

WILK Andrzej<sup>1</sup>  
JUDEK Sławomir<sup>2</sup>  
KARWOWSKI Krzysztof<sup>3</sup>  
MIZAN Mirosław<sup>4</sup>

## Modelowanie dynamiki odbieraka prądu pojazdu kolejowego do celów diagnostycznych

### WSTĘP

Elektryczne pojazdy szynowe najczęściej zasilane są z napowietrznej sieci trakcyjnej, za pośrednictwem odbieraka prądu zamontowanego na dachu pojazdu [7]. Prawidłowy odbiór energii elektrycznej przez pojazd ma kluczowe znaczenie z punktu widzenia niezawodności i bezpieczeństwa kolejowego systemu transportowego. Na podstawie analiz przyczyn uszkodzeń sieci trakcyjnej prowadzonych przez PKP Polskie Linie Kolejowe, stwierdzono w latach 2009-2011 łącznie 383 uszkodzeń sieci wywołanych niewłaściwym stanem technicznym odbieraka prądu [14]. Analiza tego typu sytuacji awaryjnych przeprowadzonych w 2004 r. przez koleje SNCF, DB i Trenitalia wykazała 915 uszkodzeń, które spowodowały łącznie 443 000 minut opóźnień. Łączny koszt nimi spowodowany oszacowano na poziomie 443 mln Euro [11]. Obejmuje to koszty napraw oraz opłat związanych z nieprzejezdnością szlaku, wpływającą na płynność ruchu w całym systemie transportowym. Wskazuje to na duże znaczenie i rolę systemów diagnostycznych, zwłaszcza że dane te obejmują również pociągi dużej prędkości i nowoczesną infrastrukturę.

W celu zapewnienia jednakowych warunków współpracy pomiędzy pojazdami i siecią, w Unii Europejskiej wprowadzono uwarunkowania techniczne i prawne zebrane w Technicznych Specyfikacjach Interoperacyjności (TSI). Dotyczą one zarówno układu zasilania – podsystem energia oraz pojazdów – podsystem tabor. Zapewnienie właściwych warunków odbioru prądu jest szczególnie istotne w systemach zasilania napięciem stałym, w których uzyskanie odpowiedniej mocy wymaga odbioru prądu o dużych wartościach. W Polsce wykorzystuje się układ zasilania o napięciu znamionowym 3 kV, a prądy pobierane przez pojazdy za pośrednictwem odbieraków mogą osiągać wartość 2,5 kA [4].

Właściwości dynamiczne odbieraka prądu i trakcyjnej sieci zasilającej są bardzo istotne w prawidłowym przepływie energii elektrycznej z sieci do pojazdu trakcyjnego i odwrotnie w tzw. hamowaniu odzyskowym. Przy niewłaściwej sile oddziaływania pomiędzy ślizgaczem i przewodem jezdnym, występuje zazwyczaj nadmierne zużycie nakładek ślizgacza i przewodu jezdny. Natura tego zużycia ma charakter mechaniczny (zbyt duża siła nacisku) lub elektroerozji (zbyt mała siła).

Obecnie typową praktyką jest ocena stanu technicznego odbieraków prądu metodą prewencyjną (ang. *preventive maintenance*) [2, 12]. Realizowane jest to w zakładach taboru, w trakcie przeglądów okresowych pojazdów i polega głównie na wyznaczeniu charakterystyki statycznej odbieraka. Takie podejście jest czasochłonne, nieprecyzyjne, uzależnione od czynnika ludzkiego i nieekonomiczne [15]. Skutkuje również tym, że w okresie pomiędzy przeglądami, niewłaściwie wyregulowany odbierak może być eksploatowany, przyczyniając się do wystąpienia stanów awaryjnych.

Alternatywnym podejściem jest stosowanie monitoringu stanu technicznego (ang. *condition-based maintenance*). Realizacja tego sposobu monitoringu w trybie *on-line*, w warunkach eksploatacyjnych, jest zdaniem autorów właściwym i koniecznym kierunkiem rozwoju w metodyce oceny ich stanu

<sup>1</sup> Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki; 80-233 Gdańsk; ul. G. Narutowicza 11/12. Tel: +48 58 347 10 87, andrzej.wilk@pg.gda.pl

<sup>2</sup> Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki; 80-233 Gdańsk; ul. G. Narutowicza 11/12. Tel: +48 58 347 11 68, slawomir.judek@pg.gda.pl

<sup>3</sup> Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki; 80-233 Gdańsk; ul. G. Narutowicza 11/12. Tel: +48 58 347 11 58, krzysztof.karwowski@pg.gda.pl

<sup>4</sup> Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki; 80-233 Gdańsk; ul. G. Narutowicza 11/12. Tel: +48 58 347 15 02, miroslaw.mizan@pg.gda.pl

technicznego [9, 15]. W Polsce eksploatowane jest pilotażowe stanowisko Monitoringu Odbieraków Prądu (MOP) opracowane przez zespół Katedry Inżynierii Elektrycznej Transportu Politechniki Gdańskiej [9]. Umożliwia ono ocenę siły nacisku statycznego na podstawie analizy dynamicznej współpracy odbieraka z siecią. Dotychczasowe doświadczenia Autorów wskazują na dużą rozpiętość parametrów statycznych i dynamicznych niektórych eksploatowanych odbieraków prądu. W związku z tym celowy jest rozwój metod diagnostycznych realizowanych w stanowisku MOP, pod kątem precyzyjnego wyznaczenia niektórych parametrów odbieraka.

Istotne rozszerzenie możliwości w diagnostyce *on-line* odbieraków stanowią narzędzia symulacyjne, obejmujące zarówno modelowanie sieci trakcyjnej, odbieraka prądu, jak i ich dynamicznej współpracy. Wykorzystywane są tu zarówno modele matematyczne opisywane za pomocą równań różniczkowych cząstkowych (PDE) [10], równań dyskretnych w oparciu o metodę elementów skończonych (FEM) [1, 5] oraz analizę metodą wielocłonową (ang. *multi-body simulation*) [3, 6]. Opis zachodzących zjawisk jest jednak bardzo złożony, gdyż siły w zestyku ślizgowym mają charakter dynamiczny, zwłaszcza przy stosunkowo dużych prędkościach pojazdu trakcyjnego. Najprostszy stosowany model odbieraka zazwyczaj posiada jeden stopień swobody, w postaci odpowiednio połączonych zastępczych mas elementów ruchomych, za pośrednictwem elementów sprężystych, tłumiących i ciernych [1, 5]. W celu dokładniejszej analizy właściwości dynamicznych odbieraka zaproponowano w tej pracy model matematyczny, oparty na podziale jego struktury mechanicznej na zbiór skupionych elementów zachowawczych i dyssypatywnych. Do sformułowania równań modelu matematycznego zastosowano metodę energetyczną Lagrange'a [8]. Opracowany model reprezentuje odbierak prądu o konstrukcji zbliżonej do 160 EC.

## 1. MODEL MATEMATYCZNY ODBIERAKA PRĄDU

### 1.1. Metoda modelowania oraz istotne założenia modelu

Model matematyczny odbieraka opracowano na podstawie metody energetycznej Lagrange'a. W podejściu tym dokonuje się podziału obiektu na skupione elementy zachowawcze (bezwładnościowe i sprężyste) oraz dyssypatywne (tłumiki) zarówno w ruchu postępowym, jak i obrotowym. Elementy skupione reprezentują zazwyczaj fizyczne elementy konstrukcyjne (masy, sprężyny i tłumiki), ale w niektórych przypadkach są elementami zastępczymi, reprezentującymi zachodzące w obiekcie zjawiska fizyczne (oddziaływania sprężyste, tarcie itp.). Opracowany model jest reprezentatywny dla odbieraków prądu, których konstrukcja oparta jest na dwóch czworobokach przegubowych – przykładem takiej konstrukcji jest odbierak typu 160EC. Model odbieraka w części związanej z ramionami połączonymi przegubowo opracowano z dużym stopniem dokładności. W części odbieraka, która zawiera tzw. zespół usprężynowania ślizgacza oraz ślizgacz, przyjęto kilka uproszczeń wynikających z ograniczenia ruchu do jednego stopnia swobody. Model zespołu usprężynowania z większą liczbą stopni swobody jest na etapie dalszych prac badawczych. Przyjęte w pracy założenia upraszczające modelu odbieraka są następujące:

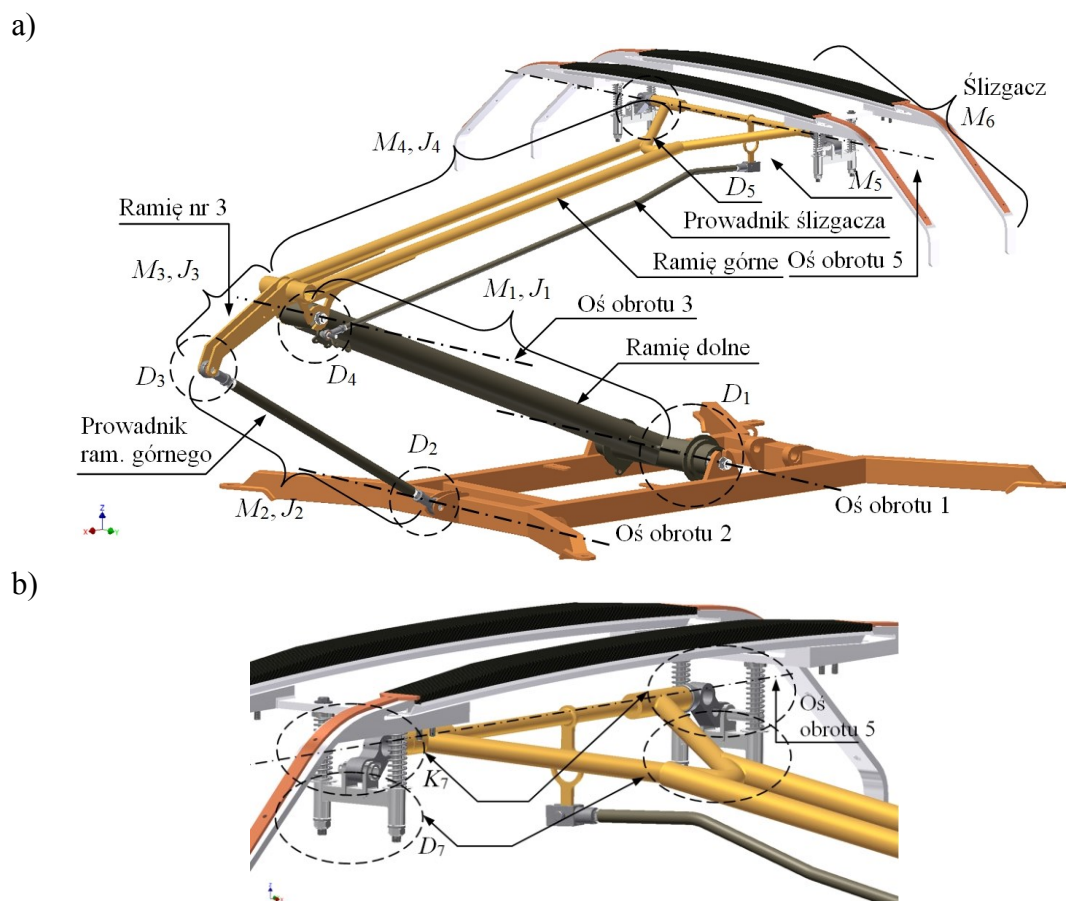
1. W zespole ślizgacza uwzględnia się tylko jeden stopień swobody, którym jest ruch postępowy całego zespołu. Oznacza to, że nie uwzględnia się ruchu obrotowego ślizgacza oraz niezależnych odkształceń jego czterech sprężyn. Założenie to jest powszechnie przyjmowane w literaturze światowej i jest z reguły zasadne, ale w modelach dla potrzeb zaawansowanej diagnostyki może być niewystarczające;
2. Ramię górne odbieraka oraz prowadnik ślizgacza reprezentowane są przez jedną zastępczą belkę. Wynika to z faktu, że stosunek masy prowadnika do masy ramienia górnego w stosowanych obecnie odbierakach jest stosunkowo mały i wynosi w przybliżeniu 1/15. Ponadto środek ciężkości ramienia górnego i prowadnika przemieszczają się po zbliżonych trajektoriach. Prędkości kątowe przemieszczania się ich środków ciężkości są zbliżone, co uzasadnia przyjęcie tych dwóch elementów jako jeden element zastępczy;
3. Efekt tłumienia mechanicznego uwzględniono poprzez tłumiki o charakterze wiskotycznym, ale o liniowych funkcjach prędkości, oraz przez tłumiki o charakterystyce tarcia suchego ze stałą siłą tarcia zależną jedynie od znaku prędkości. Jak wykazało porównanie wyników symulacji i



pomiarów, dotyczących dynamiki drgań pojedynczych belek zawieszonych w przegubach, założenie to jest uzasadnione.

## 1.2. Podział odbieraka na elementy skupione

W celu lepszej prezentacji podziału odbieraka na elementy skupione autorzy posłużyli się jego komputerowym modelem 3D, który został opracowany w programie Autodesk Inventor. Komputerowy model przedstawiono na rysunku 1, gdzie dodatkowo zaznaczono poszczególne elementy skupione wynikające z konstrukcji, jak i fizyki zjawisk.



**Rys. 1.** Komputerowy model 3D: a) odbieraka prądu z oznaczeniem istotnych elementów bezwładnościowych i tłumiących; b) zespołu usprężynowania ślizgacza z zaznaczeniem zastępczych elementów sprężystych i tłumiących w ruchu

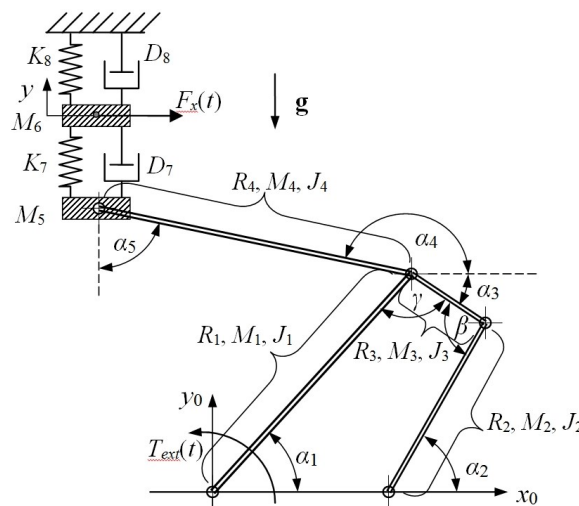
Symbole pokazane na rysunku 1 oznaczają:

- $M_1, J_1$  – masa ramienia dolnego i jego moment bezwładności względem osi obrotu 1;
- $M_2, J_2$  – masa prowadnika ramienia górnego i jego moment bezwładności względem osi obrotu 2;
- $M_3, J_3$  – masa ramienia oznaczonego nr 3 oraz jego moment bezwładności względem osi obrotu 3. Ramię to jest na stałe połączone z ramieniem górnym, ale rozkład masy wzdłuż osi występuje pod innym kątem, stąd wprowadzono osobne parametry;
- $M_4, J_4$  – masa zastępczej belki reprezentującej ramię górne i prowadnik ślizgacza oraz zastępczy moment bezwładności tej belki względem osi obrotu 3;
- $D_1, D_2, D_3, D_4$  i  $D_5$  – zastępcze tłumiki w ruchu obrotowym, które reprezentują tarcie wiskotyczne i tarcie suche odpowiednio w przegubach 1, 2, 3, 4 i 5;
- $M_5$  – masa zespołu usprężynowania ślizgacza;
- $M_6$  – masa zespołu ślizgacza;
- $D_7$  – zastępczy tłumik w ruchu postępowym reprezentujący tarcie wiskotyczne i tarcie suche w zespole usprężynowania ślizgacza;
- $K_7$  – podatność zastępczej sprężyny zespołu usprężynowania ślizgacza w ruchu postępowym.



Schemat układu mechanicznego odbieraka prądu oraz dodatkowe elementy skupione użyteczne w symulacjach dynamicznych przedstawiono na rysunku 2. W schemacie tym uwzględniono zastępczą sprężynę  $K_8$  i zastępczy tłumik  $D_8$  reprezentujący warunki eksperymentu jakim został poddany odbierak. Oprócz wymienionych już na rysunku 2 symboli zdefiniowano kolejne, których znaczenie jest następujące:

- $R_1, \alpha_1$  – długość ramienia dolnego i jego kąt nachylenia do osi  $x_0$ ;
- $R_2, \alpha_2$  – długość prowadnika ramienia górnego i jego kąt nachylenia do osi  $x_0$ ;
- $R_3, \alpha_3$  – długość ramienia nr 3 i jego kąt nachylenia do osi  $x_0$ ;
- $R_4, \alpha_4$  – długość zastępczego ramienia górnego i jego kąt nachylenia do osi  $x_0$ ;
- $\alpha_5$  – kąt pomiędzy ramieniem górnym i osią  $y_0$ ;
- $y, \mathbf{g}$  – odpowiednio współrzędna przemieszczenia środka masy  $M_6$  oraz wektor przyspieszenia ziemskiego,
- $T_{ext}(t)$  zewnętrzny moment działający na odbierak względem osi 1;
- $F_x(t)$  – zewnętrzna siła działająca na zespół usprężynowania w kierunku poziomym (oś  $x$ );
- $K_8, D_8$  – podatność sprężyny zastępczej i tłumika zastępczego reprezentującego w sposób uproszczony interakcję z siecią.



Rys. 2. Schemat układu mechanicznego modelowanego odbieraka z uwzględnieniem oddziaływań lepko-sprężystych

### 1.3. Sformułowanie modelu matematycznego układu

Zgodnie z przyjętą metodą modelowania zastosowano tzw. formalizm Lagrange'a, który rozpoczyna się od dekompozycji układu na elementy skupione i zdefiniowaniu funkcji Lagrange'a, wyrażonej we współrzędnych przyporządkowanych osobno każdemu elementowi, czyli bez uwzględnienia równania więzów. Funkcja Lagrange'a  $L$  jest różnicą sumy koenergii kinetycznych wszystkich elementów bezwładnościowych i sumy energii potencjalnych wszystkich elementów sprężystych. Szczegółowa postać funkcji  $L$  badanego układu to

$$L(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{\alpha}_4, \dot{\alpha}_5, \dot{x}_5, \dot{y}_5, \dot{x}_6, \dot{y}_6, y_7, y_8) = \left( \frac{1}{2} J_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\alpha}_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\alpha}_4^2 + \frac{1}{2} M_5 (\dot{x}_5^2 + \dot{y}_5^2) + \frac{1}{2} M_6 (\dot{x}_6^2 + \dot{y}_6^2) \right) - \left( \frac{1}{2} \frac{y_7^2}{K_7} + \frac{1}{2} \frac{y_8^2}{K_8} \right) \quad (1)$$

gdzie:

$\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{\alpha}_4$  są prędkościami kątowymi odpowiednio ramienia dolnego względem osi 1, prowadnika ramienia górnego względem osi 2, ramienia nr 3 względem osi 3 i ramienia górnego względem osi 3;

$\dot{x}_5, \dot{y}_5, \dot{x}_6, \dot{y}_6$  są składowymi prędkościami w ruchu postępowym odpowiednio dla elementu o masach  $M_5$  i  $M_6$ ;

$y_7, y_8$  oznacza względne przemieszczenie zacisków sprężyny o podatności  $K_7$  i  $K_8$ .



Poszczególne wyrażenia równania (1) reprezentują kolejno: koenergie kinetyczne w ruchu obrotowym ramienia dolnego, prowadnika ramienia górnego, ramienia nr 3 i ramienia górnego. Następne wyrażenia to koenergie kinetyczne w ruchu postępowym odpowiednio zespołu usprężynowania oraz zespołu ślizgacza. Ostatnie wyrażenie w nawiasie to suma energii potencjalnych zespołu usprężynowania oraz zastępczej sprężyny reprezentującej oddziaływanie odbieraka z belką oporową.

Następnie wyznaczono wypadkową funkcję dyssypacji Rayleigha, także we współrzędnych każdego elementu, która ujmuje wszystkie elementy dyssypatywne. Funkcja dyssypacji Rayleigha odbieraka przy uwzględnieniu tylko tarcia wiskotycznego ma postać

$$P_m(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{\alpha}_4, \dot{\alpha}_5, \dot{y}_7, \dot{y}_8) = \frac{1}{2}D_1\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}D_2\dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2}D_3\dot{\alpha}_3^2 + \frac{1}{2}D_4\dot{\alpha}_4^2 + \frac{1}{2}D_5\dot{\alpha}_5^2 + \frac{1}{2}D_7\dot{y}_7^2 + \frac{1}{2}D_8\dot{y}_8^2 \quad (2)$$

gdzie:

$\dot{y}_7$  jest względną prędkością zacisków zastępczego tłumika wzdłuż osi  $y$ ;

$D_1, D_2, D_3, D_4$  i  $D_5$  są współczynnikami tarcia wiskotycznego tłumików w ruchu obrotowym;

$D_7, D_8$  są współczynnikami tarcia wiskotycznego tłumików w ruchu postępowym.

Tarcie suche zostanie dodane w końcowej postaci równania Eulera-Lagrange'a odbieraka.

Następnym krokiem jest sformułowanie równania więzów, które określa relacje pomiędzy współzrzednymi przyporządkowanymi do poszczególnych elementów skupionych a współzrzednymi uogólnionymi reprezentującymi stopnie swobody układu odbieraka. Model odbieraka w tej pracy zgodnie z przyjętymi założeniami upraszczającymi ma dwa stopnie swobody. Są nimi przemieszczenie  $y$  środka masy elementu  $M_6$  oraz kąt obrotu układu ramion odbieraka – założono, iż jest to kąt  $\alpha_1$ . Przy takim założeniu równanie więzów można w formie ogólnej przedstawić jako (nie podano tutaj szczegółowej postaci ze względu na dosyć złożone zapisy zależności trygonometrycznych)

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_2(\alpha_1), & \alpha_3 &= \alpha_3(\alpha_1), & \alpha_4 &= \alpha_4(\alpha_1), & \alpha_5 &= \alpha_5(\alpha_1), & x_5 &= x_5(\alpha_1), \\ y_5 &= y_5(\alpha_1), & x_6 &= x_6(\alpha_1), & y_6 &= y_6(y), & y_7 &= y_7(\alpha_1, y), & y_8 &= y_8(\alpha_1, y) \end{aligned} \quad (3)$$

Kolejnym etapem jest sformułowanie funkcji Lagrange'a (1) i funkcji dyssypacji Rayleigha (2) we współzrzednych uogólnionych przy wykorzystaniu równania więzów (3). W wyniku tego przekształcenia uzyskuje się odpowiednio

$$\begin{aligned} L(\dot{\alpha}_1, \alpha_1, \dot{y}, y) &= \frac{1}{2}J_1\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}J_2(f_2(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \\ &\frac{1}{2}M_3R_1^2\dot{\alpha}_1^2 + R_1R_{3,c}M_3\cos(\alpha_1 - \alpha_3)f_3(\alpha_1)\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}J_3(f_3(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \\ &\frac{1}{2}M_4R_1^2\dot{\alpha}_1^2 + R_1R_{4,c}M_4\cos(\alpha_1 - \alpha_4)f_4(\alpha_1)\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}J_4(f_4(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \\ &\frac{1}{2}M_5R_1^2\dot{\alpha}_1^2 + R_1R_4M_5\cos(\alpha_1 - \alpha_4)f_4(\alpha_1)\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}M_5R_4^2(f_4(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \\ &\frac{1}{2}M_6(R_1^2\sin(\alpha_1)^2\dot{\alpha}_1^2 + 2R_1R_4\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_4)f_4(\alpha_1)\dot{\alpha}_1^2 + R_4^2\sin(\alpha_4)^2(f_4(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2) + \\ &\frac{1}{2}M_6\dot{y}^2 - \frac{1}{2K_7}(y - R_1\sin(\alpha_1) - R_4\sin(\alpha_4(\alpha_1)))^2, \\ f_2(\alpha_1) &= \frac{\partial\alpha_2}{\partial\alpha_1}, & f_3(\alpha_1) &= \frac{\partial\alpha_3}{\partial\alpha_1}, & f_4(\alpha_1) &= \frac{\partial\alpha_4}{\partial\alpha_1}, & f_5(\alpha_1) &= \frac{\partial\alpha_5}{\partial\alpha_1} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P_m(\dot{\alpha}_1, \dot{y}) &= \frac{1}{2}D_1\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}D_2(f_2(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}D_3(f_3(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}D_4(f_4(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}D_5(f_5(\alpha_1))^2\dot{\alpha}_1^2 + \\ &\frac{1}{2}D_7(\dot{y} - R_1\cos(\alpha_1)\dot{\alpha}_1 - R_4\cos(\alpha_4(\alpha_1))f_4(\alpha_1)\dot{\alpha}_1)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:



$R_{3,c}$  jest odległością od osi 3 do środka ciężkości ramienia nr 3,

$R_{4,c}$  jest odległością od osi 3 do środka ciężkości zastępczego ramienia górnego.

Ogólna postać modelu matematycznego układu wyznaczona na podstawie równania Eulera-Lagrange'a wyrażona jest w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\dot{\alpha}_1, \alpha_1, \dot{y}, y)}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial L(\dot{\alpha}_1, \alpha_1, \dot{y}, y)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial P_m(\dot{\alpha}_1, \dot{y})}{\partial \dot{\alpha}_1} &= Q_\alpha(t), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\dot{\alpha}_1, \alpha_1, \dot{y}, y)}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L(\dot{\alpha}_1, \alpha_1, \dot{y}, y)}{\partial y} + \frac{\partial P_m(\dot{\alpha}_1, \dot{y})}{\partial \dot{y}} &= Q_y(t), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$Q_\alpha$  i  $Q_y$  są tzw. siłami uogólnionymi wynikającymi z zewnętrznych sił i momentów odpowiednio przetransformowanych z wykorzystaniem pochodnych współrzędnych poszczególnych elementów względem współrzędnych uogólnionych.

Zakładając, że na odbierak działają siły grawitacji, siła zewnętrzna  $F_x(t)$  przyłożona do masy  $M_6$  oraz moment zewnętrzny  $T_{ext}(t)$  względem osi 1, szczegółowa postać sił uogólnionych jest następująca

$$\begin{aligned} Q_\alpha(\alpha_1, t) &= M_1 R_{1,c} g \cos(\alpha_1) + M_2 R_{2,c} g f_2(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + (R_1 \cos(\alpha_1) + R_{3,c} f_3(\alpha_1) \cos(\alpha_3)) M_3 g + \\ &+ (R_1 \cos(\alpha_1) + R_{4,c} f_4(\alpha_1) \cos(\alpha_4)) M_4 g + (R_1 \cos(\alpha_1) + R_4 \cos(\alpha_4) f_4(\alpha_1)) M_5 g + \\ &+ (R_1 \cos(\alpha_1) + R_4 f_4(\alpha_1) \cos(\alpha_4)) M_6 g - (R_1 \sin(\alpha_1) + R_4 f_4(\alpha_1) \sin(\alpha_4)) F_x(t) + T_{ext}(t); \\ Q_y(t) &= M_6 g \end{aligned} \quad (7)$$

Analizując wzór (7) należy stwierdzić, że w równaniu dynamiki obrotu, siły grawitacji przekładają się na momenty zależne od kąta obrotu ramion odbieraka. W przypadku ramienia nr 3 i ramienia górnego wpływ sił grawitacji jest bardziej złożony, gdyż środki ciężkości tych ramion nie poruszają się po stałym promieniu. Po wykonaniu stosownego różniczkowania funkcji Lagrange'a i funkcji dyssypacji Rayleigha w układzie równań (6) otrzymuje się:

$$J_z(\alpha_1) \ddot{\alpha}_1 + M_6 (R_1 \cos(\alpha_1) + R_4 \cos(\alpha_4) f_4(\alpha_1)) \ddot{y} + h_\alpha(\alpha_1) \dot{\alpha}_1^2 + D_\alpha(\alpha_1) \dot{\alpha}_1 = Q_\alpha(\alpha_1, t), \quad (8)$$

$$M_6 \ddot{y} + M_6 (R_1 \cos(\alpha_1) + R_4 \cos(\alpha_4) f_4(\alpha_1)) \ddot{\alpha}_1 + h_y(\alpha_1) \dot{\alpha}_1^2 + \left( \frac{1}{K_7} + \frac{1}{K_8} \right) y + (D_7 + D_8) \dot{y} = Q_y(t) \quad (9)$$

Wyrażenie  $J_z(\alpha_1)$  może być interpretowane jako zastępczy moment bezwładności układu mechanicznego odbieraka. Należy zwrócić uwagę, że funkcja ta jest zależna od kąta obrotu, co wynika z faktu, iż środki ciężkości skupionych mas oraz niektórych ramion odbieraka przemieszczają się po trajektorii o zmiennym promieniu. Wyrażenie  $h_\alpha(\alpha_1) \dot{\alpha}_1^2$  reprezentuje momenty działające na układ w wyniku przyspieszenia, jakie te masy doznają w kierunku prostopadłym do toru przemieszczania się ich środków ciężkości. Przyspieszenia te są proporcjonalne do kwadratu prędkości kątowej i występują nawet jeśli przyspieszenia w kierunku stycznym są równe zero. Wyrażenie  $D_\alpha(\alpha_1)$  reprezentuje współczynnik tłumienia w ruchu obrotowym odbieraka, który jest generalnie nieliniową funkcją prędkości kątowej. Wyrażenie  $h_y(\alpha_1) \dot{\alpha}_1^2$  reprezentuje siłę jaka działa na masę  $M_6$  na skutek przyspieszeń prostopadłych do trajektorii ruchu odbieraka.

Współczynniki  $J_z(\alpha_1)$ ,  $h_\alpha(\alpha_1)$ ,  $h_y(\alpha_1)$  w równaniach (8) i (9) są dosyć złożonymi funkcjami o postaci:

$$\begin{aligned} J_z(\alpha_1) &= J_1 + J_2 (f_2(\alpha_1))^2 + J_3 (f_3(\alpha_1))^2 + J_4 (f_4(\alpha_1))^2 + \\ &+ M_3 R_1^2 + 2R_1 R_{3,c} M_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_3(\alpha_1)) f_3(\alpha_1) + M_4 R_1^2 + 2R_1 R_{4,c} M_4 \cos(\alpha_1 - \alpha_4(\alpha_1)) f_4(\alpha_1) + \\ &+ M_5 R_1^2 + 2R_1 R_4 M_5 \cos(\alpha_1 - \alpha_4(\alpha_1)) f_4(\alpha_1) + M_5 R_4^2 (f_4(\alpha_1))^2 + \\ &+ M_6 R_1^2 + 2R_1 R_4 M_6 \cos(\alpha_1 - \alpha_4(\alpha_1)) f_4(\alpha_1) + M_6 R_4^2 (f_4(\alpha_1))^2 \end{aligned} \quad (10)$$



$$\begin{aligned}
 h_x(\alpha_1) = & J_2 f_2(\alpha_1) \frac{\partial f_2(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \\
 & - R_1 R_{3,c} M_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) (1 - f_3(\alpha_1)) f_3(\alpha_1) + R_1 R_{3,c} M_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_3) \frac{\partial f_3(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + J_3 f_3(\alpha_1) \frac{\partial f_3(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \\
 & - R_1 R_{4,c} M_4 \sin(\alpha_1 - \alpha_4) (1 - f_4(\alpha_1)) f_4(\alpha_1) + R_1 R_{4,c} M_4 \cos(\alpha_1 - \alpha_4) \frac{\partial f_4(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + J_4 f_4(\alpha_1) \frac{\partial f_4(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \\
 & - R_1 R_4 M_5 \sin(\alpha_1 - \alpha_4) (1 - f_4(\alpha_1)) f_4(\alpha_1) + R_1 R_4 M_5 \cos(\alpha_1 - \alpha_4) \frac{\partial f_4(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + M_5 R_4^2 f_4(\alpha_1) \frac{\partial f_4(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \\
 & - R_1 R_4 M_6 \sin(\alpha_1 - \alpha_4) (1 - f_4(\alpha_1)) f_4(\alpha_1) + R_1 R_4 M_6 \cos(\alpha_1 - \alpha_4) \frac{\partial f_4(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + M_6 R_4^2 f_4(\alpha_1) \frac{\partial f_4(\alpha_1)}{\partial \alpha_1}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$h_y(\alpha_1) = M_6 \left( -R_1 \sin(\alpha_1) - R_4 \sin(\alpha_4(\alpha_1)) f_4(\alpha_1)^2 + R_4 \cos(\alpha_4(\alpha_1)) \frac{\partial f_4(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right) \tag{12}$$

Funkcje te mają istotny wpływ na właściwości dynamiczne odbieraka, stąd w dalszej części tej pracy po wyznaczeniu parametrów wykreślono ich kształt.

## 2. ZAGADNIENIA WYZNACZANIA PARAMETRÓW OBWODOWYCH

### 2.1. Wyznaczanie parametrów elementów bezwładnościowych i sprężystych

Komputerowy model 3D badanego odbieraka został opracowany w programie Autodesk Inventor. To pozwoliło na wykorzystanie odpowiednich procedur zaimplementowanych w programie do wyznaczenia właściwości bezwładnościowych (momenty bezwładności, środki ciężkości, masy). Wartości mas niektórych elementów zostały sprawdzone na drodze eksperymentalnej. W tabeli 1 pokazano najbardziej istotne parametry bezwładnościowe odbieraka typu 160 EC. W przypadku sprężyn w zespole usprężynowania ich podatności zostały wyznaczone na drodze eksperymentalnej poprzez statyczne pomiary. Wypadkowa podatność (równoległe połączenie 4 sprężyn) wynosi  $K_7 = 2,1 \cdot 10^{-6}$  m/N. Podatność sprężyny zastępczej  $K_8$  nie jest znana, zatem w modelu jest ona traktowana jako parametr.

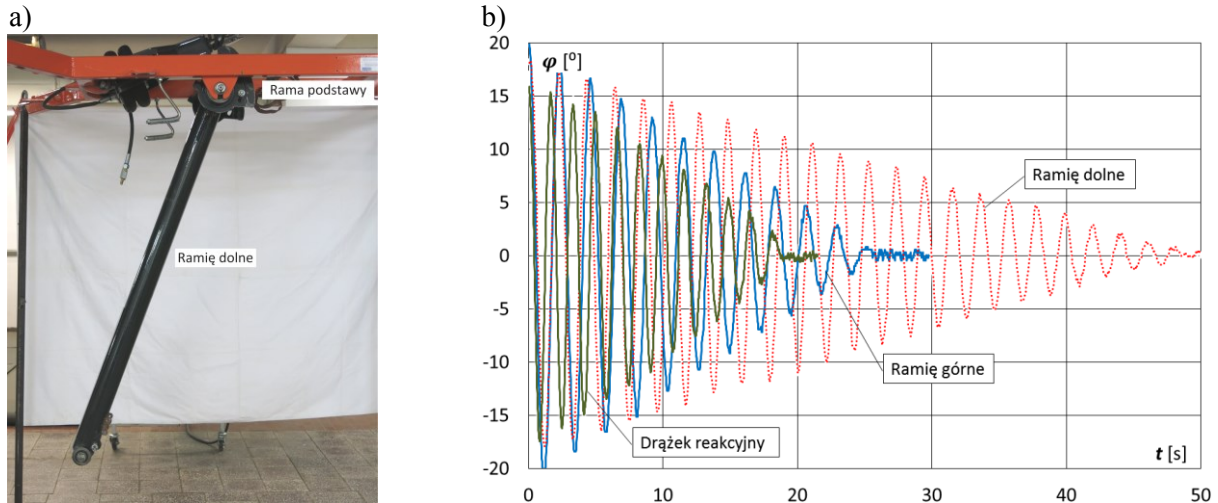
**Tab. 1.** Wartości mas i momentów bezwładności istotnych dla dynamiki elementów odbieraka

Nazwa elementu	Masa [kg]	Moment bezwładności [kg·m <sup>2</sup> ]
Ramię dolne	38,5	12,8 (względem osi 1)
Prowadnik ramienia górnego (drażek reakcyjny)	2,9	0,65 (względem osi 2)
Ramię nr 3	3,8	0,079 (względem osi 3)
Ramię górne	14,3	10,0 (względem osi 3)
Zespół usprężynowania	3,4	-
Zespół ślizgacza	12,2	-

### 2.2. Wyznaczanie parametrów elementów dyssypatywnych

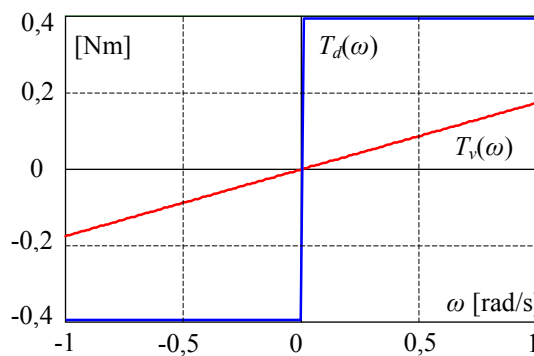
Parametry zastępczych tłumików wyznaczono na drodze doświadczalnej. W tym celu dokonano szeregu badań eksperymentalnych na poszczególnych elementach odbieraka. Istota tych eksperymentów polegała na wyznaczeniu osobno współczynników tłumienia poszczególnych węzłów mocowania przegubowego odbieraka. Na rysunku 3a pokazano sposób zamocowania ramienia dolnego w celu wyznaczenia współczynnika tłumienia  $D_1$ . Generalnie, procedura badawcza polegała na utworzeniu wahadła fizycznego z poszczególnych ramion, belek i drażków odbieraka przy wyznaczeniu osobno parametrów  $D_1, D_2, D_3, D_4$  i  $D_5$  oraz układu drgającego w ruchu postępowym przy wyznaczaniu współczynnika  $D_7$ . Na rysunku 3b pokazano wyniki drgań ramienia dolnego, ramienia górnego oraz prowadnika ramienia górnego w charakterze wahadła fizycznego.

Analiza dynamiki drgań przebiegów z rysunku 3b wykazuje, że zjawisko tłumienia zależy od dwóch komponentów. Są to tarcie suche i tarcie wiskotyczne. Na podstawie odpowiednich procedur numerycznych [13] możliwe jest wyznaczenie dominujących składników tarcia.



Rys. 3. Identyfikacja parametrów układu kinematycznego odbieraka prądu: a) wyznaczanie współczynnika tłumienia ramienia dolnego odbieraka w ruchu obrotowym; b) przebiegi drgań wybranych elementów

Na rysunku 4 pokazano charakterystyki tarcia wiskotycznego  $T_v(\omega)$  i suchego  $T_d(\omega)$  – moment w funkcji prędkości kątowej dla zastępczego tłumika  $D_1$  w ruchu obrotowym.

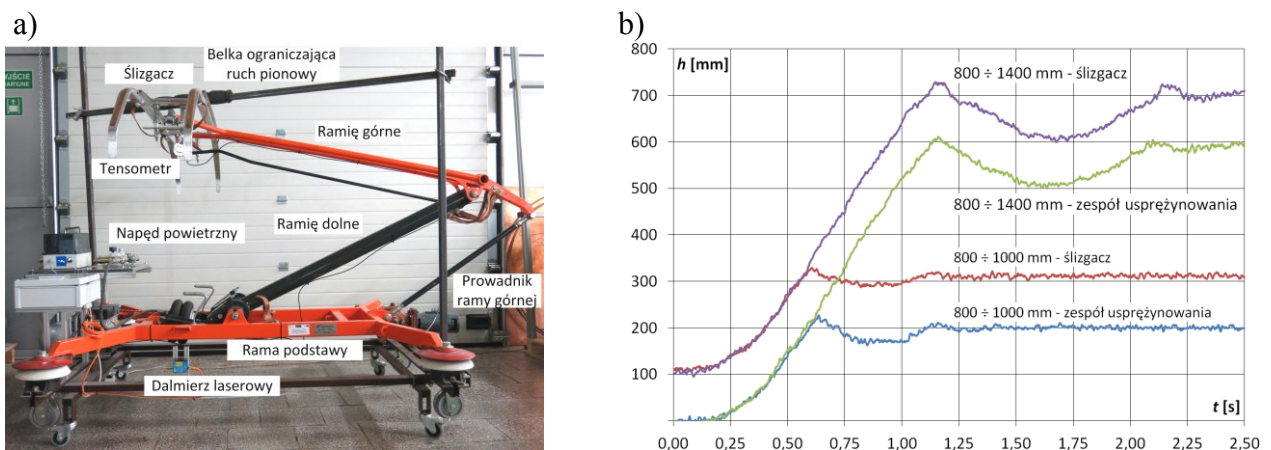


Rys. 4. Charakterystyki tarcia wiskotycznego  $T_v(\omega)$  i suchego  $T_d(\omega)$  – moment w funkcji prędkości kątowej dla zastępczego tłumika  $D_1$  w ruchu obrotowym

### 3. BADANIA EKSPERYMENTALNE I SYMULACYJNE ODBIERAKA

#### 3.1. Stanowisko pomiarowe do badań dynamicznych

Do badań dynamicznych odbieraka opracowano stanowisko laboratoryjne (rysunek 5a), na którym rejestrowano przebieg ruchu podczas unoszenia odbieraka do wysokości ograniczonej sztywną belką.



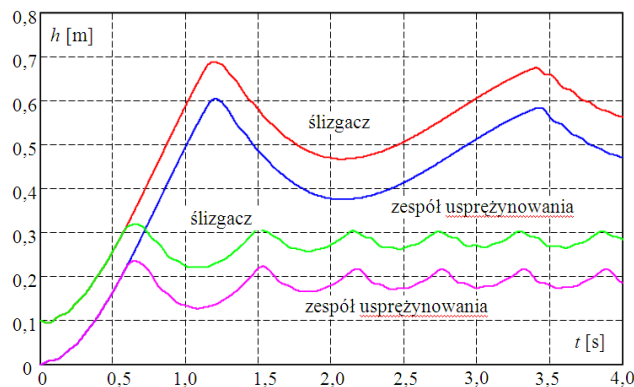
Rys. 5. Badanie unoszenia odbieraka od minimalnej wysokości roboczej do wysokości ograniczonej belką: a) widok stanowiska pomiarowego; b) przebiegi zmian wysokości ślizgacza i zespołu usprężynowania



Badanie to odpowiada procedurze sprawdzania prawidłowości działania napędu powietrznego, opisanej w PN-K-91001 oraz PN-EN-50206-1. Pomiary przeprowadzono w zakresie wysokości roboczych odbieraka prądu. Wybrane wyniki przedstawiono na rysunku 5b.

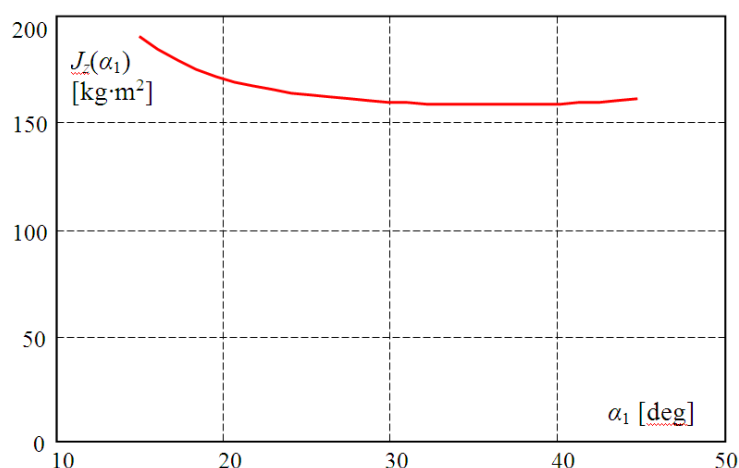
### 3.2. Symulacje komputerowe

Symulacje komputerowe unoszenia odbieraka przy zadanym momencie obrotowym przedstawiono na rysunku 6. Dynamika unoszenia odbieraka od wysokości początkowej do wysokości uderzenia ślizgacza w belkę oporową jest zgodna z wynikami pomiarów. W chwili uderzenia ślizgacza o belkę model odbiega w pewnym stopniu od rzeczywistego układu. W rzeczywistym układzie część energii wnika do belki oporowej i nie jest zwracana do odbieraka, czego nie uwzględnia model.



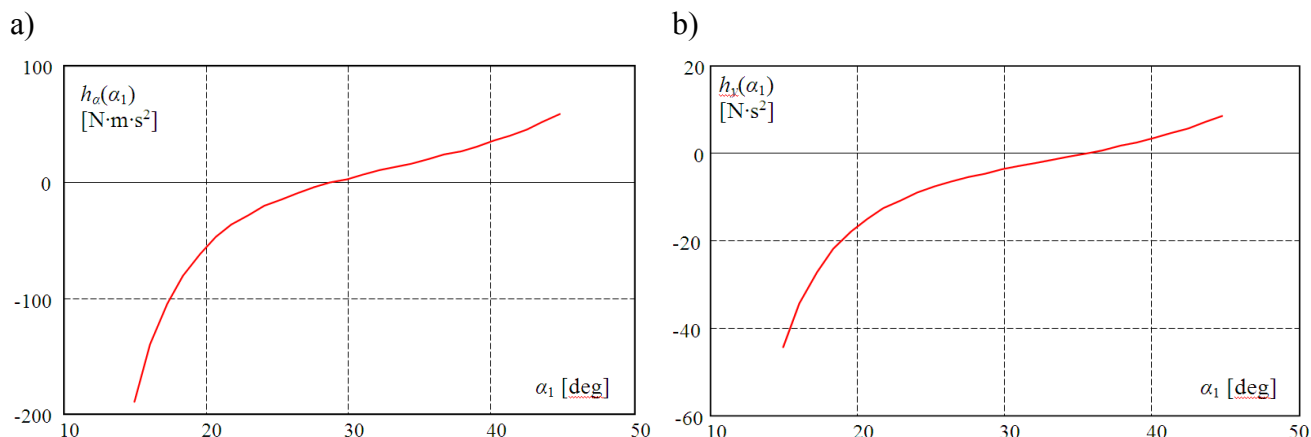
Rys. 6. Wyniki symulacji unoszenia odbieraka od min. wysokości roboczej do wysokości ograniczonej belką

Na rysunkach 7 i 8 pokazano charakterystyki  $J_z(\alpha_1)$ ,  $h_\alpha(\alpha_1)$ ,  $h_y(\alpha_1)$  w funkcji kąta obrotu ramienia dolnego odbieraka. Charakterystyki te wyznaczono w zakresie od minimalnego uniesienia roboczego (około 800 mm) do maksymalnego uniesienia roboczego (1800 mm) nakładek stykowych względem ramy odbieraka, czemu odpowiada zakres kątów od 17 do 42°. Z wykresów tych wypływają następujące wnioski. Zastępczy moment bezwładności odbieraka różni się w sposób istotny przy skrajnych roboczych uniesieniach. Model odbieraka dla potrzeb diagnostyki musi to uwzględniać. W zakresie kątów 30÷40° moment bezwładności jest praktycznie stały i zasadne jest posługiwanie się modelem o stałych parametrach. Zmiany charakterystyk  $h_\alpha(\alpha_1)$ ,  $h_y(\alpha_1)$ , są znaczne i na dodatek mają wartości ujemne i dodatnie. Wpływ tych charakterystyk na właściwości dynamiczne odbieraka zależy od kwadratu prędkości kątowej. Przy dynamicznej interakcji się odbierak występują dodatkowe momenty obrotowe i siły. Wykresy te wskazują, że praca odbieraka w zakresie kątów 30÷35° sprzyja zmniejszaniu tych dodatkowych sił i momentów.



Rys. 7. Charakterystyka zastępczego momentu bezwładności  $J_z(\alpha_1)$  w funkcji kąta obrotu ramienia dolnego odbieraka





Rys. 8. Charakterystyki współczynników wyrażeń (8) i (9) w funkcji kąta obrotu ramienia dolnego odbieraka:  
a)  $h_\alpha(\alpha_1)$ ; b)  $h_\beta(\alpha_1)$

## WNIOSKI

Przedstawiony w pracy nowy model odbieraka wraz z programem symulacyjnym planuje się wykorzystać do monitoringu odbieraków na linii kolejowej w warunkach eksploatacyjnych w celu dokładniejszej oceny stanu technicznego odbieraków. Wykonany własny program symulacyjny umożliwia badania wrażliwości odbieraka na zmianę jego parametrów konstrukcyjnych i eksploatacyjnych. Opracowany model umożliwia znacznie szerszą analizę niż ma to miejsce w prostszych, dwuwymiarowych opisach, np. poziome i pionowe składowe siły nacisku, kąt obrotu ślizgacza, itp. Planowane jest przedstawienie rozwiniętego oprogramowania modelującego odbierak, sieć jezdnią jak i współpracę tych zespołów w następnych publikacjach.

## Streszczenie

Niewłaściwa współpraca odbieraka prądu i sieci trakcyjnej, w trudnych warunkach lokalnych, może prowadzić do uszkodzenia sieci trakcyjnej i pantografu. W ramach rozwoju metod monitoringu i diagnostyki dla tych podsystemów, tworzone są nowe i dokładniejsze narzędzia symulacyjne, których zakres obejmuje modelowanie zarówno napowietrznej sieci trakcyjnej i pantografu, a także ich dynamicznego oddziaływania. Głównym celem jest dokładniejsza analiza wyników pomiarów uzyskanych z pilotażowego stanowiska monitoringu odbieraków prądu, w celu poprawy wiarygodności oceny monitorowanych urządzeń. W artykule zaproponowano model odbieraka prądu, zbudowany na podstawie metody energetycznej Lagrange'a, dzieląc jego strukturę mechaniczną na zestaw skupionych elementów zachowawczych i dyssypatywnych. Komputerowy model 3D odbieraka typu 160EC powstał w programie Inventor. Przeprowadzone symulacje porównano z wynikami eksperymentalnymi.

**Słowa kluczowe:** transport szynowy, monitoring i diagnostyka, odbierak prądu, niezawodność i bezpieczeństwo ruchu, modelowanie matematyczne.

## Mathematical modeling of dynamics of the railway current collector for diagnostics

### Abstract

Improper cooperation of current collector and the overhead contact line, in severe local conditions, may lead to damage of the catenary or pantograph. As a part of the development of diagnostic and monitoring systems for these subsystems, the novel and more accurate simulation tools are created, the scope of which includes modeling of both the overhead catenary and the pantograph, as well as their dynamic interaction. The main objective is more accurate analysis of the measurement results to improve reliability of evaluation of the monitored devices. This paper proposes a model of the current collector, sharing its mechanical structure on a set of inertial or resilient conservative and dissipative elements a mathematical model was created based on the Lagrange energy method. 3D computer model of the current collector type 160EC was made in Inventor. Simulations were performed, the results of which were compared with the results of selected experimental tests.

**Keywords:** condition-based maintenance, current collector, fault diagnosis, pantograph, railway transportation



**BIBLIOGRAFIA**

1. Alberto A., Benet J., Arias E., Cebrian D., Rojo T., Cuartero F., A high performance tool for the simulation of the dynamic pantograph–catenary interaction. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 3(79), Elsevier 2008 pp. 652–667.
2. Jardine A. K. S., Lin D., Banjevic D., A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 20, no. 7, Oct. 2006.
3. Benet J., Cuartero N., Cuartero F., Rojo T., Tendero P., Arias E., An advanced 3D-model for the study and simulation of the pantograph catenary system. *Transportation Research Part C* 36 (2013) 138–156.
4. Szelaĝ A., Maciołek T., A 3 kV DC electric traction system modernisation for increased speed and trains power demand – problems of analysis and synthesis, *Przegląd Elektrotechniczny*, 89 (2013), nr 3a, 21-28.
5. Ning Zhou, Wei-hua Zhang, Rui-ping Li, Dynamic performance of a pantograph-catenary system with the consideration of the appearance characteristics of contact surfaces. *Journal of Zhejiang University-Science A*. 2011 12(12).
6. Pombo J., Ambrósio J., Environmental and track perturbations on multiple pantograph interaction with catenaries in high-speed trains. *Computers and Structures*, 124 (2013).
7. Steimel A., *Elektrische Triebfahrzeuge und ihre Energieversorgung: Grundlagen und Praxis*. Germany: Oldenbourg Industrieverlag, 2014.
8. Koc W., Wilk A., Investigations of methods to measure longitudinal forces in continuous welded rail tracks using the tamping machine. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol. 223, No F1, 2009.
9. Mizan M., Karwowski K., Karkosiński D., Monitoring odbieraków prądu w warunkach eksploatacyjnych na linii kolejowej, *Przegląd Elektrotechniczny*, (2013), nr 12, 154-160.
10. Cho Y. H., Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 3, pp. 433–454, Aug. 2008.
11. Tanarro F., Fuerte V., OHMS-real-time analysis of the pantograph-catenary interaction to reduce maintenance costs. (RCM 2011), 5th IET Conference on, 2011.
12. Schöbel A., Maly T., Operational fault states in railways. *Eur. Transp. Res. Rev.*, vol. 4, no. 2, pp. 107–113, Jun. 2012.
13. Chenglin Hu, Feng Wan, Parameter identification of a model with Coulomb friction for a real Inverted Pendulum System, *Control and Decision Conference, 2009. CCDC '09. Chinese, 2009*.
14. Przebieg procesu wdrażania węglowych nakładek ślizgowych na pantografach pojazdów trakcyjnych przewoźników korzystających z sieci trakcyjnej zarządzanej przez PKP PLK. 2012.
15. Jarzebowicz L., Judek S., 3D Machine Vision System for Inspection of Contact Strips in Railway Vehicle Current Collectors. in *2014 International Conf. on Applied Electronics, Pilsen, 2014*.