DYSKRETNO-CIĄGŁA METODA MODELOWANIA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Rafał Hein

Katedra Mechaniki i Mechatroniki, Politechnika Gdańska
rahe@pg.gda.pl

Streszczenie

W artykule przedstawiono oryginalną metodę modelowania układów dyskretno-ciągłych. Metoda polega na dyskretyzowaniu układu trójwymiarowego jedynie w dwóch wybranych kierunkach. W trzecim z kierunków układ pozostaje ciągły. Otrzymany w ten sposób model jest modelem dyskretno-ciągłym. Opisany jest za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Ogólne równania różnicowe układu dyskretnego otrzymano, wykorzystując metodę sztywnych elementów skończonych. W granicy równania te sprowadzono do równań różniczkowych cząstkowych. Podano sformalizowany zapis tych równań w postaci macierzowej oraz przedstawiono ogólny sposób budowania takich macierzy dla złożonych układów mechanicznych. Do rozwiązania wyprowadzonych równań zastosowano metodę transmitancji układów o parametrach rozłożonych. Metodę zilustrowano na przykładzie belki obustronnie utwierdzonej.

Słowa kluczowe: modelowanie, układy mechaniczne, układy dynamiczne, drgania

DISCRETE-CONTINUOUS METHOD OF DYNAMIC SYSTEMS MODELLING

Summary

The paper introduces an original method of discrete-continuous systems modeling. In the proposed method three dimensional system is divided on finite elements only in two directions. In the third one the system remains continuous. Obtained in that way model is a discrete-continuous model of the considered system. It is described by the system of partial differential equations. General difference equations of discrete system were obtained using the rigid finite elements method. In the limit these equations were transformed to the partial differential equations. Then formalized matrix notation of derived equations was given. Finally a general way to create global matrix for the whole system was presented. To solve obtained equations one applied the distributed transfer function method. Proposed approach was illustrated on the example of simple beam fixed on both ends.

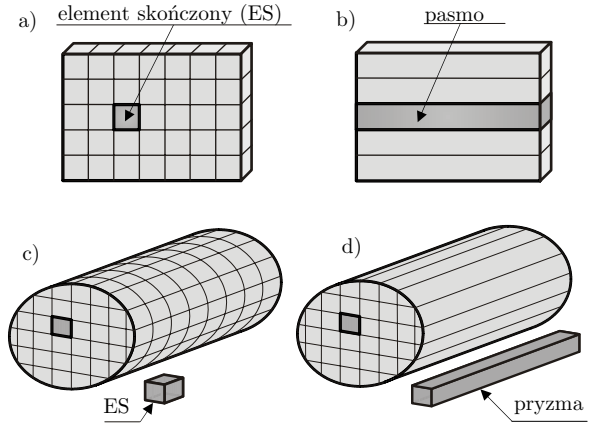
Keywords: modelling, mechanical system, dynamic systems, vibration

1. WSTĘP

Znanych jest wiele metod modelowania układów dynamicznych. Nie ma jednak metod uniwersalnych, które z jednej strony byłyby dokładne, a z drugiej nadawały się do modelowania szerokiej klasy układów dynamicznych. Do grupy powszechnie stosowanych należy metoda elementów skończonych. Korzystając z tej metody, można otrzymać przybliżony model układu rzeczywistego. Jego dokładność zależy jednak od liczby elementów skończonych. Im większa ich liczba, tym model dokładniejszy. Istnieje jednak optymalna gęstość podziału i liczba elementów skończonych, powyżej której błędy zaokrągleń i obliczeń numerycznych zaczynają odgrywać decydującą rolę. W przypadku układów smukłych stosowanie metody elementów skończonych wymaga niekiedy gęstej siatki podziału dla zachowania odpowiedniego kształtu zastosowanych elementów skończonych i dokładności obliczeń. Z kolei duża gęstość podziału prowadzi do znaczącego wzrostu rzędu

modelu. Wysoki rząd modelu jest niepożądany, np. przy projektowaniu układów sterowania, i prowadzi jednocześnie do wydłużenia czasu obliczeń numerycznych. Ponadto dla elementów smukłych, takich jak np. struny, pręty czy belki, można określić dokładne rozwiązania analityczne. W takich przypadkach lepiej jest stosować znane, jednowymiarowe modele ciągłe. Na podstawie takich modeli można łatwo budować zredukowane modele modalne niskiego rzędu, które w zakresie rozważanych i uwzględnionych częstotliwości własnych są modelami dokładnymi. W wielu pracach przedstawiono sposób budowania takich modeli zarówno dla układów o parametrach rozłożonych, jak i skupionych [1-3, 5-9].

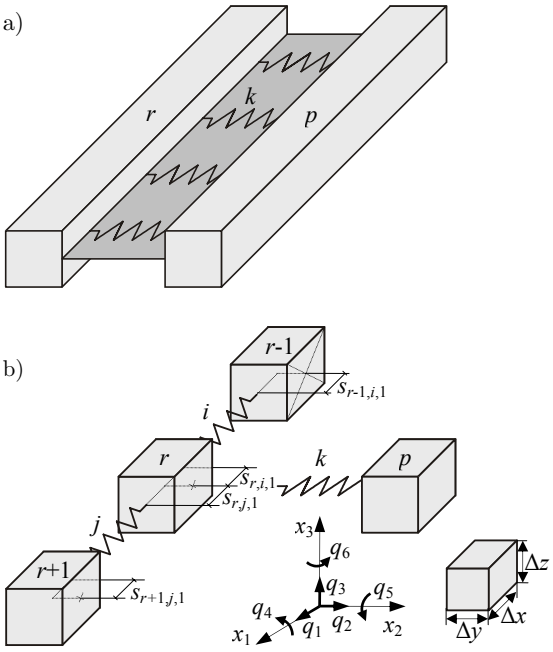
W przypadku układów wielowymiarowych, dla których nie można określić rozwiązań analitycznych, można posłużyć się proponowaną w pracy metodą hybrydową. Łączy ona zalety metod modelowania układów ciągłych i dyskretyzowanych przestrzennie. W klasycznej metodzie elementów skończonych układy dwuwymiarowe i trójwymiarowe dzieli się odpowiednio w dwóch i trzech kierunkach (rys. 1a, 1c). W proponowanej metodzie układy te dzieli się odpowiednio w jednym i dwóch kierunkach (rys. 1b, 1d). W ten sposób otrzymuje się elementy o parametrach rozłożonych wzdłuż jednej z osi.



Rys. 1. Dyskretyzacja przestrzenna: a), c) klasyczna metoda elementów skończonych b), d) proponowana metoda hybrydowa

2. MODEL OGÓLNY UKŁADU DYSKRETNO-CIĄGŁEGO

W celu wyprowadzenia równań ogólnych modelu dyskretno-ciągłego rozważano dwie pryzmy r i p połączone warstwą elementów sprężysto-tłumiących k o parametrach rozłożonych (rys. 2a).



Rys. 2. Model ogólny: a) dyskretno-ciągły, b) dyskretny

Dyskretny model takiego układu przedstawiono na rys. 2b. Składa się on z czterech brył sztywnych r-1, r, r+1 oraz p połączonych elementami sprężysto-tłumiącymi (EST) i, j, k. Każdy element skończony ma 6 stopni swobody:

$$\boldsymbol{q}_{r-1} = col(q_{r-1,1}, q_{r-1,2}, q_{r-1,3}, q_{r-1,4}, q_{r-1,5}, q_{r-1,6}), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{q}_{r} = col(q_{r,1}, q_{r,2}, q_{r,3}, q_{r,4}, q_{r,5}, q_{r,6}), \quad (2)$$

$$\boldsymbol{q}_{r+1} = col(q_{r+1,1}, q_{r+1,2}, q_{r+1,3}, q_{r+1,4}, q_{r+1,5}, q_{r+1,6}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{q}_{p} = col(q_{p,1}, q_{p,2}, q_{p,3}, q_{p,4}, q_{p,5}, q_{p,6}), \quad (4)$$

spośród których trzy pierwsze są przemieszczeniami translacyjnymi odpowiednio wzdłuż osi x_1, x_2, x_3, zaś pozostałe przemieszczeniami rotacyjnymi wokół tych osi. Stosując metodę sztywnych elementów skończonych [4], napisano i zweryfikowano równania dla rozważanego układu. Z otrzymanych 24 równań różniczkowych zwyczajnych wyselekcjonowano równania dla elementu r. Mają one postać:

$$\begin{aligned} f_{r,1} = {} & m\ddot{q}_{r,1} + c_{i,1}(q_{r,1} - q_{r-1,1}) - c_{j,1}(q_{r+1,1} - q_{r,1}) + \\ & + c_{k,1}(q_{r,1} - q_{p,1}) + c_{k,1}(s_{r,k,3}q_{r,5} - s_{p,k,3}q_{p,5}) + \\ & - c_{k,1}(s_{r,k,2}q_{r,6} - s_{p,k,2}q_{p,6}) + \\ & + c_{i,1}(s_{r,i,3}q_{r,5} - s_{r-1,i,3}q_{r-1,5}) - c_{i,1}(s_{r,i,2}q_{r,6} - s_{r-1,i,2}q_{r-1,6}) + \\ & + c_{j,1}(s_{r,j,3}q_{r,5} - s_{p,j,3}q_{r+1,5}) - c_{j,1}(s_{r,j,2}q_{r,6} - s_{p,j,2}q_{r+1,6}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_{r,2} = {} & m\ddot{q}_{r,2} + c_{i,2}(q_{r,2} - q_{i-1,j,2}) - c_{j,2}(q_{r+1,2} - q_{r,2}) + \\ & + c_{k,2}(q_{r,2} - q_{p,2}) - c_{k,2}(s_{r,k,3}q_{r,4} - s_{p,k,3}q_{p,4}) + \\ & + c_{k,2}(s_{r,k,1}q_{r,6} - s_{p,k,1}q_{p,6}) + \\ & + c_{i,2}(s_{r,i,1}q_{r,6} - s_{r-1,i,1}q_{r-1,6}) + c_{j,2}(s_{r,j,1}q_{r,6} - s_{p,j,1}q_{r+1,6}) + \\ & + c_{j,2}(s_{p,j,3}q_{r+1,4} - s_{r,j,3}q_{r,4}) + c_{i,2}(s_{r-1,i,3}q_{r-1,4} - s_{r,i,3}q_{r,4}), \end{aligned} \quad (6)$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$$
\begin{aligned}
f_{r,3} &= m\ddot{q}_{r,3} + c_{i,3}(q_{r,3} - q_{r-1,3}) - c_{j,3}(q_{r+1,3} - q_{r,3}) + \\
&+ c_{k,3}(q_{r,3} - q_{p,3}) + c_{k,3}(s_{r,k,2}q_{r,4} - s_{p,k,2}q_{p,4}) + \\
&+ c_{p,3}(s_{p,k,1}q_{p,5} - s_{r,k,1}q_{r,5}) + \\
&- c_{i,3}(s_{r,i,1}q_{r,5} - s_{r-1,i,1}q_{r-1,5}) - c_{j,3}(s_{r,j,1}q_{r,5} - s_{r+1,j,1}q_{r+1,5}) + \\
&+ c_{i,3}(s_{r,i,2}q_{r,4} - s_{r-1,i,2}q_{r-1,4}) + c_{j,3}(s_{r,j,2}q_{r,4} - s_{r+1,j,2}q_{r+1,4}),
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{r,4} &= \rho\Delta x I_{0x}\ddot{q}_{r,4} + c_{i,4}(q_{r,4} - q_{r-1,4}) - c_{j,4}(q_{r+1,4} - q_{r,4}) + \\
&+ c_{k,4}(q_{r,4} - q_{p,4}) + c_{k,3}(s_{r,k,2}q_{r,3} - s_{r,k,2}q_{p,3}) + \\
&+ c_{k,3}(s_{r,k,2}^2 q_{r,4} - s_{r,k,2}s_{p,k,2}q_{p,4}) + \\
&+ c_{k,2}(s_{r,k,3}^2 q_{r,4} - s_{r,k,3}s_{p,k,3}q_{p,4}) + \\
&+ c_{k,2}(s_{r,k,3}q_{p,2} - s_{r,k,3}q_{r,2}) + \\
&- c_{k,2}(s_{r,k,1}s_{r,k,3}q_{r,6} - s_{r,k,3}s_{p,k,1}q_{p,6}) + \\
&- c_{k,3}(s_{r,k,1}s_{r,k,2}q_{r,5} - s_{r,k,2}s_{p,k,1}q_{p,5}) + \\
&- c_{i,2}(s_{r,i,3}q_{r,2} - s_{r,i,3}q_{r-1,2}) - c_{j,2}(s_{r,j,3}q_{r,2} - s_{r,j,3}q_{r+1,2}) + \\
&+ c_{i,3}(s_{r,i,2}q_{r,3} - s_{r,i,2}q_{r-1,3}) + c_{j,3}(s_{r,j,2}q_{r,3} - s_{r,j,2}q_{r+1,3}) + \\
&+ c_{i,3}(s_{r-1,i,1}s_{r,i,2}q_{r-1,5} - s_{r,i,1}s_{r,i,2}q_{r,5}) + \\
&+ c_{j,3}(s_{r,j,2}s_{r+1,j,1}q_{r+1,5} - s_{r,j,1}s_{r,j,2}q_{r,5}) + \\
&+ c_{i,3}(s_{r,i,2}^2 q_{r,4} - s_{r-1,i,2}s_{r,i,2}q_{r-1,4}) + \\
&+ c_{i,2}(s_{r,i,3}^2 q_{r,4} - s_{r-1,i,3}s_{r,i,3}q_{r-1,4}) + \\
&+ c_{j,3}(s_{r,j,2}^2 q_{i,j,k,4} - s_{r,j,2}s_{r+1,j,2}q_{r-1,4}) + \\
&+ c_{j,2}(s_{r,j,3}^2 q_{r,4} - s_{r,j,3}s_{r+1,j,3}q_{r+1,4}) + \\
&+ c_{i,2}(s_{r-1,i,1}s_{r,i,3}q_{r-1,6} - s_{r,i,1}s_{r,i,3}q_{r,6}) + \\
&+ c_{j,2}(s_{r,j,3}s_{r+1,j,1}q_{r+1,6} - s_{r,j,1}s_{r,j,3}q_{r,6}),
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{r,5} &= \rho\Delta y I_{0y}\ddot{q}_{r,5} + c_{i,5}(q_{r,5} - q_{r-1,5}) - c_{j,5}(q_{r+1,5} - q_{r,5}) + \\
&+ c_{k,5}(q_{r,5} - q_{p,5}) - c_{i,3}s_{r,i,1}(q_{r,3} - q_{r-1,3}) + \\
&- c_{k,3}s_{r,k,1}(q_{r,3} - q_{p,3}) + \\
&+ c_{i,3}(s_{r,i,1}^2 q_{r,5} - s_{r-1,i,1}s_{r,i,1}q_{r-1,5}) + \\
&+ c_{j,3}(s_{r,j,1}^2 q_{r,5} - s_{r,j,1}s_{r+1,j,1}q_{r+1,5}) + \\
&+ c_{k,1}s_{r,k,3}(q_{r,1} - q_{p,1}) + c_{k,3}(s_{r,k,1}^2 q_{r,5} - s_{r,k,1}s_{p,k,1}q_{p,5}) + \\
&+ c_{k,1}(s_{r,k,3}^2 q_{r,5} - s_{r,k,3}s_{p,k,3}q_{p,5}) + c_{j,3}s_{r,j,1}(q_{r+1,3} - q_{r,3}) + \\
&- c_{k,3}(s_{r,k,1}s_{r,k,2}q_{r,4} - s_{r,k,1}s_{p,k,2}q_{p,4}) + \\
&- c_{k,1}(s_{r,k,2}s_{r,k,3}q_{r,6} - s_{r,k,3}s_{p,k,2}q_{p,6}) + \\
&+ c_{i,1}s_{r,i,3}(q_{r,1} - q_{r-1,1}) + c_{j,1}s_{r,j,3}(q_{r,1} - q_{r+1,1}) + \\
&+ c_{i,1}(s_{r,i,3}^2 q_{r,5} - s_{r-1,i,3}s_{r,i,3}q_{r-1,5}) + \\
&+ c_{j,1}(s_{r,j,3}^2 q_{r,5} - s_{r,j,3}s_{r+1,j,3}q_{r+1,5}) + \\
&+ c_{i,3}(s_{r-1,i,2}s_{r,i,1}q_{r-1,4} - s_{r,i,2}s_{r,i,1}q_{r,4}) + \\
&+ c_{j,3}(s_{r,j,1}s_{r+1,j,2}q_{r+1,4} - s_{r,j,2}s_{r,j,1}q_{r,4}) + \\
&+ c_{i,1}(s_{r-1,i,2}s_{r,i,3}q_{r-1,6} - s_{r,i,2}s_{r,i,3}q_{r,6}) + \\
&+ c_{j,1}(s_{r,j,2}s_{r+1,j,1}q_{r+1,6} - s_{r,j,1}s_{r,j,2}q_{r,6}),
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{r,6} &= \rho\Delta z I_{0z}\ddot{q}_{r,6} + c_{i,6}(q_{r,6} - q_{r-1,6}) - c_{j,6}(q_{r+1,6} - q_{r,6}) + \\
&+ c_{j,2}s_{r,j,1}(q_{r,2} - q_{r+1,2}) - c_{i,2}s_{r,i,1}(q_{r-1,2} - q_{r,2}) + \\
&+ c_{k,6}(q_{r,6} - q_{p,6}) - c_{k,1}s_{r,k,2}(q_{r,1} - q_{p,1}) + \\
&- c_{k,1}(s_{r,k,2}s_{r,k,3}q_{r,5} - s_{r,k,2}s_{p,k,3}q_{p,5}) \\
&+ c_{i,2}(s_{r,i,1}^2 q_{r,6} - s_{r-1,i,1}s_{r,i,1}q_{r-1,6}) + \\
&+ c_{j,2}(s_{r,j,1}^2 q_{r,6} - s_{r,j,1}s_{r+1,j,1}q_{r+1,6}) + \\
&+ c_{k,1}(s_{r,k,2}^2 q_{r,6} - s_{r,k,2}s_{p,k,2}q_{p,6}) + \\
&+ c_{k,2}s_{r,k,1}(q_{r,2} - q_{p,2}) - \\
&- c_{k,2}(s_{r,k,1}s_{r,k,3}q_{r,4} - s_{r,k,1}s_{p,k,3}q_{p,4}) + \\
&+ c_{k,2}(s_{r,k,1}^2 q_{r,6} - s_{r,k,1}s_{p,k,1}q_{p,6}) - \\
&- c_{i,1}s_{r,i,2}(q_{r,1} - q_{r-1,1}) + c_{j,1}s_{r,j,2}(q_{r+1,1} - q_{r,1}) + \\
&+ c_{i,1}(s_{r-1,i,3}s_{r,i,2}q_{r-1,5} - s_{r,i,2}s_{r,i,3}q_{r,5}) + \\
&+ c_{j,1}(s_{r,j,2}s_{r+1,j,3}q_{r+1,5} - s_{r,j,2}s_{r,j,3}q_{r,5}) + \\
&+ c_{i,2}(s_{r-1,i,3}s_{r,i,1}q_{r-1,4} - s_{r,i,1}s_{r,i,3}q_{r,4}) + \\
&+ c_{j,2}(s_{r,j,1}s_{r+1,j,3}q_{r+1,4} - s_{r,j,1}s_{r,j,3}q_{r,4}) + \\
&+ c_{i,1}(s_{r,i,2}^2 q_{r,6} - s_{r-1,i,2}s_{r,i,2}q_{r-1,6}) + \\
&+ c_{j,1}(s_{r,j,2}^2 q_{r,6} - s_{r,j,2}s_{r+1,j,2}q_{r+1,6}),
\end{aligned} \tag{10}
$$

gdzie: $f_{r,}$ – siła uogólniona oddziaływująca na r-ty element w kierunku osi x_α (rys. 2b); m – masa sztywnego elementu skończonego; ρ – gęstość elementu; $I_{0\alpha}$ - geometryczny, biegunowy moment bezwładności względem osi x_α; Δx, Δy, Δz – elementarne wymiary elementu skończonego (rys. 2b); $q_{r,\alpha}$ - przemieszczenie uogólnione r-tego elementu skończonego w kierunku osi x_α; $q_{p,\alpha}$ - przemieszczenie uogólnione p-tego elementu skończonego w kierunku osi x_α; $s_{\alpha,\beta,\gamma}$ - odległość między elementem skończonym α a elementem sprężystym β w kierunku osi x_γ; $c_{\alpha\beta}$ - współczynnik sztywności elementu sprężystego o numerze α w kierunku osi x_β [4]:

$$
\begin{aligned}
&c_{i,1} = c_{j,1} = \frac{E\Delta y\Delta z}{\Delta x},\ c_{k,1} = \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y}, \\
&c_{i,2} = c_{j,2} = \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x},\ c_{k,2} = \frac{E\Delta x\Delta z}{\Delta y}, \\
&c_{i,3} = c_{j,3} = \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x}, c_{k,3} = \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y}, \\
&c_{i,4} = c_{j,4} = \frac{GI_{0x}}{\Delta x},\ c_{k,4} = \frac{EI_{xy}}{\Delta y}, \\
&c_{i,5} = c_{j,5} = \frac{EI_{yx}}{\Delta x},\ c_{k,5} = \frac{GI_{0y}}{\Delta y}, \\
&c_{i,6} = c_{j,6} = \frac{EI_{zx}}{\Delta x},\ c_{k,6} = \frac{EI_{zy}}{\Delta y},
\end{aligned} \tag{11}
$$

E – moduł sprężystości podłużnej Younga; G – moduł odkształcalności postaciowej Kirchhoffa; $I_{\alpha,\beta}$ - geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego prostopadłego do osi x_β względem osi x_α; κ - współczynnik kształtu przekroju poprzecznego dla ścinania.

Równania (5÷10) sprowadzono następnie do równań różnicowych, dzieląc je obustronnie przez Δx i podsta-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

wiając równocześnie w miejsce współrzędnych zamocowania $s_{\cdot,\cdot,}$ następujące zależności:

$$s_{r-1,i,1} = s_{r,j,1} = \frac{\Delta x}{2},\ s_{r,i,1} = s_{r+1,j,1} = -\frac{\Delta x}{2},$$

$$s_{r,i,2} = s_{r,i,3} = s_{r,j,2} = s_{r,j,3} = s_{r+1,j,2} = s_{r+1,j,3} = s_{r,k,1} = s_{p,k,1} = 0$$

W wyniku przekształceń otrzymano:

$$f_{xr,1} = \rho\Delta y\Delta z\ddot{q}_{r,1} - E\Delta y\Delta z\frac{\frac{q_{r+1,1}-q_{r,1}}{\Delta x} - \frac{q_{r,1}-q_{r-1,1}}{\Delta x}}{\Delta x} + \\ + \frac{\kappa G\Delta z}{\Delta y}(q_{r,1}-q_{p,1}) + \frac{\kappa G\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,3}q_{r,5} - s_{p,k,3}q_{p,5}) + \\ - \frac{\kappa G\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,2}q_{r,6} - s_{p,k,2}q_{p,6}), \tag{12}$$

$$f_{xr,2} = \rho\Delta y\Delta z\ddot{q}_{r,2} - \kappa G\Delta y\Delta z\frac{(\frac{q_{r+1,2}-q_{r,2}}{\Delta x}) - (\frac{q_{r,2}-q_{r-1,2}}{\Delta x})}{\Delta x} + \\ + \frac{E\Delta z}{\Delta y}(q_{r,2}-q_{p,2}) - \frac{E\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,3}q_{r,4} - s_{p,k,3}q_{p,4}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{2}(\frac{q_{r+1,6}-q_{r,6}}{\Delta x}) + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{2}(\frac{q_{r,6}-q_{r-1,6}}{\Delta x}), \tag{13}$$

$$f_{xr,3} = \rho\Delta y\Delta z\ddot{q}_{r,3} - \kappa G\Delta y\Delta z\frac{\frac{(q_{r+1,3}-q_{r,3})}{\Delta x} - \frac{(q_{r,3}-q_{r-1,3})}{\Delta x}}{\Delta x} + \\ + \frac{\kappa G\Delta z}{\Delta y}(q_{r,3}-q_{p,3}) + \frac{\kappa G\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,2}q_{r,4} - s_{p,k,2}q_{p,4}) + \\ - \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{2}(\frac{q_{r+1,5}-q_{r,5}}{\Delta x}) - \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{2}(\frac{q_{r,5}-q_{r-1,5}}{\Delta x}), \tag{14}$$

$$f_{xr,4} = \rho I_{0x}\ddot{q}_{r,4} - GI_{0x}\frac{(\frac{q_{r+1,4}-q_{r,4}}{\Delta x}) - (\frac{q_{r,4}-q_{r-1,4}}{\Delta x})}{\Delta x} + \\ + \frac{EI_{xy}}{\Delta y\Delta x}(q_{r,4}-q_{p,4}) + \frac{\kappa G\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,2}q_{r,3} - s_{r,k,2}q_{p,3}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,2}^2 q_{r,4} - s_{r,k,2}s_{p,k,2}q_{p,4}) + \\ + \frac{E\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,3}^2 q_{r,4} - s_{r,k,3}s_{p,k,3}q_{p,4}) + \frac{E\Delta z}{\Delta y}(s_{r,k,3}q_{p,2} - s_{r,k,3}q_{r,2}), \tag{15}$$

$$f_{xr,5} = \rho\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{1}{12}\Delta x\Delta z(\overbrace{\Delta x^2}^{=0} + \Delta z^2)\ddot{q}_{r,5} + \\ - EI_{yx}\frac{(\frac{q_{r+1,5}-q_{r,5}}{\Delta x}) - (\frac{q_{r,5}-q_{r-1,5}}{\Delta x})}{\Delta x} + \\ + \frac{G\frac{1}{12}\Delta x\Delta z(\overbrace{\Delta x^2}^{=0} + \Delta z^2)}{\Delta x\Delta y}(q_{r,5}-q_{p,5}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x}\frac{\Delta x}{2}(\frac{q_{r,3}-q_{r-1,3}}{\Delta x}) + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x}\frac{\Delta x}{2}(\frac{q_{r+1,3}-q_{r,3}}{\Delta x}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2(q_{r,5}+q_{r-1,5}) + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2(q_{r,5}+q_{r+1,5}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y\Delta x}s_{r,k,3}(q_{r,1}-q_{p,1}) + \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y\Delta x}(s_{r,k,3}^2 q_{r,5} - s_{r,k,3}s_{p,k,3}q_{p,5}) + \\ - \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y\Delta x}(s_{r,k,2}s_{r,k,3}q_{r,6} - s_{r,k,3}s_{p,k,2}q_{p,6}), \tag{16}$$

$$f_{xr,6} = \rho\frac{\Delta z}{\Delta x}\frac{1}{12}\Delta x\Delta y(\Delta y^2 + \overbrace{\Delta x^2}^{=0})\ddot{q}_{r,6} + \\ - EI_{zx}\frac{(\frac{q_{r+1,6}-q_{r,6}}{\Delta x}) - (\frac{q_{r,6}-q_{r-1,6}}{\Delta x})}{\Delta x} + \\ + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x}\frac{\Delta x}{2}(\frac{q_{r,2}-q_{r+1,2}}{\Delta x}) + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x}\frac{\Delta x}{2}(\frac{q_{r-1,2}-q_{r,2}}{\Delta x}) + \\ + \frac{E\frac{1}{12}\Delta z\Delta x\overbrace{\Delta x^2}^{=0}}{\Delta y\Delta x}(q_{r,6}-q_{p,6}) - \\ - \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y\Delta x}s_{r,k,2}(q_{r,1}-q_{p,1}) + \\ - \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y\Delta x}(s_{r,k,2}s_{r,k,3}q_{r,5} - s_{r,k,2}s_{p,k,3}q_{p,5}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2(q_{r,6}+q_{r-1,6}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2(q_{r,6}+q_{r+1,6}) + \\ + \frac{\kappa G\Delta x\Delta z}{\Delta y\Delta x}(s_{r,k,2}^2 q_{r,6} - s_{r,k,2}s_{p,k,2}q_{p,6}), \tag{17}$$

gdzie: $f_{xr,}$ – siła rozłożona wzdłuż osi x_1 oddziaływująca na r-ty element w kierunku osi x_α.

Otrzymane w ten sposób równania różniczkowo-różnicowe sprowadzono w granicy przy $\Delta x \to 0$ do równań różniczkowych cząstkowych.
Równania te dla pryzmy r maja postać:

$$f_{r,1} = \rho A\ddot{q}_{r,1} - EAq''_{r,1} + \\ + c_{xk,1}(q_{r,1}-q_{p,1}) + c_{xk,1}(s_{r,k,3}q_{i,j,5} - s_{p,k,3}q_{p,5}) \\ - c_{xk,1}(s_{r,k,2}q_{r,6} - s_{p,k,2}q_{p,6}) \tag{18}$$

$$f_{r,2} = \rho A\ddot{q}_{r,2} - \kappa GAq''_{r,2} + \kappa GAq'_{r,6} + \\ + c_{xk,2}(q_{r,2}-q_{p,2}) - c_{xk,2}(s_{r,k,3}q_{r,4} - s_{p,k,3}q_{p,4}) \tag{19}$$

$$f_{r,3} = \rho A\ddot{q}_{r,3} - \kappa GAq''_{r,3} - \kappa GAq'_{r,5} + \\ + c_{xk,3}(q_{r,3}-q_{p,3}) + c_{xk,3}(s_{r,k,2}q_{r,4} - s_{p,k,2}q_{p,4}) \tag{20}$$

$$f_{r,4} = \rho I_{0x}\ddot{q}_{r,4} - GI_{0x}q''_{r,4} + \\ + c_{xk,4}(q_{r,4}-q_{p,4}) + c_{xk,3}(s_{r,k,2}q_{r,3} - s_{r,k,2}q_{p,3}) + \\ + c_{xk,2}(s_{r,k,3}q_{p,2} - s_{r,k,3}q_{r,2}) + \\ + c_{xk,3}(s_{r,k,2}^2 q_{r,4} - s_{r,k,2}s_{p,k,2}q_{p,4}) + \\ + c_{xk,2}(s_{r,k,3}^2 q_{r,4} - s_{r,k,3}s_{p,k,3}q_{p,4}) \tag{21}$$

$$f_{r,5} = \rho I_{yx}\ddot{q}_{r,5} - EI_{yx}q''_{r,5} + \kappa GAq'_{r,3} + \kappa GAq_{r,5} \\ + c_{xk,5}(q_{r,5}-q_{p,5}) + c_{xk,1}s_{r,k,3}(q_{r,1}-q_{p,1}) + \\ + c_{xk,1}(s_{r,k,3}^2 q_{r,5} - s_{r,k,3}s_{p,k,3}q_{p,5}) + \\ - c_{xk,1}(s_{r,k,2}s_{r,k,3}q_{r,6} - s_{r,k,3}s_{p,k,2}q_{p,6}) \tag{22}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$$
\begin{aligned}
f_{r,6} = {} & \rho I_{zx}\ddot{q}_{r,6} - EI_{zx}q''_{r,6} - \kappa GAq'_{r,2} + \kappa GAq_{r,6} \\
& - c_{xk,1}s_{r,k,2}(q_{r,1} - q_{p,1}) + \\
& - c_{xk,1}(s_{r,k,2}s_{r,k,3}q_{r,5} - s_{r,k,2}s_{p,k,3}q_{p,5}) + \\
& + c_{xk,1}(s^2_{r,k,2}q_{r,6} - s_{r,k,2}s_{p,k,2}q_{p,6})
\end{aligned} \tag{23}
$$

gdzie $A=\Delta y\Delta z$.

Równania dla elementu p można otrzymać z równań (18÷23), podstawiając w miejsce indeksów r indeksy p a w miejsce indeksów p indeksy r. Równania różniczkowe cząstkowe (18÷23) dla elementu r oraz odpowiadające im równania dla elementu p można zapisać w ogólnej postaci macierzowej

$$
\boldsymbol{A}_{02}\ddot{\boldsymbol{q}}(x,t) + \boldsymbol{A}_{20}\boldsymbol{q}''(x,t) + \boldsymbol{A}_{10}\boldsymbol{q}'(x,t) + \boldsymbol{A}_{00}\boldsymbol{q}(x,t) = \boldsymbol{f}(x,t), \tag{24}
$$

z warunkami brzegowymi:

$$
\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{q}(0,t) + \boldsymbol{N}_j\boldsymbol{q}(l,t) = \boldsymbol{\gamma}_j(t), \quad j=1,2, \tag{25}
$$

gdzie:

$$
\boldsymbol{A}_{02} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{02r} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{02p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \}r \\ \\ \\ \\ \\ \}p \\ \\ \\ \end{matrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
, \tag{26}
$$

lub $\boldsymbol{A}_{02} = diag(\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\boldsymbol{A}_{02r},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\boldsymbol{A}_{02p},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})$,

$\boldsymbol{A}_{02r} = diag(\rho A,\rho A,\rho A,\rho I_{0x},\rho I_{yx},\rho I_{zx})$,

$\boldsymbol{A}_{02p}$ - może być otrzymana z macierzy $\boldsymbol{A}_{02r}$ przez zastąpienie parametrów i wymiarów pryzmy r odpowiadającymi im parametrami i wymiarami pryzmy p.

$$
\boldsymbol{A}_{20} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{20r} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{20p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \}r \\ \\ \\ \\ \\ \}p \\ \\ \\ \end{matrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
, \tag{27}
$$

lub $\boldsymbol{A}_{20} = diag(\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\boldsymbol{A}_{20r},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\boldsymbol{A}_{20p},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})$,

$$
\boldsymbol{A}_{20r} = -\begin{bmatrix}
EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \kappa GA & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \kappa GA & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & GI_{0x} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & EI_{yx} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{zx}
\end{bmatrix},
$$

lub $\boldsymbol{A}_{20r} = diag(-EA,-\kappa GA,-\kappa GA,-GI_{0x},-EI_{yx},-EI_{zx})$,

$\boldsymbol{A}_{20p}$ - może być otrzymana z macierzy $\boldsymbol{A}_{02r}$ poprzez zamianę parametrów i wymiarów pryzmy r na odpowiadające im parametry i wymiary pryzmy p,

$$
\boldsymbol{A}_{10} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{10r} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{10p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \}r \\ \\ \\ \\ \}p \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
, \tag{28}
$$

lub $\boldsymbol{A}_{10} = diag(\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\boldsymbol{A}_{10r},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\boldsymbol{A}_{10p},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})$,

$$
\boldsymbol{A}_{10r} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa GA \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa GA & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \kappa GA & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\kappa GA & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$\boldsymbol{A}_{10p}$ - może być otrzymana z macierzy $\boldsymbol{A}_{10r}$ poprzez zamianę parametrów i wymiarów pryzmy r na odpowiadające im parametry i wymiary pryzmy p,

$$
\boldsymbol{A}_{00} = \boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{A}_s, \tag{29}
$$

gdzie macierz $\boldsymbol{A}_k$ ma postać analogiczną do macierzy sztywności $\widetilde{\boldsymbol{K}}_k$ przedstawionej w pracy [4]:

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \overbrace{\mathbf{0}}^{r} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \overbrace{\mathbf{0}}^{p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{rrk} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{rpk} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{prk} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{ppk} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \}r \\ \\ \\ \\ \\ \}p \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad (30)$$

$$\boldsymbol{A}_{rrk} = \begin{bmatrix} a_{rrk11} & 0 & 0 & 0 & a_{rrk15} & a_{rrk16} \\ & a_{rrk22} & 0 & a_{rrk24} & 0 & 0 \\ & & a_{rrk33} & a_{rrk34} & 0 & 0 \\ & & & a_{rrk44} & 0 & 0 \\ & & & & a_{rrk55} & a_{rrk56} \\ sym & & & & & a_{rrk66} \end{bmatrix},$$

$a_{rrk11} = c_{xk1}$, $a_{rrk15} = c_{xk1}s_{rk3}$, $a_{rrk16} = -c_{xk1}s_{rk2}$,

$a_{rrk22} = c_{xk2}$, $a_{rrk24} = -c_{xk2}s_{rk3}$,

$a_{rrk33} = c_{xk3}$, $a_{rrk34} = c_{xk3}s_{rk2}$,

$a_{rrk44} = c_{xk4} + c_{xk2}s_{rk3}^2 + c_{xk3}s_{rk2}^2$,

$a_{rrk55} = c_{xk5} + c_{xk1}s_{rk3}^2$, $a_{rrk56} = -c_{xk1}s_{rk2}s_{rk3}$,

$a_{rrk66} = c_{xk6} + c_{xk1}s_{rk2}^2$,

$$\boldsymbol{A}_{rpk} = \begin{bmatrix} a_{rpk11} & 0 & 0 & 0 & a_{rpk15} & a_{rpk16} \\ 0 & a_{rpk22} & 0 & a_{rpk24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{rpk33} & a_{rpk34} & 0 & 0 \\ 0 & a_{rpk42} & a_{rpk43} & a_{rpk44} & 0 & 0 \\ a_{rpk51} & 0 & 0 & 0 & a_{rpk55} & a_{rpk56} \\ a_{rpk61} & 0 & 0 & 0 & a_{rpk65} & a_{rpk66} \end{bmatrix},$$

$a_{rpk11} = -c_{xk1}$, $a_{rpk15} = -c_{xk1}s_{pk3}$, $a_{rpk16} = c_{xk1}s_{pk2}$,

$a_{rpk22} = -c_{xk2}$, $a_{rpk24} = c_{xk2}s_{pk3}$,

$a_{rpk33} = -c_{xk3}$, $a_{rpk34} = -c_{xk3}s_{pk2}$,

$a_{rpk42} = c_{xk2}s_{rk3}$, $a_{rpk43} = -c_{xk3}s_{rk2}$,

$a_{rpk44} = -c_{xk4} - c_{xk2}s_{rk3}s_{pk3} - c_{xk3}s_{rk2}s_{pk2}$,

$a_{rpk51} = -c_{xk1}s_{rk3}$, $a_{rpk55} = -c_{xk5} - c_{xk1}s_{rk3}s_{pk3}$,

$a_{rpk56} = c_{xk1}s_{rk3}s_{pk2}$,

$a_{rpk61} = c_{xk1}s_{rk2}$, $a_{rpk65} = c_{xk1}s_{rk2}s_{pk3}$,

$a_{rpk66} = -c_{xk6} - c_{xk1}s_{rk2}s_{pk2}$,

$\boldsymbol{A}_{prk} = \boldsymbol{A}_{rpk}^T$,

$\boldsymbol{A}_{ppk}$ - może być otrzymana z macierzy $\boldsymbol{A}_{rrk}$ przez zastąpienie indeksów r na p,

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \overbrace{\mathbf{0}}^{r} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \overbrace{\mathbf{0}}^{p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{sr} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{sp} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \}r \\ \\ \\ \\ \\ \}p \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad (31)$$

$$\boldsymbol{A}_{sr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa GA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa GA \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{A}_{sp}$ jest otrzymywana w ten sam sposób jak $\boldsymbol{A}_{sr}$, z tym że parametry pryzmy r zastępowane są parametrami pryzmy p,

$\boldsymbol{M}_j$, $\boldsymbol{N}_j$ – macierze zawierające liniowe, czasoprzestrzenne operatory różniczkowania. Przykładowo dla modelu belki Timoshenki (pojedynczej pryzmy) obustronnie utwierdzonej opisanej równaniami (19) i (23) lub (20) i (22) mają postać:

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Globalny model dla układu złożonego z dowolnej liczby pryzm jest otrzymywany w analogiczny sposób jak w metodzie elementów skończonych. Macierze $\boldsymbol{A}_{02}$, $\boldsymbol{A}_{20}$, $\boldsymbol{A}_{10}$ całego układu są sumą macierzy napisanych dla poszczególnych pryzm. Podobnie macierz $\boldsymbol{A}_{00}$ powiązań między pryzmami jest sumą poszczególnych macierzy sztywności wszystkich elementów sprężystych o parametrach rozłożonych zapisanych w układzie globalnym [4].

Wyprowadzone w ten sposób równania ogólne zweryfikowano w trzech etapach.

W pierwszym porównano części ciągłe równań (18÷23) ze znanymi równaniami opisującymi elementy jednowymiarowe. Część ciągła równania (18) odpowiada drganiom wzdłużnym pręta. Z kolei części ciągłe sprzężonych równań (19) oraz (23) opisują drgania

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

belki Timoshenki w płaszczyźnie x_1-x_2, zaś (20) oraz (22) również drgania belki Timoshenki, ale w płaszczyźnie x_1-x_3 prostopadłej do x_1-x_2. Część ciągła równania (21) opisuje drgania skrętne pręta.

W drugim etapie zapisano równania w postaci macierzowej i porównano otrzymaną macierz sztywności $\boldsymbol{A}_k$ opisującą powiązania elementów ciągłych r i p z odpowiadającą jej macierzą sztywności $\widetilde{\boldsymbol{K}}_k$ układu dyskretnego przedstawioną w pracy [4]. Okazało się, że w odpowiadających sobie miejscach tych macierzy występują analogiczne czynniki, z tym, że dla układu dyskretno-ciągłego w macierzy tej nie występują składniki, które znalazły się w części ciągłej tych równań. Ponadto każdy ze składników opisujących część dyskretną powiązań pryzm ciągłych r i p był weryfikowany z osobna.

W etapie trzecim zweryfikowano metodę, posługując się prostymi przykładami, dla których łatwo znaleźć rozwiązania dokładne.

Do rozwiązania otrzymanych równań różniczkowych cząstkowych zastosowano metodę transmitancji dla układów o parametrach rozłożonych [10,11]. Metoda ta w swojej pierwotnej wersji umożliwiała wyznaczanie rozwiązań dokładnych (analitycznych) w dziedzinie częstotliwości, ale tylko dla układów jednowymiarowych. Wyprowadzone i przedstawione w niniejszej pracy równania (24) umożliwiły zastosowanie tej metody do wyznaczenia semianalitycznych rozwiązań dla układu wielowymiarowego. Semianalitycznych, gdyż układ w dwóch kierunkach jest jednak dyskretyzowany.

W celu zastosowania metody transmitancji dla układów o parametrach rozłożonych równanie (24) poddaje się transformacji Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych

$$(\boldsymbol{A}_{02}s^2 + \boldsymbol{A}_{20}\frac{\partial}{\partial x^2} + \boldsymbol{A}_{10}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{A}_{00})\overline{\boldsymbol{q}}(x,s) = \overline{\boldsymbol{f}}(x,s)\,, \qquad (33)$$

z warunkami brzegowymi

$$\overline{\boldsymbol{M}}_j\overline{\boldsymbol{q}}(0,s) + \overline{\boldsymbol{N}}_j\overline{\boldsymbol{q}}(l,s) = \overline{\boldsymbol{\gamma}}_j(s)\,,\ \ j{=}1,2, \qquad (34)$$

gdzie:

$\overline{\boldsymbol{q}}(\bullet,s)$, $\overline{\boldsymbol{f}}(\bullet,s)$ oznaczają transformaty Laplace'a odpowiednich funkcji $\boldsymbol{q}(\bullet,t)$, $\boldsymbol{f}(\bullet,t)$, zaś

$\overline{\boldsymbol{M}}_j, \overline{\boldsymbol{N}}_j$ - są macierzami utworzonymi z macierzy $\boldsymbol{M}_j, \boldsymbol{N}_j$ poprzez zamianę operatorów różniczkowania względem czasu $\frac{\partial}{\partial t}$ oraz $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ odpowiednio na parametry s i s^2.

Równania (33) można następnie przedstawić w postaci równań stanu

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\eta}(x,s) = \boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{\eta}(x,s) + \boldsymbol{u}(x,s)\,, \qquad (35)$$

oraz

$$\boldsymbol{M}(s)\cdot\boldsymbol{\eta}(0,s) + \boldsymbol{N}(s)\cdot\boldsymbol{\eta}(l,s) = \boldsymbol{\gamma}(s)\,, \qquad (36)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\eta}(x,s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}(x,s) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{q}(x,s)}{\partial x} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{A}_{20}^{-1}(\boldsymbol{A}_{02}s^2 + \boldsymbol{A}_{00}) & -\boldsymbol{A}_{20}^{-1}\boldsymbol{A}_{10} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}(x,s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{20}^{-1}\boldsymbol{f}(x,s) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1(s) \\ \boldsymbol{\gamma}_2(s) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie równań (35) można przedstawić w postaci [10-12]

$$\boldsymbol{\eta}(x,s) = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{G}(x,\xi,s)\boldsymbol{u}(\xi,s)d\xi + \boldsymbol{H}(x,s)\boldsymbol{\gamma}(s)\,, \qquad (37)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{G}(x,\xi,s) = \begin{cases} e^{\boldsymbol{F}(s)x}[\boldsymbol{M}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)x_1} + \boldsymbol{N}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)x_2}]^{-1}\boldsymbol{M}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)(x_1-\xi)}, & \xi < x \\ -e^{\boldsymbol{F}(s)x}[\boldsymbol{M}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)x_1} + \boldsymbol{N}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)x_2}]^{-1}\boldsymbol{N}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)(x_2-\xi)}, & \xi > x \end{cases}$$

(38)

$$\boldsymbol{H}(x,s) = e^{\boldsymbol{F}(s)x}[\boldsymbol{M}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)x_1} + \boldsymbol{N}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)x_2}]^{-1} \qquad (39)$$

Jeżeli oznaczy się:

$$\boldsymbol{G}(x,\xi,s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{11}(x,\xi,s) & \boldsymbol{G}_{12}(x,\xi,s) \\ \boldsymbol{G}_{21}(x,\xi,s) & \boldsymbol{G}_{22}(x,\xi,s) \end{bmatrix}, \qquad (40)$$

$$\boldsymbol{H}(x,s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{11}(x,s) & \boldsymbol{H}_{12}(x,s) \\ \boldsymbol{H}_{21}(x,s) & \boldsymbol{H}_{22}(x,s) \end{bmatrix}, \qquad (41)$$

rozwiązanie (37) można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\eta}_i(x,s) = \sum_{j=1}^{2}\int_{x_1}^{x_2}\boldsymbol{G}_{ij}(x,\xi,s)\boldsymbol{u}_j(\xi,s)d\xi + \sum_{j=1}^{2}\boldsymbol{H}_{ij}(x,s)\boldsymbol{\gamma}_j(s)\,, \qquad (42)$$

$$i = 1,2\,,$$

lub

$$\boldsymbol{\eta}_i(x,s) = \sum_{j=1}^{2}\int_{x_1}^{x_2}\boldsymbol{G}_{ij}(x,\xi,s)\boldsymbol{A}_{20}^{-1}\boldsymbol{f}(\xi,s)d\xi + \sum_{j=1}^{2}\boldsymbol{H}_{ij}(x,s)\boldsymbol{\gamma}_j(s)\,, \qquad (43)$$

gdzie wyrażenie

$$\boldsymbol{K}(x,\xi,s) = \boldsymbol{G}_{ij}(x,\xi,s)\boldsymbol{A}_{20}^{-1}\,,\ i{=}1,2;\ j{=}1,2 \qquad (44)$$

nazwano transmitancją układu o parametrach rozłożonych wyznaczoną między i-tym wyjściem i j-tym wejściem [10,11].

W przypadku wymuszenia skupionego w punkcie x_0 zależność (38) można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\eta}_i(x,s) = \int_0^1 \boldsymbol{G}_{i2}(x,\xi,s)\boldsymbol{A}_{20}^{-1}\boldsymbol{f}(\xi,s)\delta(\xi - x_0)d\xi + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{H}_{ij}(x,s)\boldsymbol{\gamma}_j(s)\,, \qquad (45)$$

a po scałkowaniu

$$\boldsymbol{\eta}_i(x,s) = \boldsymbol{G}_{i2}(x,x_0,s)\boldsymbol{A}_{20}^{-1}\boldsymbol{f}(x_0,s) + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{H}_{ij}(x,s)\boldsymbol{\gamma}_j(s)\,, \qquad (46)$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Zakładając, że warunki brzegowe $\boldsymbol{\gamma}(s)=\mathbf{0}$, na podstawie (46) otrzymano równanie

$$\boldsymbol{\eta}_i(x,s)=\boldsymbol{G}_{i2}(x,x_0,s)\boldsymbol{A}_{20}^{-1}\boldsymbol{f}(x_0,s) \tag{47}$$

Warunek $\boldsymbol{\gamma}(s)=\mathbf{0}$ zachodzi w większości przypadków i oznacza, że w podporach belki nie działają wymuszenia zewnętrzne [10].

W przypadku szczególnym, gdy np. punkt przyłożenia wymuszenia $\xi=0.1$, zaś punkt obserwacji przemieszczenia $x=0.4$ oraz $\boldsymbol{\gamma}(s)=\mathbf{0}$ transmitancje układu o parametrach rozłożonych oblicza się, podstawiając do (44) zależności (38). W ten sposób otrzymuje się:

a) dla $\xi<x$

$$\boldsymbol{K}_{\xi<x}(s)=e^{\boldsymbol{F}(s)\cdot 0.4}[\boldsymbol{M}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)\cdot 0}+\boldsymbol{N}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)\cdot 1}]^{-1}\boldsymbol{M}(s)e^{-\boldsymbol{F}(s)\cdot 0.1}\boldsymbol{A}_{20}^{-1} \tag{48}$$

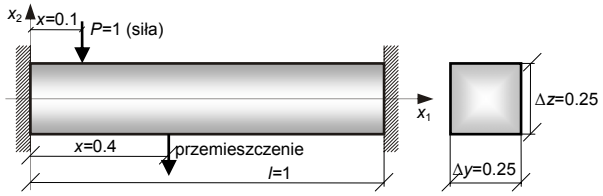
b) zaś dla $\xi>x$

$$\boldsymbol{K}_{\xi>x}(s)=-e^{\boldsymbol{F}(s)\cdot 0.4}[\boldsymbol{M}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)\cdot 0}+\boldsymbol{N}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)\cdot 1}]^{-1}\boldsymbol{N}(s)e^{\boldsymbol{F}(s)\cdot 0.9}\boldsymbol{A}_{20}^{-1} \tag{49}$$

Mając transmitancje operatorowe, można sporządzić charakterystyki częstotliwościowe oraz wyznaczyć częstości własne podstawiając $s=j\omega$.

3. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY

W przykładzie rozważa się belkę utwierdzoną na obu końcach (rys. 3) o długości l=1 m i wymiarach przekroju poprzecznego: Δy=0.25 m, Δz=0.25 m. Do obliczeń przyjęto następujące stałe materiałowe: E=2·10^{11} Pa, G=8·10^{10} Pa, ρ=8000 kg/m^3. Założono, że κ=1.



Rys. 3. Schemat rozważanego układu

Obliczenia wykonano dla dwóch przypadków. W pierwszym belkę potraktowano jako pojedynczą pryzmę, której opis sprowadzał się do sprzężonych równań belki Timoshenki. W drugim belkę podzielono na cztery pryzmy połączone czterema warstwami elementów sprężystych o parametrach rozłożonych (rys. 4). Każda pryzma ma trzy stopnie swobody przemieszczenia translacyjne wzdłuż osi x_1 i x_3 oraz przemieszczenie rotacyjne wokół osi x_2.

Współczynniki sztywności poszczególnych warstw elementów sprężystych o parametrach rozłożonych obliczono wg następujących zależności:

$$c_{x11}=c_{x13}=c_{x41}=c_{x43}=\frac{\kappa G\Delta z}{2\Delta y},$$

$$c_{x15}=c_{x45}=\frac{G\Delta z^3}{2\cdot 12\cdot\Delta y},$$

$$c_{x21}=c_{x31}=c_{x22}=c_{x32}=\frac{\kappa G\Delta y}{2\Delta z},$$

$$c_{x25}=c_{x35}=0,$$

$$c_{x23}=c_{x33}=\frac{E\Delta y}{2\Delta z},$$

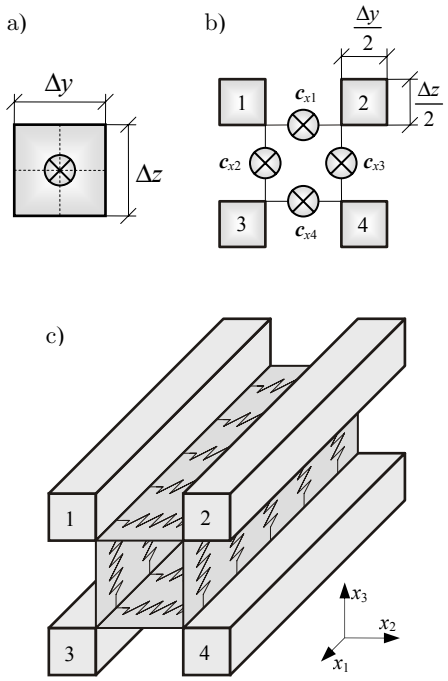
zaś współrzędne zamocowań warstw sprężystych do odpowiednich pryzm:

$$s_{1,1,2}=s_{3,4,2}=s_{1,2,2}=s_{3,2,2}=\frac{\Delta y}{4},$$

$$s_{2,1,2}=s_{4,4,2}=s_{2,3,2}=s_{4,3,2}=-\frac{\Delta y}{4},$$

$$s_{1,1,3}=s_{2,1,3}=s_{1,2,3}=s_{2,3,3}=-\frac{\Delta z}{4},$$

$$s_{3,4,3}=s_{4,4,3}=s_{3,2,3}=s_{4,3,3}=\frac{\Delta z}{4},$$



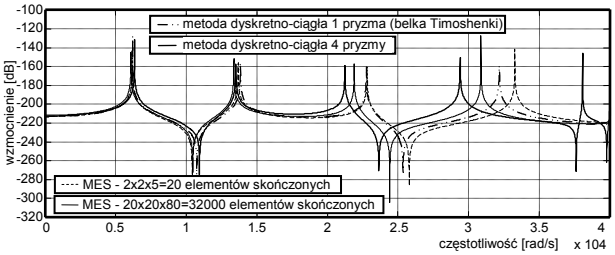
Rys. 4. Dyskretny model belki: a) podział pierwotny, b) podział wtórny, c) schemat ogólny

Macierze warunków brzegowych dla układu podzielonego na cztery pryzmy mają postać:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{12\times 12} & \mathbf{0}_{12\times 12}\\ \mathbf{0}_{12\times 12} & \mathbf{0}_{12\times 12}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{12\times 12} & \mathbf{0}_{12\times 12}\\ \boldsymbol{I}_{12\times 12} & \mathbf{0}_{12\times 12}\end{bmatrix}.$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dla tak przyjętych danych sporządzono charakterystyki częstotliwościowe dla proponowanego modelu dyskretno-ciągłego. Wykonano je dla siłowego wymuszenia okresowego o amplitudzie równej P=1 N, przyłożonego w punkcie x=0.1 [m] (rys. 3). Odpowiedź w postaci przemieszczenia obserwowano w punkcie o współrzędnej x=0.4 [m]. Uzyskane charakterystyki porównano następnie z charakterystykami otrzymanymi dla modeli opracowanych metodą elementów skończonych (rys. 5). Obliczone częstości własne zestawiono w tab. 1.



Rys. 5. Charakterystyki częstotliwościowe

Tab. 1. Porównanie częstości własnych

Nr	Metoda proponowana		Model MES		Błąd w odniesieniu do modelu MES 20×20×80 w [%]		
	1 pryzma	4 pryzmy	2×2×5 (20 el.)	20×20×80 (32000 el.)	1 pryzma	4 pryzmy	2×2×5
1	6211.15	6191.7	6164.68	6080.93	2.14	1.8	1.5
2	13848.36	13568.31	13682.26	13381.3	3.5	1.4	2.2
3	22763.9	21184.5	22817.3	21901.29	4	3.2	4.1
4	32186.47	29587.12	33288.92	30888.13	4.2	4.2	7.7
5	41982.17	38913.2	42763.4	40216.78	4.4	3.2	6.3
6	47172.88	41321.6	45807.18	43225.17	9.1	4.4	5.9

Dyskretny model MES składający się z 32000 sześciennych elementów skończonych dwudziestowęzłowych przyjęto jako model odniesienia.

Z porównania otrzymanych charakterystyk wynika, że dwie pierwsze częstości proponowanego modelu dyskretno-ciągłego składającego się z 4 pryzm i modelu odniesienia różnią się o 1.8 i 1.4% (tab. 1). Z kolei odpowiadające im częstości modelu MES składającego się z 20 elementów skończonych różnią się odpowiednio o 1.5 i 2.2% (tab. 1). O ile pierwsza z częstości modelu dyskretno-ciągłego jest nieco większa od odpowiadającej jej częstości modelu MES dla 20 elementów, to już druga jest zdecydowanie mniejsza i bliższa częstości odniesienia dla modelu składającego się z 32000 elementów. W miarę wzrostu częstotliwości model dyskretno-ciągły okazuje się być modelem dokładniejszym w stosunku do modelu MES dwudziestoelementowego, pomimo że składa się jedynie z 4 pryzm. Model składający się z jednej pryzmy, który jest równoznaczny z modelem belki Timoshenki, okazuje się porównywalny z 20-elementowym modelem MES. Chociaż dwie pierwsze częstości modelu belki Timoshenki są mniej dokładne, to już trzy kolejne są dokładniejsze. Oba te modele nie są jednak wystarczająco dokładne. Okazuje się, że wówczas, gdy średnica zastępcza belki d jest większa od $l/(2\sqrt{\pi})$, należy stosować gęstszą siatkę podziału belki lub metodę dyskretno-ciągłą. W takim przypadku metoda dyskretno-ciągła ma tę przewagę, że przy niewielkiej liczbie pryzm daje wyniki dokładniejsze niż MES przy tej samej liczbie elementów. W pracy nie zaprezentowano wyników obliczeń metodą MES dla 4 elementów skończonych, gdyż już pierwsza częstość znacznie odbiegała od częstości odniesienia.

4. WNIOSKI

W artykule przedstawiono dyskretno-ciągłą metodę modelowania układów dynamicznych. Wyprowadzono ogólne równania różniczkowe cząstkowe, które zapisano następnie w sformalizowanej postaci macierzowej łatwej do zastosowania w algorytmach komputerowych. Poprawność wyprowadzonych równań potwierdzono ich wieloetapową weryfikacją. W celu zilustrowania metody posłużono się przykładem prostej belki obustronnie utwierdzonej. Prezentowana w pracy metoda była testowana również na innych przykładach, m.in. belki swobodnie podpartej, jednostronnie utwierdzonej, czy też płyty prostokątnej z różnymi warunkami brzegowymi. Uzyskane rezultaty wykazały, że proponowana metoda, w szczególności w zakresach wyższych częstotliwości, daje dokładniejsze wyniki w stosunku do metody elementów skończonych przy tej samej lub porównywalnej liczbie elementów. Ponadto przy niewielkiej liczbie elementów można uzyskać bardzo dobrą dokładność modelu i zbieżność wyników, a przy tym zdecydowane skrócenie czasu obliczeń. Dzięki jej zastosowaniu można otrzymać semianalityczne rozwiązania równań opisujących w sposób dyskretno-ciągły modele układów dynamicznych.

Wyniki obliczeń i symulacji komputerowych potwierdziły, że proponowana metoda jest skuteczna, efektywna i może znaleźć zastosowanie do modelowania układów mechanicznych.

Literatura

1. Hein R., Orlikowski C.: Hybrid reduced model of rotor. "The Archive of Mechanical Engineering" 2013, Vol. LX, No. 3, p. 319-333.
2. Hein R., Orlikowski C.: Hybrid model of geared rotor system. „Diagnostyka" 2013, Vol. 14, No. 2, p. 17-22.
3. Hein R., Orlikowski C.: Simplified dynamic model of rotating beam. „Diagnostyka" 2013, Vol. 14, No. 2, p. 43-48.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

4. Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S.: Metoda sztywnych elementów skończonych. Warszawa: Arkady, 1975.
5. Orlikowski C., Hein R.: Model hybrydowy układu wielowirnikowego z przekładnią. Elbląskie przekładnie zębate: teoria i praktyka. Elbląg: Wyd. PWSZ, 2013. s. 33-47.
6. Orlikowski C., Hein R.: A simplified model of 3-D pipe system conveying flowing liquid. "Solid State Phenomena" 2013, Vol. 198, p. 621-626.
7. Orlikowski C., Hein R.: Modelling of geared multi-rotor system. "Solid State Phenomena" 2013, Vol. 198, p. 669-674.
8. Orlikowski C., Hein R.: Modelling and analysis of beam/bar structure by application of bond graphs. "Journal of Theoretical and Applied Mechanics" 2011, Vol. 49, No. 4, p. 1003-1017.
9. Orlikowski C., Hein R.: Port-based modeling of distributed-lumped parameter systems. "Solid State Phenomena" 2010, Vol. 164, p. 183-188.
10. Yang B., Tan C.A.: Transfer functions of one-dimensional distributed parameter systems. ASME "Journal of Applied Mechanics" 1992, Vol. 59, December, p. 1009 – 1014.
11. Yang B.: Distributed transfer function analysis of complex distributed parameter systems. ASME "Journal of Applied Mechanics" 1994, Vol. 61, p. 84 – 92.
12. Zhou J., Feng Z.: Transient response analysis of one-dimensional distributed parameter systems. "Int. J. of Solids and Structures" 1999, Vol. 36, p. 2807-2824.

Artykuł dostępny na podstawie licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0 Polska.
http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/pl

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl