

dr inż. Krzysztof Klempka^{1*)}
dr hab. inż. Piotr Korzeniowski²⁾

Metody analizy nośności słupów żelbetonowych z uwzględnieniem pełzania betonu

The methods of analyses of load bearing capacity of reinforced concrete columns with considering the creep of concrete

DOI: 10.15199/33.2017.10.10

Streszczenie. Zgodnie z Eurokodem 2 nośność smukłych słupów żelbetonowych można obliczać, stosując uproszczone metody uwzględniania efektów drugiego rzędu lub stosując metodę ogólną. W obliczeniach istotną rolę odgrywa wpływ obciążeń długotrwałych, a tym samym pełzanie betonu. Wpływ zjawisk reologicznych uważa się za najmniej rozpoznany. Postanowiono więc zająć się zagadnieniem nośności słupów żelbetonowych głównie w aspekcie pełzania betonu. Opracowano modele numeryczne słupów żelbetonowych. Pierwszy z modeli jest oparty na modyfikacji zależności σ - ε dotyczącej betonu przez pomnożenie odkształceń przez współczynnik $(1 + \varphi(\infty, t_0))$. W drugim modelu zastosowano prawo pełzania zgodnie z teorią *aging coefficient* z modyfikacją współczynnika pełzania $\varphi(\infty, t_0)$ (wg wzoru (3.7) Eurokodu 2) do wartości $\varphi_{in}(\infty, t_0)$. Porównano wartości nośności obliczone tymi metodami. Uzyskano zgodność wyników.

Słowa kluczowe: słupy żelbetonowe; efekty drugiego rzędu; pełzanie betonu; Eurokod 2.

(Oryginalny artykuł naukowy)

Abstract. According to Eurocode 2 load bearing capacity of reinforced concrete columns can be calculated using the simplified methods taking into account second-order effects, or using the general method. In these calculations, the impact of long-term loads and, thus, creep of concrete, is important. The impact of rheological phenomena is considered to be the least known. Therefore, it was decided to consider the problem of bearing capacity of reinforced concrete columns mainly in the aspect of creep of concrete. Numerical models of reinforced concrete columns were developed. The first of the models is based on modification of σ - ε relationship for concrete by multiplying strain by factor $(1 + \varphi(\infty, t_0))$. The second model uses the *aging coefficient* creep law with the modification of the creep coefficient $\varphi(\infty, t_0)$ (according to formula (3.7) of Eurocode 2) to the value of $\varphi_{in}(\infty, t_0)$. Results of calculations of load bearing capacity according to the developed methods were compared. Good results were obtained.

Keywords: reinforced concrete columns; second order effects; creep of concrete; Eurocode 2.

Na podstawie Eurokodu 2 [3] opracowano numeryczne metody obliczania nośności słupów żelbetonowych, w których uwzględniono wpływ efektów drugiego rzędu, rozpatrując słup o efektywnej wysokości l_0 podparty przegubowo i obciążony siłą N działającą na mimośrodku e_0 (rysunek 1). Podobnymi zagadnieniami zajmowano się w pracach [5, 6, 7]. Słup podzielono na odcinki za pomocą m liczb przekrojów pomocniczych; odległość rozpatrywanego przekroju od końca słupa określa zmienna s . W każdym z założonych przekrojów wyznacza się moment zginający, dodając do momentów pierwszego rzędu iloczynny siły podłużnej i przemieszczenia w rozpatrywanym przekroju $s = s_0$ (od w_1 do w_m), wg wzoru:

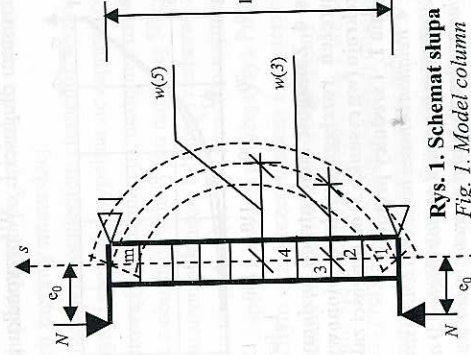
$$w(s_0) = \int \bar{M}(s) \kappa(s) ds \quad (1)$$

gdzie:

- ¹⁾ Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, Wydział Geodezji, Inżynierii Przestrzennej i Budownictwa
 - ²⁾ Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska
- ^{*)} Adres do korespondencji: kik@uwm.edu.pl

$w(s_0)$ – przemieszczenie w punkcie s_0 ; $\bar{M}(s)$ – moment od jednostkowej siły wirtualnej przyłożonej w punkcie s_0 ; $\kappa(s)$ – krzywizna wyznaczana w zależności od zastosowanego modelu.

Obliczenia odkształceń słupa wykonuje się metodą iteracji prostej, stosując wzór (1); iterację kontynuuje się aż do osiągnięcia zgodności przemieszczeń (z założoną wstępnie dokładnością) w dwóch kolejnych krokach. W tych obliczeniach do



Rys. 1. Schemat słupa
Fig. 1. Model column

wzoru (1) podstawia się krzywiznę κ wyznaczoną dwiema metodami przedstawionymi w dalszej części artykułu.

Obliczanie krzywizny metodą modyfikacji zależności σ - ε (MI)

Pierwsza z metod wykorzystuje zależność σ - ε dla betonu zalecaną zgodnie z Eurokodem 2 do nieliniowej analizy konstrukcji opisaną wzorem:

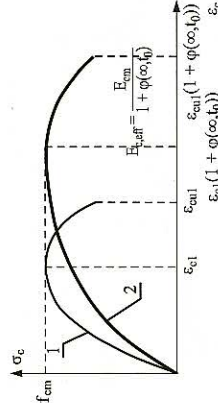
$$\sigma_c(\varepsilon) = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} f_{cm} \quad (2)$$

gdzie (wszystkie oznaczenia we wzorze przyjęto wg [3]):

$$k = 1,05 E_{cm} \varepsilon_{cu} / f_{cm}; \eta = \varepsilon / \varepsilon_{cu}^t$$

f_{cm} – średnia wytrzymałość betonu na ściskanie;
 E_{cm} – średni moduł sprężystości betonu.

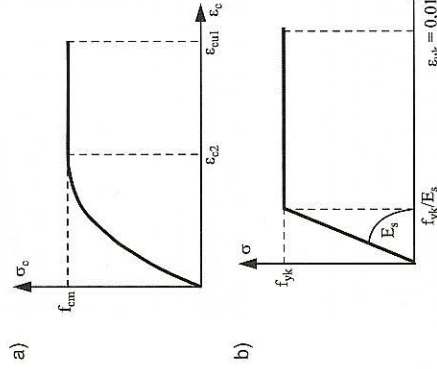
Na potrzeby analiz zależności σ - ε została zmodyfikowana przez pomnożenie odkształceń przez wyrażenie $(1 + \varphi(\infty, t_0))$, gdzie $\varphi(\infty, t_0)$ jest współczynnikiem pełzania betonu (rysunek 2). Podobna propozycja zależności σ - ε została przedstawiona w [11].



rys. 2. Zależność σ_c - ϵ_c ; 1 - do analizy konstrukcyjnej; 2 - zmodyfikowana z uwzględnieniem wpływu pełzania

Fig. 2. σ_c - ϵ_c relationship: 1 - for nonlinear structural analysis; 2 - modified with creep effect

Na rysunku 3a przedstawiono zależność σ_c - ϵ_c dla betonu, a w obliczeniach krzywą przyjęto również zależność σ_c - ϵ_c dla stali zgodnie z rysunkiem 3b i uwzględniono zasadę płaskich przekrojów. Rozważono odkształcenia w przekroju przez rysunek i założono, że: naprężenia ściskające i odpowiadające im skrócenia są dodatnie; naprężenia rozciągające i wydłużenia są ujemne; siła ściskająca $N = \text{const}$, jest dodatnia; dodatkni moment M wywołuje rozciąganie zbrojenia o przekroju A_{s1} .



rys. 3. Zależność σ - ϵ ; a) stali; b) betonu

Fig. 3. σ - ϵ relation; a - steel; b - concrete

Z warunków równowagi wynika, że:

$$N = \int_{z_0}^h \sigma_c(\epsilon) \cdot b(z) \cdot dz + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si}(\epsilon) \quad (3)$$

$$N \cdot e_d = \int_{z_0}^h \sigma_c(\epsilon) \cdot b(z) \cdot z \cdot dz + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si}(\epsilon) \cdot z_i \quad (4)$$

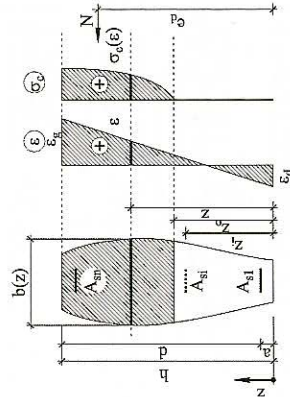
Prawą stroną równania (3) nazwiemy P_1 , a prawą stroną równania (4) P_2 . Wielkości występujące w równaniach (3) i (4) przedstawiono na rysunku 4.

Z zasady płaskich przekrojów wynika, że odkształcenie dowolnego włókna ϵ ma postać:

$$\epsilon = \epsilon_g - \kappa(h - z) \quad (5)$$

gdzie:

ϵ_g - odkształcenie bardziej ściskanej krawędzi przekroju; κ - krzywizna pręta w rozpatrywanym przekroju zarysowanym; h - wysokość przekroju.



rys. 4. Strain and stress in the cross section

A_{si} - pole przekroju zbrojenia i-tej warstwy; z_i - odległość i-tej warstwy zbrojenia od mniej ściskanej/rozciąganej krawędzi przekroju; h - wysokość przekroju; $b(z)$ - szerokość przekroju w odległości z od krawędzi mniej ściskanej/rozciąganej; z_0 - odległość osi naprężeń zerowych od mniej ściskanej/rozciąganej krawędzi przekroju

rys. 4. Odkształcenia i naprężenia w przekroju

Naprężenia w betonie σ_c i naprężenia w i-tej warstwie zbrojenia σ_{si} są funkcją odkształceń przekroju:

$$\sigma_c(\epsilon) = \sigma_c(\epsilon_g - \kappa(h - z)) \quad (6)$$

$$\sigma_{si}(\epsilon) = \sigma_{si}(\epsilon_g - \kappa(h - z_i)) \quad (7)$$

Jeżeli odkształcenia w całym przekroju mają ten sam znak, to dolna granica całkowania $z_0 = 0$. Nazwijmy taki stan odkształcenia przypadkiem małego mimośrod. Druga możliwość, to przypadek dużego mimośrod. Wtedy

$$z_0 = h - \frac{\epsilon_g}{\kappa} \quad (8)$$

Zakłada się, że siła N jest dana, a poszukiwane jest zależności M (κ).

Dla zadanego κ w przypadku małego mimośrod po podstawieniu κ do wzorów (5) i (6) jedyną niewiadomą w równaniu (2) pozostaje ϵ_g . Niewiadomą tę wyznacza się, rozwiązując równanie

$$P_1 - N = 0 \quad (9)$$

gdzie:

P_1 - wyznacza się przez całkowanie numeryczne w przedziale $0 < \epsilon_g < \epsilon_{g, \text{max}}$ (wartość $\epsilon_{g, \text{max}}$ przyjęto równą $\epsilon_{c, \text{ult}}(1 + \varphi(\alpha, t_p))$).

W przypadku dużego mimośrod po podstawieniu κ do wzorów (5), (6) oraz (7) równanie (9) można rozwiązać ze względu na ϵ_g , wyznaczając numerycznie wartości P_1 . Po wyznaczeniu ϵ_g można obliczyć (całkując numerycznie) z równania (4) iloczyn $N \cdot e_d$, a na tej podstawie moment zginający M względem osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju betonu. Zależność $M(N, \kappa)$ wyznacza się dla kolejnych wartości κ , tworząc tablicę wykorzystywaną w obliczeniach odkształceń i nośności stupa.

Obliczanie krzywizny metodą wg teorii ageing coefficient (MI)

W tej metodzie krzywiznę elementu niezarysowanego oblicza się zgodnie z teorią fazy I. Po zarysowaniu krzywiznę średnią z uwzględnieniem zjawiska *tension stiffening* oblicza się wg metody opisanej w [8, 9], uwzględniając dwa etapy obliczeń. Etap pierwszy (w chwili $\tau = t_0$), w którym następuje doraźny przyrost odkształceń stupa i etap drugi (w chwili $\tau = \infty$), w którym przyrost odkształceń stupa spowodowany jest pełzaniem. Naprężenia i odkształcenia w chwili $\tau = \infty$ obliczono, stosując prawo pełzania zgodnie z teorią *ageing coefficient*. Zastosowano wzory wypracowane w oparciu o analizy przedstawione w pracach [1, 2, 4]. Dodatkowo uwzględniono, że po przekroczeniu naprężeń w betonie w najbardziej wyężonym przekroju poza wartość $0,45f_{ck}$ (granica liniowego pełzania) współczynnik pełzania $\varphi(\infty, t_0)$ zastępuje się współczynnikiem $\varphi_{nl}(\infty, t_0)$ obliczonym wg wzoru:

$$\varphi_{nl}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) e^{1,5(\kappa_c - 0,45)} \quad (10)$$

gdzie:

κ_c - stosunek naprężeń w betonie σ_c do średniej wytrzymałości na ściskanie w chwili obciążenia $f_{ck}(t_0)$.

Zasada działania algorytmu numerycznego

Wykorzystano zmodyfikowany program numeryczny [8]. Umożliwia on wyznaczenie siły N_R przy której następuje wyzerowanie nośności w przekroju krytycznym. Rozwiązanie znajduje się metodą połowienia. Poszukuje się N_R w przedziale $(\min N_R, \max N_R)$. Wstępnie przyjmuje się $\min N_R = 0$ i $\max N_R = bhf_{cm} + (A_{s1} + A_{s2})f_{yk}$. Wartość N_R wyznacza się ze wzoru:

$$N_R = 0,5(\min N_R + \max N_R) \quad (11)$$

Dla tak określonej wartości N_R wyznacza się odkształcenia stupa oraz wartości momentów zginających w każdym punkcie podziału stupa. Jeżeli istnieją przekroje, w których momenty zginające przekraczają wartości graniczne, to ustala się nową wartość $\max N_R$ równą wartości aktualnej siły N_R . W przeciwnym przypadku siłę $\min N_R$ nadaje się wartości siły N_R . Następnie ustala się kolejne przybliżenie siły N_R wg wzoru (11). Obliczenia kończy się, gdy różnica między $\max N_R$ i $\min N_R$ staje się mniejsza od 0,0001 $(bhf_{cm} + (A_{s1} + A_{s2})f_{yk})$. Opisany sposób wyznaczania N_R jest wspólny w przypadku dwóch prezentowanych me-

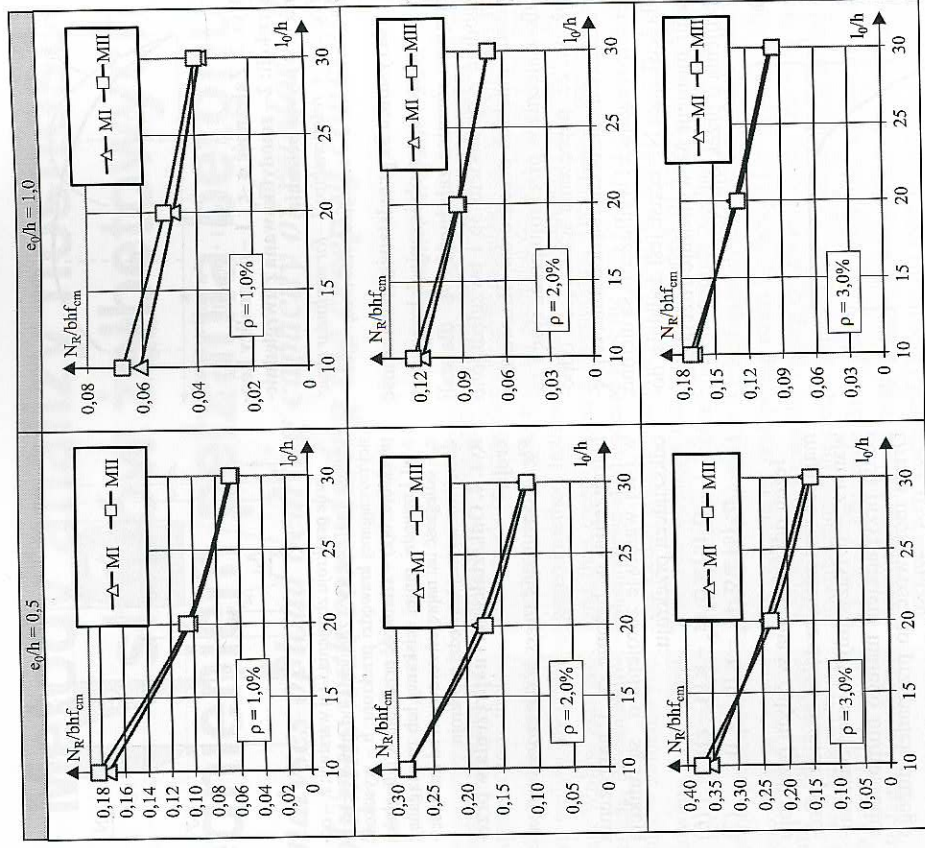
tod. Natomiast różnice w obliczeniach wynikają z innego sposobu obliczania odkształceń słupa obciążonego siłą N .

Stosując metodę (MI) najpierw dla danej siły N wyznacza się zależność $M(N, \kappa)$ i wyniki zapisuje się w formie tablic, a następnie korzystając ze wzoru (1), stosując procedurę iteracyjną, wyznacza przemieszczenia słupa, a tym samym momenty M w kolejnych przekrojach. Zmieniając niezależną w tablicach jest krzywą, a zmniejszając zależną moment zginający. Największy moment dla tak wyznaczonej zależności $M(N, \kappa)$ jest momentem granicznym M_R . Potrzebną w procesie obliczeń krzywą w przypadku danego momentu M wyznacza się z wymienionych tablic, stosując interpolację. Jeżeli w dowolnym przekroju moment M przekroczy M_R , to przyjmuje się, że nośność słupa została wyczerpana i kończy się obliczenia. Obliczenia przemieszczeń, a tym samym rozkładu momentów w słupie przeprowadzone metodą (MII) zostały opisane w [8, 9], natomiast moment graniczny obliczono metodą ogólną opisaną w Eurokodzie 2, wykorzystując zasadę płaskich przekrojów i zależność σ - ϵ dla stali i betonu (rysunek 3) oraz uwagi przedstawione w książce [10].

Analiza porównawcza

Porównano siłę graniczną N_R wyznaczoną dwiema metodami. Siła N_R zależy od cech materiałów – nadano im wartości „średnie” (nie stosowano wartości obliczeniowych). Założono, że siła ta jest długotrwała. Wynik obliczenia zależy od mimośrodowość początkowego e_0 .

Obliczenia porównawcze przeprowadzono w przypadku słupa podpieranego przegubowo, obustronnie obciążonego siłą podłużną N , działającą na mimośrodkie początkowym e_0 . Przyjęto podział długości słupa na $m = 20$ odcinków, przekrój poprzeczny prostokątny 300×400 mm, że zbrojeniem symetrycznym ze stali o $f_{yk} = 500$ MPa, rozmieszczonego w odległości $a_1 = a_2 = 40$ mm od krawędzi przekroju. Rozpatrzono trzy stopnie zbrojenia: $\rho = 1,0; 2,0; 3,0\%$, oraz dwa przypadki mimośrodków początkowych $e_0/h = 0,5$ i $1,0$. We wszystkich przypadkach obliczenia wykonano w przypadku trzech smukłości $l_0/h = 10; 20; 30$, betonu klasy C40/50, ($E_{cm} = 35$ GPa, $f_{cm} = 48$ MPa, $f_{cm} = 3,5$ MPa, $\epsilon_{ci} = 0,0023$, $\epsilon_{su1} = 0,0035$). Przyjęto współczynnik pełzania $\phi(\infty, t_0) = 2,0$ oraz współczynnik więknienia $\chi = 0,8$. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Porównanie nośności słupów obliczonych metodą: pierwszą (MI) i drugą (MII)
Fig. 5. The comparison of load bearing capacities defined using method: first (MI) and second (MII)

Wnioski

W artykule przedstawiono modele numeryczne słupów żelbetonowych pozwalające analizować ich nośność również w zakresie petzania nieliniowego. Porównano wyniki obliczeń nieliniowego. Porównano metody obliczenia nośności zaprezentowanymi metodami. Uzyskano dość dobrą zgodność wyników. Różnice między wynikami odniesione do wartości otrzymanych z obliczeń zgodnie z drugą metodą nie przekraczają 5,75% w przypadku mimośrodowość początkowego $e_0/h = 0,5$ i 9,25% dla $e_0/h = 1,0$.

Literatura

- [1] Bulletin d'Information no 136. 1980. Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete.
- [2] Bulletin d'Information no 215. 1993. Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete.
- [3] EN 1992-1-1:2004 Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1. General rules and rules for buildings.
- [4] Gałustow Konstanty Z. 2006. Nieliniowa teoria płużczestci betonu i rascoc żelczobetonowych konstrukcji. Fizmatlit. Moskwa.

[5] Gilbert Raymond I., Gianluca Ranzi. 2011. *Time-dependent behaviour of concrete structures*. London and New York. Spon Press.

[6] Gilbert Raymond I., Gianluca Ranzi. 2011. „In-service deformations of reinforced concrete columns in biaxial bending”. *Proceedings of The Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*: 410 – 418. Hong Kong.

[7] Hamed Ehab, Cynthia Lai. 2016. „Geometrically and materially nonlinear creep behaviour of reinforced concrete columns”. *Structures* (5): 1 – 12.

[8] Klempka Krzysztof. 2002. *Obliczanie nośności smukłych żelbetonowych elementów ściskanych*. Praca doktorska. Politechnika Warszawska.

[9] Klempka Krzysztof. 2008. „Obliczanie smukłych słupów o przekroju kołowym według polskiej normy i metodą uściśloną”. *Inżynieria i Budownictwo* (6): 329 – 332.

[10] Knauff Michał. 2012. *Obliczanie konstrukcji żelbetonowych według Eurokodu 2*. Warszawa. Wydawnictwo Naukowe PWN.

[11] Korzeniowski Piotr. 2000. „Żelbetonowe słupy uzwojone”. *Badania i teoria*. Gdańsk. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej.

Przyjęto do druku: 10.08.2017 r.