

## Ocena nośności ławy fundamentowej metodami niezawodności trzech poziomów

Inż. Kamil Żyliński – Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska  
Prof. dr hab. inż. Jarosław Przewłocki – Politechnika Gdańska, Wydział Architektury

Szereg programów numerycznych dostępnych dla inżynierów bezpośrednio pozwala na sprawdzenie stanów granicznych nośności czy też użyteczności. Ich algorytmy korzystają z polskich lub europejskich norm w zależności od wymogów. Dla projektantów programy te stanowią ułatwienie i przyspieszenie pracy, jednak nie zawsze uzyskane wyniki są miarodajne. Kluczem do wykonania typowego projektu fundamentów są: odpowiednie badania gruntowe wraz z ich analizą, zebranie obciążeń z właściwym przyjęciem danych do obliczeń oraz sprawdzenie poszczególnych stanów naprężenia lub przemieszczenia. W przypadku podłoża gruntowego zmienność jego właściwości jest znacznie większa niż dla innych materiałów. Zmienność ta ma charakter losowy i wynika nie tylko z naturalnej struktury gruntu, ale i sposobu rozpoznania podłoża. Aby uzyskać racjonalne i jak najbardziej zgodne z rzeczywistością dane, uzasadnione jest rozpatrywanie podłoża gruntowego jako ośrodka losowego [6]. W podobny sposób należy traktować szereg innych czynników obarczonych większą lub mniejszą dozą niepewności, takich jak: ciśnienie wody w porach gruntu, uwarstwienie, obciążenie lub metoda obliczeniowa.

Uwzględnienie poszczególnych niepewności w analizie obliczeniowej jest możliwe przy podejściu probabilistycznym. Oprócz deterministycznych miar bezpieczeństwa wprowadza się tu dodatkowe miary biorące pod uwagę niepełną informację, np. prawdopodobieństwo awarii lub wskaźnik niezawodności. Nie zastępują one istniejących miar, lecz występują dodatkowo, zwiększając wiedzę inżyniera o charakterze badanego zjawiska.

W efekcie inżynier otrzymuje pełniejszą informację pozwalającą lepiej ocenić zachowanie się istniejącego lub projektowanego fundamentu.

Wiele prac jest poświęconych probabilistycznej analizie stanów granicznych fundamentów. Różnią się one przede wszystkim sposobem opisu zmienności parametrów podłoża oraz stosowanymi metodami obliczeniowymi. Parametry geotechniczne można modelować jako zmienne losowe (opis punktowy) lub pola losowe (losowe funkcje współrzędnych). W metodach analizy można wymienić: FOSM (ang. *First Order Second Moment*), FORM (ang. *First Order Reliability Method*), SORM (ang. *Second Order Reliability Method*), metodę powierzchni odpowiedzi (RSM), metodę Monte Carlo (MC), probabilistyczną metodę elementów skończonych (SFEM) lub (RFEM) w różnych wariantach.

Jedną z pierwszych prac poświęconych probabilistycznej ocenie bezpieczeństwa fundamentu opublikowali Wu i Kraft [31], opierając analizę na estymacji wyników badań polowych rozkładem normalnym. Problemami stanów granicznych użytkowania oraz nośności fundamentów losowo obciążonych i posadowionych bezpośrednio na stochastycznym podłożu zajmowali się też, między innymi: Baecher i Ingra [2], McAnally [20], Meyerhof [21], Becker [4] i wielu innych. Z nowszych badaczy można wymienić Fentoa i Griffithsa [12] oraz Griffithsa i in. [14], którzy rozpatrywali podłoże jako ośrodek przestrzennie losowy i analizowali odpowiednio osiadanie ławy fundamentowej

oraz nośność podłoża pod nią metodą elementów skończonych w powiązaniu z metodą Monte Carlo. W Polsce wartościową monografię dotyczącą oceny bezpieczeństwa fundamentów w aspekcie niezawodności opublikował Puła [26]. Należy też wymienić prace Brząkały i Puły [5], którzy analizowali osiadanie fundamentu posadowionego bezpośrednio na uwarstwowionym podłożu, wykorzystując metodę elementów skończonych w powiązaniu z probabilistyczną wersją metody perturbacji oraz z rozwinięciem Neumanna. Z kolei Bauer i Puła [3] zastosowali metodę powierzchni odpowiedzi oraz metodę SORM do wyznaczenia wskaźnika niezawodności dopuszczalnego osiadania fundamentu. Ława fundamentowa analizowana dla obydwu stanów granicznych, zarówno dla dwu, jak i trójwymiarowego przypadku stochastycznego ośrodka gruntowego, była też prowadzona metodą perturbacji i Adomiana oraz probabilistyczną metodą elementów skończonych w pracach [23, 25]. Zastosowanie metod FORM i SORM do oszacowania awarii ław fundamentowych projektowanych według polskiej normy [33] przedstawiono w pracy Dolińskiego i Puły [11]. Istotne wskazówki uwzględniające podejście niezawodnościowe do celów projektowych, w tym również w Eurokodzie 7, można znaleźć w pracach [8, 19]. Zwłaszcza ta ostatnia jest bardzo istotna ze względu na opracowanie metod FORM i SORM w formie arkuszy kalkulacyjnych i udostępnienie ich na stronie otwartej internetowej.

Efektywne rozwiązanie zagadnienia można uzyskać zaproponowaną przez Rosenblutha [27] metodą estymacji rozkładem dyskretnym (PEM – *Point Estimate Method*). W celu poprawy efektywności obliczeniowej, w przypadku występowania większej liczby zmiennych losowych, powstało kilka modyfikacji tej metody [15, 18]. W światowej literaturze metoda PEM znalazła szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach, zwłaszcza w geotechnice [24]. Przykładowo, Suchomel i Mašin [28] przeprowadzili analizę niezawodnościową stopy fundamentowej posadowionej na poziomo uwarstwowionym podłożu piaszczystym. Stosując kilka metod probabilistycznych, wykazali, że metoda PEM jest najbardziej dokładna. Analizę porównawczą pomiędzy metodą PEM a metodą Monte Carlo dla nośności według wzoru Terzagiego prowadzili Czew i inni [9], wykazując, że pierwsza z nich daje zawyżone wyniki. Również w pracach [1, 24] zastosowano metodę PEM do oceny nośności podłoża pod stopą i ławą fundamentową.

W ramach teorii niezawodności wyróżnia się trzy (rzadziej cztery) poziomy analizy konstrukcji. Pierwszy z nich to tzw. metoda półprobabilistyczna ujęta w Eurokodach, która jest w istocie metodą deterministyczną [30]. Kolejne poziomy wykorzystują pierwsze momenty albo pełną informację o funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa nośności i obciążenia, które są traktowane jako zmienne losowe.

Celem niniejszej pracy jest analiza niezawodnościowa fundamentu określająca graniczną nośność podłoża metodami trzech poziomów. W każdym przypadku parametry geotechniczne modelowano jako zmienne losowe. Zamiarem pracy jest także uzasadnienie korzystania z metod probabilistycznych w projektowej praktyce inżynierskiej, czyli ich popularyzację. W pracy omówiono poszczególne poziomy metod niezawodnościowych, ze szczególnym uwzględnieniem metody estymacji rozkładem

dyskretnym (PEM). Na przykładzie ławy fundamentowej przeprowadzono pełną analizę niezawodnościową, począwszy od metody poziomu I (Eurokod 7), przez poziom II (PEM), aż do sprawdzenia poprawności wyników metodą Monte Carlo (poziom III). Wykazano istotne korzyści stosowania metod wyższego rzędu. Zbadano wpływ zmienności poszczególnych parametrów geotechnicznych na niezawodność ławy fundamentowej.

## POZIOMY METOD NIEZAWODNOŚCIOWYCH

Rozważając zagadnienia niezawodnościowe, należy zaznaczyć się z pojęciami typowo probabilistycznymi, wskazując wyraźną granicę pomiędzy procedurami deterministycznymi a podejściem niezawodnościowym. Zakres probabilistycznej analizy zależy od gabarytów, rodzaju i złożoności konstrukcji. W ujęciu ogólnym można mówić o poziomie, który oznacza stopień dokładności. Najczęściej metody probabilistyczne dzieli się na trzy poziomy, w zależności od ilości informacji probabilistycznej. Poziom I obejmuje metody, w których losowości poszczególnych czynników są opisywane tylko poprzez wartości średnie. W metodach poziomu II zmienność parametrów jest uwzględniana poprzez ich wartości oczekiwane oraz wariancje, które w pełni opisują rozkłady gaussowskie. Z kolei w metodach poziomu III wprowadza się funkcje gęstości prawdopodobieństwa modelujące rzeczywiste rozkłady rozpatrywanych zmiennych. Pierwszy poziom charakteryzuje metody półprobabilistyczne, natomiast poziom III obejmuje „czysto” probabilistyczne sposoby analizy. W dalszym ciągu ograniczono się jedynie do analizy niezawodnościowej nośności podłoża. Przeprowadzone rozważania można jednak uogólnić na inne rodzaje lub sytuacje stanu granicznego.

Teoria niezawodności konstrukcji jest oparta na pojęciu tzw. funkcji stanu granicznego  $G(x)$ , która oddziela obszar bezpieczny od obszaru zagrożenia (rys. 1). W szczególnym przypadku funkcja ta jest linią graniczną i najczęściej przedstawia się ją w postaci:

$$G_L(x) = x_1 - x_2 = r - s = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$x_1 = r$  – nośność (wypadkowa wszystkich sił lub momentów utrzymujących),  
 $x_2 = s$  – obciążenie (wypadkowa wszystkich sił lub momentów dążących do naruszenia równowagi).

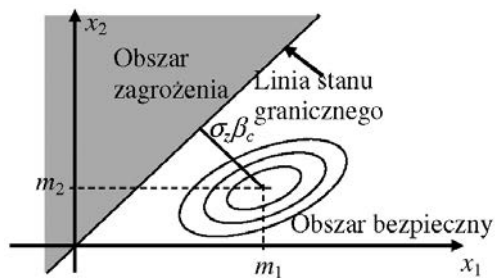
Niezawodność jest określana najczęściej za pomocą miar bezpieczeństwa nazywanych wskaźnikiem niezawodności albo prawdopodobieństwem awarii. Cornell [10] wyprowadził wzór na wskaźnik niezawodności, który w przypadku liniowego rozkładu funkcji stanu granicznego jest równy:

$$\beta_c = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2r_{1,2}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}} \quad (2)$$

gdzie:

$m_1, m_2$  – wartości oczekiwane odpowiednio nośności i obciążenia,  
 $s_1, s_2$  – odchylenia standardowe,  
 $r_{1,2}$  – współczynnik korelacji między nimi.

W przypadku dwóch zmiennych losowych niezależnych można go przedstawić jako odległość punktu o współrzędnych równych wartościom oczekiwany poszczególnych zmiennych od powierzchni stanu granicznego (rys. 1).



Rys. 1. Interpretacja geometryczna wskaźnika niezawodności Cornella dla liniowej funkcji stanu granicznego

Wskaźnik niezawodności można równocześnie interpretować z obliczonym numerycznie prawdopodobieństwem awarii z zależności odwrotnej:

$$\beta_c = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (3)$$

gdzie:

$\Phi(\ast)$  – funkcja odwrotna dystrybuanty rozkładu normalnego o średniej wartości równej zero i jednostkowym odchyleniu standardowym.

Większy wskaźnik niezawodności oznacza większe bezpieczeństwo. Powinien on być większy od wskaźnika postulowanego, który w przypadku sprawdzania stanów granicznych przyjmuje wartości w zakresie od 3,1 do 4,3 [32].

## Metody poziomu I

Metody poziomu I polegają na wprowadzeniu statystycznie określonych współczynników (reprezentujących zmienności cech materiałów konstrukcyjnych oraz charakteru i mocy oddziaływania obciążeń) do obliczeń odwołujących się do stabilizowanych, unormowanych i powszechnie przyjmowanych uśrednionych wartości zmiennych losowych nakreślonych w przeprowadzanej analizie [30].

W ujęciu teorii niezawodności, zalecany w Eurokodach sposób podejścia jest tzw. metodą probabilistyczną I poziomu, zwaną też metodą półprobabilistyczną. Normy te zawierają w sobie pewne elementy niezawodności konstrukcji i rachunku prawdopodobieństwa. W normach losowy charakter parametrów opisujących wytrzymałość lub działające na konstrukcję obciążenia jest uwzględniany poprzez zastosowanie częściowych współczynników bezpieczeństwa  $\gamma$ . Ich istota polega na zwiększeniu oddziaływania negatywnego i zmniejszeniu wytrzymałości materiałów. W ten sposób, porównując wartości obliczeniowe, poprzez ich zastosowanie jest zapewniony odpowiedni poziom bezpieczeństwa konstrukcji. Współczynniki częściowe są rozumiane jako odpowiednie kwantyle określonych rozkładów prawdopodobieństwa opisujących zmienne losowe – takie, aby zapewniały na etapie procesu projektowania pożądany dla konstrukcji poziom niezawodności. W tak uproszczonym podejściu, wskaźnik niezawodności odbiega od zakładanych wartości docelowych. Konieczna staje się minimalizacja rozbieżności między wynikiem obliczeń uproszczonych i dokładnych. W tym celu przeprowadza się kalibrację przyjmowanych częściowych współczynników bezpieczeństwa [7].

Według Eurokodu 7 [34] nośność graniczną podłoża gruntowego sprawdza się w jednym z pięciu stanów granicznych – GEO. W stanie tym należy sprawdzić nierówność:

$$V_d \leq R_d \quad (4)$$

gdzie:

$R_d$  – wartość obliczeniowa oporu przeciw oddziaływaniom (obliczeniowa wartość oporu granicznego ośrodka gruntowego),

$V_d$  – wartość obliczeniowa obciążenia (składowej pionowej).

W Eurokodzie 7 sugeruje się używanie efektywnych parametrów wytrzymałościowych gruntu  $c'$  i  $\phi'$ . Jednostkowy opór graniczny podłoża według EC-7 wyznacza się ze wzoru:

$$\frac{R_{k,v}}{A'} = c' \cdot N_c \cdot s_c \cdot i_c \cdot b_c + q' \cdot N_q \cdot s_q \cdot i_q \cdot b_q + 0,5 \cdot B' \cdot \gamma' \cdot N_\gamma \cdot s_\gamma \cdot i_\gamma \cdot b_\gamma \quad (5)$$

gdzie:

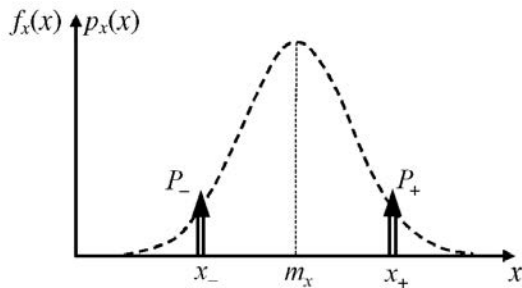
$R_{k,v}$  – nośność fundamentu ustalona na podstawie obliczeniowych wartości parametrów geotechnicznych gruntu, pozostałe wielkości opisane w [34].

Wyznaczona w ten sposób wartość jest wartością charakterystyczną. Aby stosowanie częściowych współczynników miało sens, należy przestrzegać zaleceń wybranego podejścia obliczeniowego i stosować ich odpowiednią kombinację. Ze względu na wykorzystanie podejścia obliczeniowego DA2 do sprawdzania stanu GEO w wybranym przykładzie fundamentu bezpośredniego pominięto szczegółowy opis pozostałych podejść obliczeniowych zapisanych w normie EC-7 i Załączniku Krajowym. Uzyskanie wartości obliczeniowej następuje po podzieleniu wartości wytrzymałości charakterystycznej przez odpowiedni współczynnik  $\gamma$ , w przypadku nośności pionowej jest on równy  $\gamma_{R,h} = 1,4$ .

## Metody poziomu II

Poziom II stanowią metody, w których nieznanne są rozkłady prawdopodobieństwa bazowych zmiennych losowych, a jedynie ich wartości średnie oraz macierz kowariancji, co w pełni opisuje rozkład normalny. Prostym i skutecznym narzędziem analizy jest w takich przypadkach metoda FOSM. W metodzie tej funkcja losowa jest aproksymowana hiperpłaszczyzną, z reguły w otoczeniu wartości średnich poszczególnych zmiennych losowych. Momenty pierwszego i drugiego rzędu funkcji granicznej wyznacza się ze wzorów aproksymacyjnych [23]. Wielkości te pozwalają na obliczenie wskaźnika niezawodności (2). Jeżeli dla funkcji tej wpływ członów nieliniowych jest bardzo znaczący, dokładność metody może być niewystarczająca. Dlatego rozwinęła się metoda drugiego rzędu, tzw. SOSM, często też wykorzystywana do oszacowania błędu popełnionego przy stosowaniu metody pierwszego rzędu. W metodzie tej funkcję losową aproksymuje się w punkcie obliczeniowym hiperpłaszczyzną drugiego stopnia. W ramach teorii niezawodności są stosowane odpowiednio metody FORM i SORM [17]. W metodzie FORM powierzchnię stanu granicznego przybliża się hiperpłaszczyzną w punkcie obliczeniowym, nie zawsze odpowiadającym wartościom średnim. Zakłada się, że powierzchnia ta nie jest silnie nieliniowa i nie ma lokalnych minimów. W tym przypadku miarą bezpieczeństwa jest wskaźnik niezawodności Hasofer-Linda [16], a zmienne losowe mogą mieć dowolne rozkłady, które poprzez odpowiednie transformacje sprowadza się do rozkładu normalnego. Również w przypadku, gdy zmienne te są skorelowane, dokonuje się odpowiedniej transformacji, doprowadzając je do nieskorelowanych. Metoda FORM jest zatem istotnym uogólnieniem metody FOSM, uwzględniającą





Rys. 2. Rozkłady masy prawdopodobieństwa

skorelowane i niegaussowskie rozkłady prawdopodobieństwa, gdzie funkcja stanu granicznego jest linearyzowana najczęściej w otoczeniu innego punktu.

Dość ciekawa i prosta w zastosowaniu jest metoda estymacji rozkładem dyskretnym (PEM) zaproponowana przez Rosenbluetha [27]. Polega ona na wykorzystaniu kwadratury Gaussa, a ciągłą zmienną losową zastępuję się zmienną dyskretną opisaną  $N$ -wagami, czyli impulsami (rys. 2).

Warunek mówiący o sumie prawdopodobieństw równej jedności pozwala uzyskać punkty dyskretyzacji oraz przypisane im odpowiednie wagi. W przypadku zerowej skośności, co za tym idzie symetrycznym rozkładem, punkty te oraz wagi przedstawia się za pomocą następujących wzorów:

$$x_- = m_x - \sigma_x, x_+ = m_x + \sigma_x, P_- = \frac{1}{2}, P_+ = \frac{1}{2} \quad (6)$$

W przypadku funkcji  $n$ -zmiennych losowych:

$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7)$$

wartości funkcji  $y$  (..) oblicza się dla wszystkich możliwych kombinacji punktów dyskretyzacji. Wartość oczekiwaną i wariancję funkcji wyznacza się z następujących zależności:

$$m_y \approx \sum_{j=1}^{2^n} P^j y_j \quad (8)$$

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{j=1}^{2^n} P^j y_j^2 - m_y^2 \quad (9)$$

gdzie:

$$P_{(s_1 s_2 \dots s_n)} = \frac{1}{2^n} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (s_i)(s_j) r_{x_i, x_j} \right] \quad (10)$$

$$s_i = \begin{cases} -1 & \text{dla } x_{i-} = m_{x_i} - \sigma_{x_i} \\ +1 & \text{dla } x_{i+} = m_{x_i} + \sigma_{x_i} \end{cases} \quad (11)$$

$r_{x_i, x_j}$  – korelacja wzajemna pomiędzy zmiennymi losowymi  $X_i$  i  $X_j$ .

Istotną zaletą metody PEM jest to, że w przeciwieństwie do innych metod drugiego rzędu (np. FOSM czy SOSM) nie przeprowadza się pracochłonnego nieraz różniczkowania czy iteracji (w przypadku funkcji nieliniowych). Pozwala na uniknięcie wynikających stąd błędów i znacznie upraszcza analizę. Dodatkowo, funkcja stanu granicznego nie musi być przedstawiona w sposób jawny. Zauważalnym atrybutem tej metody jest też skrócony czas wykonywania obliczeń powtarzanych praktycznie tylko kilka lub kilkanaście razy, w zależności o liczby zmiennych losowych ( $n$ ). Dla większej liczby  $n$  Rosenblueth [27] zaproponował sposób redukujący ilość obliczeń z ( $2^n$ ) do  $2n + 1$ , ale dla zmiennych nieskorelowanych o zerowej skośno-

ści. Harr [15] rozpatrywał przypadek zmiennych skorelowanych z zerową skośnością, natomiast Hong [18] analizował zmienne nieskorelowane ze znaczną skośnością. Przypadek większej liczby zmiennych losowych jest omówiony szerzej w pracy [1].

### Metody poziom III

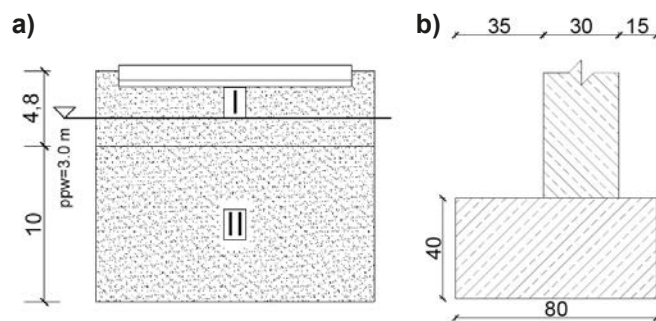
Metody poziomu III są pełnym, matematycznym rozwiązaniem problemu. Polegają one na całkowaniu wielowymiarowych łącznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych losowych. Praktycznie, uzyskanie dokładnego rozwiązania jest możliwe dla prostych przypadków zależności funkcyjnej opisującej stan graniczny oraz gdy liczba niezależnych zmiennych losowych jest mała. W bardziej skomplikowanych przypadkach całkowanie jest możliwe tylko przy wykorzystaniu metod numerycznych, a wynikające z nich błędy oraz przybliżenia są trudne do oszacowania i mogą w znacznym stopniu wpłynąć na końcowy wynik obliczeń.

W praktyce najważniejszą pozycję w grupie metod poziomu III odgrywa metoda Monte Carlo (MC). Ma ona największą dokładność ze wszystkich metod opierających się na rozkładzie prawdopodobieństwa funkcji dla konstrukcji opisanej parametrami obciążeniami losowymi niepewnościami. Analiza probabilistyczna odbywa się poprzez generację zmiennych losowych (wytrzymałości i materiałów) dla wcześniej przyjętych rozkładów prawdopodobieństwa. Przybliżoną wartość prawdopodobieństwa awarii otrzymuje się na podstawie oszacowania wartości oczekiwanej funkcji charakterystycznej obszaru awarii, otrzymanego za pomocą estymatora. Kluczowym problemem tej metody jest wyznaczenie liczby symulacji potrzebnej do uzyskania zadowalającej dokładności prawdopodobieństwa. Zależy ona od badanego zjawiska i stopnia złożoności zagadnienia.

Prócz klasycznej metody symulacyjnej Monte Carlo istnieją techniki redukcyjne znacznie ograniczające liczbę symulacji, tym samym zmniejszenie czasu i skomplikowania obliczeń. Zagadnienie to i stosowane sposoby redukcji są szerzej opisane w pracy [30].

### OCENA NIEZAWODNOŚCI ŁAWY FUNDAMENTOWEJ

Analizowana jest ława fundamentowa, posadowiona na gruncie o uwarstwieniu jak na rys. 3a. Wymiary ławy w rzucie  $0,8 \times 15$  m. Parametry górnej warstwy:  $\phi' = 21,5^\circ$ ,  $c_{uk} = 103$  kPa,  $c'_k = 18$  kPa,  $\gamma_k = 21$  kN/m<sup>3</sup> i miąższość 4,8 m. Poniżej znajduje się



Rys. 3. Przekrój geotechniczny (a) i przekrój ławy fundamentowej (b)

Tabl. 1. Zestawienie obciążeń przekazywanych na ławę fundamentową wraz z charakterystykami statystycznymi

Obciążenie	Pionowe [kN]	Poziome [kN]	Moment [kNm]
Stałe	$V_{Gk} = 1570$	$H_{Gk} = 170$	$M_{Gk} = 200$
Zmienne	$V_{Qk} = 150$	$H_{Qk} = 83$	$M_{Qk} = 71$
Na 1 mb	[kN/m]	[kN/m]	[kNm/m]
Stałe	$V_{Gk} = 104,67$	$H_{Gk} = 11,3$	$M_{Gk} = 13,3$
Zmienne	$V_{Qk} = 10$	$H_{Qk} = 5,53$	$M_{Qk} = 4,73$
Ciężar gruntu na odsadzkach	$V_{Gk,1} = 187,2$	Wskaźnik zmienności obciążeń	
		Stających	Zmiennych
Ciężar fundamentu	$V_{Gk,2} = 120$	0,05	0,3
$\Sigma V_k$	2027,2	Wariancje obciążeń [kN <sup>2</sup> ]	
		8809,70	2025
$\Sigma V_d$	2759,22	$\Sigma \sigma_s^2 = 10834,7$	

warstwa o parametrach:  $\phi'_k = 22,3^\circ$ ,  $c'_k = 0$  kPa,  $\gamma_k = 20,2$  kN/m<sup>3</sup>. Efektywne parametry zaczerpnięto z pracy [22]. Są to wartości charakterystyczne. Przekrój ławy fundamentowej przedstawiono na rys. 3b. Ze względu na występowanie dolnej warstwy gruntu poniżej szerokości 2B według [33] sprawdzanie stanów granicznych ograniczono do warstwy I. Występowanie wody gruntowej zaobserwowano na poziomie 3 m p.p.t. Nie uwzględniano jej wpływu na nośność gruntu pod fundamentem. Ciężar zasypki wynosi  $\gamma_z = 19,5$  kN/m<sup>3</sup>. Ciężar betonu, z którego wykonano fundament  $\gamma_b = 25$  kN/m<sup>3</sup>. Obciążenia stałe i zmienne działające na ławę przedstawiono w tabl. 1.

Ze względu na sprawdzanie stanu granicznego, zgodnie z poprawką do normy [34], wykorzystano podejście obliczeniowe DA.2, w którym współczynniki  $\gamma$  wynoszą odpowiednio  $\gamma_G = 1,35$ ,  $\gamma_Q = 1,5$ ,  $\gamma_M = 1,0$ ,  $\gamma_{R,v} = 1,4$ . W pierwszej kolejności, korzystając z wzoru (4), obliczono zgodnie z Eurokodem 7 wartość deterministyczną nośności pionowej gruntu pod ławą fundamentową, która wynosiła  $R_{k,v} = 4\ 129,94$  kN, przy czym  $R_{d,v} = 2\ 949,96$  kN. Stopień wykorzystania nośności podłoża wyrażony wskaźnikiem  $\lambda$  wynosi  $\lambda = 94\%$ . Nośność pionową ławy zaprojektowano na granicy wytrzymałości, tak aby zapas nośności nie przekraczał 10%. Obliczenia nie ograniczały się jedynie do sprawdzenia warunku na nośność pionową, jednak w tej pracy uwzględniono tylko tę wartość.

Następnie wykonano obliczenia metodą PEM, uwzględniając losowość trzech parametrów geotechnicznych: spójności, kąta tarcia wewnętrznego oraz ciężaru objętościowego [26]. Współczynniki zmienności określono na podstawie [13, 24, 29] i do analizy obliczeniowej przyjęto następujące wartości:  $v_{c'} = 0,3$ ,  $v_\phi = 0,1$ ,  $v_\gamma = 0,05$ . Wyniki obliczeń zestawiono w tabl. 2. Wartości średnie są w tym przypadku również wartościami charakterystycznymi.

Wskaźnik niezawodności Cornella obliczono na podstawie wzoru (1):

$$\beta_c = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - 2r_{R,S}\sigma_R\sigma_S + \sigma_S^2}} = \frac{4199,06 - 2027,2}{\sqrt{1148465,66 - 2 \cdot 0 \cdot 1071,66 \cdot 138,86 + 10834,67}} = 2,01$$

Odnosząc wynik do wzoru na prawdopodobieństwo awarii (2), wynosi ono  $P_f = 2,27 \times 10^{-2}$ . Według normy [32] ewentualne zniszczenie wynikające z prawdopodobieństwa awarii oznaczałoby umiarkowane skutki przy wysokich kosztach zapewnienia bezpieczeństwa konstrukcji. Biorąc jednak pod uwagę, że sprawdzany jest stan graniczny nośności, obliczony wskaźnik niezawodności jest mniejszy od zalecanego ( $\beta = 3,1$ ). Zatem projektując fundament metodą II poziomu, otrzymany stan jest niebezpieczny.

Tabl. 2. Wyniki obliczeń metodą PEM dla trzech zmiennych losowych

Lp.	$x_1 = c'$	$x_2 = \phi'$	$x_3 = \gamma$	$y = R_k$	$P(x_{ij})$	$y_p(x_{ij})$	$y^2 p(x_{ij})$
1	$x_{1+} = 23,4$	$x_{2+} = 23,65$	$x_{3+} = 22,05$	5918,47	0,125	739,81	4378529,41
2	$x_{1+} = 23,4$	$x_{2+} = 23,65$	$x_{3-} = 19,95$	5694,77	0,125	711,84	4053793,70
3	$x_{1+} = 23,4$	$x_{2-} = 19,35$	$x_{3-} = 19,95$	4012,44	0,125	501,55	2012455,43
4	$x_{1+} = 23,4$	$x_{2-} = 19,35$	$x_{3+} = 22,05$	4152,56	0,125	519,07	2155467,77
5	$x_{1-} = 12,6$	$x_{2+} = 23,65$	$x_{3+} = 22,05$	4215,91	0,125	526,99	2221735,34
6	$x_{1-} = 12,6$	$x_{2+} = 23,65$	$x_{3-} = 19,95$	3995,09	0,125	499,39	1995095,65
7	$x_{1-} = 12,6$	$x_{2-} = 19,35$	$x_{3+} = 22,05$	2870,64	0,125	358,83	1030072,67
8	$x_{1-} = 12,6$	$x_{2-} = 19,35$	$x_{3-} = 19,95$	2732,55	0,125	341,57	933350,84
						$m_R = \Sigma \approx 4199,0157$	$\Sigma \approx 18780500,81$
$\sigma_R^2 = 18780500,81 - (4199,0157)^2 = 1148465,635$ kN <sup>2</sup> $\sigma_R = 1071,66$ kN							

Tabl. 3. Różnice w wynikach metodami trzech poziomów

L.P.	[MPa]	[MPa]	błąd [%]	błąd [%]
EC-7	4129,94	–	0	–
PEM	4199,06	1071,66	1,67	–
MCM	4098,77	1074,05	0,75	0,22

W celu weryfikacji metody PEM kolejne obliczenia przeprowadzono metodą Monte Carlo. W tym celu wygenerowano po 100 zestawów dla trzech zmiennych losowych: spójności, kąta tarcia wewnętrznego i ciężaru objętościowego warstwy gruntu zalegającego bezpośrednio pod ławą. Podobnie jak w przypadku metody PEM przyjęto, że poszczególne zmienne mają rozkłady normalne. Wyniki symulacji metodą Monte Carlo zobrazowano na rys. 4 i 5.

Jak widać (rys. 4, 5), zarówno wartość średnia, jak i odchylenie standardowe nośności stabilizują się już przy około 25 generacjach. Zbadano kształt histogramu danych otrzymanych poprzez symulację Monte Carlo (rys. 6). Współczynnik skośności  $\gamma_1 = 0,584$  świadczy o wydłużonym końcu wykresu z prawej strony, a kurtozy  $\gamma_2 = 0,003$  o spłaszczeniu w części centralnej, podobnie jak rozkład normalny. Charakterystyki te potwierdza-

ją, że z punktu widzenia statystyki matematycznej nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkład nośności jest normalny.

Zbiorcze zestawienie wyników otrzymanych metodami trzech poziomów oraz błędy względne dla każdego przypadku odnoszące się do wartości uzyskanej z Eurokodu zawarto w tabl. 3.

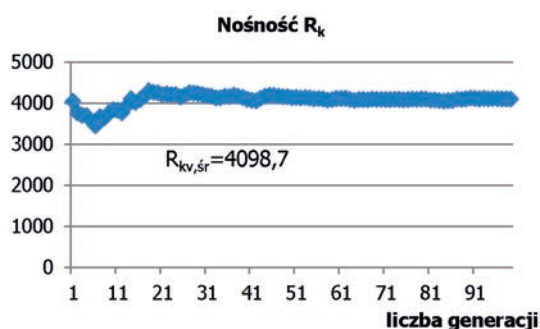
Z tabl. 3 wynika, że nośność uzyskana metodą normową jest nieznacznie niższa od średniej nośności obliczonej metodami probabilistycznymi wyższych rzędów.

Skuteczność metody PEM została potwierdzona małym błędem odchylenia standardowego oraz wartości oczekiwanej. Błędy mogły wygenerować zaokrąglenia w programie obliczeniowym, jak również uwzględnienie zmienności w zagadnieniu. Pomimo zbliżonych wyników w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji prawdopodobieństwo wystąpienia awarii jest wysokie jak dla fundamentu bezpośredniego, co może wiązać się ze skutkami w postaci strat rzeczowych i ludzkich.

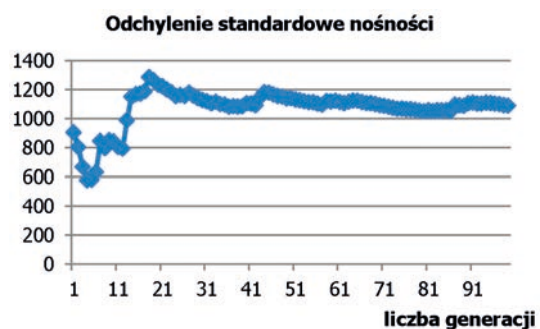
W dalszym ciągu zbadano wpływ zmienności parametrów geotechnicznych na niezawodność (rys. 7 ÷ 9). Obliczenia przeprowadzono metodą PEM.

Na rys. 7 a ÷ d można zaobserwować liniową zmienność odchylenia standardowego ze współczynnikiem zmienności spójności. Krzywoliniowo zmieniają się natomiast wartości średnie nośności  $R_k$ , wskaźnik niezawodności oraz prawdopodobieństwo awarii.

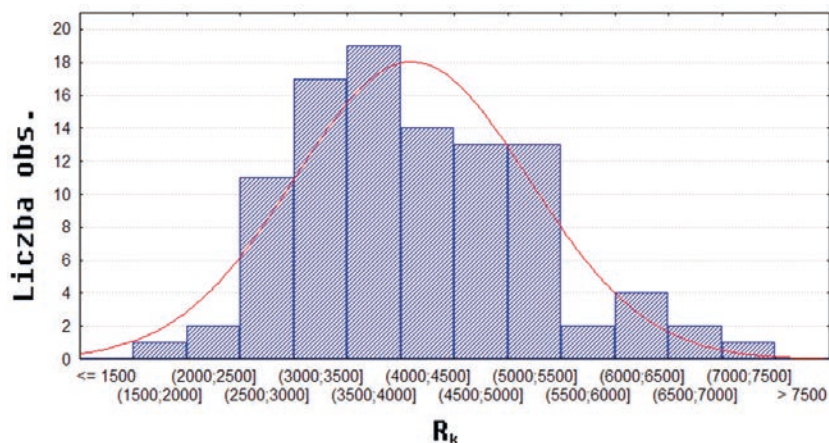
Na rys. 8 a ÷ b jest widoczne, że wartość odchylenia standardowego zmienia się liniowo – rośnie wraz ze wzrostem współczynnika zmienności ciężaru objętościowego. W przypadku wartości średniej nośności – jego wartość rośnie krzywoliniowo. Pominięto przedstawienie na wykresach wpływu zmienności ciężaru objętościowego na wskaźnik niezawodności, ponieważ



Rys. 4. Zbieżność wartości średniej nośności  $R_k$

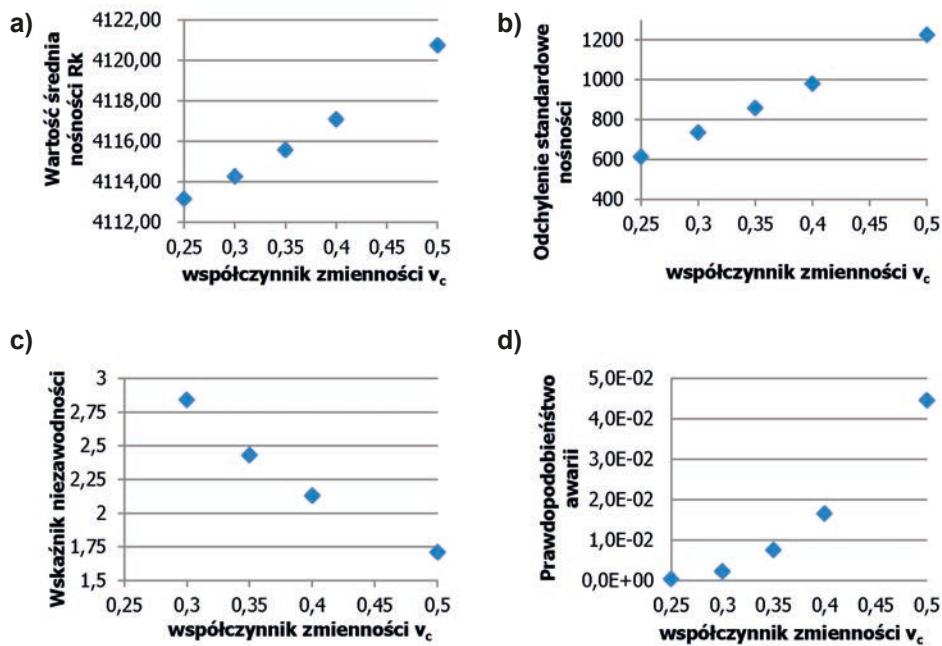


Rys. 5. Zbieżność odchylenia standardowego nośności

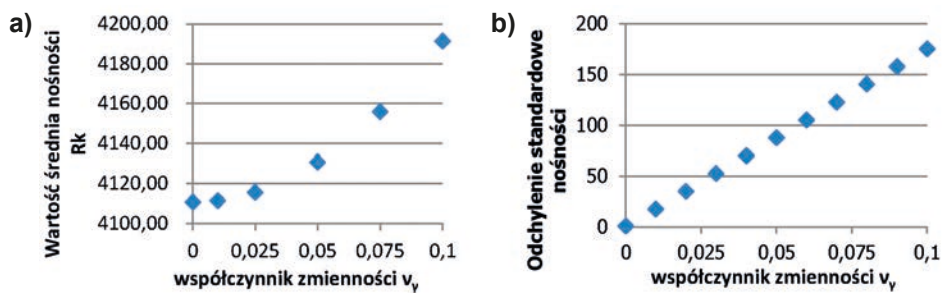


Rys. 6. Histogram 100 generacji nośności wraz z rozkładem normalnym

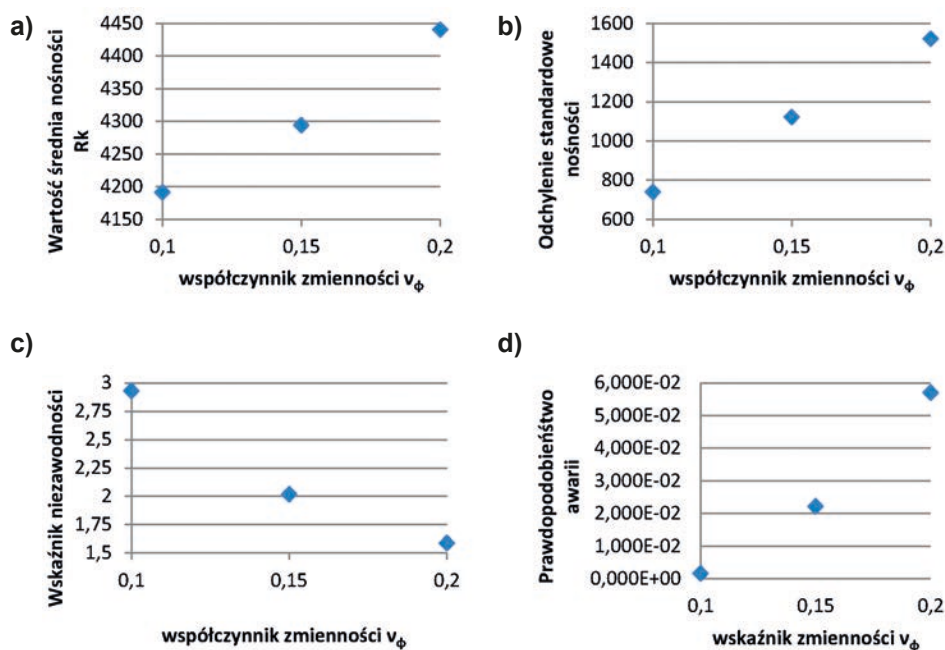




Rys. 7. Wpływ współczynnika zmienności spójności na: nośność gruntu  $R_k$  (a), wartość odchylenia standardowego nośności (b), wskaźnik niezawodności (c), prawdopodobieństwo awarii (d)



Rys. 8. Wpływ współczynnika zmienności ciężaru objętościowego na: wskaźnik niezawodności (a), wartość odchylenia standardowego nośności (b)



Rys. 9. Wpływ współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego na: nośność gruntu  $R_k$  (a), wartość odchylenia standardowego nośności (b), wartość wskaźnika niezawodności (c), prawdopodobieństwo awarii (d)

nawet przy dużej zmienności rzędu 20% dla tej cechy gruntu różnice są znikome.

Na rys. 9 a ÷ d przedstawiono wpływ zmienności kąta tarcia wewnętrznego na statystyczne charakterystyki nośności. Nośność zmienia się o około 250 kN i jest to zależność krzywo-liniowa. Podobnie zmienia się wskaźnik niezawodności, a tym samym prawdopodobieństwo awarii. Odchylenie standardowe nośności rośnie wraz ze zwiększeniem wskaźnika zmienności, i jest to zależność prostoliniowa.

## WNIOSKI

Metody poziomu II i III okazały się przydatnym narzędziem w ocenie bezpieczeństwa konstrukcji. Wykorzystanie metody estymacji rozkładem dyskretnym idealnie nadaje się do analizy nośności podłoża pod ławą fundamentową, co zweryfikowano metodą symulacji MCM. W odróżnieniu od tej ostatniej w metodzie PEM potrzebna jest znacznie mniejsza liczba deterministycznych realizacji.

Na przykładzie ławy fundamentowej można zaobserwować prostotę stosowania przedstawionych w pracy metod probabilistycznych. Wielokryterialne podejście do problemu nośności gruntu pod fundamentem pozwoliło zbadać wpływ zmienności poszczególnych cech gruntu na niezawodność nośności. Największy wpływ wywierają niepewności związane ze spójnością oraz kątem tarcia wewnętrznego. Losowość ciężaru objętościowego nieznacznie wpływa na pogorszenie bezpieczeństwa fundamentu.

Wskaźnik niezawodności obliczony za pomocą probabilistycznych metod wyższych poziomów pozwolił określić rozpatrywany fundament jako element o dużym prawdopodobieństwie awarii, co nie jest zgodne z założeniami normy [32], w której to powinien być on przyjęty jako element o wysokich skutkach zniszczenia. Z przykładu wynika, że pomimo spełnienia warunków stanu granicznego według Eurokodu jest on narażony na zniszczenie.

Należy podkreślić, że otrzymywane miary bezpieczeństwa uwzględniają losowość i związki między sobą, a dzięki zależności prawdopodobieństwa awarii i wskaźnika niezawodności inżynier otrzymuje informację o ewentualnych konsekwencjach wynikających ze zniszczenia konstrukcji.

## LITERATURA

1. Baecher G. B., Christian J. T.: Reliability and statistics in geotechnical engineering. Chichester: John Wiley & Sons 2003.
2. Baecher G. B., Ingra T. S.: Stochastic FEM in settlement prediction. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 107 (GT4), 1981, 449-463.
3. Bauer J., Puła W.: Reliability with respect to settlement limit-states of shallow foundations on linearly-deformable subsoil. Computers and Geotechnics 26 (3-4), 2000, 281-308.
4. Becker D.: Eighteen Canadian Geotechnical Colloquium: Limit states design for foundations. Part II. Development for the National Building Code of Canada. Canadian Geotechnical Journal, 33, 1996, 984-1007.



5. Brząkała W., Puła W.: A probabilistic analysis of foundation settlements. *Computers and Geotechnics* 18 (4), 1996, 291-309.
6. Brząkała W.: Bezpieczeństwo i niezawodność w geotechnice. Teoretyczne podstawy Eurokodu EC7-1. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, nr 1/2013.
7. Brząkała W.: Bezpieczeństwo i niezawodność w geotechnice. Kalibracja częściowych współczynników bezpieczeństwa według Eurokodu EC7-1. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, nr 2/2013, 118-124.
8. Chan C. L., Low B. K.: Practical second-order reliability analysis applied to foundation engineering. *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 36 (11), 2012, 1387-1409.
9. Chew Y., M., Ng K. S., Ng S. F.: The effect of soil variability on the ultimate bearing capacity of shallow foundation. *Journal of Engineering Science and Technology, Special Issue on ACEE 2015*, 2015, 1-13.
10. Cornell C. A.: A Probability-Based Structural Code. *American Concrete Institute Journal*, 1969.
11. Doliński K., Puła W.: Posadowienie bezpośrednie na podłożu o cechach losowych. *Inżynieria i Budownictwo*. Nr. 4-5/1990, 161-163.
12. Fenton G. A., Griffiths D. V.: Probabilistic Foundation Settlement on Spatially Random Soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 128 (5), 2002, 381-390.
13. Gorska K.: Stateczność pionowej szczeliny w gruncie, Praca doktorska, Wrocław 2013.
14. Griffiths D. V., Fenton G. A., Manoharan N.: Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil: Probabilistic Study. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 128, No. 9, 2002.
15. Harr, M. E.: Probabilistic estimates for multivariate analyses. *Appl. Math. Modelling.*, 13(5), 1989, 313-318.
16. Hasofer A. M., Lind N. C.: An exact and invariant first order reliability format. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 1974, Vol. 100, No. EM1, 111-121.
17. Hohenbichler M., Gollwitzer S., Kruse W., Rackwitz R.: New light on first and second-order reliability methods. *Structural Safety*, 4, 267-284, 1987.
18. Hong, H. P.: An efficient point estimate method for probabilistic analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 59(3), 261-267, 1998.
19. Low B. K., Phoon K. K.: Reliability-based design and its complementary role to Eurocode 7 design approach. *Computers and Geotechnics*. 65, 2015, 30-44.
20. McAnally P. A.: Reliability of bearing capacity design of shallow footings in sands. *Proc. 4th ICASP, Florence*, 1983, 1545-1556.
21. Meyerhof G. G.: Development of geotechnical limit state design. *Canadian Geotechnical Journal*, 32 (1), 1995, 128-136.
22. Olchawa A., Zawalski A.: Comparison of shallow foundation design using Eurocode 7 and Polish Standard. *Warsaw* 2014.
23. Przewłócki J., Górski J.: Stochastic FEM analysis of strip foundation. *TASK Quarterly*, Vol. 3, No. 2, 1999, 171-186.
24. Przewłócki J.: Problemy stochastycznej mechaniki gruntów. Ocena niezawodności. *Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław* 2006.
25. Przewłócki J.: Reduction of dimension in random, elastic soil medium. *International Journal of Solids and Structures* 36 (34), 1999, 5233-5254.
26. Puła W.: Zastosowanie teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław* 2004.
27. Rosenblueth, E.: Point estimates for probability moments. *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, 72 (10), 1975, 3812-3814.
28. Suchomel, R., Mašín, D.: Probabilistic analyses of a strip footing on horizontally stratified sandy deposit using advanced constitutive model. *Computers and Geotechnics*, 38(3), 2011, 363-374.
29. Thao N. T. P.: Parametry statystyczne parametrów geotechnicznych wybranych warstw geologicznych podłoża gruntowego określonego rejonu m. Wrocławia, *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej nr 14*, Wrocław 1984.
30. Winkelmann K.: Obliczanie niezawodności konstrukcji inżynierskich metodami symulacyjnymi oraz metodą powierzchni odpowiedzi, *Praca doktorska, Gdańsk* 2013.
31. Wu T. H., Kraft L. M.: The probability of foundation safety. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 105 (GT2), 1967, 213-231.
32. EN-ISO 2394:2012. General principles on reliability for structures. 3. Histogramy rozkładów prawdopodobieństwa.
33. PN-B-03020:1981: Norma Budowlana, Grunty budowlane. Posadowienie bezpośrednie budowli. Obliczenia.
34. PN-EN 1997-1:2008. Eurokod 7. Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne.