrzędne łuków odcinka toru można uzyskać z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów, rozszerzając funkcję regresji o współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej objaśniającej  $x$  [10]:

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n + \varepsilon, \quad (1)$$

gdzie:

- $a_n$  – parametry wielomianu,
- $y(x)$  – zmienna objaśniana,
- $n$  – najwyższa potęga zmiennej  $x$ , tj. stopień wielomianu,
- $\varepsilon$  – błąd losowy.

Powyższy zapis dla układu równań z  $m$  argumentami może zostać przedstawiony w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^n & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^n & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^n & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}, \quad (2)$$

co w uproszczeniu po przekształceniu pozwala estymować wartości elementów wektora  $a$  [10]:

$$\vec{a} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \vec{y}. \quad (3)$$

Powyższy model może jedynie służyć celom projektowym i poglądowym. Konieczny jest jednak podział łuków na fragmenty dostatecznie małe, by aproksymacja skutkowałą przybliżeniami, mieszczącymi się w zakładanej tolerancji błędów. Mając na uwadze jak największą automatyzację uzyskiwania wyników, posłużono się interpolacją wielomianem sklejanym. Głównym założeniem wykorzystania funkcji sklejanych jest określenie ich zachowania w węzłach. Dla zastosowań kolejowych będzie to oznaczać zachowanie ciągłości krzywizny łuku wyznaczonej funkcji  $W(x)$  w rozpatrywanym przedziale. Dla jednoznacznego określenia krzywej należy więc przyjąć równość wartości wielomianów składowych i ich dwóch pierwszych pochodnych w punktach łączących oraz warunek brzegowy zerowania drugiej pochodnej na końcach przedziału:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0. \quad (4)$$



Tym samym możliwa staje się definicja wielomianów cząstkowych w kolejnych przedziałach  $\{[x_0, x_m], [x_m, x_{2m}], \dots, [x_{n-m}, x_n]\}$ :

$$S(x) = \alpha_1 + (x - x_i) \cdot \beta_i + (x - x_i)^2 \cdot \gamma_i + (x - x_i)^3 \cdot \delta_i, \quad (5)$$

gdzie:

$$\alpha_i = \gamma_i = \frac{M_i}{2}, \quad \beta_i = S'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{2 \cdot M_i + M_{i+1}}{6} \cdot h_{i+1}, \quad (6, 7)$$

$$\delta_i = \frac{S'''(x_i^+)}{6} = \frac{M_{i+1} - M_i}{6 \cdot h_{i+1}}, \quad M_i = S'''(x_i) \text{ dla } i = 0, 1, \dots, m, \quad (8, 9)$$

$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i \text{ dla } i = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (10)$$

Momenty funkcji  $M$  obliczane są z zależności:

$$\begin{cases} 2M_0 + \lambda_0 \cdot M_1 = d_0 \\ \mu_n \cdot M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases} \quad (11)$$

gdzie pomocnicze zmienne określone są następująco:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad (12)$$

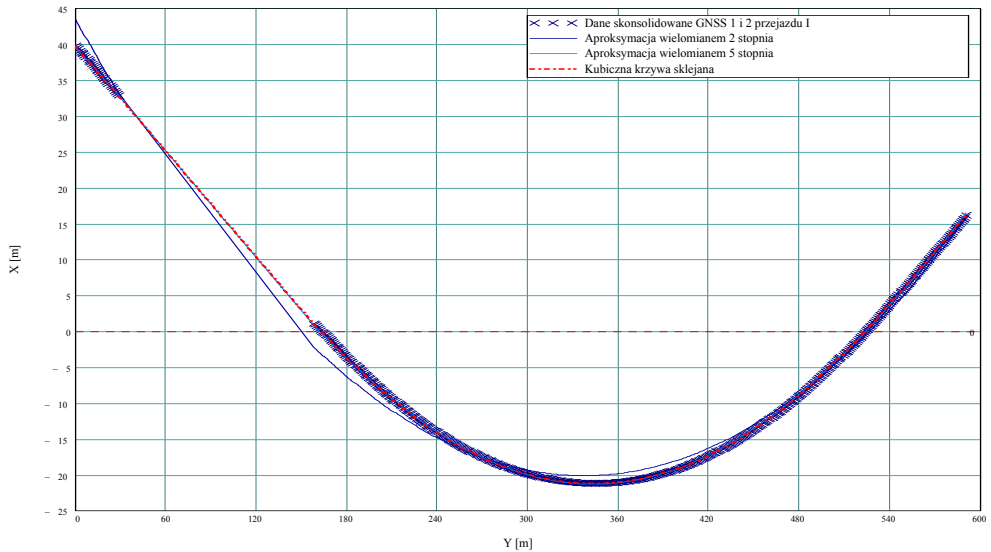
$$d_i = \left( \frac{y_{i+1} + y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \cdot \frac{6}{h_i + h_{i+1}}, \quad (13)$$

co pozwala sprowadzić układ równań do zapisu macierzowego:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Przy zachowaniu możliwie najniższego, trzeciego, stopnia wielomianu problem sprowadza się do interpolacji kubicznej, która umożliwiła uzyskanie poniżej prezentowanego (rys. 4) obrazu łuku (miasto Żukowo).





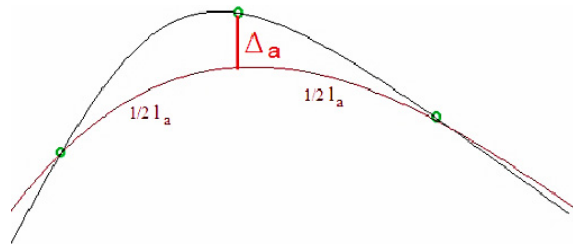
**Rys. 4.** Odzworowanie w układzie lokalnym odcinka eksperymentalnego łuku w skali skażonej [10]

**Fig. 4.** Projection of the experimental curve in the local coordinate system in exaggerated scale [10]

### 3. OCENA DOKŁADNOŚCI

Analiza lokalnej dokładności interpolacji, w przeciwieństwie do metod aproksymacyjnych, nie jest możliwa przez wyznaczenie odległości między współrzędnymi pomierzonymi i estymowanymi. W przypadku przyjęcia węzłów funkcji we wszystkich punktach danych źródłowych różnica ta będzie równa zero, dla każdej porównywanej pary współrzędnych pozycji.

Geometryczną interpretację, na przykładzie pojedynczego punktu znajdującego się między węzłami krzywej interpolowanej (oznaczonej kolorem brązowym) a stanem rzeczywistym (oznaczonym kolorem czarnym), szukanej wielkości przedstawiono na rysunku 5.



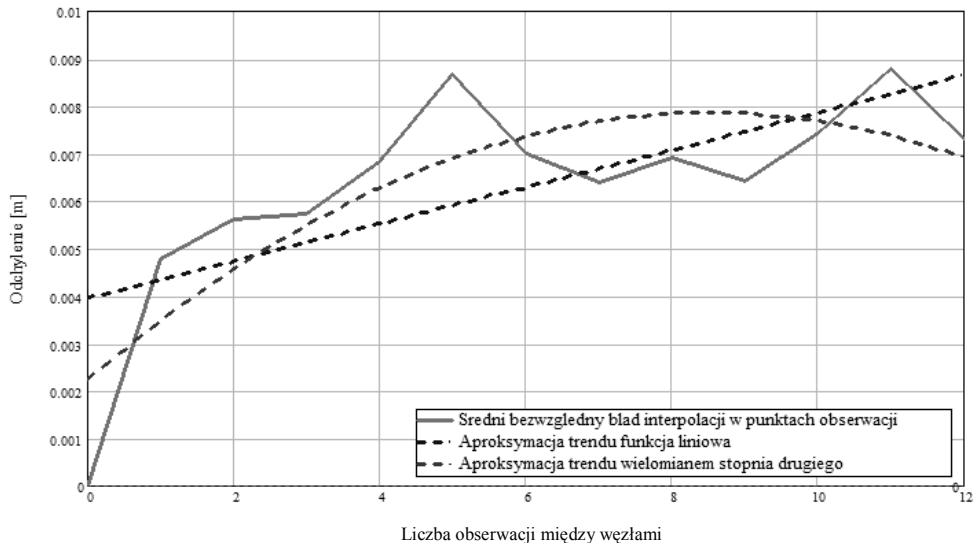
**Rys. 5.** Metoda szacowania lokalnego odchylenia krzywej kubicznej

**Fig. 5.** Method for evaluating local deviation of cubic curve



Biorąc pod uwagę powyższe stwierdzenia, możliwe jest jedynie uzyskanie przybliżenia wspomnianej wartości. W tym celu porównano średnie odchylenie współrzędnych uzyskanych z interpolacji w węzłach w co 2., 4., 8. i co 12. punkcie względem współrzędnych pominiętych punktów. Błąd interpolacji, opartej na całym zbiorze danych, uzyskano, ekstrapolując przyrost tak zdefiniowanego odchylenia wraz ze zmniejszaniem liczby węzłów funkcją liniową (4,0 mm) oraz wielomianem 2. stopnia (2,2 mm).

Wartości uzyskane w ten sposób przedstawiono na rysunku 6.



**Rys. 6.** Błąd interpolacji w funkcji liczby punktów dzielących odcinki pomiędzy węzłami oraz przebieg krzywych aproksymujących łuk za pomocą funkcji liniowej i wielomianu 2. stopnia

**Fig. 6.** Interpolation error as a function of the number of points separating sections between nodes and track approximating curves using linear and 2nd degree polynomial

W poniższej tabeli zaprezentowano końcowe wyniki statystycznej analizy dokładności danych pomiarowych oraz interpolowanych dla odcinka testowego o długości 635 m w mieście Żukowo (tab. 1).

**Tabela 1.** Wyniki analizy dokładności interpolacji łuku testowego

**Table 1.** Results of experimental curve's interpolation error analysis

Rodzaj danych	Błąd średni pozycji	Mediana błędów średnich pozycji	Odchylenie standardowe błędów pozycji
Dane pomiarowe	2,72 cm	1,13 cm	2,45 cm
Dane interpolowane	3,25 cm	1,40 cm	3,02 cm



W tabeli 2 zestawiono charakterystyki dokładności pomiarów zrealizowanych na łuku testowym w porównaniu do analogicznych wartości obliczonych dla całości pomiarów (przejazdu całej inwentaryzowanej trasy).

**Tabela 2.** Porównanie wybranych danych statystycznych dla łuku oraz całej kampanii pomiarowej

**Table 2.** Comparison of selected statistical data for the arc and the whole measurement campaign

Parametr	Łuk	Całość przejazdu
Liczba obserwacji	1106	22 340
Błąd średni pozycji	0,0303 m	0,0285 m
Mediana błędów średnich pozycji	0,0294 m	0,0266 m
Długość odcinka	933,76 m	26 588,19 m
Czas przejazdu	187 s	5938 s
Rozdzielczość przestrzenna	1,185 1/m	0,840 1/m
Rozdzielczość czasowa	5,91 Hz	3,76 Hz
Prędkość średnia	17,98 km/h	16,11 km/h

Zgodnie z przedstawionymi w tabeli 2 wynikami danych porównawczych można stwierdzić, że rezultaty odnoszące się do odcinka eksperymentalnego są zbliżone do wyników całej kampanii pomiarowej. Wykazano w ten sposób, że dokładność geodezyjnej inwentaryzacji realizowanej w torze kolejowym nie jest zależna od jego kształtu. Ponadto potwierdzono, że wykorzystanie aktywnej sieci geodezyjnej GNSS do tego typu realizacji zapewnia stałość błędów wyznaczeń.

## WNIOSKI

Wyniki przedstawionych analiz dowodzą użyteczności wykorzystania geodezyjnych pomiarów czasu rzeczywistego GNSS do celów inwentaryzacji tras kolejowych. Mimo uzyskiwania dokładności pomiarów niewystarczających do aplikacji diagnostycznych na uwagę zasługuje wniosek, dotyczący zagęszczenia obserwacji, skutkujący precyzyjniejszym oddaniem kształtu przestrzennego torów. Aktualnie dostępne na rynku geodezyjne odbiorniki GNSS umożliwiają określanie położenia z częstotliwością 20 Hz, stąd kolejne badania będą realizowane z tą właśnie częstotliwością.

Możliwe usprawnienia technik pomiarów obejmują m.in. ustalenie procedur planowania kampanii z uwzględnieniem wpływu przesłonek terenowych, dołączenie nadmiarowych pomiarów inercjalnych czy też użycie metod aproksymacji z uwzględnieniem wag pomiarów. Pozytywną perspektywą dla przedstawionych zastosowań jest również wykorzystanie pomiarów pochodzących z konstelacji satelitarnego systemu Glonass, gdy tylko możliwe będzie uzyskanie korekt pseudoodległościowych dla tego systemu na większym obszarze kraju.





## LITERATURA

1. Baran L.W., Oszczak S., Zieliński J.B., *Wykorzystanie technik kosmicznych w geodezji i nawigacji w Polsce*, Nauka, 2008, nr 4.
2. Cord-Hinrich J., *SAPOS-Part of a Geosensors Network*, Symposium on Global Navigation Satellite Systems, Berlin 2008.
3. Gocał J., *Wybrane technologie pomiarów inżynierskich oparte na wykorzystaniu instrumentów elektronicznych*, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Prace Instytutu Geodezji i Kartografii, t. XLVIII, z. 102, Kraków 2001.
4. Greaves M., Fane C., Cruddace P., Bingley R., Baker D., *National Report of Great Britain*, EUREF, 2003.
5. Hedling G., Jonsson B, Lilje Ch., Lilje M., *SWEPOS – The Swedish Network of Permanent GPS Reference Station* (Status February 2001), FIG Working Week 2001, Seoul 2001.
6. Koc W., Chrostowski P., *Program komputerowy do projektowania zmiany kierunku trasy kolejowej*, Zeszyty Naukowo-Techniczne Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Komunikacji Rzeczypospolitej Polskiej, Oddział w Krakowie, seria Materiały Konferencyjne, nr 3 (z. 99), Kraków 2012.
7. Koc W., Chrostowski P., *Wizualizacja przebiegu trasy kolejowej na podstawie pomiarów satelitarnych*, IV Konferencja Naukowo-Techniczna „Projektowanie, budowa i utrzymanie infrastruktury w transporcie szynowym”, INFRASZYN 2011, Zakopane 2011.
8. Koc W., Specht C., *Wybrane problemy wyznaczania przebiegu trasy kolejowej z wykorzystaniem rozwiązań GPS*, Instytut Logistyki i Magazynowania, Logistyka, 2010, nr 4, Poznań 2010.
9. Koc W., Specht C., Nowak A., Jurkowska A., Chrostowski P. i in., *Określanie przebiegu trasy kolejowej na drodze pomiarów satelitarnych*, II Konferencja Naukowo-Techniczna „Projektowanie, budowa i utrzymanie infrastruktury w transporcie szynowym”, INFRASZYN 2009, Zakopane 2009.
10. Mindowicz M., *Porównanie metod aproksymacji prosto- i krzywoliniowego odcinka torów*, praca inżynierska, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2013.
11. Podoski J., *Tramwaj szybki, projektowanie i eksploatacja*, WKŁ, Warszawa 1983.
12. Specht C., *System GPS*, Wydawnictwo Bernardinum, Pelplin 2007.
13. Specht C. i in., *Wykonanie testów infrastruktury i usług systemu precyzyjnego pozycjonowania satelitarnego ASG-EUPOS*, Projekt badawczy na zlecenie Głównego Urzędu Geodezji i Kartografii „Wykonanie testów infrastruktury systemu ASG-EUPOS oraz wykonanie testów usług systemu ASG-EUPOS”, Konsorcjum naukowe: Politechnika Gdańska / Uniwersytet Warmińsko-Mazurski / Akademia Marynarki Wojennej, Gdańsk – Olsztyn – Gdynia 2008.
14. Specht C., Koc W., Nowak A., Szulwic J., Szmagliński J. i in., *Dostępność fazowych rozwiązań GPS/Glonass podczas geodezyjnej inwentaryzacji dróg szynowych – na przykładzie linii tramwajowej Gdańska*, Technika Transportu Szynowego, 2012, nr 9.



## RAILWAY ROUTE COURSE APPROXIMATION ON EXAMPLE OF CURVILINEAR SECTION BETWEEN STATIONS: SOMONINO – GDAŃSK OSOWA

### Summary

*The article presents results of defining railway route course position using methods of polynomial approximation and cubic spline interpolation based on real time GPS measurements supported by active geodetic network ASG-EUPOS. Mathematical basis of the received solution are presented as well. Theoretical considerations were backed by an example of their application in order to illustrate railway route course present on 06.11.2010. Moreover, the article covers an issue of the output data's spatial resolution and its effect on accuracy of linear models defined on its basis.*

**Keywords:** *railroad, railway route, GNSS, GPS, ASG-EUPOS, polynomial approximation, cubic spline interpolation.*