

## Possibility of estimating the reliability of diesel engines by applying the theory of semi-Markov processes and making operational decisions by considering reliability of diagnosis on technical state of this sort of combustion engines

*The paper presents semi-Markov models of technical state transitions for diesel engines, useful for determining the reliability of engines. A possibility of application of a three-state model with a simplified matrix function, or even a two-state model, to determine reliability of the engines, has been described herein on examples of known from literature semi-Markov models, for the case when appropriate diagnosing systems (SDG) are used to identify the technical condition of the engines considered as diagnosed systems (SDN). A risk function and a renewal (restitution) function have been proposed for developing a two-state model of engine state transitions. An opportunity for considering the reliability of diagnosis for making operational decisions by applying the statistical decision theory, has also been presented. Conditional probability  $P(s/K_j)$  is recognized as a measure of reliability of diagnosis.*

Key words: *diagnostics, reliability, semi-Markov process, diesel engine, statistics, diagnosed system, diagnosing system, diagnostic system*

### Możliwość oszacowania niezawodności silników o zapłonie samoczynnym z zastosowaniem teorii procesów semi-Markowa oraz podejmowania decyzji eksploatacyjnych z uwzględnieniem wiarygodności diagnozy o stanie technicznym tego rodzaju silników spalinyowych

*W artykule przedstawiono semimarkowskie modele zmian stanów technicznych silników o zapłonie samoczynnym, przydatne do określenia niezawodności tych silników. Wykazano, na przykładzie znanych z literatury modeli semimarkowskich, że do określenia niezawodności tych silników możliwe jest zastosowanie modelu trójstanowego o uproszczonej macierzy funkcyjnej, a nawet modelu dwustanowego, przy zastosowaniu odpowiednich systemów diagnozujących (SDG) do identyfikacji stanu technicznego wspomnianych silników jako systemów diagnozowanych (SDN). Do opracowania dwustanowego modelu zmian stanów silników zaproponowano wykorzystanie funkcji ryzyka i funkcji intensywności odnowy (restitucji). Przedstawiono także możliwość uwzględnienia wiarygodności diagnozy przy podejmowaniu decyzji eksploatacyjnych w sytuacji zastosowania statystycznej teorii decyzji. Za miarę wiarygodności diagnozy przyjęto prawdopodobieństwo warunkowe  $P(s/K_j)$ .*

Słowa kluczowe: *osady wewnętrzne we wtryskiwaczach paliwa, silniki z zapłonem samoczynnym, układy wtrysku paliwa*

## 1. Introduction

In the operating phase of marine diesel engines, particularly the main ones (engines employed in propulsion systems of ships), it is important to plan and control their operation. Planning requires having a knowledge of engine operation reliability to be expected during performance of transport tasks by a ship. In order to control the engine operation, when implementing the approved plan of operation, it is significant to know a complete diagnosis (instantaneous diagnosis, prognosis and genesis) that enables prediction of not only the technical state, but also the loads which engines under operation can be subjected to.

Considering the definitions of reliability of machines, provided in many publications [18, 21, 26], reliability of diesel engines can be defined in a similar way, as capability of the engines to convert energy in full range of loads, which they were fit to in the designing and manufacturing phases. And the probability of proper energy conversion for all performances in defined time and determined operating conditions can be recognized as a measure of so understood reliability of the engines [2, 4, 12, 21, 26].

## 1. Wstęp

W fazie eksploatacji okrętowych silników o zapłonie samoczynnym, zwłaszcza głównych (silników stosowanych do napędu statków), istotne jest planowanie eksploatacji oraz sterowanie nią. Planowanie wymaga znajomości niezawodności działania silników, jakiej należy się spodziewać podczas wykonywania zadań transportowych przez statek. Natomiast do sterowania eksploatacją silników, w czasie realizacji przyjętego planu eksploatacji, istotna jest znajomość pełnej diagnozy (diagnozy chwilowej, prognozy i genezy), która umożliwia przewidywanie nie tylko stanu technicznego, lecz także to, jakim obciążeniami mogą być poddane silniki podczas działania.

Uwzględniając definicje niezawodności urządzeń podane w wielu publikacjach [18, 21, 26], można w odniesieniu do silników o zapłonie samoczynnym podobnie zdefiniować ich niezawodność jako zdolność silników do przetwarzania energii w całym zakresie obciążeń, do których zostały przystosowane w fazie projektowania i wytwarzania. Za miarę tak rozumianej niezawodności silników można przyjąć prawdopodobieństwo poprawnego przetwarzania przez nie energii

It can be assumed, like in publications [3, 6, 7], that any diesel engine works reliably if its technical condition can be classified to the class (set) of states of full ability and denoted as  $s_1$ . If the engine, due to its technical condition, cannot be loaded to the maximum extent, but only to the extent limited by the rated power value [12, 22], its state must be recognized as a state of partial ability ( $s_2$ ). When the engine, due to its significant wear, can be loaded only to the extent limited by the continuous operating power value [12, 22], it should be assumed that its technical state does not satisfy operating requirements and must be regarded as a state of disability ( $s_3$ ).

The mentioned technical states of this sort of engines and their time durations can be found by using appropriate diagnosing systems (SDG), e.g. for marine engines, such as CoCoS (*Computer Controlled Surveillance System*) of MAN company, or CBM (*Condition-Based Maintenance*) of Wartsila company, videoskope of Everest company and others [20, 27–29]. Obtained through applying the technical diagnostics information on duration of state  $s_1$  and the moment of losing it, as well as on the moments of states  $s_2$  and  $s_3$  occurring, and their duration, enables the application of the theory of semi-Markov processes for determining the reliability of the engines [6–8]. When the systems SDG are so improved that they enable development of a complete diagnosis (pDG) comprising not only of a reliable instantaneous diagnosis, but also a prognosis of duration of state  $s_1$ , it is possible to obtain a graph of transitions of engine states  $s_1, s_2, s_3$ , which is simplified in comparison to the graph described in publications [5, 7, 11, 25].

## 2. Possible semi-Markov models of engine state transitions

Building a semi-Markov model of a real process of technical state changes which proceed in the operating phase of a diesel engine, is a prerequisite for applying the theory of the semi-Markov processes. The properties of the models are as follows [4, 8, 19, 21, 23, 24]:

- 1) Markov condition is satisfied when the future development of states of any engine (the process of technical state changes), for which the semi-Markov model was built, depends only on its state at the given time, not on engine functioning in the past, so that its future does not depend on the past, but on the present;
- 2) random variables  $T_i$  (denoting the time duration of state  $s_i$  regardless of which state is next) and  $T_{ij}$  (denoting the time duration of state  $s_i$ , provided that the next state of the process is state  $s_j$ ) have distributions different than exponential.

In the case of marine main engines it can be recognized that the Markov condition is satisfied because the following hypothesis was proved in research [3, 7]: *predicting the technical state of any diesel engine at the time  $\tau_n + t$ , when only its state at the moment  $\tau_n$  is known, is possible, because the engine state considered at any moment  $\tau_n$  ( $n = 0, 1, \dots, m$ ;  $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$ ) indeed depends on the directly preceding state, not on the states that were before nor their time duration.*

w całym polu osiągow, w określonym czasie i w ustalonych warunkach ich eksploatacji [2, 4, 12, 21, 26].

Można przyjąć, podobnie jak w publikacjach [3, 6, 7], że każdy silnik o zapłonie samoczynnym działa niezawodnie, jeśli jego stan techniczny może być zaliczony do klasy (zbioru) stanów pełnej zdadności i oznaczanej  $s_1$ . Gdy silnik ze względu na jego stan techniczny nie może być obciążony w całym zakresie, a jedynie w obszarze ograniczonym charakterystyką zewnętrzną mocy znamionowej [12, 22], to należy uznać, że znajduje się on w stanie częściowej zdadności ( $s_2$ ). Gdy silnik z powodu znacznego zużycia może być obciążony jedynie w zakresie ograniczonym charakterystyką zewnętrzną mocy eksploatacyjnej trwałej [12, 22], należy przyjąć, że jego stan techniczny nie odpowiada wymaganiom eksploatacyjnym i trzeba go uznać za stan niezdadności ( $s_3$ ).

Wymienione stany techniczne tego rodzaju silników i przedziały czasu ich trwania można ujawnić, stosując odpowiednie systemy diagnozujące (SDG), np. w odniesieniu do silników okrętowych, takie jak: CoCoS (*Computer Controlled Surveillance System*) firmy MAN, bądź CBM (*Condition-Based Maintenance*) firmy Wartsila, wideoskop firmy Everest i inne [20, 27–29]. Uzyskane w wyniku zastosowania diagnostyki technicznej informacje o czasie trwania stanu  $s_1$  oraz chwili jego utracenia, jak również o chwilach pojawiania się stanów  $s_2$  i  $s_3$  oraz czasie ich trwania, umożliwiają zastosowanie teorii procesów semi-Markowa do określenia niezawodności silników [6–8]. W sytuacji udoskonalenia wspomnianych SDG, tak aby umożliwiły opracowanie pełnej diagnozy (pDG), która zawierałaby nie tylko wiarygodną diagnozę chwilową, lecz także prognozę trwania stanu  $s_1$ , można uzyskać graf zmian wspomnianych stanów  $s_1, s_2, s_3$  tych silników, uproszczony w porównaniu do grafu opisanego w publikacjach [5, 7, 11, 25].

## 2. Możliwe modele semi-Markowa zmian stanów technicznych silnika

Skonstruowanie modelu semi-Markowa rzeczywistego procesu zmian stanów technicznych zachodzących w fazie eksploatacji silników o zapłonie samoczynnym jest warunkiem koniecznym zastosowania teorii procesów semi-Markowa. Modele te cechuje to, że [4, 8, 19, 21, 23, 24]:

- 1) spełniony jest warunek Markowa, aby w przyszłości ewolucja stanów dowolnego silnika (procesu zmian jego stanów technicznych), dla którego został zbudowany semimarkowski model, zależała tylko od jego stanu w danej chwili, a nie od funkcjonowania tego silnika w przeszłości, a więc aby jego przyszłość nie zależała od jego przeszłości tylko od terażniejszości,
- 2) zmienne losowe  $T_i$  (oznaczające czas trwania stanu  $s_i$  niezależnie od tego, jaki stan nastąpi po nim) oraz  $T_{ij}$  (oznaczające czas trwania stanu  $s_i$  pod warunkiem, że następnym stanem tego procesu będzie stan  $s_j$ ) mają rozkłady inne niż wykładnicze.

W odniesieniu do okrętowych silników głównych można uznać, że spełniony jest warunek Markowa, ponieważ w badaniach empirycznych potwierdzona została hipoteza [3, 7]: *prognozowanie stanu technicznego dowolnego silnika spa-*

Additionally, the studies show that random variables like time of proper operation ( $T_{ij}$ ) and renewal time ( $T_0$ ) of this sort of engines can be described with gamma and normal distributions, and the Weibull-Gniedenko distribution as well [1, 2, 26].

Semi-Markov process is fully defined if its function matrix is known [3, 7, 18]

$$\mathbf{Q}(t) = [Q_{ij}(t)] \quad (1)$$

whose non-zero elements are interpreted as follows:

$$Q_{ij}(t) = P\{W(\tau_{n+1}) = s_j, \tau_{n+1} - \tau_n < t \mid W(\tau_n) = s_i\} = p_{ij} F_{ij};$$

$$s_i, s_j \in S; i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$$

where:  $p_{ij}$  – probability of state transition from  $s_i$  to  $s_j$ ,  $F_{ij}$  – distribution of random variable  $T_{ij}$ , and when the initial distribution is given

$$p_i = P\{W(0) = s_i\}, s_i \in S; i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

The paper [4] presents a model of state transition for diesel engines  $\{W(t); t \geq 0\}$ , whose values are elements of the set of classes (subsets) of technical conditions called states (which are of essential meaning in the operating practice):

$$S = \{s_i; i = 1, 2, 3, 4\} \quad (3)$$

described as follows:

- $s_1$  – state of full (total) ability
- $s_2$  – state of partial (not full, not total) ability
- $s_3$  – state of disability for task,
- $s_4$  – state of full (total) disability.

Distinguishing states  $s_i \in S$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) is very important for diesel engines as it is extremely significant to use them in state  $s_1$  or  $s_2$ .

In this case the initial distribution of the process  $\{W(t); t \geq 0\}$  is defined as follows:

$$p_1 = P\{W(0) = s_1\} = 1 \cap p_i = P\{W(0) = s_i\} = 0$$

$$\text{for } i = 2, 3, 4 \quad (4)$$

while its function matrix has the form:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & 0 & 0 \\ Q_{21}(t) & 0 & Q_{23}(t) & 0 \\ Q_{31}(t) & 0 & 0 & Q_{34}(t) \\ Q_{41}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

The model considers situations where the user can take the risk to perform the task when the engine finds in state  $s_2$  and even take the risk to perform some tasks when its state is  $s_3$ . In the operating practice, it is difficult to distinguish unambiguously state  $s_1$  from state  $s_2$ . This refers particularly to the case of deteriorating technical condition of marine main engine. This is due to the fact that external conditions (height, speed and direction of wave, speed and direction of wind, layer of seaweed and shellfish on the underwater section of hull, speed and direction of ocean currents, etc.) under which the sea-going vessels are operated and tasks that

linowego w chwili  $\tau_n + t$ , gdy znany jest tylko jego stan w chwili  $\tau_n$  jest dlatego możliwe, ponieważ stan tego silnika rozpatrywany w dowolnej chwili  $\tau_n$  ( $n = 0, 1, \dots, m; \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$ ) zależy istotnie od bezpośrednio go poprzedzającego, a nie od stanów, które zaszły wcześniej i przedziałów czasu ich trwania.

Wykazano w badaniach również to, że zmienne losowe, takie jak czas poprawnej pracy ( $T_{ij}$ ) i czas odnowy ( $T_0$ ) tego rodzaju silników mogą być opisane rozkładami gamma i normalnym, a także rozkładem Weibulla-Gniedenki [1, 2, 26].

Proces semi-Markowa jest w pełni określony, jeżeli jest znana jego macierz funkcyjna [3, 7, 18]: (1), której niezerowe elementy mają interpretację:

$$Q_{ij}(t) = P\{W(\tau_{n+1}) = s_j, \tau_{n+1} - \tau_n < t \mid W(\tau_n) = s_i\} = p_{ij} F_{ij};$$

$$s_i, s_j \in S; i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$$

przy czym:  $p_{ij}$  – prawdopodobieństwo zmiany stanu  $s_i$  na stan  $s_j$ ,  $F_{ij}$  – dystrybucja zmiennej losowej  $T_{ij}$  oraz gdy dany jest rozkład początkowy (2).

W pracy [4] przedstawiono model zmian stanów technicznych silników o zapłonie samoczynnym  $\{W(t); t \geq 0\}$ , którego wartościami są elementy zbioru klas (podzbiorów) stanów technicznych, zwanych wprost stanami (mających istotne znaczenie w praktyce eksploatacyjnej) – równanie (3) o następującej ich interpretacji:

- $s_1$  – stan zdatności pełnej (całkowitej),
- $s_2$  – stan zdatności częściowej (niepełnej, niecałkowitej),
- $s_3$  – stan niezdatności zadaniowej,
- $s_4$  – stan niezdatności pełnej (całkowitej).

Rozróżnianie stanów  $s_i \in S$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) dla silników spalinyowych o zapłonie samoczynnym jest o tyle istotne, że niezwykle ważne jest użytkowanie tych silników wtedy, gdy znajdują się one w stanie  $s_1$  i ewentualnie w stanie  $s_2$ .

Wtedy rozkład początkowy procesu  $\{W(t); t \geq 0\}$  określono jako wzór (4), natomiast jego macierz funkcyjna ma postać (5).

W przedstawionym modelu przewidziane są sytuacje, w których użytkownik może zaryzykować podjęcie się wykonania zadania przy stanie  $s_2$  silnika, a nawet zaryzykować podjęcie się wykonania niektórych zadań, gdy jest on w stanie  $s_3$ . W praktyce eksploatacyjnej trudno jest jednoznacznie odróżnić stan  $s_1$  od stanu  $s_2$ . Dotyczy to zwłaszcza pogarszania stanu technicznego okrętowych silników głównych. Wynika to z tego, że na zmianę ich obciążenia wpływają istotnie warunki zewnętrzne (wysokość, prędkość i kierunek fali, prędkość i kierunek wiatru, stan porośnięcia wodorostami i skorupiakami podwodnej części kadłuba, prędkość i kierunek prądów morskich itp.), w których są eksploatowane statki morskie oraz zadania realizowane przez użytkowników tych silników [12, 22, 29]. W tej sytuacji eksploatacyjnej zastosowanie systemów diagnozujących (SDG) do identyfikacji stanu technicznego okrętowych silników głównych jako systemów diagnozowanych (SDN) jest łatwiejsze, gdy będzie opracowany trójstanowy zbiór stanów technicznych [4, 12, 22, 29] – wzór (6) o interpretacji:

- $s_1$  – stan pełnej zdatności silnika, który istnieje wtedy, gdy silnik można obciążyć w całym zakresie, do którego został przysposobiony w fazie projektowania i wytwarzania,

are performed by users of the engines, significantly affect engine load changes [12, 22, 29]. In this operating situation, applying the diagnosing systems (SDG) to identify technical conditions of shipborne main engines as diagnosed systems (SDN) is easier when developing a three-state set of technical states [4, 12, 22, 29]:

$$S = \{s_1, s_2, s_3\} \quad (6)$$

with interpretation:

- $s_1$  – state of engine full ability, which is recognized when the engine can be loaded in full range which was fit to in the designing and manufacturing phases,
- $s_2$  – state of engine partial ability, which occurs and continues after the moment when the engine cannot be loaded in the full range of engine performances, but can be loaded within the field not smaller than the range limited by the continuous power characteristic, however with no possibility of loading in the field of rotational speed overloads.
- $s_3$  – state of engine disability, which occurs and continues after the engine can be loaded only in the range below the continuous power characteristic, but also with no possibility of loading in the field of rotational speed overloads.

The described technical states  $s_i \in S(i = 1, 2, 3)$  are values of the process  $\{X(t): t \geq 0\}$  of state transitions, with initial distribution, defined by the formula:

$$P_i = P\{X(0) = s_i\} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 1 \\ 0 & \text{for } i = 2, 3 \end{cases} \quad (7)$$

and following function matrix:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{21}(t) & 0 & Q_{23}(t) \\ Q_{31}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Application of an SDG enabling development of a reliable diagnosis [13, 15], allows implementation of the operation strategy, which includes preventive maintenance of the main engine when its state is recognized as  $s_2$ . This prevents damage to the engine during its work. Therefore, the stochastic process  $\{X(t): t \geq 0\}$ , as a model of the process of engine state transitions can be simplified due to  $p_{23} = 0$ , and thus there is no function  $Q_{23}(t)$  (8).

### 3. Simplified semi-Markov models of engine technical state transition

Currently applied diagnosing systems (SDG) for identifying the technical condition of marine main engines considered as diagnosed systems (SDN), such as CoCoS (Computer Controlled Surveillance System) of MAN company, or CBM (Condition-Based Maintenance) of Wartsila company [27, 28, 29] are designed to disclose the most important states classified as  $s_2$  for the engines [7, 9–11, 23]. It can be assumed that occurrence of state  $s_2$ , is a result of damage to the engine. Such sort of damage allows further operation of the engine, but does not ensure performance of

- $s_2$  – stan częściowej zdatności silnika, który pojawia się z chwilą i istnieje wtedy, gdy silnika nie można obciążyć w całym polu osiągow silnika, ale można go obciążyć w obszarze nie mniejszym niż obszar ograniczony charakterystyką zewnętrzną mocy trwałej, lecz bez możliwości obciążenia w obszarze przeciążenia prędkością obrotową,
- $s_3$  – stan niezdatności silnika, który pojawia się z chwilą i istnieje wtedy, gdy silnik można obciążyć w obszarze jedynie poniżej charakterystyki zewnętrznej mocy trwałej, ale także bez możliwości obciążenia w obszarze przeciążenia prędkością obrotową.

Wymienione stany techniczne  $s_i \in S(i = 1, 2, 3)$  są wartościami procesu  $\{X(t): t \geq 0\}$  zmian tych stanów o rozkładzie początkowym tego procesu, który jest określony wzorem (7) oraz macierzy funkcyjnej (8).

Gdy zastosuje się SDG umożliwiające opracowanie wiarygodnej diagnozy [13, 15], może być realizowana strategia eksploatacyjna, w której wykonywana jest obsługa profilaktyczna silnika głównego wtedy, gdy znajdzie się on w stanie  $s_2$ . Zapobiega to uszkodzeniom tego silnika w czasie jego działania. Wobec tego proces stochastyczny  $\{X(t): t \geq 0\}$ , jako model procesu zmian stanów silnika, może być uproszczony, gdyż wtedy  $p_{23} = 0$  i tym samym nie istnieje funkcja  $Q_{23}(t)$  (8).

### 3. Uproszczone modele semi-Markowa zmian stanów technicznych silnika

Obecnie stosowane systemy diagnozujące (SDG) do identyfikacji stanu technicznego okrętowych silników głównych jako systemów diagnozowanych (SDN), takie jak CoCoS (Computer Controlled Surveillance System) firmy MAN, bądź CBM (Condition-Based Maintenance) firmy Wartsila [27, 28, 29], są przysposobione do ujawniania najistotniejszych stanów uznawanych za stan  $s_2$  tych silników [7, 9, 10, 11, 23]. Można uznać, że pojawienie się stanu  $s_2$  jest wynikiem umownego uszkodzenia silnika. Takie uszkodzenie umożliwia dalsze działanie silnika, ale nie zapewnia ono wykonanie zadania  $Z_d$ , które należy wykonać. Ujawnienie przez SDG stanu  $s_2$  silnika umożliwia wykonanie odpowiedniej obsługi profilaktycznej i dokonanie pełnej odnowy, a w rezultacie przywrócenie silnikowi stanu  $s_1$ , umożliwiającego wykonanie  $Z_d$ . Mimo stosowania wspomnianych SDG, w fazie eksploatacji silników zachodzą uszkodzenia. Stan techniczny będący wynikiem takich uszkodzeń jest stanem  $s_3$ .

Gdy  $p_{23} = 0$ , modelem procesu zmiany stanów silników głównych jest proces stochastyczny  $\{Y(t): t \geq 0\}$  o zbiorze stanów  $S = \{s_i; i = 1, 2, 3\}$  (6) oraz grafie zmian stanów przedstawionym na rys. 1. Zmiany tych stanów zachodzą w chwilach  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \dots, \tau_n$  (rys. 2). Ze względu na to, że proces  $\{Y(t): t \geq 0\}$  jest procesem semi-Markowa, chwile te są zmiennymi losowymi spełniającymi warunek:

$$\begin{aligned} P\{Y(\tau_{n+1}) = s_j, \tau_{n+1} - \tau_n < \tau | Y(\tau_n) = s_i, Y(\tau_{n-1}), \dots \\ \dots Y(\tau_1), Y(\tau_0), \tau_n - \tau_{n-1}, \dots, \tau_1 - \tau_0, \tau_0\} = \\ = P\{Y(\tau_{n+1}) = s_j, \tau_{n+1} - \tau_n < \tau | Y(\tau_n) = s_i\} \end{aligned}$$

the task  $Z_d$  which must be carried out. Disclosure by the SDG of the state  $s_2$  in the engine enables performance of some adequate preventive service and full engine recovery, and in consequence regaining of state  $s_1$ , that allows performance of the task  $Z_d$ . Despite using the SDG, damages to engines are reported during their operation. The technical state that results from such damage is recognized as  $s_3$ .

When  $p_{23} = 0$ , the model of the process of state transitions for main engines is a stochastic process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  with the set of states  $S = \{s_i; i = 1, 2, 3\}$  (6) and the graph of state transitions as depicted in Fig. 1. Transitions of the states proceed at the moments  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \dots, \tau_n$  (Fig. 2). Due to the fact that the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  is a semi-Markov process, the moments are random variables which satisfy the condition:

$$\begin{aligned} &P\{Y(\tau_{n+1}) = s_j, \tau_{n+1} - \tau_n < \tau | Y(\tau_n) = s_i, Y(\tau_{n-1}), \dots \\ &\dots Y(\tau_1), Y(\tau_0), \tau_n - \tau_{n-1}, \dots, \tau_1 - \tau_0, \tau_0\} = \\ &= P\{Y(\tau_{n+1}) = s_j, \tau_{n+1} - \tau_n < \tau | Y(\tau_n) = s_i\} \end{aligned}$$

A graph of state transitions of the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  and thus also of the engine, is shown in Fig. 1. This model of changing technical states of engine is a simplified model when comparing to the model in the form of the process  $\{X(t): t \geq 0\}$ . The simplification consists in that the function matrix (8) of the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  does not take into account the function  $Q_{23}(t)$ , because  $Q_{23}(t) = 0$ , due to the fact that  $p_{23} = 0$ .

An example of the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  is illustrated in Fig. 2.

Initial distribution of the process is defined by the formula (7), while its function matrix is as follows:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{21}(t) & 0 & 0 \\ Q_{31}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

The limiting distribution for the process  $\{X(t): t \geq 0\}$  can be derived from the formula [2, 11, 19, 24]:

$$P_j = \frac{\pi_j \cdot E(T_j)}{\sum_{k=1}^3 \pi_k \cdot E(T_k)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

The distribution  $\pi_j (j = 1, 2, 3)$  in the formula (10) is a limiting distribution of the Markov chain  $\{Y(\tau_n): n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  embedded in the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$ . This distribution, as it follows from the function matrix (9), satisfies the system of equations [19]:

$$\left[ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \right] \cdot \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} = \left[ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \right] \quad (11)$$

The solution of the system of equations (11), when considering the formula (10), are the probabilities:

Graf zmian stanów procesu  $\{Y(t): t \geq 0\}$ , a tym samym i silnika przedstawiono na rys. 1. Ten model zmian stanów technicznych silnika jest modelem uproszczonym w porównaniu do modelu w formie procesu  $\{X(t): t \geq 0\}$ . Uproszczenie polega na tym, że nie uwzględniono w macierzy funkcyjnej (8) procesu  $\{Y(t): t \geq 0\}$  funkcji  $Q_{23}(t)$ , gdyż  $Q_{23}(t) = 0$  ze względu na to, że  $p_{23} = 0$ .

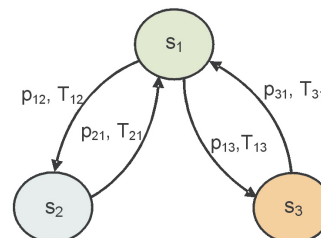


Fig. 1. Graph of engine state transitions:  $p_{ij}$  – probability of engine transition from state  $s_i$  to state  $s_j$ ,  $T_{ij}$  – duration of state  $s_i$  if the process transitions to state  $s_j$ ;  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, 3$

Rys. 1. Graf zmian stanów technicznych silnika:  $p_{ij}$  – prawdopodobieństwo przejścia silnika ze stanu  $s_i$  do stanu  $s_j$ ,  $T_{ij}$  – czas trwania stanu  $s_i$  pod warunkiem przejścia procesu do stanu  $s_j$ ;  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, 3$

Przykładowa realizacja procesu  $\{Y(t): t \geq 0\}$  jest zobrażowana na rys. 2.

Rozkład początkowy tego procesu jest określony wzorem (7), natomiast jego macierz funkcyjna wzorem (9).

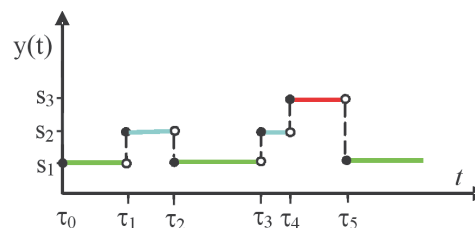


Fig. 2. An example of the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  for an engine:  $\{y(t): t \in T\}$  – process of technical state transitions,  $t$  – operating time;  $s_1$  – state of full ability,  $s_2$  – state of partial ability,  $s_3$  – state of disability

Rys. 2. Przykład realizacji procesu  $\{Y(t): t \geq 0\}$  silnika:  $\{y(t): t \in T\}$  – realizacja procesu zmian stanów technicznych,  $t$  – czas eksploatacji;  $s_1$  – stan pełnej zdatości,  $s_2$  – stan częściowej zdatości,  $s_3$  – stan niezdatności

Dla procesu  $\{X(t): t \geq 0\}$  można wyznaczyć jego rozkład graniczny z wzoru (10) [2, 11, 19, 24].

Rozkład  $\pi_j (j = 1, 2, 3)$  we wzorze (10) jest rozkładem granicznym łańcucha Markowa  $\{Y(\tau_n): n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  włożonego w proces  $\{Y(t): t \geq 0\}$ . Rozkład ten, jak wynika z macierzy funkcyjnej (9), spełnia układ równań (11) [19].

Rozwiązaniem układu równań (11) przy uwzględnieniu wzoru (10) są prawdopodobieństwa (12), przy czym

$$H = E(T_1) + p_{12} \cdot E(T_2) + p_{13} \cdot E(T_3)$$

gdzie:  $P_1, P_2, P_3$  – prawdopodobieństwa tego, że silnik o zapłonie samoczynnym znajduje się odpowiednio w stanach:  $s_1, s_2, s_3$ ;  $\pi_j$  – prawdopodobieństwo graniczne, włożonego w proces  $\{Y(t): t \geq 0\}$  łańcucha Markowa opisującego możliwości pojawienia się stanu  $s_j, j = 1, 2, 3$ ;

$$P_1 = \frac{E(T_1)}{H}, P_2 = \frac{p_{12} \cdot E(T_2)}{H}, P_3 = \frac{p_{13} \cdot E(T_3)}{H} \quad (12)$$

while

$$H = E(T_1) + p_{12} \cdot E(T_2) + p_{13} \cdot E(T_3)$$

where:  $P_1, P_2, P_3$  – probabilities that diesel engine is found in the states:  $s_1, s_2, s_3$  respectively,  $\pi_j$  – limiting probability of a Markov chain embedded in the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  that describes possibility of state  $s_j, j = 1, 2, 3$  occurring,  $p_{ij}$  – probability of the process  $\{Y(t): t \geq 0\}$  transition from state  $s_i$  to state  $s_j, E(T_j)$  – expected value of duration of state  $s_j$ .

When performance of the task by the main engine is possible only if it is in the state of full ability (i.e. state  $s_1$ ), its reliability is defined by the probability  $P_1$ . However, when the task can be performed by the main engine, even when it is in a state of partial ability ( $s_2$ ), the reliability of the engine can be determined by the sum of probabilities of the two states.

Depending on the selected operation strategy, the even more simplified model of state transitions can be applied for main marine engines. As the ship safety is essential when performing the transport task, there are only two states considered:  $s_1$  (state of full ability) and  $s_{2*}$  (state of disability), where  $s_{2*} \equiv s_2 \cup s_3$ . In such case, the process  $\{Z(t): t \geq 0\}$  with a two-element set of states:  $s_1$  and  $s_{2*}$  will be the model of engine state transitions. For such a simple model of engine state transitions, the intensity function  $\lambda_{ij}(t)$  of transition of the process  $\{Z(t): t \geq 0\}$  (so also transition of the engine) from  $s_i$  to  $s_j (i \neq j; i, j = 1, 2^*)$  can be applied for calculating probabilities  $P_1$  and  $P_2$ . Transition intensity functions  $\lambda_{ij}(t)$  are the ratios of transition probabilities  $p_{ij}$ , referred to the time interval  $\Delta t$ , which they concern. Thus, the graph of state transitions of the process  $\{Z(t): t \geq 0\}$ , and also the engine, has the form as depicted in Fig. 3.

Due to the fact that the function  $\lambda_{ij}(t)$  is a function of time  $t$ , thus dependent on  $\Delta t$ , therefore the relationship below is valid:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{\Delta t} = \text{const} \quad (13)$$

The assumption in considerations that  $\lambda_{ij} = \text{const}$  means that the process  $\{Z(t): t \geq 0\}$  is a discrete-state continuous-time Markov model. This further means that random variables, which are the time of proper work of engine and the time of its renewal, are recognized as random variables with exponential distributions. Consideration of the time of proper work of the engine as a random variable with exponential distribution is justified by the fact that in stormy weather conditions engines are subject to impact loads (so-called shock pulses) in particular [2, 26]. Also probabilities of performing renewal to a damaged engine in time of storm are small and decrease with extending the time needed to do the renewal, which also makes it possible to assume that the renewal time is a random variable with exponential distribution [26]. Furthermore, the exponential distribution significantly reduces the values of engine reliability over time when comparing

$p_{ij}$  – prawdopodobieństwo przejścia procesu  $\{Y(t): t \geq 0\}$  ze stanu  $s_i$  do stanu  $s_j; E(T_j)$  – wartość oczekiwana czasu trwania stanu  $s_j$ .

Gdy wykonanie zadania przez silnik główny jest możliwe tylko wtedy, gdy znajduje się on w stanie pełnej zdadności (czyli w stanie  $s_1$ ), jego niezawodność określa prawdopodobieństwo  $P_1$ . Gdy zadanie może być wykonane przez silnik główny nawet wtedy, gdy znajduje się on w stanie zdadności częściowej ( $s_2$ ), to niezawodność tego silnika może być określone przez sumę prawdopodobieństw istnienia obu rodzajów stanów.

W zależności od przyjętej strategii eksploatacyjnej może być przyjęty jeszcze bardziej uproszczony model zmian stanów okrętowego silnika głównego. Gdy ważne jest bezpieczeństwo statku na morzu podczas wykonywania zadania transportowego, istotne są tylko dwa stany:  $s_1$  (stan pełnej zdadności silnika) oraz  $s_{2*}$  (stan niezdadności silnika), przy czym  $s_{2*} \equiv s_2 \cup s_3$ . W takim przypadku modelem zmian stanów silnika będzie proces  $\{Z(t): t \geq 0\}$  o dwuelementowym zbiorze stanów  $s_1$  oraz  $s_{2*}$ . Przy tak prostym modelu zmian stanów silnika można do obliczenia prawdopodobieństw  $P_1$  i  $P_2$  zastosować funkcje intensywności  $\lambda_{ij}(t)$  przejścia procesu  $\{Z(t): t \geq 0\}$  (tym samym silnika) ze stanu  $s_i$  do  $s_j (i \neq j; i, j = 1, 2^*)$ . Funkcje intensywności  $\lambda_{ij}(t)$  przejścia są ilorazami prawdopodobieństw przejścia  $p_{ij}$  odniesionymi do przedziału czasu  $\Delta t$ , którego dotyczą. Zatem graf zmian stanów procesu  $\{Z(t): t \geq 0\}$ , a tym samym i silnika, ma postać jak na rys. 3.

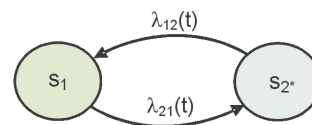


Fig. 3. Graph of engine state transitions:  $\lambda_{ij}$  – probability of the process transition from state  $s_i$  to state  $s_j; (i \neq j; i, j = 1, 2^*)$

Rys. 3. Graf zmian stanów technicznych silnika:  $\lambda_{ij}$  – prawdopodobieństwo przejścia procesu ze stanu  $s_i$  do stanu  $s_j; (i \neq j; i, j = 1, 2^*)$

Ze względu na to, że funkcja  $\lambda_{ij}(t)$  jest funkcją czasu  $t$ , a więc zależną od  $\Delta t$ , słuszna jest zależność (13).

Przyjęcie w tych rozważaniach, że  $\lambda_{ij} = \text{const}$  oznacza, że proces  $\{Z(t): t \geq 0\}$  jest modelem Markowa dyskretnym w stanach i ciągłym w czasie. Oznacza to także, że zmienne losowe, którymi są czas poprawnej pracy silnik i czas jego odnowy uznawane są za zmienne losowe o rozkładach wykładniczych. Rozpatrywanie czasu poprawnej pracy silnika jako zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym jest uzasadnione tym, że w warunkach sztormowych silniki te podlegają głównie oddziaływaniom obciążeń udarowych (tak zwanym bodźcom skokowym) [2, 26]. Także prawdopodobieństwa dokonania odnowy uszkodzonego silnika w czasie sztormu są małe i maleją wraz z wydłużaniem się czasu niezbędnego do wykonania tej odnowy, co także umożliwia przyjęcie, że czas odnowy jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym [26]. Ponadto rozkład wykładniczy znacznie zmniejsza wartości niezawodności silnika z upływem czasu w porównaniu z innymi rozkładami tego rodzaju zmiennych losowych ciągłych. W zaproponowanym

to other distributions of this sort of continuous random variables. In the proposed model, the intensity  $\lambda_{12^*}$  of the process transition from state  $s_1$  to state  $s_{2^*}$  is called the risk function, and the transition intensity  $\lambda_{2^*1}$  – the intensity function of renewal (restitution). In this case the probabilities  $P_1$  and  $P_2$  can be derived from the formulas [17]:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{\lambda_{2^*1}}{\lambda_{2^*1} + \lambda_{12}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{2^*1}} \exp\{- (\lambda_{12} + \lambda_{2^*1}) t\} \\ P_{21}(t) &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{2^*1}} - \frac{\lambda_{2^*1}}{\lambda_{12} + \lambda_{2^*1}} \exp\{- (\lambda_{12} + \lambda_{2^*1}) t\} \end{aligned} \quad (14)$$

When the operating time  $t$  of engine is very long (in theory  $t \rightarrow \infty$ ), the formulas (14) take the forms:

$$P_1(t) = \frac{\lambda_{2^*1}}{\lambda_{2^*1} + \lambda_{12}} \quad \text{and} \quad P_{21}(t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{2^*1}} \quad (15)$$

since in the formulas (16) the values  $\exp\{\bullet\} = 0$ .

When transportation tasks are carried out by ships in favorable conditions, so in the periods (seasons) in which there are no storms, it can be assumed that the random variable which is the time of proper operation of the engine, has a gamma distribution, and the random variable which is the engine renewal time – a normal distribution. Then, it can be assumed that [2]:

$$\lambda_{12}(t) = \frac{\lambda_{12}^r t^{r-1}}{(r-1)! \left[ 1 + \frac{1}{1!} \lambda_{12} t + \frac{1}{2!} (\lambda_{12} t)^2 + \dots + \frac{(\lambda_{12} t)^{r-1}}{(r-1)!} \right]} \quad (16)$$

where:  $r$  – parameter of distribution shape.

With the growth of  $t$  ( $t \rightarrow \infty$ ) the function (16) increases monotonically to  $\lambda_{12} = \text{const}$  [2, 26]. Whereas the function  $\lambda_{2^*1}$  is defined by the formula [2]:

$$\lambda_{2^*1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi\left(\frac{m_1 - t}{\sigma}\right)} \exp\left\{-\frac{(t - m_1)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (17)$$

where:  $\sigma$  – standard deviation,  $m_1$  – zero moment of the first order (expected value),  $\Phi\left(\frac{m_1 - t}{\sigma}\right)$  – Laplace function.

With the growth of  $t$  the function (17) increases monotonically [2, 26].

The probabilities defined by the formulas (12), (14) and (15) are significant in the phase of planning the engine operation whose implementation requires securing the funds, fuel supply and lubricating oil, and spare parts. However, the phase of engine operating requires controlling the process of changes in engine technical condition, which consists in making decisions. This requires knowledge of reliability of the diagnosis on the engine technical state and consequences of making a decision selected from among possible decisions in the given operating situation for this kind of engines [14–16]. Optimal decisions can be made when applying semi-Markov decision (controlled) processes or statistical decision theory. From among the theories, Bayesian statistical decision theory is easier to use. In this theory a criterion of decision-making

modelu intensywność przejścia  $\lambda_{12^*}$  procesu ze stanu  $s_1$  do stanu  $s_{2^*}$  nazywana jest funkcją ryzyka, a intensywność przejścia  $\lambda_{2^*1}$  – funkcją intensywności odnowy (restrytuacji). W takim przypadku prawdopodobieństwa  $P_1$  oraz  $P_2$  można określić ze wzorów (14) [17].

Gdy czas  $t$  działania silnika jest bardzo długi (teoretycznie  $t \rightarrow \infty$ ), wzory (14) przyjmują postać (15), gdyż wtedy we wzorach (16) wielkości  $\exp\{\bullet\} = 0$ .

Gdy zadania transportowe wykonywane są przez statki w korzystnych warunkach, a więc w okresach (porach roku), w których nie występują sztormy, można przyjąć, że zmienna losowa, którą jest czas poprawnej pracy silnika ma rozkład gamma, a zmienna losowa, którą jest czas odnowy silnika – rozkład normalny. Wtedy można przyjąć – wzór (16) [2], gdzie:  $r$  – parametr kształtu rozkładu.

Wraz ze wzrostem  $t$  ( $t \rightarrow \infty$ ) funkcja (16) rośnie monotonicznie do  $\lambda_{12} = \text{const}$  [2, 26], natomiast funkcja  $\lambda_{2^*1}$  określana jest wzorem (17) [2], gdzie:  $\sigma$  – odchylenie standardowe,  $m_1$  – moment zerowy rzędu pierwszego (wartość oczekiwana),  $\Phi\left(\frac{m_1 - t}{\sigma}\right)$  – funkcja Laplace'a.

Wraz ze wzrostem  $t$  funkcja (17) rośnie monotonicznie [2, 26].

Prawdopodobieństwa określone wzorami (12), (14) i (15) są istotne w fazie planowania działania silników, którego realizacja wymaga zapewnienia środków finansowych, zapasu paliwa i oleju smarowego oraz części wymiennych. W fazie realizacji działania silników potrzebne jest sterowanie procesem zmian ich stanów technicznych, które polega na podejmowaniu decyzji. Wtedy potrzebna jest znajomość wiarygodności diagnozy o stanie technicznym tych silników oraz konsekwencji podjęcia decyzji spośród decyzji możliwych do podjęcia w danej sytuacji eksploatacyjnej tego rodzaju silników [14–16]. Decyzje optymalne mogą być podejmowane w sytuacji zastosowania decyzyjnych (sterowanych) procesów semi-Markowa bądź zastosowania statystycznej teorii decyzji. Spośród tych teorii prostsza do zastosowania jest bayesowska statystyczna teoria decyzji. W teorii tej kryterium podejmowania decyzji jest wartość oczekiwana konsekwencji decyzji. Zgodnie z tym kryterium, podjęcie decyzji eksploatacyjnej polega na wyborze decyzji optymalnej, należącej do zbioru decyzji możliwych do podjęcia w danej sytuacji eksploatacyjnej. Taką decyzją jest zawsze ta, której odpowiada największa wartość oczekiwana konsekwencji [1]. Zastosowanie bayesowskiej statystycznej teorii decyzji wymaga opracowania statystycznego modelu decyzyjnego.

#### 4. Statystyczny model decyzyjny

Zastosowanie odpowiedniego systemu diagnozującego (SDG) do identyfikacji stanu technicznego silnika głównego jako systemu diagnozowanego (SDN) umożliwia uzyskanie diagnozy o stanie technicznym tego silnika, o określonej wiarygodności. Miarą wiarygodności diagnozy jest prawdopodobieństwo warunkowe  $P\{s_i/K_i\}$ , że silnik jest w stanie  $s_i$  po warunkiem, że obserwowany jest odpowiadający temu stanowi wektor  $K_i$  wartości parametrów diagnostycznych [13, 15]. Dysponowanie taką informacją i jednocześnie znajomość konsekwencji podjęcia poszczególnych decyzji

is an expected value of decision consequences. According to this criterion, making an operating decision consists in selecting the optimal decision belonging to the set of possible decisions in the given operating situation. Such a decision is always the one which the highest expected value of consequences corresponds to [1]. Application of Bayesian statistical decision theory requires development of a statistical model of decision-making.

**4. Statistical model of decision-making**

Application of an appropriate diagnosing system (SDG) for identifying technical condition of a main engine as the diagnosed system (SDN), allows obtaining a diagnosis on the technical state of the engine, with defined reliability. A measure of diagnosis reliability is the conditional probability  $P\{s_i|K_i\}$ , that the engine is in state  $s_i$  provided that the value vector  $K_i$  of diagnostic parameters corresponding to this state, is observed [13, 15]. This information and also the knowledge of consequences of each decision, enable application of the statistical decision theory for making a rational decision, e.g. from the following two possible [14, 16]:

- decision  $d_1$  – first perform an adequate preventive maintenance of engine to renew its state, which is indispensable to carry out the task  $Z_d$ , and then, start performing the task according to the schedule set by the customer.
- decision  $d_2$  – do not perform the maintenance service and start performing the ordered task  $Z_d$ .

The Bayesian statistical decision theory shows that in such a decision situation, e.g. for the process  $\{Z(t): t \geq 0\}$  of changing engine technical states, considerations should include decision dendrite as demonstrated in Fig. 4.

The decision dendrite provided in Fig. 4 indicates that the expected values can be derived from the following relationships [14, 15]:

$$E(c|d_1) = P(s_1|K_1)c(d_1, s_1) + P(s_{2*}|K_2)c(d_1, s_{2*}) \tag{18}$$

$$E(c|d_2) = P(s_1|K_1)c(d_2, s_1) + P(s_{2*}|K_2)c(d_2, s_{2*})$$

where the below relationship is valid:

$$P(s_1|K_1) + P(s_{2*}|K_2) = 1$$

In accordance with the decision-making rule, decision  $d_1$  should be made when  $E(c|d_1) > E(c|d_2)$ , and inversely – decision  $d_2$ , should be made when  $E(c|d_1) < E(c|d_2)$ .

Probabilities  $P(s_i|K_i)$  as measures of reliability of diagnosis can be derived from the dependence [14]:

$$P(s_i|K_i) = \frac{P(A)P(s_i|A)P(K_i|A \cap s_i)}{P(K_i)P(A|K_i \cap s_i)} \tag{19}$$

where:  $P(s_i|K_i)$  – probability that engine is in state  $s_i$  ( $i = 1, 2^*$ ), provided that the value vector  $K_i$  of diagnostic parameters is observed,  $A$  – an event that SDG works properly,  $P(A)$  – probability of proper work of SDG,  $P(s_i/A)$  – probability that engine is in state  $s_i$  ( $i = 1, 2^*$ ), provided that SDG works properly,  $P(K_i/A \cap s_i)$  – probability that the value vector  $K_i$  of diagnostic parameters is observed, provided that SDG works

umożliwia zastosowanie statystycznej teorii decyzji do podjęcia racjonalnej decyzji, np. spośród następujących dwóch możliwych [14, 16]:

- decyzja  $d_1$  – wykonać najpierw odpowiednią obsługę profilaktyczną silnika, w celu odnowy jego stanu, która jest niezbędna do wykonania zadania  $Z_d$ , a następnie przystąpić do realizacji tego zadania w terminie ustalonym przez zleceniodawcę,
- decyzja  $d_2$  – nie wykonywać obsługi i rozpocząć wykonywanie zleconego zadania  $Z_d$ .

Z bayesowskiej statystycznej teorii decyzji wynika, że w takiej sytuacji decyzyjnej, np. dla procesu  $\{Z(t): t \geq 0\}$  zmian stanów technicznych silnika, należy uwzględnić dendryt decyzji przedstawiony na rys. 4.

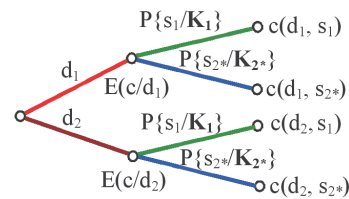


Fig. 4. Decision dendrite for making decision  $d_1$  or  $d_2$ :  $d_1$  – decision to perform first the appropriate preventive maintenance to the engine and then the given task,  $d_2$  – decision to perform the ordered task without prior preventive maintenance to the engine,  $P\{s_1|K_1\}$  – probability that engine is in state  $s_1$ , provided that vector  $K_1$  of diagnostic parameters is observed,  $P\{s_{2*}|K_2\}$  – probability that engine is in state  $s_{2*}$ , provided that vector  $K_2$  of diagnostic parameters is observed,  $c(d_1, s_1)$  – consequence of decision  $d_1$  when engine state is  $s_1$ ,  $c(d_1, s_{2*})$  – consequence of decision  $d_1$  when engine state is  $s_{2*}$ ,  $c(d_2, s_1)$  – consequence of decision  $d_2$  when engine state is  $s_1$ ,  $c(d_2, s_{2*})$  – consequence of decision  $d_2$  when engine state is  $s_{2*}$ .

Rys. 4. Dendryt decyzyjny do podjęcia decyzji  $d_1$  bądź  $d_2$ :  $d_1$  – decyzja, że należy wykonać najpierw odpowiednią obsługę profilaktyczną silnika a następnie wykonać dane zadanie,  $d_2$  – decyzja, że należy wykonać zlecone zadanie bez uprzedniego wykonania obsługi profilaktycznej silnika,  $P\{s_1|K_1\}$  – prawdopodobieństwo, że silnik jest w stanie  $s_1$  pod warunkiem, że obserwowany jest wektor  $K_1$  parametrów diagnostycznych,  $P\{s_{2*}|K_2\}$  – prawdopodobieństwo, że silnik jest w stanie  $s_{2*}$  pod warunkiem, że obserwowany jest wektor  $K_2$  parametrów diagnostycznych,  $c(d_1, s_1)$  – konsekwencja podjęcia decyzji  $d_1$  przy stanie  $s_1$  silnika,  $c(d_1, s_{2*})$  – konsekwencja podjęcia decyzji  $d_1$  przy stanie  $s_{2*}$  silnika,  $c(d_2, s_1)$  – konsekwencja podjęcia decyzji  $d_2$  przy stanie  $s_1$  silnika,  $c(d_2, s_{2*})$  – konsekwencja podjęcia decyzji  $d_2$  przy stanie  $s_{2*}$  silnika

Z dendrytu decyzji przedstawionego na rys. 4 wynika, że wartości oczekiwane można wyznaczyć z zależności (18) [14, 15], przy czym obowiązuje zależność:

$$P(s_1|K_1) + P(s_{2*}|K_2) = 1$$

Zgodnie z zasadą podejmowania decyzji, gdy  $E(c|d_1) > E(c|d_2)$ , należy podjąć decyzję  $d_1$  i odwrotnie – gdy zachodzi zależność  $E(c|d_1) < E(c|d_2)$ , należy podjąć decyzję  $d_2$ .

Prawdopodobieństwa  $P(s_i|K_i)$  jako miary wiarygodności diagnozy można wyznaczyć z zależności (19) [14], gdzie:  $P(s_i|K_i)$  – prawdopodobieństwo, że silnik jest w stanie  $s_i$  ( $i = 1, 2^*$ ) pod warunkiem zaobserwowania wektora  $K_i$  wartości parametrów diagnostycznych,  $A$  – zdarzenie oznaczające poprawne działanie SDG,  $P(A)$  – prawdopodobieństwo poprawnego działania SDG,  $P(s_i/A)$  – prawdopodobieństwo znajdowania się silnika w stanie  $s_i$  ( $i = 1, 2^*$ ) pod warunkiem, że SDG działa poprawnie,  $P(K_i/A \cap s_i)$  – prawdopodobieństwo zaobserwowania wektora  $K_i$



properly and the engine is in state  $s_i$ ,  $P(\mathbf{K}_i)$  – probability that the value vector  $\mathbf{K}_i$  of diagnostic parameters is observed,  $P(A/\mathbf{K}_i \cap s_i)$  – probability that SDG works properly, provided that the value vector  $\mathbf{K}_i$  of diagnostic parameters is observed and the engine is in state  $s_i$ .

Assuming that  $P(A) = 1$ , the formula (19) can be simplified to the following form [14]:

$$P(s_i/\mathbf{K}_i) = \frac{P(s_i)P(\mathbf{K}_i/s_i)}{P(\mathbf{K}_i)} \quad (20)$$

which allows obtaining a measure of diagnosis accuracy.

Considering the measures of diagnosis reliability (19) or accuracy (20) in engine diagnostics allows for the development of a rational operating diagnosis on engine ability to perform the task  $Z_d$  [5, 16].

## 5. Final remarks and conclusions

In research on reliability of engines a variety of mathematical models can be used, including more adequate functional models in the form of semi-Markov processes. Semi-Markov processes are increasingly applied, and not only for solving different issues regarding reliability and diagnostics of diesel or other combustion engines.

Application of a semi-Markov process as a model of changes in the mentioned reliability states of a main engine at a defined time. As a result the random variable  $T_{(ij)}$  denoting duration of engine state  $s_{(i)}$ , provided that the successive state is  $s_j$ , and the random variable  $T_i$  denoting duration of engine state  $s_{(i)}$  (e.g.  $i = 1, 2, 3$  or  $i = 1, 2^*$ ), regardless of which state is successive, have distributions that belong in the set  $R^+ = [0, +\infty)$ .

When using an appropriate SDG enabling development of a complete diagnosis (instantaneous diagnosis, prognosis and genesis) with defined reliability  $P(s_i/\mathbf{K}_i)$ , it makes sense to apply a two-state Markov process for studying this kind of engines, because in this case that includes additional requirement of ensuring a high safety level of a sea-going ship, it can be assumed that the random variables  $T_{(ij)}$  and  $T_{(i)}$  have exponential distributions.

The presented models can be of significant practical meaning due to the ease of defining the estimators of transition probabilities  $p_{(ij)}$  and the ease of estimating the expected values  $E(T_{(ij)})$ . Therefore, it should be considered that the point estimate of the expected value  $E(T_{(ij)})$  does not allow for determining the accuracy of the estimation. It is possible to establish such accuracy by interval estimation, where the confidence interval  $[t_{d(i)}, t_{g(i)}]$ , with random limits is determined, which contains with a defined probability (confidence level)  $\beta$ , the unknown expected value  $E(T_{(ij)})$ .

Moreover, consideration of reliability of the diagnosis  $P(s_i/\mathbf{K}_i)$  in the operating phase, by using the statistical decision theory, allows for making optimal operating decisions from among the possible decisions for main engines in the given operating situation.

It can reasonably be expected that the proposed models may also be useful in studies on reliability of other machines.

wartości parametrów diagnostycznych, pod warunkiem jednoczesnego poprawnego działania SDG i istnienia stanu  $s_i$  silnika,  $P(\mathbf{K}_i)$  – prawdopodobieństwo zaobserwowania wektora  $\mathbf{K}_i$  wartości parametrów diagnostycznych,  $P(A/\mathbf{K}_i \cap s_i)$  – prawdopodobieństwo poprawnego działania SDG pod warunkiem, że zaobserwowany został wektor  $\mathbf{K}_i$  wartości parametrów diagnostycznych i zaistniał stan  $s_i$  silnika.

Przy założeniu, że  $P(A) = 1$ , wzór (19) można uprościć do postaci (20) [14], a więc uzyskać miarę trafności diagnozy.

Uwzględnienie w diagnostyce silników miar wiarygodności (19) bądź trafności (20) diagnozy umożliwia opracowanie racjonalnej diagnozy eksploatacyjnej o zdolności silnika do wykonania danego zadania  $Z_d$  [5, 16].

## 5. Uwagi końcowe i wnioski

W badaniach niezawodności silników mogą być stosowane różne modele matematyczne, w tym bardziej adekwatne modele funkcjonalne w formie procesów semi-Markowa. Procesy semi-Markowa są coraz częściej stosowane i to nie tylko przy rozwiązywaniu różnych problemów, dotyczących niezawodności oraz diagnostyki silników o zapłonie samoczynnym i innych silników spalinowych.

Zastosowanie procesu semi-Markowa jako modelu zmian wymienionych stanów niezawodnościowych silnika głównego w określonym czasie wynika stąd, że zmienna losowa  $T_{(ij)}$  oznaczająca czas trwania stanu  $s_{(i)}$  pod warunkiem, że następnym stanem będzie stan  $s_j$  oraz zmienna losowa  $T_i$  oznaczająca czas trwania stanu  $s_{(i)}$  (np.  $i = 1, 2, 3$  lub  $i = 1, 2^*$ ) silnika niezależnie od tego, jaki będzie jego stan następny, mają rozkłady dowolne skoncentrowane w zbiorze  $R^+ = [0, +\infty)$ .

Gdy zastosuje się odpowiedni SDG, umożliwiający opracowanie diagnozy pełnej (diagnozy chwilowej, prognozy i genezy) o określonej wiarygodności  $P(s_i/\mathbf{K}_i)$ , w badaniach niezawodności tego rodzaju silników ma sens zastosowanie dwustanowego procesu Markowa, gdyż w takim przypadku, przy dodatkowym wymaganiu zapewnienia wysokiego bezpieczeństwa statku morskiego, można przyjąć, że zmienne losowe  $T_{(ij)}$  oraz  $T_{(i)}$  mają rozkłady wykładnicze.

Przedstawione modele mogą mieć istotne znaczenie praktyczne ze względu na łatwość określania estymatorów prawdopodobieństw przejścia  $p_{(ij)}$  oraz łatwość oszacowywania wartości oczekiwanych  $E(T_{(ij)})$ . Należy przy tym uwzględnić to, że estymacja punktowa wartości oczekiwanej  $E(T_{(ij)})$  nie umożliwia określenia dokładności jej oszacowania. Dokładność taką umożliwia estymacja przedziałowa, w której wyznaczany jest przedział ufności  $[t_{d(i)}, t_{g(i)}]$  o losowych granicach, który z określonym prawdopodobieństwem (poziomym ufności)  $\beta$  zawiera nieznaną wartość oczekiwaną  $E(T_{(ij)})$ .

Ponadto uwzględnienie w fazie eksploatacji wiarygodności diagnozy  $P(s_i/\mathbf{K}_i)$  umożliwia, przy zastosowaniu statystycznej teorii decyzji, podejmowanie optymalnych decyzji eksploatacyjnych spośród decyzji możliwych do podjęcia w danej sytuacji eksploatacyjnej silników głównych.

Można spodziewać się, że zaproponowane modele mogą być przydatne także w badaniach niezawodności innych urządzeń technicznych.

**Bibliography/Literatura**

- [1] Benjamin J.R., Cornell C.A. Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers. Wyd. polskie: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. WNT, Warszawa 1977.
- [2] Gercbach J.B., Kordonski Ch.B. Modele niezawodnościowe obiektów technicznych. WNT, Warszawa 1968. Oryginał: Герцбах И. Б., Кордонский Х. Б.: Модели отказов. Советское Радио, Москва 1966.
- [3] Girtler J. Usefulness of semi-Markov processes as models of the operation processes for marine main engines and other machines of ship power plants. Journal of Polish CIMAC, Vol. 9, No. 2, 2014, pp.57-67.
- [4] Girtler J. Semi-Markov model of diesel engines' operating process. Archiwum Motoryzacji 2004, Vol. 7, Nr 3, s. 165-196.
- [5] Girtler J. Significance of technical diagnostics in decision control of combustion engines operation process. Archiwum Motoryzacji 2004, Vol. 7, Nr 4, s. 389-407.
- [6] Girtler J. Możliwości zastosowania i przydatność procesów semimarkowskich jako modeli procesów eksploatacji maszyn. Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Warszawa 1996, z.3(107), s. 419-428.
- [7] Girtler J. Diagnostyka jako warunek sterowania eksploatacją okrętowych silników spalinowych. Studia nr 28, WSM, Szczecin 1997.
- [8] Girtler J. Physical aspects of application and usefulness of semi-Markov processes for modeling the processes occurring in operational phase of technical objects. Polish Maritime Research, Vol. 11, No 3, 2004, pp. 25-30.
- [9] Girtler J. Quantum issues in diagnostics of marine energy machines and devices. Scientific Journals Maritime University of Szczecin. – No 30(102).
- [10] Girtler J. Aspekty kwantowej diagnostyki maszyn. XXXIX Sympozjum Diagnostyki Maszyn. Wisła, 04-10.03. 2012, Materiały wydane w formie streszczeń referatów i na CD, 23 s. Wyd. Wydział Transportu Politechniki Śląskiej, Katowice 2012.
- [11] Girtler J. Stochastic model of Diesel engines' operating process. J. of KONES 2004, vol. 11, nr 1-2, pp. 178-188.
- [12] Girtler J. The semi-Markov model of energy state changes of the main marine internal combustion engine and method for evaluating its operation during ships voyage. Polish Maritime Research, Vol. 18, No. 4, 2011, pp. 36-42.
- [13] Girtler J. Diagnosis' likelihood and diagnosis rightness about the technical state of diesel engine. Proceedings of the III International Scientific-Technical Conference EXPLO DIESEL & GAS TURBINE '03. Gdańsk-Międzyzdroje-Lund (Sweden), May 5-9, 2003. Gdańsk: Univ. Technol. Fac. Ocean. Eng. & Ship Tech. 2003, pp. 215-221.
- [14] Girtler J. Zastosowanie wiarygodności diagnozy do podejmowania decyzji w procesie eksploatacji urządzeń. Materiały V krajowej konferencji „Diagnostyka techniczna urządzeń i systemów” DIAG'2003. Ustroń, 13-17 października 2003. WAT, PAN, Warszawa 2003, s. 100-109.
- [15] Girtler J. Probabilistic measures of a diagnosis' likelihood about the technical state of transport means. Archives of Transport, Vol. 11, Iss. 3-4. Polish Academy of Sciences. Committee of Transport, pp. 33-42.
- [16] Girtler J. Zastosowanie bayesowskiej statystycznej teorii decyzji do sterowania procesem eksploatacji urządzeń. Materiały XXII Zimowej Szkoły Niezawodności nt. Wartościowanie niezawodnościowe w procesach realizacji zadań technologicznych w ujęciu logistycznym. SPE KBM PAN, Szczecin 1994, s. 55-62.

**Abbreviations and terms/Skróty i oznaczenia**

- pDG complete diagnosis on engine technical state/*pełna diagnoza o stanie technicznym silnika*
- SD diagnostic system/*system diagnostyczny*
- SDN diagnosed system/*system diagnozowany*
- SDG diagnosing system/*system diagnozujący*
- $P(s/K_i)$  probability being a measure of diagnosis reliability/*prawdopodobieństwo będące miarą wiarygodności diagnozy*
- [17] Girtler J. Zastosowanie modelu Markowa w procesie sterowania eksploatacją urządzeń. III Szkoła Inżynierii Systemów, t. III, ITWL, Warszawa 1987, s. 155-176.
  - [18] Grabski F. Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji. PAN IBS, seria: Badania Systemowe, t. 30, Warszawa 2002.
  - [19] Grabski F. Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. Zeszyty Naukowe AMW, nr 75A, Gdynia 1982.
  - [20] Korczewski Z. Endoscopic image processing and analysis of piston's service failures of marine Diesel engines. Journal of Polish CIMAC, Vol. 6, No. 2, 2011, pp.125-134.
  - [21] Limnios N., Oprisan G. Semi-Markov Processes and Reliability. Boston, Birkhauser 2001.
  - [22] Piotrkowski I., Witkowski K. Eksploatacja okrętowych silników spalinowych. AM, Gdynia 2002.
  - [23] Rudnicki J. Usage of semi-Markov process in operation evaluation of Diesel engine. Journal of Polish CIMAC, Vol. 5, No. 2, 2010, pp. 151-160.
  - [24] Сильвестров Д.С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. Издательство „Советское Радио”. Москва 1980.
  - [25] Inżynieria diagnostyki maszyn. Praca zbiorowa pod red. B. Żółtowskiego i C. Cempla. PTDT. Wyd. ITE, Warszawa, Bydgoszcz, Radom 2004.
  - [26] Poradnik niezawodności. Praca zbiorowa pod red. J. Migdałskiego. Wydawnictwa Przemysłu Maszynowego „WEMA”, Warszawa 1982.
  - [27] MAN B&W Diesel A/S: CoCoS Maintenance, Designed for Maintenance Excellence, Kopenhaga 2005.
  - [28] Wärtsilä Corporation: Service News from Wärtsilä Corporation 2 2002/1 2003, CBM for two stroke engines, Kaidara Software, Wärtsilä Corporation Helsinki, marzec 2003.
  - [29] Girtler J., Fydrych J. Analiza i ocena przydatności opracowanego systemu diagnostycznego silników głównych statków do sterowania procesem eksploatacji tego rodzaju silników w aspekcie zapewnienia bezpieczeństwa statków oraz morskiego środowiska naturalnego. Sprawozdanie z etapu realizacji projektu badawczego własnego nt. „Decyzyjne sterowanie procesem eksploatacji układów korbowo-tłokowych silników napędu głównego statków morskich z zastosowaniem diagnostyki technicznej oraz uwzględnieniem bezpieczeństwa i ochrony środowiska”. Projekt wykonywany w ramach projektu finansowanego przez MNiSW nr N N509 494638. Kierownik projektu prof. dr hab. inż. Jerzy Girtler. Prace badawcze nr 04/12/PB. Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2012.

Prof. Jerzy Girtler DSc., DEng. – full professor in the Faculty of Ocean Engineering of Ship technology at Gdansk University of Technology.

Prof. dr hab. inż. Jerzy Girtler – profesor zwyczajny na Wydziale Oceanotechniki i Okrętownictwa Politechniki Gdańskiej.

e-mail: [jgirtl@pg.gda.pl](mailto:jgirtl@pg.gda.pl)

